arXiv:2304.03490v1 [math.PR] 7 Apr 2023

无限维 Wishart 过程

SONJA COX、CHRISTA CUCHIERO、ASMA KHEDER

Abstract. 我们引入并分析取值于可分实希尔伯特空间 H 上正自伴迹类算子之锥 $S_1^+(H)$ 的无限维 Wishart 过程。我们的主要结果给出了这类过程存在的充要条件，并表明这些过程几乎必然具有固定的有限秩，但并不局限于 $S_1^+(H)$ 的有限维子空间。通过给出算子值 Riccati 方程的显式解，我们证明其傅里叶-拉普拉斯变换关于初始值呈指数仿射形式。由此可推得其分布唯一性以及马尔可夫性质。实际上，对于广泛的参数范围，我们给出了傅里叶-拉普拉斯变换的显式形式，从而拓展了有限维情形下的已有结论。最后，在参数满足一些较弱条件时，我们证明了相对于 $S_1^+(H)$ 上弱-$*$-拓扑的一个细微改进版本的 Feller 性质。我们的结果可应用于易于处理的无限维协方差建模，以及大型随机矩阵极限谱的分析。

1. Introduction

本文旨在介绍和分析无限维 Wishart过程。无限维Wishart过程是一种随机过程 $X=(X_t)_{t\geq 0}$，其取值于 $S_1^+(H)$，即定义在可分实希尔伯特空间 H上的正自伴迹类算子所构成的锥，并且（在某种意义下）满足以下随机微分方程：

$$dX_t = (\alpha Q + X_t A + A^* X_t)\,dt + \sqrt{X_t}\,dW_t\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\,dW_t^*\sqrt{X_t},\ t\geq 0,\ X_0 = x_0. \tag{1.1}$$

这里 $\alpha\in\mathbb{R}$、 $A\colon D(A)\subset H\to H$ 是一个 C_0-半群的生成元， x_0 和 Q是正的自伴有界算子，而$(W_t)_{t\geq 0}$ 是一个 $L_2(H)$-柱状布朗运动（其中 $L_2(H)$ 是 H上的 Hilbert-Schmidt 算子空间）。

有限维 Wishart过程，即取值于 $S^+(\mathbb{R}^n)$中的过程——正半定 $n\times n$ 矩阵构成的锥——已得到充分研究：在[6, 7] 某些参数条件下，有限维Wishart过程的存在性得以确立，并推-导出了特征值和特征向量的随机微分方程。人们很快认识到，这些有限- 维 Wishart 过程是仿射的，即其拉普拉斯

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60J25, 46N30, 60H10.*Key words and phrases.* Wishart 过程、迹类算子、仿射过程、Feller过程、无限维协方差模型。Sonja Cox 的部分研究经费由 NWO 项目 VI.Vidi.213.070 资助。此外，她感谢 Jan Brandts 和 Lenny Taelman 就如何证明引理 C.5 所提供的讨论。Christa Cuchiero 衷心感谢 FWF START 计划 Y 1235 项目的资助。

变换以指数仿射的方式依赖于初始值。在 [15]中给出了所有取值于 $S^+(\mathbb{R}^n)$的仿射过程的完整刻画：这些过程通过允许状态依赖跳跃和更一般的漂移，扩展了经典的Wishart 过程，而其扩散结构与(1.1)类似。在扩散矩阵满足非退化条件的情况下， [25], 刻画了初始值位于 $S^+(\mathbb{R}^n)$的低秩子流形上的 Wishart过程，表明初始值的秩与常数漂移部分之间存在相互作用；参见 [25, 定理 1。3]以及 [33, 32, 31]。

一方面，人们对 Wishart 过程的兴趣显然源于其引人入胜的数学性质；另一方面，由于这类过程适合作为便于处理的随机协方差模型，因此在应用中也广受欢迎。事实上，有限维 Wishart 过程的一项重要应用是利用随机协方差进行多元资产价格建模，例如 [8, 16, 17, 22, 23, 27,28, 30, 38] 及其中的参考文献。不过请注意，在 Heath–Jarrow–Morton–Musiela（HJMM）范式下，对债券市场和商品市场等建立模型，需要使用无限维随机协方差模型（例如参见 [2, 3, 4, 9, 21]）。

最便于处理的一类仍是无限维仿射随机协方差过程，其中一些实例已在文献中有所探讨：事实上， [4] 通过取$X_t = Y_t \otimes Y_t$, $t \geq 0$构造了一个秩-1 $S_1^+(H)$-值过程 X ，其中 $(Y_t)_{t\geq 0}$ 是一个取值于 H 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程。事实证明，这是无限维 Wishart 过程的一个特例，见下文注 2.2。此外， [13] 引入了取值于正 Hilbert-Schmidt 算子之锥的仿射纯跳协方差过程，并在 [14]中将其应用于随机波动率建模。

[13] 中引入的过程之所以属于纯跳型，是因为其设计初衷是使其有可能具有无限秩；然而，有限维理论表明，在存在非退化扩散部分的情况下，即当（1.1）中的 Q 具有无限秩时，无限维 Wishart 过程几乎处处必然具有有限秩。为解释这一陈述，我们暂时回到有限维情形：取值于 $S^+(\mathbb{R}^n)$ 中的 Wishart 过程 X 是满足以下条件的过程

$$dX_t = (\alpha Q + AX_t + X_t A^*)\, dt + \sqrt{X_t} dW_t \sqrt{Q} + \sqrt{Q}\, dW_t^* \sqrt{X_t}, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

其中， $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、 $Q \in S^+(\mathbb{R}^n)$ 和 W 是标准的 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 值布朗运动。众所周知（例如参见 [7, 15, 25, 32, 33]），如果 Q 是单射，则这样的有限维 Wishart 过程存在，当且仅当 $\alpha \in [n-1, \infty)$，或者 $\alpha \in \{0, \dots, n-2\}$ 且 $\operatorname{rank}(x_0) \leq \alpha$。在后一种情况下，对于所有 $t \geq 0$，都有 $\operatorname{rank}(X_t) \leq \alpha$ a.s.。将其转译到无限维情形后，这表明无限秩的 Wishart 过程很难构造。事实上，我们证明了以下结果（见下文的定理 2.1 和 4.3、推论 4.9，以及注 2.4 和 4.4）：

定理 1.1. 若 Q 是迹类且为单射，并且 A有界，则当且仅当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 且秩$(x_0) \leq \alpha$时，(1.1) 存在解析弱解和概率弱解。在这种情况下，对几乎所有 $t > 0$，秩$(X_t) = \alpha$ 几乎必然成立。

事实上，我们的结果超出了定理 1.1 的范围。一般而言，我们只假设 A: $D(A) \subset H \to H$ 是一个 C_0-半群（e^{tA}）的生成元，且 Q是 H上的有界正自伴算子，满足 $\int_0^t \|e^{sA}\sqrt{Q}\|_{L_2(H)}\, ds < \infty$对所有 $t > 0$均成立。在这一设定下，我们有以下结果：

(i) 如果 $\alpha \in \mathbb{N}$ 且 rank$(x_0) \leq \alpha$，那么存在一个关于 (1.1) 的概率与解析弱解 X，参见定理 2.1。根据构造，该解的秩必然至多为 α。

(ii)对于一个Wishart 过程 X，我们计算其傅里叶-拉普拉斯变换（下文中，Tr 表示迹）

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\operatorname{Tr}((u-iv)X_t)) \,|\, x_0\right]$$

明确针对

(a) $u \in S^+(H)$（正自伴算子）和 $v = 0$; (b) $v \in S^+(H)$ 或 $-v \in S^+(H)$ 和 $u = 0$; (c) $u \in S^+(H)$，以及 $v \in S(H)$（自伴算子）和 u, v, Q, A，以及 x_0 均可联合对角化；(d) $\alpha \in \mathbb{N}$, $u \in S(H)$, $v \in S(H)$, 以及 t 足够小。在所有情况下，它都具有指数仿射形式，即，

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\operatorname{Tr}((u-iv)X_t)) \,|\, x_0\right] = \exp(-\operatorname{Tr}(\psi(t,u-iv)x_0) - \varphi(t,u-iv)), \qquad t \geq 0\,,$$

其中 ψ 和 φ 是算子值 Riccati 方程的解，在上述所有情形中均可显式求解，参见定理 3.1 的 (a)–(c) 和推论 3.7 的 (d)。由此可得，无限维 Wishart 过程是满足马尔可夫性质的仿射过程，因此其分布唯一，参见推论 3.2 和 3.3。

(iii) 如果 Q 是单射，并且存在一个 $t > 0$ 使得 e^{tA} 是单射，那么方程 (1.1) 存在概率与解析弱解 X 意味着 $\alpha \in \mathbb{N}$，秩$(x_0) \leq \alpha$ 且秩$(X_t) = \alpha$ 几乎必然对于几乎所有 $t > 0$，见定理 4.3和注记4.6。注意，如果 A 有界或自伴，则存在一个 $t > 0$ 使得 e^{tA} 是单射，见注记4.4。特别地，定理 1.1 因此是定理 4.3（以及定理 2.1）的推论。

(iv) 若存在式 (1.1) 的概率与解析弱解 X，则对于几乎所有 $t > 0$，要么 rank$(X_t) \geq$ rank(Q) 几乎必然成立；要么 $\alpha \in \mathbb{N}$ 且 rank$(X_t) = \alpha$ 对几乎所有 $t > 0$ 几乎必然成立，见推论 4.8。即使在有限维情形下，这也提供了新的见解，因为目前仅当 $A \equiv 0$ 且 $Q = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}$ 时，才已知 $S(\mathbb{R}^n)$ 中秩至多为 k 的 Wishart 过程的刻画，见定理 3.10]。此外，在无限维情形下，若满足条件 rank$(Q) = \infty$，则该结果意味着有限秩 Wishart 过程存在当且仅当 $\alpha \in \mathbb{N}$，见推论 4.11。

(v) 如果 e^{tA} 对所有 $t \geq 0$ 都是单射，那么方程 (1.1) 的概率与解析弱解相对于自伴迹类算子空间上的弱-*-拓扑（的一个小幅改进）是费勒的，参见定理 5.2。

(i) 的证明，即方程 (1.1) 的解的存在性证明，受 [7] 中所述构造的启发：我们通过考虑 $X = Y^*Y$ 来构造该解，其中 Y 是一个适当选取的、取值于 $L_2(H, \mathbb{R}^\alpha)$ 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程，并且 $\alpha \in \mathbb{N}$，而 $L_2(H, \mathbb{R}^\alpha)$ 是从 H 到 $\mathbb{R}^\alpha$ 的 Hilbert-Schmidt算子的空间。在下面的注 2.5 中，我们讨论了这种方法在无限维情形下所面临的一些挑战。

我们针对(ii) 的方法，即建立方程 (1.1) 的一个解的傅里叶-拉普拉斯变换，在某种意义上也是经典的：我们应用 Itˆo 公式来推导出

相关的黎卡提微分方程。然而，只有当初始值属于 $D(A)$ 时，黎卡提方程才允许存在经典解，因此需要采用精细的逼近论证来获得完整的傅里叶-拉普拉斯变换。

Wishart 过程傅里叶-拉普拉斯变换的显式表达式不仅与分析该过程的性质相关，对于利用傅里叶技术推导期权定价的闭式公式也至关重要（例如参见 [19, 10]）。据我们所知，在有限维情形下（即当 $H = \mathbb{R}^n$ 时），傅里叶-拉普拉斯变换仅针对以下情形推导过：$u \in S^+(\mathbb{R}^n)$ 和 $v = 0$ ([7, 定理 3], [26, 第12]页)，或者 $A = 0$ 和 $Q = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}$，参见 [34, 定理 1.1]，以及关于经典文献中若干缺陷的说明。因此，我们的结果也拓展了有限维情形下的相关结果。

为证明 (iii)，我们利用定理 3.1 中得到的拉普拉斯变换，推导无限维 Wishart 过程的有限维投影的拉普拉斯变换。随后，$\alpha \in \mathbb{N}$ 的必要性以及 $\mathrm{rank}(x_0) \leq \alpha$，可由有限维非中心 Wishart 分布的特征定理 [33, 定理 1.1] 得出。

关于 (iv) 的证明，关键思路是对 X_t 的一个适当选取的有限维投影的行列式应用 Itˆo 公式，从而得到一个能够导出所需结论的表达式。在有限维情形下（不使用投影）已有类似做法，例如 [15, 命题 4.18] 的证明。不过，我们的证明涉及一个非常技术性且微妙的逼近结果，用以处理 A 无界这一事实（这限制了我们能够采用的 X_t 投影），以及我们希望考虑随机初始值这一事实。

最后，关于 (v)，我们首先证明，正自伴迹类算子构成的锥可以赋予弱-$*$-拓扑的一种略作修改的版本，使该空间成为局部紧 Polish 空间，见命题 5.1（具体而言，我们不再只用紧算子进行测试，而是用形如 $c\mathrm{I}_H + K$ 的算子进行测试，其中 $c \in \mathbb{R}$ 和 K 是 H 上的紧算子，而 I_H 是 H 上的恒等算子）。这一局部紧性结果与拉普拉斯变换公式相结合，使我们得以证明 (1.1) 的解是费勒的，见定理 5.2。

1.1.展望与开放问题。定理 1.1 对 Q 为单射且 A 有界的无限维Wishart 过程给出了清晰的刻画，但我们的结果也引出了各种引人入胜的问题。首先，当 Q 为单射、$\alpha \notin \mathbb{N}$，且对于所有 $t > 0$，e^{tA} 不是单射时，我们无法排除 Wishart 过程存在的可能性：

开放问题 1.2. 设 (1.1) 中的 Q 是单射。是否存在一个无界算子 A，使得对于某个 $\alpha \notin \mathbb{N}$，(1.1) 存在解？注意，根据推论 4.8，这样的过程几乎必然具有无限秩，对几乎所有 $t > 0$ 都成立。

其次，对于 $H = \mathbb{R}^n$，当 Q 不是单射且 $\alpha \notin \mathbb{N}$ 时，我们对 Wishart 过程是否存在几乎一无所知。推论 4.8（另见上文 (iv)）并未排除这类过程存在的可能性；至少在某些特殊情形下，有限维结果确实蕴含了它们的存在。事实上，令 $\alpha \in (0, \infty)$，并假设存在一个标准正交系 $(h_k)_{k=1}^{\lceil\alpha\rceil}$，使得 $Q = \sum_{k=1}^{\lceil\alpha\rceil} q_k h_k \otimes h_k$ 且 $A \equiv 0$。于是，例如由 [7, 定理 2] 可知，存在一个概率弱解 $(X_t)_{t\geq 0}$，它满足对于所有形如 $x_0 = \sum_{k=1}^{\lceil\alpha\rceil} a_k h_k \otimes h_k$ 且 a_1、……、$a_{\lceil\alpha\rceil} \in \mathbb{R}$ 互不相同的 x_0，都有 $\mathrm{rank}(X_t) \leq \lceil\alpha\rceil$。注意，

在这种情况下，解被限制在一个有限维子锥中，该子锥与 $S^+(\mathbb{R}^{\lceil\alpha\rceil})$ 同构。换言之，取值于 $S^+(\mathbb{R}^{\lceil\alpha\rceil})$ 的有限维解只是嵌入到 $S_1^+(H)$ 中而已。不过，我们认为也可能出现更复杂的情形。

开放问题 1.3。如果 Q 不是单射，对于哪些 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ 以及哪些 $x_0 \in S_1^+(H)$，方程 (1.1) 存在解？算子 A 起什么作用？

最后，对有限维情形下Wishart 过程的存在性与刻画的分析通常也与研究相关特征值和特征向量的行为有关，参见例如 [6, 24, 29]。在我们的设定中，我们利用傅里叶-拉普拉斯变换以及（1.1）中生成元的形式来推导我们的结果。在一篇即将发表的论文中，我们还计划推导Wishart 过程(1.1)的特征值和特征向量所满足的随机微分方程。正如近期工作 [5], 中所述，这些特征值方程随后可以与.....的极限谱测度联系起来

$$\frac{1}{N}Y_t^*Y_t,$$

当 N 趋于无穷时，其中 Y是一个 $n \times N$ 维OU-过程。事实上，正如猜想的[1]，在 [5] 中，对于布朗情形，带有 $n \geq N$ 的极限谱测度的累积分布函数是某个偏积分微分方程的唯一黏性解。即使对于 $n < N$的情形，类似的结果也应当成立，尽管——正如 [5, 第 21] 页所述——由于特征值在0 处聚集，极限谱测度的行为预计会完全不同。注意，当 n 固定而 N 仅趋于无穷时，我们实际上就回到了本文的设定。因此，我们预计，当$n < N$时，我们的结果能够为极限谱测度的黏性解理论作出贡献。

1.2.文章结构。在下文第1.3小节中，我们介绍贯穿本文使用的记号。在第2节中，我们证明取值于 $S_1^+(H)$的有限秩Wishart过程的存在性。在第3节中，我们推导方程 (1.1) 的一个解的傅里叶-拉普拉斯变换，并考察一些具体例子，例如 $\mathrm{Tr}(X_t)$ 的特征函数。在第4节中，我们给出无限维 Wishart 过程存在性的必要条件：在第4.1小节中，我们讨论 Q 和 e^{tA} 对某个 $t > 0$ 为单射的情形；在第4.2小节中，我们刻画有限秩Wishart 过程。最后，在第5节中，我们证明状态空间 $S_1^+(H)$ 在赋予略作修改的弱-$*$-拓扑后是局部紧的，并利用这一点证明 X 是一个费勒过程。

1.3. 符号约定。对于 $(X, \|\cdot\|_X)$ 巴拿赫空间，且 $E \subset X$，我们用 $\mathcal{B}(E)$ 表示 E 上的（迹）博雷尔 σ-代数。

设 $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ 和 $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$ 为可分希尔伯特空间（实数或复数）。那么 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$ 关于第一个变量是线性的（关于第二个变量是共轭线性的），$\mathrm{I}_{H_1}\colon H_1 \to H_1$ 表示 H_1 上的恒等算子，$(L(H_1,H_2)\,\|\cdot\|_{L(H_1,H_2))})$ 表示从 H_1 到 H_2 的有界线性算子所构成的巴拿赫空间（赋予算子范数），$(K(H_1,H_2)\,\|\cdot\|_{L(H_1,H_2))})$ 表示从 H_1 到 H_2 的紧算子空间（它是 $L(H_1,H_2)$ 的闭子空间），并令 $L(H_1) := L(H_1,H_1)$。算子 $A \in L(H_1,H_2)$ 的伴随算子记作 A^*,

[1]截至存在性部分，所有内容均已得到严格证明。

即，对所有 $h \in H_1, g \in H_2$，有 $\langle Ah, g\rangle_{H_1} = \langle h, A^* g\rangle_{H_2}$。注意，若 $A \in L(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^{n\times n}$，则 A^* 是 A 的共轭转置。关于无界算子 A 的伴随算子 A^* 的定义，参见例如 [20, 附录 B]。

对于所有 $p \in [1,\infty)$，$(L_p(H_1,H_2), \|\cdot\|_{L_p(H_1,\ H_2)})$ 表示从 H_1 到 H_2的 Schatten类算子巴拿赫空间，即

$$L_p(H_1,H_2) = \Big\{A \in K(H_1,H_2)\colon \sum_{\lambda\in\sigma(A^*A)} \lambda^{p/2} < \infty\Big\}, \tag{1.3}$$

以及 $\|A\|^p_{L_p(H_1,H_2)} = \sum_{\lambda\in\sigma(A^*A)}\lambda^{p/2}$（我们假设读者熟悉有界自伴算子和紧自伴算子的谱定理）。特别地，$L_2(H_1,H_2)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子空间，而 $L_1(H_1, H_2)$ 是从 H_1 到 H_2的迹类算子空间。回忆一下，$L_2(H_1,H_2)$ 在内积 $\langle A, B\rangle_{L_2(H_1,\ H_2)} = \sum_{n=1}^\infty \langle Ah_n, Bh_n\rangle_{H_2}$ 下是一个（可分）希尔伯特空间，其中 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H_1 的正交归一基，且该内积不依赖于正交归一基的选取。还要回忆，对于所有满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ 的 $p,q \in [1,\infty)$ 以及所有 $A \in L_p(H_1,H_2)$ $B \in L_q(H_2,H_1)$、$C \in L(H_2)$、$D \in L(H_1)$，都有

$$\|A\|_{L_p(H_1,H_2)} = \|A^*\|_{L_p(H_2,H_1)} = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}_{L_{p/2}(H_1)}, \tag{1.4}$$

$$\|CAD\|_{L_p(H_1,H_2)} \le \|C\|_{L(H_2)}\|A\|_{L_p(H_1,H_2)}\|D\|_{L(H_1)}, \tag{1.5}$$

and

$$\|AB\|_{L_1(H_1)} \le \|A\|_{L_q(H_1,H_2)}\|B\|_{L_p(H_2,H_1)}. \tag{1.6}$$

此外，我们回顾一下，$A \in L_1(H_1)$ 的迹定义为

$$\mathsf{Tr}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ah_n, h_n\rangle_{H_1} \in \mathbb{C}, \tag{1.7}$$

其中，$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H_1的正交归一基；$\mathsf{Tr}(A)$不依赖于正交归一基的选择。记 V' 为巴拿赫空间 V的对偶空间，我们回顾（例如，见 [12, 第 19]节），紧算子的对偶空间在对偶配对下满足$(K(H_1))' \simeq L_1(H_1)$

$$\langle A, B\rangle_{L_1(H_1),K(H_1)} = \mathsf{Tr}(B^*A), \quad A \in L_1(H_1),\, B \in K(H_1). \tag{1.8}$$

注意，在相同的配对下，$(L_1(H_1))' \simeq L(H_1)$。

我们令 $S(H_1)$、$S_c(H_1)$ 和 $S_p(H_1)$ 表示 $L(H_1)$、$K(H_1)$ 和 $L_p(H_1)$ 中由所有自伴算子构成的（闭）子空间；令 $S^+(H_1)$、$S_c^+(H_1)$ 和 $S_p^+(H_1)$ 表示 $S(H_1)$、$S_c(H_1)$ 和 $S_p(H_1)$ 中由满足 $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$ 的所有自伴算子 A 构成的（闭）子集；并令 $S^{++}(H_1)$、$S_c^{++}(H_1)$ 和 $S_p^{++}(H_1)$ 表示 $S(H_1)$、$S_c(H_1)$ 和 $S_p(H_1)$ 中由满足 $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$ 的所有自伴算子 A 构成的子集。

我们将经常使用以下引理（该引理依赖于紧自伴算子的谱定理）。证明很直接（经过显然的调整，当 H_1 和/或 H_2 为有限维时，结论也成立）。

引理 1.4. 设 H_1 和 H_2 为可分希尔伯特空间，并且对于 $i \in \{1,2\}$，令$A_i \in S_c(H_i)$，即 $A_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^{(i)} h_j^{(i)} \otimes h_j^{(i)}$，一个序列 $(a_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$，以及一个

正交归一基$(h_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}$用于 H_i。令 $\mathcal{A}\in L(L_2(H_1,H_2))$ 由 $\mathcal{A}(B)=A_2BA_1$给出。则 $\mathcal{A}\in S_c(L_2(H_1,H_2))$ 并且

$$\mathcal{A}(B)=\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i^{(1)}a_j^{(2)}(h_i^{(1)}\otimes h_j^{(2)})\otimes(h_i^{(1)}\otimes h_j^{(2)}).$$

特别地，对于所有 $p\in[1,\infty)$ 有 $\mathcal{A}\in L_p(L_2(H_1,H_2))$ 当且仅当$A_1,A_2\in L_p(H_i)$，此外

$$\|\mathcal{A}\|_{L_p(L_2(H_1,H_2))}=\|A_1\|_{L_p(H_1)}\|A_2\|_{L_p(H_2)}. \tag{1.9}$$

为方便读者，我们回顾紧算子的奇异值分解（参见例如 [40, 定理 VI.3.6]）。

定理1.5.设 H_1、H_2 为可分希尔伯特空间，并设 $A\in K(H_1,H_2)$。那么存在 $s_1\geq s_2\geq\ldots\geq 0$ 和标准正交系 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 以及 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，分别属于 H_1 和 H_2，使得

$$A=\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n e_n\otimes f_n.$$

2. Existence of infinite-dimensional Wishart processes

令 H 为一个实希尔伯特空间，令 $A\colon D(A)\subset H\to H$ 为一个C_0-半群的生成元，令 $Q\in S^+(H)$，令 $n\in\mathbb{N}$，并令 $W=(W_t)_{t\geq 0}$ 为一个 $L_2(H)$-柱状布朗运动，即（形式上）$W=\sum_{k\in\mathbb{N}}\beta_k(t)C_k$ 其中 $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L_2(H)$ 的一个正交归一基，而 $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个相互独立的标准布朗运动序列（另见 [36, 定义2.2]）。最后，令 $x_0\in S_1^+(H)$。考虑 $S^+(H)$ 中形式上给出的随机微分方程：

$$\begin{cases} dX_t = nQ\,dt + X_tA\,dt + A^*X_t\,dt + \sqrt{X_t}\,dW_t\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\,dW_t^*\sqrt{X_t},\ t\geq 0;\\ X_0 = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

下面的定理 2.1 保证了方程 (2.1) 存在一个概率意义下和解析意义下的弱 $S_1^+(H)$-值解，条件是 x 的秩至多为 n，且 $(\mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q})_{s\geq 0}$ 满足可积性条件 (2.2)。受 [6], 的启发，我们通过证明 $X_t=Y_t^*Y_t$来证明定理 2.1，其中 Y是一个 $L_2(H,\mathbb{R}^n)$-值 Ornstein–Uhlenbeck 过程。

定理 2.1. 设 H 为可分实希尔伯特空间，设 $A\colon D(A)\subset H\to H$ 是一个 C_0-半群 $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$的生成元，设 $Q\in S^+(H)$，设 $n\in\mathbb{N}$，设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 是一个满足通常条件且足够丰富、允许存在 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-布朗运动的滤波概率空间，并设 $p\in[1,\infty)$ 和 $x_0\in L^p((\Omega,\mathcal{F}_0,\mathbb{P});S_1^+(H))$ 满足 x_0的秩至多为 $n\mathbb{P}$-几乎处处成立。进一步假设

$$\int_0^t \|\,\mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|_{L_2(H)}^2\,ds<\infty \tag{2.2}$$

对于所有 $t\geq 0$。那么，存在一个 $L_2(H)$-柱状$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-布朗运动 W以及一个连续适应的$S_1^+(H)$-值过程$(X_t)_{t\geq 0}$，使得 X_t 的秩至多为 n,

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}\|X_s\|_{L^1(H)}^p<\infty, \tag{2.3}$$

and

$$\begin{aligned}\langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t \left(n\langle Qg, h\rangle_H + \langle X_s A g, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H\right) ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s \, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H\end{aligned} \tag{2.4}$$

对于所有 $t \geq 0$ 以及所有 h, $g \in D(A)$。特别地，如果 $A \in L(H)$ 且 $Q \in S_1^+(H)$，则 2.5 ( )

$$X_t = x_0 + \int_0^t (nQ + X_s A + A^* X_s)\, ds + \int_0^t \sqrt{X}_s \, dW_s \sqrt{Q} + \int_0^t \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s$$

对所有 $t \geq 0$。

证明。为了构造一个取值于 $L_2(H, \mathbb{R}^n)$ 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程 Y，使得 $X = Y^* Y$，我们首先定义 $\mathcal{A}$: $D(\mathcal{A}) \subseteq L_2(H, \mathbb{R}^n) \to L_2(H, \mathbb{R}^n)$ 如下

$$\begin{aligned} &D(\mathcal{A}) = \{C \in L_2(H, \mathbb{R}^n) \colon CA \in L_2(H, \mathbb{R}^n)\}; \\ &\mathcal{A}(C) = CA, \quad C \in D(\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

此处“$CA \in L_2(H, \mathbb{R}^n)$”应理解为：“线性映射 $D(A) \ni h \mapsto CAh \in \mathbb{R}^n$ 可扩张为一个取值于 $\mathbb{R}^n$的 H 上的希尔伯特–施密特算子”；注意，$C \in D(\mathcal{A})$当且仅当存在 $v_1, \ldots, v_n \in D(A)$ 和 $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$使得 $C = \sum_{k=1}^n v_k \otimes e_k$。此外，注意到 $\mathcal{A}$ 是 $L_2(H, \mathbb{R}^n)$ 上一个 C_0-半群的生成元，该半群由 $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(C) = C\,\mathrm{e}^{tA}$, $t \geq 0$ 给出。此外，我们将 $\mathcal{Q} \in L(L_2(H, \mathbb{R}^n))$ 定义为

$$\mathcal{Q}(C) = CQ, \quad C \in L_2(H, \mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

由于对所有 $C, D \in L_2(H, \mathbb{R}^n)$, $\langle C, D\rangle_{L_2(H,\mathbb{R}^n)} = \langle C^*, D^*\rangle_{L_2(\mathbb{R}^n, H)}$，容易验证 $\mathcal{Q} \in S^+(L_2(H, \mathbb{R}^n))$。此外，由于 (1.9) 和 (2.2)，我们有

$$\int_0^t \| \mathrm{e}^{s\mathcal{A}} \sqrt{\mathcal{Q}}\|^2_{L_2(L_2(H,\mathbb{R}^n))}\, ds = \int_0^t \| \mathrm{e}^{sA} \sqrt{Q}\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}^n)}\, ds < \infty \tag{2.8}$$

对所有 $t \geq 0$。

接下来，考虑 $L_2(H, \mathbb{R}^n)$ 中的以下随机微分方程：

$$dY_t = \mathcal{A} Y_t dt + \sqrt{\mathcal{Q}} dB_t, \quad t \geq 0; \quad Y_0 = y_0, \tag{2.9}$$

其中 B是一个 $L_2(H, \mathbb{R}^n)$-柱状布朗运动，且 $y_0 \in L^p((\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P})\ L_2(H, \mathbb{R}^n))$ 满足 $y_0^* y_0 = x_0$ （注意，每个秩至多为 n 的 $x \in S_1^+(H)$ 都可以写成 $y^* y$，其中 $y \in L_2(H, \mathbb{R}^n)$；并且这一分解可以用可测的方式完成，见引理 C.1）。

希尔伯特空间中的经典随机积分理论（例如参见 [18, 定理 5.2和 5.4]）以及(2.8) 确保存在一个适应过程 $Y\colon [0, \infty) \times \Omega \to L_2(H, \mathbb{R}^n)$，其具有连续样本路径并满足

$$Y_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(y_0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\mathcal{A}} \sqrt{\mathcal{Q}}\, dB_s = y_0\, \mathrm{e}^{tA} + \int_0^t dB_s \sqrt{Q}\, \mathrm{e}^{(t-s)A}, \quad t \geq 0. \tag{2.10}$$

注意到，由 $x_0 \in L^p(\Omega\ L_1(H))$（因此 $y_0 \in L^p(\Omega\ L_2(H)$）、假设 (2.8) 和 (2.10) 可推出，

$$\mathbb{E} \sup_{s \in [0,t]} \|Y_s\|^p_{L_2(H,\mathbb{R}^n)} < \infty\,, \tag{2.11}$$

对于所有 $t > 0$。

与 [7], 中所考虑的有限维情形类似，我们将证明，$(Y_t^*Y_t)_{t\geq 0}$ 为（2.1）的解析弱解和概率弱解。我们首先将 $\langle Yh、\ Yg\rangle_{\mathbb{R}^n}$、 h、 $g \in D(A)$表示为伊藤过程。为此，首先注意到，根据随机Fubini定理，我们有

$$Y_t h = y_0 h + \int_0^t Y_s A h \, ds + \int_0^t dB_s \sqrt{Q} h$$

对所有 $t \geq 0$ 和所有 $h \in D(A)$均成立。设 $(e_k)_{k=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的一组正交归一基，设 $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 H的一组正交归一基。应用 Itô 公式（例如，参见 [18,第 4 节。5]），我们得到

(2.12)

$$\begin{aligned}
\langle Y_t g, Y_t h\rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle y_0 g, y_0 h\rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t \langle Y_s g, Y_s A h\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Y_s A g, Y_s h\rangle_{\mathbb{R}^n} \, ds \\
&\quad + \int_0^t \langle Y_s g, dB_s \sqrt{Q} h\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle dB_s \sqrt{Q} g, Y_s h\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad + t \sum_{k=1}^n \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle h_j, \sqrt{Q} h\rangle_H \langle h_j, \sqrt{Q} g\rangle_H \langle e_k, e_k\rangle \\
&= \langle y_0^* y_0 g, h\rangle_H + \int_0^t \left(n\langle Qg, h\rangle_H + \langle Y_s^* Y_s A g, h\rangle_H + \langle Y_s^* Y_s g, Ah\rangle_H\right) ds \\
&\quad + \int_0^t \langle Y_s^* \, dB_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q} \, dB_s^* Y_s g, h\rangle_H \,,
\end{aligned}$$

对所有 g、 $h \in D(A)$均成立。

与 [7], 类似，我们现在希望证明，对于某个 ~L_2，存在 $Y_s^* \, dB_s = \sqrt{Y_s^* Y_s} dW_s$ (H)-柱状布朗运动 W。为此，设 B 是一个与 B独立的 $L_2(H)$-柱状布朗运动。此外，设 P_s：$H \to H$ 是到 range(Y_s^*) 的正交投影，$s \in [0,\infty)$。奇异值分解表明，对所有 $s \geq 0$， $\|Y_s (Y_s^* Y_s)^{-\frac{1}{2}} P_s\|_{L_2(H)} = \sqrt{n}$，因此我们可以通过如下方式定义$W$：$L^2([0,\infty); L_2(H)) \to L^2(\Omega)$：

$$W(\varphi) = \int_0^t \langle Y_s (Y_s^* Y_s)^{-\frac{1}{2}} P_s \varphi_s, \, dB_s\rangle_{L_2(H)} + \int_0^t \langle (\mathrm{I}_H - P_s)\varphi_s, \, d\tilde{B}_s\rangle_{L_2(H)} \,, \tag{2.13}$$

对所有 $\varphi \in L^2([0,\infty);\ L_2(H))$。不难验证 that

$$\mathbb{E}[W(\varphi) W(\psi)] = \langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(0,\infty;L_2(H))}$$

对于所有 $\varphi, \psi \in L^2([0,\infty);\ L_2(H))$，即， W是一个 $L_2(H)$-柱状布朗运动。此外，由于 $\sqrt{Y_s^* Y_s} P_s = \sqrt{Y_s^* Y_s}$ 和 $\sqrt{Y_s^* Y_s}(\mathrm{I}_H - P_s) = 0$，我们得到 $\sqrt{Y_s^* Y_s} dW_s = Y_s^* dB_s$。这与 (2.12) 一起意味着过程 $X = Y^* Y$对于所有 $t \geq 0$ 和 $g, h \in D(A)$ 都满足 (2.4)。Y 是一个连续适应的$L_2(H, \mathbb{R}^n)$-值过程，并满足 (2.11)，这一事实确保了 X 是一个连续适应的$S_1^+(H)$-值过程，使得 X_t 的秩为 n，并且对于所有 $t \geq 0$都满足 (2.3)。

最后，由于在 Q 和 A 的条件下，(2.5) 中的所有积分都是良定义的，并且 $\{g \otimes h$：g、$h \in H\}$ 在 $L_2(H)$ 中分离点，因此 (2.5) 由 (2.4) 推出。□

备注 2.2。构造定理 2.1 中的过程 X 的另一种等价方式是令 $X_t = \sum_{i=1}^n Y_{(i)\,t} \otimes Y_{(i)\,t}$，$t \geq 0$，其中 $Y_{(1)} \ldots, Y_{(n)}$ 是相互独立的 H-值奥恩斯坦-乌伦贝克过程。为了解释这一点，令 B, y_0 和 Y 如定理 2.1 的证明中所定义（另见 (2.9)）。令 $(e_i)_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的正交归一基。定义

H-柱状布朗运动 $B^{(1)},\dots,B^{(n)}$ 为 $B^{(i)}(h1_{[0,t)}) = B((h\otimes e_i)1_{[0,t)}), h\in H, t\geq 0$, 并注意到 $B^{(1)},\dots,B^{(n)}$ 是相互独立的。令 $y_0^{(i)} = y_0^* e_i$ 和 $Y_t^{(i)} = Y_t^* e_i$。于是

$$Y_t^{(i)} = \mathrm{e}^{tA^*} y_0^{(i)} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A^*}\sqrt{Q}\, dB_s^{(i)}, \quad t\geq 0, \tag{2.14}$$

和 $X_t = \sum_{i=1}^n Y_t^{(i)} \otimes Y_t^{(i)}$, $t\geq 0$.

注 2.3. 可以证明，在定理 2.1 的证明中构造的过程 X 也是一个温和解:

$$\begin{aligned} X_t = \mathrm{e}^{tA}x_0\,\mathrm{e}^{tA^*} + n\int_0^t \mathrm{e}^{sA}Q\,\mathrm{e}^{sA^*}\,ds \\ + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\sqrt{X_s}dW_s\sqrt{Q}\,\mathrm{e}^{(t-s)A^*} + \mathrm{e}^{(t-s)A}\sqrt{Q}dW_s^*\sqrt{X_s}\,\mathrm{e}^{(t-s)A^*} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$\mathbb{P}$-几乎必然地，对所有 $t\geq 0$ 均成立。

注 2.4. 假设 (2.2) 在以下情形中均成立:

(i) $Q\in S_1^+(H)$: 事实上，回顾例如 [37, 定理 1.2.2]，存在$M,\omega\geq 0$，使得对所有 $s\geq 0$, $\|\mathrm{e}^{sA}\|_{L(H)}\leq M\mathrm{e}^{\omega s}$，因此由 (1.5) 得

$$\|\mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|_{L_2(H)} \leq \|\mathrm{e}^{sA}\|_{L(H)}\|\sqrt{Q}\|_{L_2(H)} \leq M\,\mathrm{e}^{\omega s}\,\|Q\|_{L_1(H)} \tag{2.16}$$

对所有 $s\geq 0$。

(ii)$(\lambda - A)$是某个解析 C_0-半群的生成元（参见 [37, 第 2.5] 节），并且存在一个 $\theta\in[0,\frac{1}{2})$ 使得

$$\|(\lambda - A)^{-\theta}Q\|_{L_2(H)} < \infty. \tag{2.17}$$

事实上，在这种情况下，根据 [37, 定理 2.6。13], ，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{sA}Q\|_{L_2(H)} &= \mathrm{e}^{\lambda s}\,\|(\lambda - A)^{\theta}\,\mathrm{e}^{s(A-\lambda)}(\lambda - A)^{-\theta}Q\|_{L_2(H)} \\ &\leq C\,\mathrm{e}^{\lambda s}\,s^{-\theta}\|(\lambda - A)^{-\theta}Q\|_{L_2(H)}, \end{aligned}$$

对所有 $s>0$（其在 $[0,t]$ 上平方可积）对所有 $t\geq 0$，因为 $\theta <_2$。一个生成解析半群的算子的“经典”例子，是在具有光滑有界区域$D\subset\mathbb{R}^d$ ($d\in\mathbb{N}$)上、带有狄利克雷边界条件的 $2m$ ($m\in\mathbb{N}$)阶椭圆微分算子（例如参见 [37, 定理 2.7]）。在此情况下，Weyl 定理意味着$(-A)^{-\theta}\in L_2(L^2(D))$，只要$\theta > \frac{d}{4m}$，因此只要 $d<2m$，就可以选取一个 $\theta\in[0,\frac{1}{2})$，使得对于任意 $Q\in L(H)$，(2.17)得以满足。更具体地说，如果 A 是有界区间上带狄利克雷边界条件的一维拉普拉斯算子，并且 $Q\in L(H)$，那么 A 和Q 对任意 $\theta>\frac{1}{4}$ 都满足 (2.17)，其中 $\lambda = 0$。

注 2.5. [关于更一般的奥恩斯坦-乌伦贝克过程]我们在 (2.6) 和 (2.7) 中构造的算子 $\mathcal{A}$: $D(\mathcal{A})\subseteq L_2(H,\mathbb{R}^n)\to L_2(H,\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{Q}\in S^+(L_2(H,\mathbb{R}^n))$ 具有非常特定的结构。因此，人们可能会想知道，考虑 Y^*Y 更一般的奥恩斯坦-乌伦贝克过程 Y，是否能够得到形式为 (2.1) 的随机微分方程。这似乎并非如此：事实上，设 K 是另一个希尔伯特空间，并设 $\mathcal{A}\in L(L_2(H,K))$ 和 $\mathcal{Q}\in S_1^+(L_2(H,K))$ 为一般算子（对于

为简便起见，我们这里只考虑 $\mathcal{A}$ 有界且 $\mathcal{Q}$ 属于迹类的情形。然后可以写成 $\mathcal{Q} = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k C_k \otimes C_k$，其中，$(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L_2(H,K)$的正交归一基，而$(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ^1 中的正序列。(2.9)的解仍由(2.10)给出，并且仍满足(2.11)；对$\langle Y_t g$应用伊藤公式，我们得到：

$$\begin{aligned}\langle Y_t g, Y_t h\rangle = \langle Y_0 g, Y_0 h\rangle &+ \int_0^t \langle Y_s g, \mathcal{A}(Y_s)h\rangle_K + \langle \mathcal{A}(Y_s)g, Y_s h\rangle_K \, ds \\ &+ \int_0^t \langle Y_s g, \sqrt{\mathcal{Q}}(dB_s)h\rangle_K + \langle \sqrt{\mathcal{Q}}(dB_s)g, Y_s h\rangle_K + t\sum_{k,n\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{Q}(C_k)g, h\rangle_K.\end{aligned}$$

我们立即看出，为了在上文右侧的确定性被积函数中得到 $Y_s^* Y_s$，需要对于某个算子 $A \in L(H)$，有 $\mathcal{A}(Y) = YA$。不过请注意，若我们允许 (2.1) 中出现更一般的线性漂移项，例如在 [15]，的有限维情形中，那么 $\mathcal{A}$ 也可能更一般。

接下来，我们考虑取值于 $L_2(H)$ 的鞅 $M_t := \int_0^t (Y_s^* Y_s)^{-\frac{1}{2}} Y_s^* \sqrt{\mathcal{Q}}(dB_s^*), t \geq 0$。可以验证， M 的二次协变差为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\langle M_t, H_1\rangle_{L_2(H)} \langle M_t, H_2\rangle_{L_2(H)}\right] \\ &\quad = \mathbb{E}\int_0^t \langle \mathcal{Q}(Y_s(Y_s^*Y_s)^{-\frac{1}{2}} P_s H_1), Y_s(Y_s^*Y_s)^{-\frac{1}{2}} P_s H_2\rangle_{L_2(H,K)} \, ds\end{aligned}$$

对所有 $H_1, H_2 \in L_2(H)$ 均成立（此处 P_s 再次表示到 range(Y_s) 上的正交投影）。因此，为了能够得出 M 是布朗运动，我们需要对于某个算子 $Q \in L_2(H)$，有 $\mathcal{Q}(C) = CQ$。最后，若确实有 $\mathcal{A}(C) = CA$ 且 $\mathcal{Q}(C) = CQ$，其中 $A, Q \in L(H)$，则方程 (1.9) 蕴含

$$\int_0^T \| \mathrm{e}^{s\mathcal{A}} \mathcal{Q}\|^2_{L_2(L_2(H,K))} \, ds = \| \mathrm{I}_K \|^2_{L_2(K)} \int_0^T \| \mathrm{e}^{sA} Q\|^2_{L_2(H)} \, ds, \tag{2.18}$$

对所有 $s \geq 0$，这只有在 K 有限维时才可能是有限的（注意，令 A 无界对此并无帮助）。由于 (2.18) 中的积分必须有限， Y 才有定义（见 (2.10)），因此我们在定理 (2.1) 中考虑的设定确实是最一般的。

3. Fourier and Laplace transforms of infinite-dimensional Wishartprocesses

本节的目标是推导无限维 Wishart 过程的傅里叶-拉普拉斯变换表达式，见定理 3.1 和推论 3.7。对于推论 3.7，我们计算在定理 2.1 的证明中构造的解的拉普拉斯变换，即过程 $X = Y^*Y$ 的拉普拉斯变换，其中 Y 是一个经过适当选取的、取值于 $L_2(H, \mathbb{R}^n)$ 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程（见第 9 页）。特别是，我们利用了已知 X 具有这种特定形式这一事实。

另一方面，在定理3.1 中，我们并不假设已知 $X = Y^*Y$，而只是假设已知 X 是一个 Wishart过程（即下方 (4.1)的一个解）。由此，我们推导出傅里叶-拉普拉斯变换所满足的黎卡提方程，然后给出这些黎卡提方程的解。自然地，推论3.7和定理3.1 中推导出的公式在其定义域的交集上是一致的；推论3.7之所以重要，是因为它在 t 足够小时，为 u、$v \in S(H)$ 中的傅里叶-拉普拉斯变换$\mathbb{E}[\exp(\mathrm{Tr}(X_t(u + iv)))]$ 提供了表达式，

而定理 3.1 对于 Wishart 过程的刻画至关重要（参见第 4 节）。此外，作为定理 3.1 的推论，我们得到任意 Wishart 过程都具有马尔可夫性质、分布唯一，且是仿射过程，参见推论 3.2 和 3.3。本节最后给出一些例子，参见第 3.3 小节。

为了陈述我们的结果，我们必须引入一些记号：对于实希尔伯特空间 H，我们用 $H_{\mathbb{C}}$ 表示其复化，即赋予 $\langle h_1+ig_1、\ h_2+ig_2\rangle_{H_{\mathbb{C}}} = \langle h_1、\ h_2\rangle_H+\langle g_1、\ g_2\rangle_H+i\ （\langle g_1、\ h_2\rangle_H-\langle h_1、\ g_2\rangle_H）$、$h_1、\ h_2、\ g_1、\ g_2 \in H$ 的 $H_{\mathbb{C}} = H \oplus iH$。此外，对所有 $\_h、\ g \in H$，我们定义 $\mathrm{Re}(h+ig) := h、\ \mathrm{Im}(h+ig) := g$ 以及 $\overline{h+ig} = h-ig$（注意 $\langle h、\ g\rangle_{H_{\mathbb{C}}} = \langle \bar{g}、\ h\rangle_{H_{\mathbb{C}}}$）。对于 $A \in L\ （H_{\mathbb{C}}）$，我们通过 $\langle A^T h、\ g\rangle_{H_{\mathbb{C}}} = \langle A\bar{g}、\ \bar{h}\rangle_{H_{\mathbb{C}}}、\ h、\ g \in H_{\mathbb{C}}$ 定义转置 $A^T \in L\ （H_{\mathbb{C}}）$。注意，与 A^* 不同，算子 $A^\top$ 对应于不带共轭的转置。

注：任意的 $A \in L(H)$ 都可以通过设置 $A(h+ig) = Ah + iAg,\ h,g \in H$，以一种平凡且保持范数的方式延拓为一个˜ ˜算子 $A \in L(H_{\mathbb{C}})$。此外，如果$A \in S(H)$，那么 $\tilde{A}^T = \tilde{A} = \tilde{A}^*$，特别地，$\tilde{A} \in S(H_{\mathbb{C}})$（从现在起我们不再区分 A和 A）。在本节中，我们经常会遇到集合$S^+(H) \oplus iS(H) \subseteq L(H_{\mathbb{C}})$，该集合表示满足以下条件的算子 $A \in L(H_{\mathbb{C}})$：存在（必然唯一的）$A_1 \in S^+(H)、\ A_2 \in S(H)$，使得 $A = A_1 + iA_2$。集合 $S(H) \oplus iS(H)$ 的定义类似。注意，如果 $A \in S(H) \oplus iS(H)$，那么$A^T = A$。

3.1. 建立傅里叶变换和拉普拉斯变换。下面的定理 3.1 陈述了本节的主要结果，相关结果可见下文的推论 3.7。

定理 3.1。设 H 是一个可分实希尔伯特空间，设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 是一个滤波概率空间，设 $A\colon D(A) \subset H \to H$ 是一个 C_0-半群的生成元，设 $Q \in S^+(H)$，设 $\alpha \in \mathbb{R}$，设 $x_0 \in L^1((\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P})\ S_1^+(H))$，并假设

$$\int_0^t \| \mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|^2_{L_2(H)}\, ds < \infty \tag{3.1}$$

对所有 $t \geq 0$。此外，假设存在一个 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- 布朗运动 W，以及一个适应随机过程 $X\colon [0,\infty) \times \Omega \to S_1^+(H)$，其连续样本路径满足

$$\begin{aligned}\langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t (\alpha\langle Qg, h\rangle_H + \langle X_s Ag, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H)\, ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H\end{aligned} \tag{3.2}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 $h,\ g \in D(A)$。令[2]

$$Q_t = \int_0^t \mathrm{e}^{sA^*} Q\, \mathrm{e}^{sA}\, ds, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

设 $t > 0、\ u \in S^+\ （H）$ 和 $v \in S\ （H）$，则

$$|\exp(-\mathsf{Tr}(\psi(t, u-iv)X_t))| \leq 1, \qquad \int_0^t |\mathsf{Tr}(\psi(s, u+iv)Q)|\, ds < \infty, \tag{3.4}$$

[2]注意，A^* 生成了 C_0-半群 $\mathrm{e}^{tA^*} = (\mathrm{e}^{tA})^*$，参见 [20, 第 I.5.14 节和 II.2 节，6], 因此 (3.1) 确保了 $Q_t \in S_1(H)$。

and we have

(3.5)

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\operatorname{Tr}((u-iv)X_t))\,|\,x_0\right]=\exp\left(-\operatorname{Tr}(\psi(t,u-iv)x_0)-\alpha\int_0^t\operatorname{Tr}(\psi(s,u-iv)Q)\,ds\right)$$

在以下三种情形中的每一种情形下（注意，我们隐含地断言下文出现的逆矩阵存在；另请参见下文的命题 3.8）：

(i) $v=0$, $u\in S^+(H)$, *and*

$$\psi(s,u)=\mathrm{e}^{sA}\sqrt{u}(\mathrm{I}_H+2\sqrt{u}Q_s\sqrt{u})^{-1}\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{sA^*},\quad s\in[0,t];\tag{3.6}$$

(ii) $u=0$, $v\in S^+(H)\cup S^-(H)$，且

$$\psi(s,-iv)=\mathrm{e}^{sA}\sqrt{|v|}(i\,\operatorname{sign}(v)\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}}+2\sqrt{|v|}Q_s\sqrt{|v|})^{-1}\sqrt{|v|}\,\mathrm{e}^{sA^*},\quad s\in[0,t];\tag{3.7}$$

(iii) A, u, v 和 Q 可同时对角化，即存在 H 的一组标准正交基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，以及序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathbb{R}$、$(u_n)_{n\in N}$ 属于 $[0,\infty)$、$(v_n)_{n\in N}$ 属于 $\mathbb{R}$、$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $[0,\infty)$，使得 $A=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_ne_n\otimes e_n$, $u-iv=\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n-iv_n)e_n\otimes e_n$，且 $Q=\sum_{n\in\mathbb{N}}q_ne_n\otimes e_n$，并且

(3.8)

$$\begin{aligned}\psi(s,u-iv)&=\mathrm{e}^{sA}(\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}}+2(u-iv)Q_s)^{-1}(u-iv)\,\mathrm{e}^{sA^*}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{b_ne^{2a_nt}\left(a_n^2+a_n(u_n+iv_n)q_n(e^{2a_nt}-1)\right)}{|a_n+(u_n-iv_n)q_n(e^{2a_nt}-1)|^2}(e_n\otimes e_n),\quad t\geq 0.\end{aligned}$$

我们将定理 3.1 的证明推迟到下一小节，首先考虑一些推论。推论 3.2确立了解(3.2) 的马尔可夫性质，即在由 $(X_r)^{r\in[0,s]}$ 生成的 σ-代数条件下，X_t 的分布（记为 $\mathcal{L}[X_t|(X_r)_{r\in[0,s]}]$）只取决于由 X_s 生成的 σ-代数。此时我们特意不为马尔可夫过程引入状态空间，因为这在很大程度上取决于关于 α、A 和 Q 的条件（见第 4 节和第 5 节）。

推论 3.2.假设定理 3.1 的设定。那么，X 具有马尔可夫性质，即，$\mathcal{L}[X_t|(X_r)_{r\in[0,s]}]=\mathcal{L}[X_t|X_s]$，并且 X 是仿射过程，具体而言，

$$\log(\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(uX_t))|X_s]),\quad u\in S^+(H),$$

对于每个 $s\leq t$，它都是 X_s 的仿射函数。

证明。关于 X 的仿射性质的断言直接由 (3.5) 得出。关于马尔可夫性质，请注意，斯通-魏尔施特拉斯定理表明，$S^+(\mathbb{R}^n)$ 值随机变量 $\tilde{X}$ 的分布由 $\{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\operatorname{Tr}(uX)}]\colon\ u\in S^+(\mathbb{R}^n)\}$ 唯一确定。此外，$S^+(H)$ 值随机变量 X 的分布由 $P_n^*XP_n$, $n\in\mathbb{N}$ 的分布唯一确定，其中 $P_n\in L(\mathbb{R}^n,H)$,$n\in\mathbb{N}$ 是一列等距映射，满足对所有 $h\in H$ 均有 $\lim_{n\to\infty}P_nP_n^*h=h$。因此$\mathcal{L}[X_t|\mathcal{F}]$，给定一个 σ-代数 $\mathcal{F}$ 时 X_t 的分布由 $\{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\operatorname{Tr}(uX_t)}|\mathcal{F}]\colon\ u\in S^+(H)\}$ 唯一确定。

由 X 的连续性，只需考虑有限个边缘分布，即证明对于所有 $0\leq s_1<\ldots<s_n<t$，$\mathcal{L}(X_t|X_{s_1},\ldots,X_{s_n})=\mathcal{L}(X_t|X_{s_n})$。此外，由条件期望的塔式性质，这可化简为证明对于所有 $0\leq r<s<t$，$\mathcal{L}(X_t|X_r,X_s)=\mathcal{L}(X_t|X_s)$。最后，根据.....的定义，

因此，对于条件期望，我们只需验证对所有 $u \in S^+(H)$、$0 \le r < s < t$ 和 $B \in \mathcal{B}(S_1^+(H))$，都有

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(uX_t))|X_s]1_B(X_r)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\operatorname{Tr}(uX_t))1_B(X_r)\right].$$

但这可由定理 3.1 (i) 以及以下事实推出：对于所有 s，$\psi(s-r,\psi(t-s,u)) = \psi(t-r,u)$，且对于所有 $u \in S^+(H)$，参见下文的命题 3.8 (i) 和 (ii)（此处 ψ 的定义见 (3.6)）。□

推论 3.3。设定理 3.1 的条件成立。则 X 在分布意义下是唯一的。

证明。由于 X 具有连续样本路径，只需验证对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和所有 $0 \le t_0 \le \ldots \le t_m$，$(X_{t_k})_{k=0}^m$ 在分布意义下是唯一的。仿照推论 3.2 的证明可得，$(X_{t_k})_{k=1}^m$ 的分布由以下内容确定：

$$\left\{\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^m \exp(-\operatorname{Tr}(u_k, X_{t_k})\right) : u_1, \ldots, u_m \in S^+(H)\right\}$$

结合条件期望的塔式性质、X 的马尔可夫性质（见推论 3.2）以及定理 3.1，可得 X 在分布意义下确实唯一。□

推论 3.4. 假设定理 3.1 中的设定，特别地，令 $u \in S^+(H)$。那么[3] $\sqrt{u}Q_t\sqrt{u} \in S_1^+(H)$，$\det(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u}) \in [1,\infty)$，并且

(3.9)

$$\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(uX_t) \mid x_0] = \det(I_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\operatorname{Tr}\left(e^{tA}\sqrt{u}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-1}\sqrt{u}\, e^{tA^*} x_0\right)\right).$$

证明. 由于 $Q_t \in S_1^+(H)$，我们有 $\sqrt{u}Q_t\sqrt{u} \in S_1^+(H)$，因此 $\det(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u}) \in [1,\infty)$。现在，定义 $\tilde{\varphi}(t) = -\frac{\alpha}{2}\log(\det(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u}))$。注意到 $\tilde{\varphi}(0) = 0$，并回顾定理 3.1 中式 (3.6) 对 ψ 的定义，再利用只要 $[0,T] \ni t \mapsto A_t \in S_1^+(H)$ 可微，就有 $\frac{d}{dt}\det(A_t) = \operatorname{Tr}(A_t' A_t^{-1})\det(A_t)$，可得 $\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}(t) = -\alpha\operatorname{Tr}(\psi(t,u)Q)$。这意味着

$$e^{-\alpha\int_0^t \operatorname{Tr}(\psi(s,u)Q)ds} = \det(I_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.10}$$

□

注记 3.5. 注意，如果将 $\psi(s,u)$ 替换为 $\psi(s,u+iv)$，则 (3.10) 可能不成立，因为对 $\mathbb{C}$ 而言，对数并非唯一确定；详情请参见 [34]。

回顾定理 2.1 的证明可知，在本命题的设定下，可以通过考察 $X = Y^*Y$，构造一个满足 (3.2) 且具有 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 的过程 X，其中 Y 是一个取值于 $L_2(H,\mathbb{R}^n)$ 的奥恩斯坦-乌伦贝克过程。对于 X 的这一显式构造，可以直接计算其拉普拉斯变换（即无需依赖定理 3.1），见下文命题 3.6（注意，在各自参数范围的交集上，(3.9) 确实与 (3.12) 一致）。由此命题可得出结论：$\mathbb{E}[e^{-\operatorname{Tr}(BX_t)}] < \infty$ provided

$$\inf\{\mathrm{Re}(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(B)\} > \tfrac{1}{2}\|Q_t\|_{L(H)}^{-1}. \tag{3.11}$$

[3] 对于 $B \in S_1^+(H)$，我们有 $\det(\mathrm{I}_H + B) = \prod_{\lambda\in\sigma(B)}(1+\lambda)^{d(\lambda)}$，其中 $d(\lambda) \in \mathbb{N}$ 是 λ $\prod_{\lambda\in\sigma\ B}\ 1+\lambda$ $= \sum_{\lambda\in\sigma\ B}\ d\ \lambda$ $1+\lambda \le \sum_{\lambda\in\sigma\ B}\ d\ \lambda\ \lambda =$ 的几 $\|B\|_{L_1\ H}$ 何重数。注意，$\log(\,)(\,)^{d(\lambda)})\ (\,)\ (\,)\log(\,)\ (\,)\ (\,)(\,)$。

特别地，尽管定理 3.1仅在$\mathrm{Re}(\sigma(B)) \geq 0$时提供 $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}(BX_t)}]$，下面的推论3.7在定理 2.1 的设置下提供了，对于某个 B，$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}(BX_t)}]$，且该 B 满足$\mathrm{Re}(\sigma(B)) \not\geq 0$。请注意，定理 3.1 实际上并未用于命题 3.6 和推论 3.7 的证明。

命题 3.6. 假设定理 2.1 的条件成立，并令 X 为定理 2.1 的证明中构造的方程 (2.1) 的概率与解析弱解，参见第 9 页。令 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 如 (3.3) 中所定义。此外，假设以下两个条件之一成立：

(i) $u \in S^+(H)$,
(ii) $u \in S^-(H)$ *and* $\|u\|_{L(H)} \leq \frac{1}{2}\|Q_t\|_{L(H)}$.

则 $\mathrm{I}_H + 2\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}$ 可逆，且

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp(-\mathrm{Tr}(uX_t))\right]\\ &\quad= \det(\mathrm{I}_H + 2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|})^{-\frac{n}{2}}\\ &\qquad\times \exp\left(-\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{tA}\sqrt{|u|}(\mathrm{I}_H + 2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|})^{-1}\mathrm{e}^{tA}x_0)\right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\det(\mathrm{I}_H + 2\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|})$ 按照 (B.1) 中的定义。

证明。见附录 B。 □

推论 3.7. 假设定理 2.1 的条件成立，并令 X 为定理 2.1 的证明中构造的方程 (2.1) 的概率与解析弱解，参见第 9 页。令 $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $M \in (0,\infty)$ 满足 $\|\mathrm{e}^{tA}\|_{L(H)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。则对所有 $t \geq 0$ 以及所有满足以下条件的 $u, v \in S(H)$,

$$(\|u\|^2_{L(H)} + \|v\|^2_{L(H)})^{\frac{1}{2}}\|Q\|_{L(H)} < \tfrac{|\omega|}{M^2|\mathrm{e}^{2\omega t}-1|} \tag{3.13}$$

我们有 $\mathrm{I}_{H_\mathbb{C}} + 2(u-iv)Q_s$, $s \in [0,t]$ 在 $H_\mathbb{C}$ 上可逆，其逆为

$$(\mathrm{I}_{H_\mathbb{C}} + 2(u-iv)Q_s)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2(u-iv)Q_s)^k, \tag{3.14}$$

并且当 $\alpha \in \mathbb{N}$ with 时，(3.5) 成立

$$\psi(s, u-iv) = \mathrm{e}^{sA}(\mathrm{I}_H + 2(u-iv)Q_s)^{-1}(u-iv)\,\mathrm{e}^{sA^*}, \quad s \in [0,t]. \tag{3.15}$$

证明。注意 $\|u+iv\|_{L(H_\mathbb{C})} = (\|u\|^2_{L(H)} + \|v\|^2_{L(H)})^{\frac{1}{2}},$，因此 (3.13) 推出

$$\|(u+iv)Q_s\|_{L(H_\mathbb{C})} \leq \|u+iv\|_{L(H_\mathbb{C})}\|Q\|_{L(H)}M^2\int_0^s \mathrm{e}^{2\omega r}\,dr < \tfrac{|\mathrm{e}^{2\omega s}-1|}{2|\mathrm{e}^{2\omega t}-1|} \leq \tfrac{1}{2}$$

对所有 $s \in [0,t]$ 均成立。这意味着 $\mathrm{I}_{H_\mathbb{C}} + 2(u-iv)Q_s$ 可逆，其逆为 (3.14)。

命题 3.6 意味着 X_t 的拉普拉斯变换由(3.12)给出，即使用(3.5)，其中 ψ 如 (3.6) 所示。注意，按 (3.15)定义的 ψ 关于其第二个自变量是解析函数，并且在它们定义域的交集上与按 (3.6)定义的 ψ 一致（另见引理 A.1）。另一方面，命题 3.6 意味着解析函数 $(S(H)+iS(H)) \ni u+iv \mapsto \mathbb{E}[\exp(-\mathrm{Tr}((u+iv)X_t))]$ 的定义域包含集合 $\{u+iv : u, v \in S(H)\ \sigma(u) \subseteq (-\frac{1}{2}\|Q_t\|_{L(H)}, \infty)\}$。这以及解析展开的唯一性意味着(3.5) 成立，其中 ψ 如 (3.15) 所示。□

3.2. 定理 3.1 的证明。在仿射过程的背景下，证明定理 3.1 的方法是经典的，它涉及将 Itˆo 公式应用于

$$s \mapsto \exp(-\operatorname{Tr}(\psi(t-s,u-iv)X_s) - \varphi(t-s,u-iv)),$$

其中，在我们的情形下，$\varphi(t,u-iv) = \alpha\int_0^t \operatorname{Tr}(\psi(s,u-iv)Q)ds$。由此可以推导出关于 ψ 的 Riccati 型微分方程（随后可由 ψ 求得 φ）。在下面的命题 3.8 中，我们证明了若干情形下 Riccati 方程的解的存在性。

回顾一下，$H_{\mathbb{C}}$、C^T for $C \in L(H_{\mathbb{C}})$ 以及 $S^+(H) \oplus iS(H)$ 已在第12页引入。我们还注意到，当 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列有界线性算子，并且在强算子拓扑中收敛到 B 时，我们记作 $B_n \xrightarrow{\text{强算子拓扑}} B$。

命题 3.8。设 H 是一个实希尔伯特空间，设 $Q \in S^+(H)$，设 $A\colon D(A) \subset H \to H$ 是一个 C_0-半群的生成元，设

$$\int_0^t \| \mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|^2_{L_2(H)}\, ds < \infty \tag{3.16}$$

对所有 $t \geq 0$，并令 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 由 (3.3) 定义。令 $B \in L(H_{\mathbb{C}})$，并考虑 $L(H_{\mathbb{C}})$ 中的以下常微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,B) = -\frac{1}{2}(\psi(t,B)+\psi^T(t,B))Q(\psi(t,B)+\psi^T(t,B)) \\ \qquad\qquad + A\psi(t,B) + \psi(t,B)A^*, \quad t\in[0,\infty); \\ \psi(0,B) = B. \end{cases} \tag{3.17}$$

我们称 $\psi(\cdot,B) \in C^1([0,\infty)\ L(H_{\mathbb{C}}))$ 是(3.17) 的一个解，若 $A\psi(t,B)\ \psi(t,B)A^* \in L(H_{\mathbb{C}})$对所有 $t\in[0,\infty)$ 成立，并且 (3.17) 也成立。以下结论成立：

(i) (3.17) 的任意解都是唯一的；

(ii)如果 $B \in S^+(H)$，则 $\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B}$ 可逆，且映射 $t \mapsto (\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}$ 连续可微，其导数为

$$t \mapsto -2(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}\sqrt{B}\,\mathrm{e}^{tA^*}Q\mathrm{e}^{tA}\sqrt{B}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}.$$

此外，由 (3.6) 给出的过程 $\psi(\cdot,B)$，即，

$$\psi(t,B) = \mathrm{e}^{tA}\sqrt{B}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}\sqrt{B}\,\mathrm{e}^{tA^*}, \quad t\geq 0, \tag{3.18}$$

满足

$$\|\psi(t,B)\|_{L(H)} \leq \|B\|_{L(H)}\|\,\mathrm{e}^{tA}\,\|^2_{L(H)}, \qquad \|\psi(t,B)Q\|_{L_1(H)} \leq \|B\|_{L(H)}\|\,\mathrm{e}^{tA}\sqrt{Q}\|^2_{L_2(H)}, \tag{3.19}$$

且对于所有 $t\geq 0$，$\psi(t,B) \in S^+(H)$。此外，若 $A\sqrt{B} \in L(H)$，则 $\psi(\cdot,B)$ 是 (3.17)的一个解，并且如果进一步有 $\sqrt{B}, A\sqrt{B}, A^2\sqrt{B} \in L_1(H)$，则 $\psi, A\psi, \psi A^*, A\psi A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H))$.

(iii) 若 $iB \in S^+(H) \cup S^-(H)$，则 $\operatorname{sign}(iB)\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2i\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|}$ 可逆。对所有 $t\geq 0$，映射 $t \mapsto (\operatorname{sign}(iB)\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2i\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|})^{-1}$ 是连续可微，且导数为

$$t \mapsto -2i(\operatorname{sign}(iB)\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2i\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|})^{-1}\sqrt{|B|}\,\mathrm{e}^{tA^*}Q\,\mathrm{e}^{tA}\sqrt{|B|}(\operatorname{sign}(iB)\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2i\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|})^{-1}.$$

此外，由 3.7 给出的过程 $\psi(\cdot,B)$（其中 $v = iB$），即，

$$\psi(t,B) = \mathrm{e}^{tA}\sqrt{|B|}\left(i\operatorname{sign}(iB)\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|}\right)^{-1}\sqrt{|B|}\,\mathrm{e}^{tA^*}, \quad t\geq 0, \tag{3.20}$$

满足（3.19）（必要时在范数中将 H 替换为 $H_{\mathbb{C}}$），且对所有 $t \geq 0$， $\psi(t,B) \in S^+(H) \oplus iS(H)$。此外，若 $A\sqrt{|B|} \in L(H)$，则 $\psi(\cdot,B)$ 是（3.17）的一个解，并满足对所有 $t \geq 0$， $\psi(t,B) \in S^+(H_{\mathbb{C}}) \oplus iS(H_{\mathbb{C}})$；若再有 $\sqrt{|B|}, A\sqrt{|B|}, A^2\sqrt{|B|} \in L_1(H)$，则 $\psi, A\psi, \psi A^*, A\psi A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$。

(iv)如果 $B \in S^+(H) \oplus iS(H)$ 且 A、 B 和 Q 可同时对角化，即如果存在一个正交归一基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其对于 H 以及序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于$\mathbb{R}$、$(b_n)_{n\in N}$ 属于 $[0,\infty)\times i\mathbb{R}$、$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$属于 $[0,\infty)$，使得 $A=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\otimes e_n$、$B = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e_n \otimes e_n$和 $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n e_n \otimes e_n$，那么 $\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t$ 对于所有 $t \geq 0$ 都是可逆的，其中

$$(\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n^2 + a_n b_n q_n (e^{2a_n t}-1)}{|a_n + \overline{b_n} q_n (e^{2a_n t}-1)|^2}(e_n \otimes e_n), \quad t \geq 0,$$

且 $t \mapsto (\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t)^{-1}$ 连续可微，其导数为

$$t \mapsto -2\,\mathrm{e}^{2tA}\, B(\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t)^{-2}.$$

此外，由（3.15）给出的过程 $\psi(\cdot,B)$ 满足 $-iv = B$，即，

$$\begin{aligned}\psi(t,B) &= \mathrm{e}^{tA}(\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t)^{-1} B\,\mathrm{e}^{tA^*} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n e^{2a_n t}\left(a_n^2 + a_n\overline{b_n} q_n (e^{2a_n t}-1)\right)}{|a_n + b_n q_n (e^{2a_n t}-1)|^2}(e_n \otimes e_n), \quad t \geq 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

满足 (3.19)（必要时在范数中将 H 替换为 $H_{\mathbb{C}}$），且对所有 $t \geq 0$， $\psi(t,B) \in S^+(H) \oplus iS(H)$。此外，若 $AB \in L(H_{\mathbb{C}})$，则 $\psi(\cdot,B)$ 是 (3.17) 的解。此外，若 $B, AB, A^2B \in L_1(H)$，则 $\psi, A\psi, \psi A^*, A\psi A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$。

证明。 (i) 由方程 (3.17) 的系数在 $L(H_{\mathbb{C}})$的有界子集上是 Lipschitz 连续的这一事实，解的唯一性是显然的。

(ii) 注意到 $\sqrt{B}Q_t\sqrt{B} \in S^+(H)$，因此由例如 [40, 定理 VII.1.4]可知，$\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B}$ 是可逆的，且 $(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1} \in S^+(H)$，以及 $\|(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$。为验证连续可微性，注意对于 $s,t \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1} - (\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_s\sqrt{B})^{-1} \\ &\quad = -2(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_t\sqrt{B})^{-1}\sqrt{B}(Q_t - Q_s)\sqrt{B}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{B}Q_s\sqrt{B})^{-1}\end{aligned}$$

由此，利用 Q_t 的可微性以及逆的等一致有界性即可得到可微性。现在，根据 ψ 的定义、$\|\sqrt{B}\|_{L(H)} \leq \sqrt{\|B\|_{L(H)}}$ 这一事实（见 [40, 定理 VII.1.4]）以及 (1.6)，即可得到界 (3.19)。此外，容易验证对所有 $t \geq 0$ 都有 $\psi(t,B) \in S^+(H)$，并且若有 $A\sqrt{B} \in L(H)$，则 $\psi(\cdot,B)$ 是方程 (3.17) 的一个解（注意， $A\sqrt{B} \in L(H)$ 蕴含 $\sqrt{B}A^* \in L(H)$）。关于 $A^2\sqrt{B} \in L_1(H)$ 情形的最后断言也很容易验证。

(iii)该结论的证明与上述证明完全类似（特别地， [40, 定理 VII.1.4] 保证了逆的存在性和全局有界性）。然而，为了证明 $(i\mathrm{sign}(iB)I_{H_{\mathbb{C}}} + 2\sqrt{|B|}Q_t\sqrt{|B|})^{-1} \in$

$S^+(H) \oplus iS(H)$ 注意到，对于 $C \in S^+(H_{\mathbb{C}})$，我们有

$$(C + i\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}})^{-1} = (\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + C^2)^{-1}(C - i\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}}) \in S^+(H) \oplus iS(H).$$

(iv)该陈述很容易通过手算验证（注意，在这种情况下 A、 B 和Q_t 两两可交换）。为了得到界（3.19），注意到我们再次有 $\|(I_{H_{\mathbb{C}}} + 2BQ_t)^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$。

□

我们还需要以下近似引理:

引理 3.9.假设定理3.1的设定。令$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 H 的一个正交归一基（因而也是 $H_{\mathbb{C}}$的正交归一基），满足[4] $h_n \in D(A^2)$对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。令$P_n \in L(H_{\mathbb{C}})$表示到张成空间$(\{h_1, \ldots, h_n\})$上的正交投影， $n \in \mathbb{N}$。

(i) 设 $u \in S^+(H)$，并令 $u_n = (P_n\sqrt{u}P_n)^2$。则 $u_n \in S^+(H)$，且对于如 (3.18) 中所定义的 ψ，我们有 (a) $\psi(\cdot, u_n) \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$ 解 (3.17)，并满足 $A\psi(\cdot, u_n), \psi(\cdot, u_n)A^*, A\psi(\cdot, u_n)A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$，以及 $\psi(t, u_n) \in S^+(H) \oplus iS(H)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立；(b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\exp(-\mathrm{Tr}(u_n X_t)) |x_0] = \mathbb{E}[\exp(-\mathrm{Tr}(uX_t))|x_0]$ 几乎处处成立，对所有$t \geq 0$成立，其中 X 是满足 (3.2) 的过程；(c) 对所有 $t \geq 0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\mathrm{Tr}(\psi(t, u_n)x_0) - \alpha \int_0^t \mathrm{Tr}(\psi(s, u_n)Q)\, ds\right)$$
$$= \exp\left(-\mathrm{Tr}(\psi(t, u)x_0) - \alpha \int_0^t \mathrm{Tr}(\psi(s, u)Q)\, ds\right) \quad a.s.$$

(ii) 令 $v \in S^+(H) \cup S^-(H)$，并设 $v_n = \mathrm{sign}(v)(P_n\sqrt{|v|}P_n)^2$。则 $v_n \in S^+(H) \cup S^-(H)$，且对于按 (3.20) 定义的 $\psi(\cdot, -iv_n)$，$\psi(\cdot, -iv)$，上述 (a)–(c) 均成立（但将 u_n 替换为 $-iv_n$，并将 u 替换为$-iv$）。

(iii) 假设 A、 u、 v和 Q 可同时对角化，即存在一个正交归一基 $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其对应于 H，以及序列$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathbb{R}$、$(u_k)_{k\in N}$ 属于$[0,\infty$、$(v_k)_{k\in N}$属于 $\mathbb{R}$、$(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$属于 $[0,\infty$，使得 $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k e_k \otimes e_k$、$u - iv = \sum_{k\in\mathbb{N}}(u_k - iv_k)e_k \otimes e_k$ 以及 $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e_k \otimes e_k$。定义 $B_n = \sum_{k=1}^n (u_k - iv_k)e_k \otimes e_k$。那么对于如 (3.21)中所定义的 $\psi(\cdot, B_n)$ $\psi(\cdot, u - iv)$，上述(a)–(c) 均成立（但将 u_n 替换为 B_n，并将u 替换为 $u - iv$）。

证明。 (i)注意，根据构造， $A^2u_n \in L_1(H)$（事实上， u_n 是有限秩的且 $A^2P_n \in L(H)$），因此(a) 由命题 3.8 (ii) 得出。由于 $\|P_m\|_{L(H)} \leq 1$ 和 $P_m \xrightarrow{\text{s.o.t.}} \mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}}$ （“s.o.t.” 是 “ 强算子拓扑 ” 的缩写），根据引理 A.3，我们得到 $\|u_n\|_{L(H)} \leq \|u\|_{L(H)}$ 和 $u_n \xrightarrow{\text{s.o.t.}} u$。此外，由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $t \geq 0$，$\mathrm{Tr}(u_n X_t) \geq 0$，断言(b)由引理A.3和（条件）控制收敛定理得出。最后，(c) 由引理A.2、A.3、命题 3.8(ii) 中的 (3.19)、假设 (3.1) 以及控制收敛定理得出。

[4]注意到， $D(A^2)$是 H 的稠密子空间，例如由 [20, 命题1.8]，因此可以对在 H中稠密的 $D(A^2)$的一个可数子集应用格拉姆－施密特正交化过程，从而得到所需的正交归一基。

(ii)证明与上述证明类似，但我们使用命题 3.8 (iii)而不是命题3.8(ii)。
(iii) 注意到 $e_k \in \cap_{m\in\mathbb{N}}(D(A^m))$，因此特别有 $A^2B_n \in L_1(H_{\mathbb{C}})$。于是我们可以遵循上述类似的推理，但这次使用命题 3.8 (iv)。□

定理3.1的证明。固定 $t > 0$、 $u \in S^+(H)$ 和 $v \in S(H)$，并假设三种情形 (i)–(iii) 中的一种成立。首先注意到，对于如(3.6)、(3.7) 和(3.8) 中的 ψ ，根据命题 3.8，对于所有$t \geq 0$ ，我们有 $\psi(t, u + iv) \in S^+(H) \oplus iS(H)$，并且有界估计 (3.19)；这与 (3.1) 一起确保了 (3.4) 成立。

接下来注意到，根据引理 3.9，只需针对引理 3.9 中指定的初始值 u_n 和 v_n 证明定理的其余断言。为简化记号，我们将省略 ψ 对它们的依赖，即用 $\psi(t)$ 代替 $\psi(t, u_n + iv_n)$。注意，根据引理 3.9， ψ 因此满足以下条件。

条件 A：函数 ψ属于 $C^1([0,\infty)\ S^+(H)\oplus iS(H))$，并满足 (3.17)，使得 $A\psi, \psi A^*, A\psi A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$。

现设 $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为 H （因而也为 $H_{\mathbb{C}}$）的一组正交归一基，满足$h_k \in D(A^*)$，对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。此外，设 $\lambda \in \varrho(A)$，其中 $\varrho(A)$为 A 的预解集（见 [20, 定理 I.1.10]），并令 $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ 表示 A的预解式。令 $P_m \in L(H_{\mathbb{C}})$表示到$\{h_1, \dots, h_m\}$的张成空间上的正交投影，并定义进一步的近似 $\psi_m \in C^1([0,t], L(H_{\mathbb{C}}))$如下：

$$\psi_m(s) = R(\lambda, A)P_m(\lambda - A)\psi(s)(\lambda - A^*)P_mR(\lambda, A^*), \tag{3.22}$$

对所有 $s \geq 0$、 $m \in \mathbb{N}$，即，

$$\psi_m(s) = \sum_{k,\ell=1}^{m} f_{k,\ell}(s)R(\lambda, A)h_k \otimes R(\lambda, A)h_\ell, \quad s \in [0,t],\ m \in \mathbb{N}, \tag{3.23}$$

其中 $f_{k,\ \ell}(s) = \langle(\lambda - A)\psi(s)(\lambda - A^*)h_k, h_\ell\rangle_{H_{\mathbb{C}}}$。注意，由于 $(\lambda - A)\psi(\lambda - A^*) \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$ 这一事实，$f_{k,\ \ell} \in C^1([0,\infty)\ \mathbb{C})$。为简化记号，我们还引入过程 φ, $\varphi_m : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}\ (m \in \mathbb{N})$，其定义见 (3.24

$$\varphi_m(s) = \alpha\int_0^s \mathsf{Tr}(\psi_m(s)Q)\,ds, \quad \varphi(s) = \alpha\int_0^s \mathsf{Tr}(\psi(s)Q)\,ds, \quad s \in [0,t],\ m \in \mathbb{N},$$

并引入过程 Z, Z^m: $[0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}\ (m \in \mathbb{N})$，其定义见 3.25

$$Z_s^m = \exp(-\mathsf{Tr}(\psi_m(t-s)X_s) - \varphi_m(t-s)), \quad Z_s = \exp(-\mathsf{Tr}(\psi(t-s)X_s) - \varphi(t-s)),$$

$s \in [0,t], m \in \mathbb{N}$。引入 ψ_m、 φ_m 和 Z_m 的原因是，由于存在无界算子 A，我们无法直接获得整个过程 X 的动力学（因为一般而言， X 不是半鞅），因此也无法直接对 Z 应用 Itô 公式。相反，我们对 Z_t^m 应用 Itô 公式，并利用 ψ_m 具有形式 (3.23) 这一点，从而可以利用 (3.2)，因为它是实值半鞅。更具体地，设 $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是[5] 的一组正交归一基，使得 $(g_j)_{j=1}^m$ 是张成空间 $\mathsf{span}(\{R(\lambda, A)h_1, \dots, R(\lambda, A)h_m\})$ 的一组正交归一基

[5]注意，$(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 可以通过对 $(R(\lambda, A)h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 应用格拉姆－施密特正交化过程得到。

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，特别是当 $j > \ell$ 时，$\langle R(\lambda, A)h_\ell, g_j\rangle_H = 0$。于是，由 (3.2)、$\psi_m$ 具有形式 (3.23) 这一事实、Itô 公式以及 (3.24)，我们得到 (3.26)

$$
\begin{aligned}
Z_s^m &= \exp\left(\mathrm{Tr}\, t\,(\psi_m(X_s - \varphi_m(t-s))\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{j,k,\ell=1}^{m} f_{k,\ell}(t-s)\langle g_j, X_s R(\lambda, A)h_k\rangle_{H_\mathbb{C}}\langle R(\lambda, A)h_\ell, g_j\rangle_H - \varphi_m(t-s)\right) \\
&= Z_0^m + \int_0^s Z_r^m\, \mathrm{Tr}\left((\psi_m'(t-r) - A\psi_m(t-r) - \psi_m(t-r)A^*)X_r\right) dr \\
&\quad - \int_0^s Z_r^m\, \mathrm{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}\, dW_r\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\, dW_r^*\sqrt{X_r}\right)\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\int_0^s Z_r^m\left(\mathrm{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}(h_i\otimes h_j)\sqrt{Q} + \sqrt{Q}(h_j\otimes h_i)\sqrt{X_r}\right)\right)\right)^2 dr
\end{aligned}
$$

$\mathbb{P}$-几乎处处对所有 $s \in [0, t]$ 成立。

注意，当 $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h) = 0$ 且 $C \in L(H_\mathbb{C})$ 时，$\langle C^T h, g\rangle_{H_\mathbb{C}} = \langle Cg, h\rangle_{H_\mathbb{C}}$。因此，注意到对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Im}(h_k) = 0$，我们有 (3.27)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\mathbb{N}}(\mathrm{Tr}(C(h_i\otimes h_j)))^2 &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}}(\langle Ch_i, h_j\rangle_{H_\mathbb{C}})^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{N}}\langle Ch_i, h_j\rangle_{H_\mathbb{C}}\langle C^T h_j, h_i\rangle_{H_\mathbb{C}} \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}}\langle Ch_i, h_j\rangle_{H_\mathbb{C}}\langle h_j, (C^T)^* h_i\rangle_{H_\mathbb{C}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}}\langle Ch_i, (C^T)^* h_i\rangle_{H_\mathbb{C}} = \mathrm{Tr}(C^T C)
\end{aligned}
$$

对所有 $C \in L_2(H_\mathbb{C})$ 成立。还注意到 $\mathrm{Tr}(C + D) = \mathrm{Tr}\, C + \mathrm{Tr}\, D$, $(CD)^T = D^T C^T$, $\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(C^T)$, $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$，且对所有 $C, D \in L_1(H_\mathbb{C})$，$(C^T)^T = C$，因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}(h_i\otimes h_j)\sqrt{Q} + \sqrt{Q}(h_j\otimes h_i)\sqrt{X_r}\right)\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{Tr}\left(\sqrt{Q}(\psi_m(t-r) + \psi_m^T(t-r))\sqrt{X_r}(h_i\otimes h_j)\right)\right)^2 \\
&= \mathrm{Tr}\left((\psi_m(t-r) + \psi_m^T(t-r))Q(\psi_m(t-r) + \psi_m^T(t-r))X_r\right),
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

这里第二个等号用到了 (3.27)，以及 $X_r, \psi_m(r) \in L_1(H_\mathbb{C})$ 这一事实，以确保所有量都有定义。注意，$\psi(r) \in S^+(H) \oplus iS(H)$ 意味着 $\psi_m(r) \in S^+(H) \oplus iS(H)$，特别是 $\psi_m(r)^T = \psi_m(r)$。总之，(3.26) 化简为

$$
\begin{aligned}
Z_s^m = Z_0^m &+ \int_0^s Z_r^m\, \mathrm{Tr}\left((\psi_m'(t-r) - A\psi_m(t-r) - \psi_m(t-r)A^*)X_r\right) dr \\
&+ 2\int_0^s Z_r^m\, \mathrm{Tr}\left(\psi_m(t-r)Q\psi_m(t-r)X_r\right) dr \\
&- \int_0^s Z_r^m\, \mathrm{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}\, dW_r\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\, dW_r^*\sqrt{X_r}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

对所有 $s \in [0, t]$，$\mathbb{P}$-几乎处处。

接下来，我们希望在(3.29) 中取 $m \to \infty$ 。根据引理A.4以及事实是$\psi, A\psi, \psi A^*, A\psi A^* \in C^1([0,\infty)\ L_1(H_{\mathbb{C}}))$（见条件 A），我们有 (3.30)

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\|\psi_m\|_{C^1([0,t],L_1(H_{\mathbb{C}}))} + \|A\psi_m\|_{C^1([0,t],L(H_{\mathbb{C}}))} + \|\psi_m A^*\|_{C^1([0,t],L(H_{\mathbb{C}}))}\right) < \infty,$$

and

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|\varphi_m\|_{C([0,t],\mathbb{C})} \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \alpha \int_0^t |\,\mathsf{Tr}(\psi_m(s)Q)|\,ds < \infty, \tag{3.31}$$

以及 $\varphi_m(s) \to \varphi(s)$， $\psi_m(s)$ 强算子拓扑 $\to \psi(s)$， $A\psi_m(s)$ 强算子拓扑 $\to A\psi(s)$， $\psi_m(s)A^*$ 强算子拓扑 $\to A^*$， $\psi_m' s \to \psi' s$ $s \in [0,t]$ $m \in \mathbb{N}$ 3 ( ) 强算子拓扑() 对所有 ， 。这与引理 A. 以及 ψ 满足 (3.17) 这一事实一起意味着

$$\lim_{m\to\infty} |\mathsf{Tr}\left((\psi_m'(r) - A\psi_m(r) - \psi_m(r)A^* + 2\psi_m(r)Q\psi_m(r))X_{t-r}\right)| = 0 \tag{3.32}$$

对所有 $r \in [0,t]$。我们希望在此强调，构造 ψ_m涉及预解式，即本质上是在 $D(A)$ 中进行正交投影，而不是在 H 中进行正交投影，这是确保 (3.32) 所必需的 —— 事实上，只有在 $D(A)$中进行投影，我们才能控制住 $A\psi_m$。此外，(3.30) 意味着

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{r\in[0,t]} |Z_r^m| \le \sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{r\in[0,t]} \mathrm{e}^{-\varphi_m(r)} < \infty, \tag{3.33}$$

且引理A.3 蕴含，对于所有 $r \in [0,t]$， $\lim_{m\to\infty} Z_r^m = Z_r$ 几乎处处成立。通过与 (3.28) 类似的论证，我们可以计算 Z^m 的二次变差:

(3.34)

$$\begin{aligned}\langle Z^m\rangle_s &= \left\langle \int_0^{\cdot} Z_r^m\, \mathsf{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}\,dW_r\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\,dW_r^*\sqrt{X_r}\right)\right)\right\rangle_s \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \int_0^s \left|Z_r^m\, \mathsf{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}(h_i\otimes h_j)\sqrt{Q} + \sqrt{Q}(h_j\otimes h_i)\sqrt{X_r}\right)\right)\right|^2 dr \\ &= 4\int_0^s |Z_r^m|^2\, \mathsf{Tr}(\psi_m(t-r)Q\psi_m(t-r)X_r)\,dr,\end{aligned}$$

对所有 $s \in [0,t]$。根据上述观察，我们可以得出结论:

$$\langle Z^m\rangle_s \to 4\int_0^s |Z_r|^2\, \mathsf{Tr}(\psi(t-r)Q\psi(t-r)X_r)\,dr \quad \text{a.s.} \tag{3.35}$$

对所有 $s \in [0,t]$。将 (3.29) 与界 (3.30) 和 (3.31) 以及上述收敛结果结合起来，我们得到

(3.36)

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t Z_r^m\, \mathsf{Tr}\left(\psi_m(t-r)\left(\sqrt{X_r}\,dW_r\sqrt{Q} + \sqrt{Q}\,dW_r^*\sqrt{X_r}\right)\right) \quad \text{a.s.}$$

由 (3.24)、(3.25)以及以下事实可知： $\psi(0) = u_n + iv_n$ （请回忆，我们是在引理 3.9 的框架下工作的）：

$$Z_t = \exp(-\mathsf{Tr}((u_n - iv_n)X_t)) \quad \text{and} \quad Z_0 = \exp\left(-\mathsf{Tr}(\psi(t)x_0) - \alpha\int_0^t \mathsf{Tr}(\psi(s)Q)\,ds\right).$$

因此特别有 $|Z_t| \le 1$，这意味着(3.36)右端的随机积分在给定 x_0 的条件下具有有限矩，因此其期望

在 x_0 为 0 的条件下。这意味着对 (3.36) 取条件期望可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp(-\operatorname{Tr}((u_n - iv_n)X_t))|x_0\right] = \mathbb{E}\left[Z_t|x_0\right]\\ &\quad = \mathbb{E}[Z_0|x_0] = \exp\left(-\operatorname{Tr}(\psi(t)x_0) - \alpha\int_0^t \operatorname{Tr}(\psi(s)Q)\,ds\right).\end{aligned} \tag{3.37}$$

应用引理 3.9 完成了定理 3.1 的证明。 □

3.3.傅里叶变换和拉普拉斯变换示例。本节提供 Wishart 过程的傅里叶变换和拉普拉斯变换的一些具体计算。

首先，在定理 3.1 (ii) 中取 $u = 0$ 和 $v = r\mathrm{I}_H$ ($r \in \mathbb{R}$)，即可得到 $\|X_t\|_{L_1(H)}$ $= \operatorname{Tr}(X_t)$ 的特征函数。稍微滥用一下记号，我们在下文的推论 3.10 中写作 $\psi(t, r)$，而不采用定理 3.1 (ii) 中使用的 $\psi(t, -ir\,\mathrm{I}_H)$。

推论 3.10。假设处于命题 3.1 的情形下。那么

$$\mathbb{E}\left[\exp(ir\|X_t\|_{L_1(H)})\,|\,x_0\right] = \mathbb{E}\left[\exp(ir\operatorname{Tr}(X_t))\,|\,x_0\right] = \exp(-\operatorname{Tr}(\psi(t,r)x_0) - \varphi(t,r)) \tag{3.38}$$

对于所有 $r \in \mathbb{R}$，其中

$$\psi(t,r) = r\,\mathrm{e}^{tA}\left(i\,\mathrm{I}_{H_{\mathbb{C}}} + 2rQ_t\right)^{-1}\mathrm{e}^{tA^*}, \tag{3.39}$$

$$\varphi(t,r) = \alpha\int_0^t \operatorname{Tr}(\psi(s,r)Q)\,ds, \tag{3.40}$$

对于所有 $r \in \mathbb{R}$、 $t \geq 0$，以及 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 由(3.3)定义。

例 3.11. 假设定理 3.1 的设定和记号，其中 $\alpha = n \in \mathbb{N}$，并且进一步假设 $x_0 = \sum_{j=1}^n x_j h_j \otimes h_j$ 和 $u = \sum_{j=1}^m u_j g_j \otimes g_j$，对于某些 $m \in \mathbb{N}$、 x_1、……、 x_n、 u_1、……、 $u_m \in [0, \infty)$，以及某些 H 中的标准正交系 $(h_j)_{j=1}^n$ 和 $(g_j)_{j=1}^m$。固定 $t \geq 0$，并定义矩阵 $Q_t \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为

$$(\hat{Q}_t)_{j,k} = \sqrt{u_j u_k}\int_0^t \langle\sqrt{Q}\,\mathrm{e}^{sA}\,g_j, \sqrt{Q}\,\mathrm{e}^{sA}\,g_k\rangle_H\,ds, \qquad j,k \in \{1,\ldots,m\}.$$

那么 $\det(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u}) = \det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)$ 且

$$\begin{aligned}&\|\sqrt{x_0}\,\mathrm{e}^{tA}\,\sqrt{u}(I_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-\frac{1}{2}}\|^2_{L_2(H)}\\ &\quad = \sum_{j=1}^m \langle\sqrt{u}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-1}g_j, \mathrm{e}^{tA^*}\,x_0\,\mathrm{e}^{tA}\,\sqrt{u}g_j\rangle_H\\ &\quad = \sum_{j,k=1}^m \sqrt{u_j}\langle\sqrt{u}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-1}g_j, g_k\rangle_H\langle\mathrm{e}^{tA^*}\,x_0\,\mathrm{e}^{tA}\,g_j, g_k\rangle_H\\ &\quad = \sum_{j,k=1}^m \sqrt{u_j u_k}\left((\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}\sum_{i=1}^n x_i\langle h_i, \mathrm{e}^{tA}\,g_j\rangle_H\langle h_i, \mathrm{e}^{tA}\,g_k\rangle_H.\end{aligned}$$

总之，由 (3.12) 我们得到 (
3.41)

$$\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(X_t u)] = (\det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t))^{-\frac{n}{2}} \times \exp\left(\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{u_j u_k}\left((\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}\langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_j\rangle_H \langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_k\rangle_H\right).$$

类似地，对于 $\psi(t) = \mathrm{e}^{tA}\sqrt{u}(i\mathrm{I}_H + 2\sqrt{u}Q_t\sqrt{u})^{-1}\sqrt{u}e^{tA^*}$, $t \geq 0$，我们有

$$\operatorname{Tr}(\psi(t)x_0) = \sum_{j,k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{u_j u_k}\left((i\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}\langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_j\rangle_H \langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_k\rangle_H$$

and

$$\int_0^t \operatorname{Tr}(\psi(s)Q)\, ds = \sum_{j,k=1}^{m}\left((i\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}(\hat{Q}_t)_{j,k}\Big),$$

由此，根据定理 3.1 (ii)，我们得到

$$\mathbb{E}[\exp(i\operatorname{Tr}(X_t u)] = \exp\Big(-n\sum_{j,k=1}^{m}\left((i\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}(\hat{Q}_t)_{j,k}\Big) \times \exp\Big(-\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{u_j u_k}\left((i\,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^m} + 2\hat{Q}_t)^{-1}\right)_{j,k}\langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_j\rangle_H \langle h_i, \mathrm{e}^{tA} g_k\rangle_H\Big).$$

例 3.12. 我们考虑以下例子（在命题 3.1 的设定下）：$H = L^2(0,1)$，$\alpha = n \in \mathbb{N}$，$A = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j h_j \otimes h_j$ 满足 $a_j = -j^2\pi^2$，且 $h_j(x) = \sin(j\pi x)$，$x \in (0,1)$，以及 $Q = \mathrm{I}_{L^2}$，即 A 是 Dirichlet 拉普拉斯算子（另见注 2.4）。此外，我们令 $h \in H$ 满足 $\|h\|_H = 1$，并设 $u = h \otimes h$。于是可得 $\sqrt{u}Q_t\sqrt{u}$（其中 Q_t 如 (3.3) 中所示）为

$$\sqrt{u}Q_t\sqrt{u} = \int_0^t \left\|\mathrm{e}^{sA} h\right\|_H^2 ds\, h \otimes h.$$

为便于记号，我们引入 $q_t := \int_0^t \left\|\mathrm{e}^{sA} h\right\|_H^2 ds$，由此可从（3.12）得到以下结果

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\langle X_t h, h\rangle_H)\right] = (1+2q_t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\tfrac{1}{1+2q_t}\|\sqrt{x_0}\,\mathrm{e}^{tA} h\|_H^2\right).$$

4. Characterisation of infinite-dimensional Wishart processes

本节将确立无限维Wishart过程存在的必要条件，即方程 (1.1) 存在解的必要条件。如引言中所述，我们考虑两种情形：首先，我们证明，如果 Q 是单射，并且对于某个 $t > 0$，e^{tA} 也是单射，那么Wishart过程的存在性蕴含 $\alpha \in \mathbb{N}$，见下文定理 4.3。该结果的证明基于上一节中计算得到的拉普拉斯变换以及 Wishart 分布的有限维刻画 [25, 32, 33]。

其次，我们证明（不对半群 $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ 作任何假设）：若 X 是一个 Wishart 过程，则几乎处处对几乎所有$t > 0$，要么 $\operatorname{rank}(X_t) \geq \operatorname{rank}(Q)$，要么 $\alpha \in \mathbb{N}$ 满足 $\alpha < \operatorname{rank}(Q)$ 且 $\operatorname{rank}(X_t) = \alpha$，详见

推论 4.8。特别地，若 rank(Q) $=\infty$，则存在有限秩 Wishart 过程当且仅当 $\alpha \in \mathbb{N}$，见下文推论 4.11。

4.1. 当 Q 和 e^{tA} 为单射时 Wishart 过程的刻画。回顾以下非中心 Wishart 分布的刻画，参见 [25,定理 1。3], [32], 或 [33, 定理 1。1]（另见引理 A.1）：

定理 4.1. 设 $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,\infty)$, 和 $b \in S^+(\mathbb{R}^n)$, 以及 $Q \in S^{++}(\mathbb{R}^n)$。那么存在一个概率测度 μ，其定义在 $S^+(\mathbb{R}^n)$ 上，满足

$$\int_{S^+(\mathbb{R}^n)} \exp(-\operatorname{Tr}(u\xi))\,\mu(d\xi) = \det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + 2Qu)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp(-bu(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + 2Qu)^{-1}), \tag{4.1}$$

对所有 $u \in S^+(\mathbb{R}^n)$，当且仅当以下两个条件之一成立时：

(i) $\alpha \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ *and* $\operatorname{rank}(b) \le \alpha$,
(ii) $\alpha \ge n-1$.

以下是推论 3.4 和引理 A.1 的直接推论：

推论 4.2. 假设定理 3.1 的条件成立，并设 $(h_i)_{i=1}^n$ 是 H 中的一个标准正交系。定义 P_n: $\mathbb{R}^n \to H$，使得 $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i h_i$.。那么 $Y = P_n^* X P_n$ 是一个取值于 $S^+(\mathbb{R}^n)$ 的随机过程，其拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(uY_t)|x_0] \\
&= \det(I_{\mathbb{R}^n} + 2\sqrt{u}P_n^* Q_t P_n \sqrt{u})^{-\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \exp\left(-\operatorname{Tr}\left(P_n^* \,\mathrm{e}^{tA^*}\, x_0\, \mathrm{e}^{tA}\, P_n \sqrt{u}(I_{\mathbb{R}^n} + 2\sqrt{u}P_n^* Q_t P_n \sqrt{u})^{-1}\sqrt{u}\right)\right) \qquad (4.2)\\
&= \det(I_{\mathbb{R}^n} + 2P_n^* Q_t P_n u)^{-\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \exp\left(-\operatorname{Tr}\left(P_n^* \,\mathrm{e}^{tA^*}\, x_0\, \mathrm{e}^{tA}\, P_n u(I_{\mathbb{R}^n} + 2P_n^* Q_t P_n u)^{-1}\right)\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

对所有 $u \in S^+(\mathbb{R}^n)$，其中 Q_t 在 (3.3) 中定义。

证明。由于 X 取值于 $S_1^+(H)$，因此 $P_n^* X P_n$ 取值于 $S^+(\mathbb{R}^n)$。此外，注意到，(4.2) 可由推论 3.4 中关于 $\mathbb{E}[\exp(-\operatorname{Tr}(uP_n^* X_t P_n))]$ 的公式推出，其中对具有适当定义域和值域的算子 A、B 和 C，有 $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(CBA)$。另外，由引理 A.1 可知，(4.3) 可由 (4.2) 推出。□

结合定理 4.1 和推论 4.2，我们得到如下结论：

定理 4.3。设 H 是可分实希尔伯特空间，设 A: $D(A) \subset H \to H$ 是某个 C_0-半群的生成元，设 $Q \in S^+(H)$，设 $\alpha \in \mathbb{R}$，设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$ 是一个足够丰富的滤波概率空间，允许存在一个 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$-布朗运动，设 $x_0 \in L^1((\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}); S_1^+(H))$，并假设

$$\int_0^t \| \mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|_{L_2(H)}^2 \, ds < \infty \tag{4.4}$$

对所有 $t \ge 0$均成立。此外，假设 Q 是单射，且存在一个 $\tau > 0$，使得 $\mathrm{e}^{\tau A}$ 是单射。那么，以下条件等价：

(i) $\alpha \in \mathbb{N}$ 且 $\operatorname{秩}(x_0) \le \alpha$ 几乎处处。

(ii)存在一个 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-布朗运动 W 以及一个适应随机过程 X: $[0,\infty)\times\Omega \to S_1^+(H)$，具有连续样本路径并满足

$$\begin{aligned}\langle X_t g,h\rangle_H = \langle x_0 g,h\rangle_H &+ \int_0^t \left(\alpha\langle Qg,h\rangle_H + \langle X_s Ag,h\rangle_H + \langle X_s g,Ah\rangle_H\right) ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g,h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g,h\rangle_H\end{aligned} \tag{4.5}$$

对所有 $t\geq 0$ 以及所有 h, $g\in D(A)$。

证明。(i) $\to$ (ii) 由定理 2.1 得出。对于反向蕴含，注意到根据对 Q 的假设以及 $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$，我们可以得出，在 (3.3) 中定义的 $Q_\tau = \int_0^\tau e^{sA^*} Q e^{sA}\, ds$ 属于 $S_1^{++}(H)$：事实上，根据 (4.4)，$Q_t \in S_1^+(H)$；此外，由于半群性质，对于所有 $s\in[0,\tau]$，e^{sA} 都是单射。因此，对于 $h\in H\setminus\{0\}$，对所有 $s\in[0,\tau]$，我们有 $\mathrm{e}^{sA}h\neq\{0\}$；又由于 Q 也是单射，$\langle Q_\tau h,\ h\rangle_H = \int_0^\tau \langle Q\,\mathrm{e}^{sA}h、\mathrm{e}^{sA}h\rangle_H\, ds > 0$，所以确实有 $Q_\tau\in S_1^{++}(H)$。

令 $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为 H 的正交归一基，并对于 $n\in\mathbb{N}$ 令 P_n: $\mathbb{R}^n \to H$由 $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i h_i$定义。注意，对于所有 $n\in\mathbb{N}$, $P_n^* Q_\tau P_n \in S^{++}(\mathbb{R}^n)$。现在考虑过程 $P_n^* X P_n$，由推论 4.2（其中 $t=\tau$）和定理 4.1可知，$\alpha\in\mathbb{N}$（因为总可以选取 $n>\alpha+2$），此外，$\mathrm{rank}(P_n^*\mathrm{e}^{\tau A^*}x_0\mathrm{e}^{\tau A}P_n)\leq\alpha$ 几乎处处成立，对所有 $n\geq\alpha+2$均如此。注意，如果 $h\notin\ker(\mathrm{e}^{\tau A^*}x_0\mathrm{e}^{\tau A})$，那么存在一个 $N_h\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\geq N_h$，$P_n^*\mathrm{e}^{\tau A^*}x_0\mathrm{e}^{\tau A}P_nP_n^*h\neq 0$。特别地，如果对于所有 $n\geq\alpha+2$，$\mathrm{rank}(P_n^*\mathrm{e}^{\tau A^*}x_0\mathrm{e}^{\tau A}P_n)\leq\alpha$，那么 $\mathrm{rank}(\mathrm{e}^{\tau A^*}x_0\mathrm{e}^{\tau A})\leq\alpha$。由于 $\mathrm{e}^{\tau A}$ 是单射，我们可以得出 $\mathrm{rank}(x_0)\leq\alpha$。□

备注 4.4. 对某个 $\tau>0$，$\mathrm{e}^{\tau A}$ 是单射的这一假设并非无关紧要：例如，$L^2(0,1)$ 上的移位半群不满足此性质。另一方面，根据谱映射定理（例如参见 [35, 定理 10.55]），若 A 是自伴的，则对所有 $t\geq 0$，e^{tA} 都是单射。此外，若 A 有界，则 $t\mapsto\mathrm{e}^{tA}$ 是强连续的，因此对于足够小的 $t>0$，e^{tA} 是单射的。

注 4.5. 我们不能根据(4.2) 得出 $P_n^*XP_n$ 是 [15, 定义2.1], 意义下的仿射过程，因为一般而言 $P_n^*XP_n$ 不是马尔可夫过程。然而，如果 $A\equiv 0$，则存在一个 n维仿射马尔可夫过程 Y，使得 Y_t 和 $P_n^*X_tP_n$ 对于所有 $t\geq 0$都具有相同的分布；事实上，Y正是 [15, 定理 2.4]记号下具有可容许参数集$(P_n^*QP_n, \alpha P_n^*QP_n, 0, 0, 0, 0, 0)$ 的仿射过程。这一观察可由 4.3 和 [15, 定理 2.4]推出。

注记 4.6.假设定理 4.3 的设定成立，并且还假设 $\alpha\in\mathbb{N}$。根据推论 3.3，任何满足(4.5)的过程都与定理2.1 中构造的 Wishart过程具有相同的分布，因此其秩至多为 $\alpha\in\mathbb{N}$。事实上，根据下文的推论 4.9，我们得到，对于几乎所有 $t>0$，秩 $(X_t) = \alpha$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

4.2.无参数限制的有限秩 Wishart过程的特征描述。下面的命题受 [15, 命题 4.18] 的启发:

命题 4.7。设 $\alpha\in\mathbb{R}$、$m\in\mathbb{N}$，令 H 为可分实希尔伯特空间，令 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 为滤波概率空间，令 A: $D(A)\subset H\to H$为

C_0-半群的生成元，并令 $Q \in S^+(H)$ 满足秩$(Q) > m$。此外，假设存在一个 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-布朗运动 W 以及一个适应随机过程 $X\colon [0,\infty)\times\Omega \to S^+(H)$，其具有连续样本路径，并满足 $\mathbb{P}(\text{秩}(X_0) = m) > 0$，且

$$\begin{aligned}\langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t (\alpha\langle Qg, h\rangle_H + \langle X_s Ag, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H)\, ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H\end{aligned} \tag{4.6}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 h、$g \in D(A)$。则 $\alpha \geq m_\circ$ 此外，若

$$\mathbb{P}(\{\operatorname{rank}(X_0) = m\} \cap \{\inf\{t \geq 0\colon \operatorname{rank}(X_t) > m\}\}) > 0 \tag{4.7}$$

则 $\alpha = m_\circ$

该命题的证明涉及对 $\mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ 值过程 $P_{m+1}^* X_t P_{m+1}$ 的行列式应用 Itˆo 公式，其中 $P_{m+1}\colon \Omega \to L(\mathbb{R}^{m+1}, H)$ 满足 $X_0|_{\{\operatorname{rank}(X_0)=m\}} = P_{m+1}^* D P_{m+1}$ 对于某个正的对角算子D，且 $\ker(P_{m+1}^* X_0 P_{m+1}) \setminus \ker(P_{m+1}^* Q P_{m+1}) \neq \emptyset$。因此，该方法与 [15, 命题 4.18] 的证明类似。然而，由于以下两个原因，证明的细节更为复杂：当 X_0 的特征向量不属于 A 的定义域时，需要进行精细的逼近论证；此外，我们还需要处理非确定性的初始值。为方便读者，证明见附录 C。

定理 4.3 的最后一个断言意味着，如果存在一个 $m <$秩(Q)，使得对于某个非平凡区间 $[s,t]$ 内的所有 u，秩 $X_u(\omega) = m$ 以正概率成立，那么必然有 $\alpha = m_\circ$ 以下推论将这一点形式化。

推论 4.8。设 $\alpha \in \mathbb{R}$，且 H 为可分实希尔伯特空间，设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 为滤波概率空间，设 $A\colon D(A) \subset H \to H$ 为 C_0-半群的生成元，设 $Q \in S^+(H)$，并假设存在一个 $L_2(H)$-柱状（$\mathcal{F}_t$）$_{t\geq 0}$-布朗运动 W 以及一个适应随机过程 $X\colon [0,\infty) \times \Omega \to S^+(H)$，其具有连续样本路径并满足

$$\begin{aligned}\langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t (\alpha\langle Qg, h\rangle_H + \langle X_s Ag, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H)\, ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H\end{aligned} \tag{4.8}$$

对于所有 $t \geq 0$，以及所有 h、$g \in D(A)$。那么，要么对于几乎所有 $t > 0$，$\operatorname{rank}(X_t) \geq \operatorname{rank}(Q)$ 几乎必然成立；要么 $\alpha \in \mathbb{N} \cap [0, \operatorname{rank}(Q))$ 且 $\operatorname{rank}(X_t) = \alpha$ 对几乎所有 $t > 0$ 几乎必然成立。

证明。假设对于几乎所有 $t > 0$，秩$(X_t) \geq$ 秩(Q) 不几乎处处成立。于是存在一个 $m \in \mathbb{N} \cap [0,$秩$(Q))$ 和一个 $t > 0$，使得

$$\lambda \otimes \mathbb{P}(\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega\colon \operatorname{rank}(X_s(\omega)) = m\}) \neq 0.$$

由于 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是可预测的，且秩$(\cdot)$是下半连续的，因此可确保存在 $0 \leq r < s \leq t$ 和 $B \in \mathcal{F}_r$，使得对于所有 $(u,\omega) \in$，秩$(X_u(\omega)) = m$

$[r,s]\times B$。注意，(4.8)意味着

$$\begin{aligned}\langle X_u g,h\rangle_H = \langle X_r g,h\rangle_H &+ \int_r^u \left(\alpha\langle Qg,h\rangle_H + \langle X_v Ag,h\rangle_H + \langle X_v g,Ah\rangle_H\right) dv \\ &+ \int_r^u \langle \sqrt{X}_v\, dW_v \sqrt{Q}g,h\rangle_H + \int_r^u \langle \sqrt{Q}\, dW_v^* \sqrt{X}_v g,h\rangle_H\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于所有 $u\geq 0$ 以及所有 $h,g\in D(A)$。显然，若 $m=0$，则 $X\equiv 0$，因此必有$\alpha=0$。若 $m>0$，我们应用命题 4.7，其中取 $X_0=X_r$ 和 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+r}$，从而得出 $\alpha=m$，这就导致矛盾。□

推论 4.9. 假设定理 2.1 的设定，特别地，设 X 是满足 (2.4) 的过程，对所有 $g,h\in D(A)$ 均成立。此外，假设 rank$(Q)>n$。则对于几乎所有 $t>0$，rank$(X_t)=n$ $\mathbb{P}$-几乎必然成立。

证明。根据 X 的解的构造（见定理 2.1 的证明），我们知道 X 的秩至多为 n。因此，结论可直接由推论 4.8 得出。□

注4.10.注 2.2 和推论4.9的一个直接结果是，n 随机独立的 H-值奥恩斯坦-乌伦贝克过程 $Y_{(1)}$ . .. , $Y_{(n)}$（如 2.14 中所定义）在满足秩$(Q)>n$的条件下，对于几乎所有 $t\geq 0$，都是线性独立的 $\mathbb{P}$-a.s.。事实上，即使对于秩$(Q)=n$，人们也会预期情况如此，但这显然需要不同的证明。

结合上述结果与定理 2.1，我们得到有限秩 Wishart 过程的如下刻画：

推论4.11。设 $\alpha\in\mathbb{R}$，设 H 为一个可分实希尔伯特空间，设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F})_{t\geq 0})$ 为一个滤波概率空间，设 A: $D(A)\subset H\to H$ 为一个 C_0-半群的生成元，设 $Q\in S^+(H)$ 满足 $\int_0^t \|\mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|^2_{L_2(H)}\,ds<\infty$ 对所有 $t\geq 0$，并设X_0:$\Omega\to S_1^+(H)$ 为 $\mathcal{F}_0$-可测的。则以下各项等价：

(i) 存在一个 $L_2(H)$-柱状$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 布朗运动和一个适应随机过程 $X\colon[0,\infty)\times\Omega\to S^+(H)$，具有连续样本路径，满足秩$(X_t)<$ 秩(Q)，几乎处处对几乎所有 $t\geq 0$ 并且

$$\begin{aligned}\langle X_t g,h\rangle_H = \langle x_0 g,h\rangle_H &+ \int_0^t \left(\alpha\langle Qg,h\rangle_H + \langle X_s Ag,h\rangle_H + \langle X_s g,Ah\rangle_H\right) ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q}g,h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g,h\rangle_H\end{aligned}$$

对于所有 $t\geq 0$ 以及所有 h，$g\in D(A)$。

(ii) $\alpha\in\mathbb{N}\cap[0,$秩$(Q))$.

此外，若这些等价条件成立，则对几乎所有 $t\in[0,\infty$，秩$(X_t)=\alpha$ $\mathbb{P}$-a.s.）。

证明。由定理 2.1 可得 (ii)⇒(i)。假设 (i)，则存在一个 $m\in\mathbb{N}_0\cap[0,$秩$(Q))$，使得 $\lambda\otimes\mathbb{P}(\{(s,\omega)\in[0,1]\times\Omega$: 秩$(X_s(\omega))=m\})>0$。因此，由推论 4.8 可得 (ii)。最后一个结论由推论 4.9 得出。□

备注 4.12。我们认为，推论 4.11 甚至为有限维情形提供了新的见解；事实上，它推广了以下特征刻画：

[25, 定理 3.10]将线性漂移和矩阵 Q 纳入 Wishart 过程的动态中。

5. Infinite dimensional Wishart processes are Feller

本节研究取值于 $S_1^+(H)$ 的 Wishart 过程的 Feller 性质。为此，我们扩充紧算子 $K(H)$ 空间，将恒等算子 I_H （由额外维度表示）纳入其中，并证明在这个扩充空间中赋予相对弱-$*$-拓扑的正迹类算子锥是一个局部紧 Polish 空间。

5.1.锥$S_1^+(H)\times\mathbb{R}_+$ 是一个局部紧Polish空间。令 H 为一个可分Hilbert 空间。回顾一下， $K(H)$的对偶空间可在配对 $\langle A, B\rangle_{L_1(H)\ K(H)} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\langle Ae_k, Be_k\rangle$下与$L_1(H)$相识别，其中$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$是 H 的一个正交归一基[6] （并且 $L_1(H)$的对偶空间可通过相同的配对与 $L(H)$相识别）。因此，我们有 $K(H)\times\mathbb{R}$ 的对偶空间可在典范配对下与$S_1(H)\times\mathbb{R}$ 相识别

$$\langle (A,x),(B,y)\rangle_{L_1(H)\times\mathbb{R},K(H)\times\mathbb{R}} = \langle A,B\rangle_{L_1(H),K(H)} + xy. \tag{5.1}$$

为简化记号，我们引入另一个配对$\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$:$(L_1(H)\times\mathbb{R})\times(K(H)\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\langle\!\langle (A,x),(B,y)\rangle\!\rangle = \langle A,B\rangle_{L_1(H),K(H)} + (\langle A,\mathrm{Id}\rangle_{L_1(H),L(H)} + x)y\,. \tag{5.2}$$

为了说明 $K(H)\times\mathbb{R}$ 上的每个线性泛函都可以通过这一配对来表示，我们将其与公式 (5.1) 给出的典范配对进行比较。事实上，注意到

$$L\colon L_1(H)\times\mathbb{R}\to L_1(H)\times\mathbb{R},\quad L(A,x) = (A, x+\langle A,\mathrm{Id}\rangle_{L_1(H),K(H)})$$

是一个同构，并且对于每个 $(B,y)\in K(H)\times\mathbb{R}$，我们有

$$\langle\!\langle (A,x),(B,y)\rangle\!\rangle = \langle L(A,x),(B,y)\rangle_{L_1(H)\times\mathbb{R},K(H)\times\mathbb{R}}.$$

命题 5.1. 令 H 为一个可分Hilbert空间，令 $K := S_1^+(H)\times\mathbb{R}_+$，并令 τ_{w^*} 为 K 上的相对弱-$*$ 拓扑。那么：

(i) K 是 $S_1(H)\times\mathbb{R}$中的凸锥；(ii) 对所有$(A,x)\in S_1(H)\times\mathbb{R}$，当且仅当对所有满足 $B + y\,\mathrm{Id}\geq 0$的$(B,y)\in S_c(H)\times[0,\infty)$，$\langle (A,x),(B,y)\rangle\geq 0$时，$(A,x)\in K$；(iii) 相对于弱-$*$-拓扑，$K$ 在 $S_1(H)\times\mathbb{R}$ 中是闭的；(iv) (K,τ_{w^*})是 σ-紧且局部紧的；(v) (K,τ_{w^*})是可分且可度量化的。

证明。设 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H 的正交归一基。回忆一下，对于 $A\in S_1(H)$，我们有 $A\geq 0$ 当且仅当 $\langle Ah,\ h\rangle_H\geq 0$ 对所有 $h\in H$ 成立；而这又当且仅当 $\langle A,\ B\rangle_{L_1(H)\ K(H)}\geq 0$ 对所有 $B\in S_c^+(H)$ 成立。

(i) 注意到 $K\cap -K = \{0\}$。此外，对于所有 (A_1,x_1)、$(A_2,x_2)\in K$ 以及所有 $\alpha,\beta\geq 0$，都有 $\alpha(A_1,x_1)+\beta(A_2,x_2)\in K$，由此可知 K确实是一个凸锥。

[6] $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L_1(H)\ K(H)}$ 与 ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的选择无关。

(ii) 若 $(A,x) \in K$，则显然，对于所有满足 $B+y\,\mathrm{Id} \geq 0$ 的 $(B,y) \in S_c(H) \times [0,\infty)$，都有 $(A,x),(B,y) \geq 0$。为证明反向结论，假设对于所有满足 $B + y\,\mathrm{Id} \geq 0$ 的 $(B,y) \in S_c(H) \times [0,\infty)$，都有 $(A,x),(B,y) \geq 0$。于是特别地，对于所有 $B \in S_c^+(H)$，都有 $(A,x),(B,0) \geq 0$，因此 $A \in S_1^+(H)$。此外，注意到存在一个正序列 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ 和 H 的一个正交归一基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n \otimes e_n$。令 $B_N := \sum_{n=1}^N e_n \otimes e_n$，可知 $-B_N + \mathrm{Id} \geq 0$，因此 $0 \leq (A,x),(-B_N,1) = \sum_{n=N+1}^\infty a_n + x$。令 $N \to \infty$，可知 $x \geq 0$。

(iii) 这可由 (ii) 直接推出：事实上，设 I 是某个有向集，且 $(A_n,x_n)_{n\in I}$ 是 K 中的弱-$*$-柯西网。记 $(A,x) \in L_1(H) \times \mathbb{R}$ 为其弱-$*$-极限。于是

$$0 \leq \lim_n \langle\!\langle (A_n,x_n),(B,y) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle (A,x),(B,y) \rangle\!\rangle \tag{5.3}$$

对所有满足 $B + y\,\mathrm{Id} \geq 0$ 的 $(B,y) \in S_c(H) \times [0,\infty)$，

(iv) 定义集合 $U_M \subseteq K$, $M \in [0,\infty)$，令

$$\begin{aligned} U_M &:= \{(B,y) \in K \colon \langle\!\langle (B,y),(0,1) \rangle\!\rangle \leq M\} = \{(B,y) \in K \colon \|B\|_{L_1(H)} + |y| \leq M\} \\ &= \{(B,y) \in L_1(H) \times \mathbb{R} \colon \|B\|_{L_1(H)} + |y| \leq M\} \cap K. \end{aligned}$$

Banach-Alaoglu 定理蕴含 U_M 关于 τ_{w^*} 是紧的。由于 $\cup_{M\in\mathbb{N}} U_M = K$，我们看到 (K,τ_{w^*}) 是 σ-紧的。此外，对于所有满足 $\|A\|_{L_1(H)} + |x| < M$ 的 $(A,x) \in K$，U_M 都是 (A,x) 的一个邻域。因此，(K,τ_{w^*}) 是局部紧的。

(v)由于 $S_1(H)$实际上是范数可分的（因为假设 H 是可分的），所以 (K,τ_{w^*}) 的可分性是显然的。

设 $(B_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $K(H) \times \mathbb{R}$ 中（按范数）稠密，并且进一步假设 $(B_1,y_1) = (0,1)$。我们声称，网 $(A_n,x_n)_{n\in I}$ 在 (K,τ_{w^*}) 中收敛到 (A,x) 的充要条件是

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \qquad \lim_n \langle\!\langle (A_n,x_n),(B_k,y_k) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle (A,x),(B_k,y_k) \rangle\!\rangle\,. \tag{5.4}$$

必要性显而易见。为证明充分性，注意若（5.4）成立，则回想起 $(B_1,y_1) = (0,1)$，可得

$$\lim_n \|A_n\|_{L_1(H)} + |x_n| = \lim_n \langle\!\langle (\langle A_n,x_n),(0,1) \rangle\!\rangle = \|A\|_{L_1(H)} + |x|.$$

因此，$(A_n,x_n)_{n\in I}$ 是有界的。因此我们得到

$$\begin{aligned} |\langle\!\langle (A_n - A, x_n - x),(B,y) \rangle\!\rangle| &\leq |\langle\!\langle (A_n - A, x_n - x),(B - B_k, y - y_k) \rangle\!\rangle| \\ &\quad + |\langle\!\langle (A_n - A, x - x_n),(B_k, y_k) \rangle\!\rangle| \\ &\quad + |\langle\!\langle (A_n - A, x_n - x),(B_k - B, y_k - y) \rangle\!\rangle| \\ &\leq 4(2 \sup_{n\in I} \|A_n\|_{L_1(H)} + \sup_{n\in I} |x_n|) \|(B - B_k, y - y_k)\|_{L(H)\times\mathbb{R}} \\ &\quad + |\langle (A_n - A, x - x_n),(B_k,y_k) \rangle_{L_1(H)\times\mathbb{R},K(H)\times\mathbb{R}}| \end{aligned}$$

对于每个 $(B,y) \in K(H) \times \mathbb{R}$ 以及每个 $k \in \mathbb{N}$。由于 $(B_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $K(H) \times \mathbb{R}$ 中稠密，现由 (5.4) 可得 $\lim_n |(A_n - A, x_n - x),(B,y)| \to 0$。

Now define $d\colon K \times K \to [0,\infty)$ by

$$d((A_1,x_1),(A_2,x_2)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} |\langle\!\langle (A_1 - A_2, x_1 - x_2), (B_k, y_k) \rangle\!\rangle| \wedge 1\,.$$

很容易验证， d 是一个度量，而上述内容意味着 d 生成τ_{w^*}。

□

5.2. Feller 性质。锥 $K = S_1^+(H) \times \mathbb{R}_+$ 配备 τ_{w^*} 后是局部紧、可分且可度量化的（见上文命题 5.1），这使我们能够证明满足 (3.2) 的 Wishart 过程 X 是一个 Feller过程（定义见 [39, III.21]）。

对于 X 的 Feller 性质，我们将考虑相应的半群 $(P_t)_{t\geq 0}$，其作用于 $C_0(K)$，即由 τ_{w^*}-连续且在无穷远处消失的函数构成的空间。

$$P_t f(x,z) := \mathbb{E}_x[f(X_t,z)]$$

对于所有的 $f \in C_0(K)$、 $x = X_0$ 以及 $(x,z) \in K$，并证明它是一个 Feller半群。事实上， K 的局部紧性使得一点紧化成为可能：我们令$\Delta \notin K$ 表示无穷远点，因此，写作 $(x_k,z_k) \to \Delta$ 时，我们的意思是 $\|x_k\|_{L_1(H)} \to \infty$ 和/或 $|z_k| \to \infty$。

定理 5.2. 设 H 是一个可分实希尔伯特空间，设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 是一个滤波概率空间，设 $A\colon D(A) \subset H \to H$ 是一个 C_0-半群 $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ 的生成元，设 $Q \in S^+(H)$，设 $\alpha \in \mathbb{R}$，并假设 $\int_0^t \|\mathrm{e}^{sA}\sqrt{Q}\|^2_{L_2(H)}\, ds < \infty$，且对于所有 $t \geq 0$， e^{tA} 都是单射。

设 (K, τ_{w^*}) 如命题 5.1 所述，并设 $K_0 \subset K$ 是一个 τ_{w^*}-闭子集，使得对于每个 $(x,z) \in K_0$，都存在一个 $L_2(H)$-柱状 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-布朗运动 W 以及一个适应随机过程 $X\colon [0,\infty) \times \Omega \to S_1^+(H)$，其具有连续样本路径，并满足

$$\mathbb{P}((X_t,z) \in K_0) = 1 \quad \text{for all } t \geq 0 \tag{5.5}$$

and

$$\begin{aligned} \langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t (\alpha\langle Qg,h\rangle_H + \langle X_s A g, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H)\, ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H \end{aligned} \tag{5.6}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 h， $g \in D(A)$。令 $\tau^0{}_{\mathrm{w}^*}$为 K_0 上的相对 τ_{w^*}-拓扑。则由 P_t 定义的映射

$$P_t f(x,z) := \mathbb{E}_x[f(X_t,z)], \quad f \in C_0((K_0,\tau^0_{\mathrm{w}^*}),\mathbb{R}),\ (x,z) \in K_0, \tag{5.7}$$

是 $C_0((K_0,\tau^0{}_{\mathrm{w}^*})\ \mathbb{R})$ 上的费勒半群。

证明。命题 5.1 蕴含 (K,τ_{w^*}) 是具有可数基的局部紧空间，因此根据 [39, 命题 III.2.4]，只需验证对所有 $f \in C_0(K_0)$，我们有

$$\lim_{t\downarrow 0} P_t f(x,z) = f(x,z), \tag{5.8}$$

$$(x,z) \mapsto P_t f(x,z) \in C_0(K_0), \quad (x,z) \in K_0,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{5.9}$$

第一个性质由控制收敛以及轨-迹的连续性得出（相对于范数拓扑，正如定理 2.1 中所示，因而也

（关于 τ_{w^*}）。关于第二个性质，我们沿用 [15, 命题 3.4] 的证明思路，并将其调整至当前情形。事实上，我们首先注意到，由于$\|P_t f\|_{L^\infty(K)} \leq \|f\|_{L^\infty(K)}$，只需验证对于 f 属于 $C_0(K_0)$ 的一个稠密子集，(5.9) 成立。根据局部紧版本的斯通-魏尔施特拉斯定理（例如参见 [11, 推论 8.3]），该集合的线性张成空间ನ್ನದ

$$A(K_0) := \{\exp(-\langle\!\langle (\cdot,\cdot),(V,w)\rangle\!\rangle) \,|\, V \in S_c^{++}(H),\, w \in \mathbb{R}_{++}\},$$

在 $C_0(K_0)$ 中稠密。回想一下， $S_c^{++}(H)$ 表示严格正定紧算子，而 $\cdot,\cdot$ 由 (5.2) 定义。事实上，$(x,z) \mapsto \exp(-(V,w),(x,z))$ 是τ_{w^*}-连续的，这是由于配对和指数函数的连续性。此外，当 $V \in S_c^{++}(H)$ 和 $w \in \mathbb{R}_{++}$ 时，它在 Δ 处消失。因此， $A(K_0)$ 是 $C_0(K_0)$ 的子代数。此外， $A(K_0)$ 显然能分离点，并且对所有 $f \in A(K_0)$ 都有 $f > 0$ 。

由推论 3.4，我们知道 $P_t \exp(-(\cdot,\cdot),(V,w))$ 的形式，即对所有 $(x,z) \in K_0$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&P_t \exp(-\langle\!\langle (\cdot,\cdot),(V,w)\rangle\!\rangle)(x,z) = \mathrm{e}^{-zw}\, \mathbb{E}_x\left[\exp(-\operatorname{Tr}((V+w\,\mathrm{I}_H)X_t)\right] \\
&\quad = \mathrm{e}^{-zw} \det(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{V+wI_H}Q_t\sqrt{V+wI_H})^{-\frac{\alpha}{2}} \\
&\qquad \times \exp\left(-\operatorname{Tr}\left(\mathrm{e}^{tA}\sqrt{V+wI_H}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{V+wI_H}Q_t\sqrt{V+wI_H})^{-1}\sqrt{V+wI_H}\,\mathrm{e}^{tA^*}\,x\right)\right),
\end{aligned}$$

其中 Q_t 由（3.3）定义。

注意到，现在对于所有 $V \in S_c^{++}(H)$ 和 $w \in \mathbb{R}_{++}$，我们有

$$\mathrm{e}^{tA}\sqrt{V+wI_H}(\mathrm{I}_H + 2\sqrt{V+wI_H}Q_t\sqrt{V+wI_H})^{-1}\sqrt{V+wI_H}\,\mathrm{e}^{tA^*} \in S^{++}(H).$$

这源于以下事实：根据假设， $V \in S_c^{++}(H)$， e^{tA} is 对每个 $t > 0$ 都是单射，并且对于 $x \in S^{++}(H)$ 和单射算子$g \in L(H)$，有 $gxg^* \in S^{++}(H)$。因此，

$$P_t \exp(-\langle\!\langle (\cdot,\cdot),(V,w)\rangle\!\rangle)(x,z) \to 0$$

作为（x， z）$\to \Delta$ 意味着 $P_t \exp(-(\cdot,\ \cdot),\ (V,\ w)) \in C_0$({v11)。

□

令定理 5.2 中的 K_0 为该集合

$$K_n := \{(A,x) \in S_1^+(H) \times \mathbb{R}_+ \colon \operatorname{rank}(A) \leq n\}, \tag{5.10}$$

我们立即得到以下推论：

推论 5.3. 假设定理 2.1 的条件成立，特别是，令 X 满足 2.4。假设对于所有 $t \geq 0$， e^{tA} 都是单射，并令 $\tau_{\mathrm{w}^*}^n$ 为 (5.10) 中定义在 K_n 上的 τ_{w^*}-相对拓扑。则 X关于 $C_0((K_n,\tau^n{}_{\mathrm{w}^*})$ $\mathbb{R})$是费勒的。

注记 5.4. 上述推论以 K_n 为状态空间时，当然也适用于这样的情形：除了要求对于所有 $t \geq 0$， e^{tA} 具有单射性之外，还要求 Q 具有单射性。事实上，根据注记 4.6，并结合 $\alpha = n$，在这种情况下我们甚至可以选择更小的状态空间

$$\widetilde{K}_n := \{(A,x) \in S_1^+(H) \times \mathbb{R}_+ \colon \operatorname{rank}(A) = n\},$$

如果秩$(x_0) = n$。

Appendix A. Some simple lemmas

引理 A.1. 设 $A, B \in S^+(\mathbb{R}^n)$。则 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + BA$ 和 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + \sqrt{A}B\sqrt{A}$ 可逆，

$$\det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + BA) = \det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + \sqrt{A}B\sqrt{A}), \tag{A.1}$$

and

$$A(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + BA)^{-1} = \sqrt{A}(\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + \sqrt{A}B\sqrt{A})^{-1}\sqrt{A}. \tag{A.2}$$

证明。注意到 $\sqrt{A}B\sqrt{A} \in S^+(\mathbb{R}^n)$，因此 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + \sqrt{A}B\sqrt{A}$ 显然可逆。接下来，令 $(h_i)_{i=1}^n$ 为 A 的一组特征向量正交归一基，使对应的特征值 $(a_i)_{i=1}^n$ 构成一个递减序列；令 $m = \max(\{i: a_i \neq 0\} \cup \{0\})$，并定义 $\tilde{A} = \sum_{i=1}^m a_i h_i \otimes h_i + \sum_{i=m+1}^n h_i \otimes h_i$。我们有

$$\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + BA = \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{A}B\sqrt{A})\tilde{A}^{\frac{1}{2}}$$

由此我们得出（A.1）成立，并且 $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} + BA$ 可逆，其逆为

$$(\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + BA)^{-1} = \tilde{A}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + \sqrt{A}B\sqrt{A})^{-1}\tilde{A}^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $x \in N(A)$蕴含 $(\mathrm{I}_{\mathbb{R}_n} + BA)^{-1}x \in N(A)$，从而我们得出 (A.2) 成立。□

引理A. **2** H A $A_n \in L$ H $n \in$。

$\mathbb{N}$ $A_n \overset{s.o.t.}{\to} A$ 设为一个（实或复）希尔伯特空间，且，（） （）。假设（“s.o.t”表示“强算子拓扑”），A 且和 A_n 可逆（$n \in \mathbb{N}$），并且 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{-1}\|_{L(H)} < \infty$。则 $A_n^{-1} \overset{s.o.t.}{\to} A^{-1}$。

证明。对于所有 $h \in H$，我们有

$$\|(A_n^{-1} - A^{-1})h\|_H = \|A_n^{-1}(\mathrm{I}_H - A_nA^{-1})h\|_H \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|A_k^{-1}\|_H \|(A - A_n)A^{-1})h\|_H \to 0.$$

□

引理 A.3. 设 H 是一个可分的（实或复）希尔伯特空间，设 $A \in L_1(H)$，并设 B、B_1、B_2、.....、C、C_1、C_2、$\ldots \in L(H)$，满足 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\|_{L(H)} < \infty$、$B_n \overset{s.o.t.}{\to} B$ $C_n \overset{s.o.t.}{\to} C$，则

(i) $B_nC_n \overset{s.o.t.}{\to} BC$,
(ii) $\mathrm{Tr}(B_nA) \to \mathrm{Tr}(BA)$.

证明。第一个断言由以下事实得出：$B_nC_n - BC = (B_n - B)C_n + B(C_n - C)$。对于第二个断言，设 $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq 0$，并设 $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$、$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H 中的标准正交系，使得 $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k e_k \otimes f_k$（见定理 1.5）。回忆 $\mathrm{Tr}(B_nA) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle B_nAe_k$、$e_k\rangle_H = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k\langle B_nf_k$、$e_k\rangle_H$，并注意到 $\sum_{k\in\mathbb{N}} |s_k\langle B_nf_k$、$e_k\rangle_H| \leq \|A\|_{L_1(H)} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\|_{L(H)} < \infty$，因此结论由控制收敛定理以及对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\langle B_nf_k$、$e_k\rangle_H = \langle Bf_k$、$e_k\rangle_H$ 这一事实得出。□

引理A.4。设 H 是一个可分实希尔伯特空间，A: $D(A) \subseteq H \to H$ 一个 C_0-半群的生成元，$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ H 的一个正交归一基，满足 $h_k \in D(A^*)$对所有 $k \in \mathbb{N}$ $B \in L(H_{\mathbb{C}})$，使得 AB、BA^*、$ABA^* \in L(H_{\mathbb{C}})$，令 $\lambda \in \varrho(A)$

[7] $H_{\mathbb{C}}$ 的 H 复化在第3节开头被引入。

（ A的预解集），并令 $P_m \in L(H)$为到张成空间$(h_1,...,h_m)$上的正交投影， $m \in \mathbb{N}$。为记号简便，我们引入[8]

$$P_m^A\colon H \to H, \quad P_m^A h = R(\lambda, A)P_m(\lambda - A)h \quad (h \in H), \tag{A.3}$$

其中 $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ 表示 A 的预解式。于是

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \text{最大值 } \left\{\|P_m^A B(P_m^A)^*\|_{L(H_\mathbb{C})}\ \|AP_m^A B(P_m^A)^*\|_{L(H_\mathbb{C})}\ \|P_m^A B(P_m^A)^* A^*\|_{L(H_\mathbb{C})}\right\} \tag{A.4}$$

$$\leq \left(1 + \max\{|\lambda|, 1\}\|R(\lambda, A)\|_{L(H)}\right)\|R(\lambda, A)\|_{L(H)}\|(\lambda - A)B(\lambda - A^*)\|_{L(H_\mathbb{C})} < \infty,$$

并且我们有 $P_m^A B(P_m^A)^* \overset{s.o.t.}{\to} B$, $AP_m^A B(P_m^A)^* \overset{s.o.t.}{\to} AB$, 以及 $P_m^A B(P_m^A)^* A^* \overset{s.o.t.}{\to} BA^*$。此外，若 $B \in L_1(H_\mathbb{C})$ 满足 $(\lambda - A)B(\lambda - A^*) \in L_1(H_\mathbb{C})$ 且$C \in L(H)$，则

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|P_m^A B(P_m^A)^* C\|_{L_1(H_\mathbb{C})} < \infty, \tag{A.5}$$

并且当 $m \to \infty$ 时，$\mathsf{Tr}(P_m^A B(P_m^A)^* C) \to \mathsf{Tr}(BC)$。

证明。估计式 (A.4) 由 P_m^A 的定义立即得到。由 $P_m \overset{\text{s.o.t.}}{\to} \mathrm{I}_H$ 这一事实，以及 $(\lambda - A)B(\lambda - A^*)$ $AR(\lambda, A)$ $R(\lambda, A^*)A^* \in L(H_\mathbb{C})$，再反复应用引理 A.3，可得 $P_m^A B(P_m^A)^* \overset{\text{s.o.t.}}{\to} B$, $AP_m^A B(P_m^A)^* \overset{\text{s.o.t.}}{\to} AB$，以及 $P_m^A B(P_m^A)^* A^* \overset{\text{s.o.t.}}{\to} BA^*$。最后，若 $B \in L_1(H_\mathbb{C})$ 满足 $(\lambda - A)B(\lambda - A^*) \in L_1(H_\mathbb{C})$，则

$$\|P_m^A B(P_m^A)^* C\|_{L_1(H_\mathbb{C})} \leq \|R(\lambda, A)\|^2_{L(H_\mathbb{C})}\|C\|_{L(H_\mathbb{C})}\|(\lambda - A)B(\lambda - A^*)\|_{L_1(H_\mathbb{C})}.$$

此外，

$$\mathsf{Tr}(P_m^A B(P_m^A)^* C) = \mathsf{Tr}(P_m R(\lambda, A^*)CR(\lambda, A)P_m(\lambda - A)B(\lambda - A^*)).$$

由于 $P_m R(\lambda, A^*)CR(\lambda, A)P_m \overset{\text{强算子拓扑}}{\to} R(\lambda, A^*)CR(\lambda, A)$ 以及 $(\lambda - A)B(\lambda - A^*) \in L_1(H_C)$，现由引理 A.3 可得$\mathsf{Tr}(P_m^A B(P_m^A)^* C) \to \mathsf{Tr}(BC)$。 □

Appendix B. Laplace transform of the squared Ornstein–Uhlenbeckprocess

回顾定理 2.1的证明，(2.1)的解是通过取 $X = Y^*Y$ 得到的，其中 Y是一个奥恩斯坦-乌伦贝克过程。在这种情况下， X 的拉普拉斯变换可以直接得到（即不需要像命题 3.1 中那样使用里卡蒂方程），参见命题3.6。当然，由于我们假设已经知道 $X = Y^*Y$，因此不能像在推论3.3中那样利用这一点来推导出 (2.1) 的解在分布意义下的唯一性。

为了证明命题 3.6，我们需要以下众所周知的引理。由于缺少合适的参考文献，我们在此给出证明，以方便读者。

引理B.1。设 H 是一个希尔伯特空间， $\mu \in H$，并设 X 是一个取值于 H 的均值为零的高斯分布随机变量，其协方差算子

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k h_k \otimes h_k,$$

[8]我们有 $D(P_m^A) = H$因为 $h_1, h_2, \ldots \in D(A^*)$。

其中$(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ_1 中的非负序列，且$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H的正交归一基。则 $\mathrm{I}_H+2\alpha Q \in L(H)$ 对所有 $\alpha > -(2\max_{k\in\mathbb{N}} q_k)^{-1} = -\frac{1}{2}\|Q\|^{-1}_{L(H)}$ 都是可逆的，

$$\det(\mathrm{I}_H+2\alpha Q) := \prod_{k=1}^{\infty}(1+2\alpha q_k) \in (0,\infty), \tag{B.1}$$

$$\text{and} \quad \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\alpha\|X+\mu\|^2_H}\right] = \det(\mathrm{I}_H+2\alpha Q)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\langle(\mathrm{I}_H+2\alpha Q)^{-1}\mu,\mu\rangle_H). \tag{B.2}$$

证明。由于$(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$是一个非负序列且$\min_{k\in\mathbb{N}} 2\alpha q_k > -1$，显然$\mathrm{I}_H+2\alpha Q$是可逆的，并且由于对于所有 $x\in(-1,\infty)$都有 $\log(1+x) \le x$，我们有，对于 $\alpha \ge 0$ 和m， $n\in\mathbb{N}$,

$$0 \le \log\left(\prod_{k=m}^{n}(1+2\alpha q_k)\right) \le 2\alpha\sum_{k=m}^{n} q_k.$$

类似地，对于 $\alpha \le 0$ 和 $m,n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} 0 \le -\log\left(\prod_{k=m}^{n}(1+2\alpha q_k)\right) &= \sum_{k=m}^{n}\log\left(1+\tfrac{2|\alpha|q_k}{1+2\alpha q_k}\right) \le 2|\alpha|\sum_{k=m}^{n}\frac{q_k}{1+2\alpha q_k} \\ &\le 2|\alpha|(1+2\alpha\max_{k\in\mathbb{N}} q_k)^{-1}\sum_{k=m}^{n} q_k. \end{aligned}$$

由于$(q_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell_1$，我们看到 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+2\alpha q_k)$ 存在（且为有限值）。

令 $P_n = \sum_{k=1}^{n} h_k\otimes h_k\,(n\in\mathbb{N})$，即 $P_n \in L(H)$ 是到张成空间$\{h_1,\dots,h_n\}$上的正交投影。根据控制收敛定理（对于 $\alpha\ge 0$）或单调收敛定理（对于 $\alpha<0$），只需证明

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\alpha\|P_n(X+\mu)\|^2_H}\right] = \det(\mathrm{I}_H+2\alpha P_nQ)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\langle(\mathrm{I}_H+2\alpha Q)^{-1}P_n\mu,P_n\mu\rangle_H) \tag{B.3}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ (请注意 $\det(\mathrm{I}_H+2\alpha P_nQ) = \prod_{k=1}^{n}(1+2\alpha q_k)$).

现在固定 $n\in\mathbb{N}$，并令 $(e_k)_{k=1}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交归一基。定义$Q_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$为 $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k e_k\otimes e_k$，并定义 $\mu_n\in\mathbb{R}^n$ 为 $\langle\mu_n,e_k\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle\mu,h_k\rangle_H$，对所有 $k=1,\dots,n$ 均成立。令 $Z\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n})$ 为一个由独立同分布的标准高斯分布变量组成的 n 维向量，并注意到 $\|\sqrt{Q}_nZ+\mu_n\|_{\mathbb{R}^n}$ 和 $\|P_n(X+\mu)\|_H$ 同分布。

为简化记号，我们引入 $\hat{Q}_n = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n$。注意，$\hat{}$ Q_n 是正定的，并且与 Q_n可交换。首先配方，然后进行坐标变换，我们得到：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha\|Q_n^{1/2}Z+\mu_n\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp(-\alpha\langle(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}-2\alpha\hat{Q}_n^{-1}Q_n)\mu_n,\mu_n\rangle_{\mathbb{R}^n}) \\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\|\hat{Q}_n^{1/2}z+2\alpha\hat{Q}_n^{-1/2}Q_n^{1/2}\mu_n\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(\hat{Q}_n^{1/2})}\exp(-\langle(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n)^{-1}\mu_n,\mu_n\rangle_{\mathbb{R}^n})\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\|y\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)dy \\ &= \det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n)^{-1/2}\exp(-\langle(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n)^{-1}\mu_n,\mu_n\rangle_{\mathbb{R}^n}). \end{aligned}$$

恒等式 (B.3) 现在可通过注意到 $\det(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n) = \det(\mathrm{I}_H+2\alpha P_nQ)$ 得出，并且

$$\langle(\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}+2\alpha Q_n)^{-1}\mu_n,\mu_n\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle(\mathrm{I}_H+2Q)^{-1}P_n\mu,P_n\mu\rangle_H.$$

□

命题 3.6 的证明。首先注意到 $\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}\in S_1^+(H)$，的确，自伴性显然；此外，由于定理 2.1 中的假设 (2.2) 和 (1.6)，我们有 $\|\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}\|_{L_1(H)} \le \|\sqrt{|u|}\|^2_{L(H)}\|Q_t\|_{L_1(H)} <\infty$ as $Q_t\in L_1(H)$。此外，由于自伴算子的函数演算（参见例如 [40, 定理 VII.1.4]），我们有 $\|\sqrt{|u|}\|^2_{L(H)} = \|u\|_{L(H)}$。因此可得 $\sup(\sigma(\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|})) = \|\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}\|_{L(H)} \le \|u\|_{L(H)}\|Q_t\|_{L(H)}$，于是 $\mathrm{I}_H+2\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}$ 确实可逆：(i) 对所有满足 $\|u\|_{L(H)} \le \frac{1}{2}\|Q_t\|^{-1}_{L(H)}$ 的 $u\in S^-(H)$，以及 (ii) 对所有$u\in S^+(H)$。

设 Y 为式 (2.10) 中定义的奥恩斯坦-乌伦贝克过程（因此 $X = Y^*Y$），特别地，设 $Y_0 = y_0\in L_2(H,\mathbb{R}^n)$ 满足 $y_0^*y_0 = x_0$。注意，若 $u\in S^+(H)\cup S^-(H)$，则

$$\mathrm{Tr}(uX_t) = \mathrm{sign}(u)\|Y_t\sqrt{|u|}\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $t\ge 0$，并注意到 $Y_t\sqrt{|u|}$ 是一个 $L_2(H,\mathbb{R}^n)$-值高斯分布，其协方差算子 $\mathcal{Q}\in L(L_2(H,\mathbb{R}^n))$ 由 $\mathcal{Q}(B) = B\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}$ 以及期望$\mu = y_0\,\mathrm{e}^{tA}\sqrt{|u|}$给出。注意，如果 $u\in S^-(H)$ 满足 $\|u\|_{L(H)} \le \frac{1}{2}\|Q_t\|^{-1}_{L(H)}$ 那么$\|\mathcal{Q}\|_{L(L_2(H,\mathbb{R}^n))} = \|\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}\|_{L(H)} \le \|u\|_{L(H)}\|Q_t\|_{L(H)} < \frac{1}{2}$。因此，引理 1.4 和 B.1 意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp(-\mathrm{Tr}(uX_t))\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\mathrm{sign}(u)\left\|Y_t\sqrt{|u|}\right\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}^n)}\right)\right]\\ &= \det\left(\mathrm{I}_H+2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|}\right)^{-\frac{n}{2}}\\ &\quad\times\exp\left(\left\langle y_0\,\mathrm{e}^{tA}\sqrt{|u|}(\mathrm{I}_H+2\,\mathrm{sign}(u)\sqrt{|u|}Q_t\sqrt{|u|})^{-1}, y_0\,\mathrm{e}^{tA}\sqrt{|u|}\right\rangle_{L_2(H)}\right),\end{aligned}$$

由此得到（3.12）。

Appendix C. Proof of Proposition 4.7

我们从一些众所周知的事实开始[9]:

引理 C.1. 设 $n\in\mathbb{N}$。则存在博雷尔可测映射 $\lambda_1,\dots,\lambda_n{:}S(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 和 $h_1,\dots,h_n\colon S(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$，使得 $(h_k(A))_{k=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正交归一基，$|\lambda_1(A)|\ge|\lambda_2(A)|\ge\ldots\ge|\lambda_n(A)|$，并且

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A)h_k(A)\otimes h_k(A)$$

对所有 $A\in S(\mathbb{R}^n)$。

[9]我们不确定这个引理在无限维情形下是否也成立，但这对我们的目的已经足够。

证明。应用例如 $[1, 定理\ 1]$，其中 $X = S(\mathbb{R}^n)$、$Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$，以及

$$E = \left\{ (A, (\lambda_k)_{k=1}^n, (h_k)_{k=1}^n) \in X \times Y : \begin{array}{r} \langle h_k, h_j\rangle_{\mathbb{R}^n} = 1_{\{k=j\}},\ |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|, \\ A = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k \otimes h_k \end{array} \right\}.$$

□

我们还需要以下结果：

引理 C.2. 设 H 为一个可分 Hilbert 空间，$(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H的一组正交归一基，$A \in S(H)$是秩为 m 的 $m \in \mathbb{N}$，并令 $P_n \in L(H)$由$P_n = \sum_{k=1}^n h_k \otimes h_k$、$n \in \mathbb{N}$给出。则 $\lim_{n\to\infty} \|A - P_nAP_n\|_{L_2(H)} = 0$。

证明。设 $A = \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k \otimes h_k$为某些 λ_1、……、$\lambda_m \in \mathbb{R}$ 以及某个正交归一系统 h_1、……、$h_m \in H$。则 $A - P_nAP_n = \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k \otimes (h_k - P_nh_k) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(h_k - P_nh_k) \otimes P_nh_k$，结论由以下事实得出：对于任意 f、$g \in H$，$\|f \otimes g\|_{L^2(H)} = \|f\|_H \|g\|_H$。□

引理 C.3. 设 H 是一个可分 Hilbert 空间，设 $V \subseteq H$ 是一个稠密线性子空间，设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $\varepsilon > 0$。则存在一个 Borel 可测映射$\varphi_\varepsilon : H^{m+1} \to H$，使得 $\varphi_\varepsilon(g_1, \ldots, g_m, x) \in V$，$\|\varphi_\varepsilon(g_1, \ldots, g_m, x) - x\|_H < \varepsilon$，并且只要 x 与 span $\{g_1, \ldots, g_m\}$ 正交，$\varphi_\varepsilon(g_1, \ldots, g_m, x)$ 就与 span$\{g_1, \ldots, g_m\}$ 正交。

证明。令$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 H 的一个正交归一基，使得 $h_n \in V$ 对所有$n \in \mathbb{N}$ 成立（通过对 V 中稠密于 H的一个序列应用 Gram-Schmidt 正交化得到）。给定 $g_1, \ldots, g_m$，$x \in H$，令$(w_k)_{k=1}^d$为 张成空间$\{g_1, \ldots, g_m\}$ =的一个正交归一基：W（通过对 $h_1, \ldots, h_m$应用Gram-Schmidt 正交化得到，其中$d \leq m$）。令 P_n：$H \to H, n \in \mathbb{N}$，由 $P_n = \sum_{k=1}^n h_k \otimes h_k$给出，并令 $N \in \mathbb{N}$为使得 $\{P_Nw_1, \ldots, P_Nw_d\}$线性无关的最小整数。通过将~高斯消元应用于 $d \times N$维矩阵 $A_{j,k} = \langle w_j, h_k\rangle_H (1 \leq j \leq d, 1 \leq k \leq N)$，我们可以找到满足以下条件的最小 $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq N$：矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 满足 $A_{j,k} = \langle w_j, h_{i_k}\rangle_H (j, k \in \{1, \ldots, d\})$ 可逆。

令 $N \in \mathbb{N}$ 为满足下列条件的最小值

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, h_n\rangle_H|^2 < \varepsilon \min\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4\sqrt{d}\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^d)}}\right);$$

我们设 $x^{(\varepsilon)} = \sum_{n=1}^N \langle x, h_n\rangle_H h_n$. 若 $x \notin W^\perp$, 我们直接设定 $\varphi_\varepsilon(g_1, \ldots, g_m, x) = x^{(\varepsilon)}$. 如果 $x \in W^\perp$，我们设 $x_{\text{err}}^{(\varepsilon)} = (\langle x^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $c = A^{-1}x_{\text{err}}^{(\varepsilon)}$，且 $y^{(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^d c_k h_{i_k}$。由于 $x \in W^\perp$，我们有 $|\langle x^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H| = |\langle x^{(\varepsilon)} - x, w_j\rangle_H| \leq \|x^{(\varepsilon)} - x\|_H \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d}\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^d)}}$，因此 $\|y^{(\varepsilon)}\|_H = \|A^{-1}x_{\text{err}}^{(\varepsilon)}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^d)}\|x_{\text{err}}^{(\varepsilon)}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\varepsilon}{2}$。最后，注意到 $x^{(\varepsilon)} - y^{(\varepsilon)} \in V$, $\|x - (x^{(\varepsilon)} - y^{(\varepsilon)})\|_H < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，且 $\langle x^{(\varepsilon)} - y^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H = \langle x^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H - (Ac)_j = \langle x^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H - \langle x^{(\varepsilon)}, w_j\rangle_H = 0$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, d\}$ 都成立。注意到 $w_1, \ldots, w_d$, $i_1, \ldots, i_d$, A, N, $x^{(\varepsilon)}$, $W^\perp$ 以及 $y^{(\varepsilon)}$ 的构造是 Borel 可测的，我们得出结论：$\varphi_\varepsilon(g_1, \ldots, g_m, x) := x^{(\varepsilon)} - y^{(\varepsilon)}1_{W^\perp}(x)$, $g_1, \ldots, g_m, x \in H$ 确实是一个满足所需性质的可测映射。□

引理 C.4. 设 $m \in \mathbb{N}$, H为一个希尔伯特空间，$(h_0, \ldots, h_m)$ 是 H 中的一个标准正交系，设 $(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$ 是 H 中的另一个标准正交系，并设 $(h_0, g_1, \ldots, g_m)$ 是通过对$(h_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$应用格拉姆－施密特正交化过程得到的。那么存在一个常数 C_m（仅取决于 m），使得 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|g_k - h_k\|_H \leq C_m \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\tilde{g}_k - h_k\|_H$.

证明。通过对 m 进行归纳，很容易验证此引理。 □

这些引理使我们能够证明以下逼近引理，这对命题 4.7 的证明至关重要。

引理 C.5。设 H 是可分 Hilbert 空间，$\varepsilon > 0$, $V \subseteq H$ 是 H 的稠密子空间，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间，$m \in \mathbb{N}$, $Q \in S^+(H)$ 的秩为 $> m$，并设 $X\colon \Omega \to S^+(H)$ 满足 $\operatorname{rank}(X) = m$ 几乎处处成立。那么存在 $\mathcal{F}$-可测的 $(\lambda_k)_{k=1}^m$、$(\lambda_k^{(n)})_{k=1}^m\colon \Omega \to [0, \infty)$, 以及 $\mathcal{F}$-可测的 $(h_k)_{k=1}^{m+1}$、$\colon \Omega \to H^{m+1}$、$(h_k^{(n)})_{k=1}^m\colon \Omega \to H^m$, $n \in \mathbb{N}$，具有以下性质：

(i) 对所有 $k \in \{1, \ldots, m\}$，$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = \lambda_k$ 几乎处处成立；(ii) $(h_k)_{k=1}^{m+1}$ 几乎处处是 H 中的标准正交系，且 $X = \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k \otimes h_k$ 几乎处处成立；(iii) $\mathbb{P}(Qh_{m+1} \neq 0) > 1 - \varepsilon$ 且 $h_{m+1} \in V$ 几乎处处成立；(iv) 对所有 $n \in \mathbb{N}$，$(h_1^{(n)}, \ldots, h_m^{(n)}, h_{m+1})$ 几乎处处是 H 中的标准正交系；(v) 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$，$h_k^{(n)} \in V$ 几乎处处成立；(vi) 对所有 $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\lim_{n\to\infty} h_k^{(n)} = h_k$ 几乎处处成立。

证明。令 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 H 的一个正交归一基，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $g_n \in V$（见引理 C.3 的证明）。令 $P_n \in L(\mathbb{R}^n, H)$ 由 $P_n x = \sum_{k=1}^n x_k g_k, x \in \mathbb{R}^n$ 定义（即，P_n 是到其值域上的等距映射）。注意到 $P_n^* X P_n\colon \Omega \to S^+(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的，且秩至多为 m，因此根据引理C.1，存在 $\mathcal{F}$-可测的 $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_m^{(n)}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 以及 $e_1^{(n)}, \ldots, e_m^{(n)}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$，使得$(e_k^{(n)})_{k=1}^m$是 $\mathbb{R}^n$中的标准正交系，$\lambda_1^{(n)} \geq \ldots \geq \lambda_m^{(n)} \geq 0$，并且

$$P_n^* X P_n = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(n)} e_k^{(n)} \otimes e_k^{(n)}, \tag{C.1}$$

即，

$$P_n P_n^* X P_n P_n^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(n)} (P_n e_k^{(n)}) \otimes (P_n e_k^{(n)}) \in S^+(H). \tag{C.2}$$

此外注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $(P_n e_k^{(n)})_{k=1}^m$ 是 H 中的标准正交系，并且对所有 $k \in \{1, \ldots, m\}$ 几乎处处满足 $P_n e_k^{(n)} \in V$。

由引理 C.2 可知，

$$\lim_{n\to\infty} \|X - P_n P_n^* X P_n P_n^*\|_{L_2(H)} = 0 \quad \text{a.s.}, \tag{C.3}$$

因此，由 Weyl 不等式可知，$\lim_{n\to\infty} (\lambda_k^{(n)})_{k=1}^m = (\lambda_k)_{k=1}^m$ 几乎必然成立，其中 $(\lambda_k)_{k=1}^m$ 是 X 的非零特征值，按降序排列（注意，特别是 $(\lambda_k)_{k=1}^m$ 是 $\mathcal{F}$-可测的）。由此我们证明了 (i)。

注意，由于特征向量基底并不唯一确定，我们无法得出 $(P_n e_k^{(n)})_{k=1}^m$ 收敛的结论。然而，根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，存在一个

子序列 $((P_{n_j}e_k^{(n_j)})_{k=1}^m)_{j\in\mathbb{N}}$，它在 $L^2(\Omega\ H^m)$ 中弱收敛于某个极限 $(h_k)_{k=1}^m \in L^2($ $\Omega\ H^m)$。由此以及 (C.2) 和 (C.3) 可得

$$X = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k \otimes h_k. \tag{C.4}$$

为了看出 $(h_k)_{k=1}^n$ 构成一个标准正交系，首先注意到

$$\mathbb{E}(|\langle h_k, h\rangle_H|1_B) = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}(|\langle P_{n_j}e_k^{(n_j)}, h\rangle_H|1_B) \le \|h\|_H \mathbb{P}(B)$$

对所有 $h \in H$ 及所有 $B \in \mathcal{F}$，因此 $\|h_k\|_H \le 1$ 几乎处处成立。由 (C.4) 可得 $\mathrm{Tr}(X) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \|h_k\|_H$。另一方面，由于 $(\lambda_k)_{k=1}^m$ 是 X 的特征值，我们有 $\mathrm{Tr}(X)$ $= \sum_{k=1}^m \lambda_k$。由于对所有 $k \in \{1,\dots,m\}$，$\lambda_k > 0$ 几乎处处成立，因此 $\|h_k\|_H = 1$ 几乎处处成立，进而 $\|h_k\|_{L^2(\Omega\ H)} = 1 = \|P_{n_j}e^{(n_j)})_k \|_{L^2(\Omega\ H)}$。结合 $L^2(\Omega\ H)$ 中的弱收敛可知，$P_{n_j}e_k^{(n_j)}$ 在 $L^2(\Omega\ H)$ 中（强）收敛到 h_k，对所有 $k \in \{1,\dots,m\}$ 均成立；这尤其意味着 $(h_k)_{k=1}^m$ 是一个标准正交系。再次从 $((P_{n_j}e_k^{(n_j)})$ $)_{k=1}^m)_{j\in\mathbb{N}}$ 中取子列，可得序列 $((\hat{}h_k^{(n)})_{k=1}^m)_{n\in\mathbb{N}}$，它是 H 中 $\mathcal{F}$-可测的、取值于序列 V 的标准正交系，并且 $\lim_{n\to\infty} \hat{}h_k^{(n)} = h_k$ 几乎处处成立（且在 $L^2(\Omega\ H)$ 中成立）。

现在我们转而构造 h_{m+1}：令 $(g_k)_{k=1}^{m+1}$ 为 Q 对应于非零特征值的特征向量标准正交系（这样的标准正交系存在，因为秩$(Q) > m$）。对 $(h_1, ..., h_m, g_1, \dots, g_{m+1})$应用格拉姆－施密特正交化过程，我们得到 $(h_1, \dots, h_m, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{m+1})$。注意，根据我们对$(g_k)_{k=1}^{m+1}$的选择，至少存在一个 $k \in \{1,\dots,m+1\}$ 使得$\hat{}Q\tilde{g}_k \neq 0$；我们令 $h_{m+1} = \tilde{g}_i$，其中 $i = \inf\{k\colon\ Q\tilde{g}_k \neq 0\}$。注意，$h_{m+1}$ 确实是 $\hat{}$ $\mathcal{F}$-可测的。令 $\eta > 0$ 满足 $\mathbb{P}(\|Qh_{m+1}\|_H > \eta) > 1 - \varepsilon$，并令 $\hat{}h_{m+1} = \varphi_{\eta/2}(h_1, \dots, h_m,$ $h_{m+1})$，其中 $\varphi_{\eta/2}$ 是引理 C.3中的 Borel 可测映射。特别地，我们现在已经确立了 (ii) 和 (iii)。最后，对 $(h_{m+1}, \hat{}h_1^{(n)}, \dots, \hat{}h_m^{(n)})$ 应用格拉姆－施密特正交化过程，得到$h_1^{(n)}, \dots, h_m^{(n)}$。注意，所得的 H-值函数 $h_1^{(n)}, \dots, h_m^{(n)}$是 V-值且 $\mathcal{F}$-可测的，即 (iv)和 (v) 成立。最后，引理 C.4意味着 (vi) 成立。□

命题 4.7 的证明。注意，(4.6) 意味着

$$\begin{aligned}\langle X_t g, h\rangle_H = \langle x_0 g, h\rangle_H &+ \int_0^t (\alpha\langle Qg, h\rangle_H + \langle X_s Ag, h\rangle_H + \langle X_s g, Ah\rangle_H)\, ds \\ &+ \int_0^t \langle \sqrt{X}_s\, dW_s \sqrt{Q} g, h\rangle_H + \int_0^t \langle \sqrt{Q}\, dW_s^* \sqrt{X}_s g, h\rangle_H\end{aligned} \tag{C.5}$$

对于所有 $t \ge 0$ 以及所有 $\mathcal{F}_0$-可测的 h，g 几乎处处取值于 $D(A)$。置\Seeder

$$B = \{\mathrm{rank}(X_0) = m\} \in \mathcal{F}_0. \tag{C.6}$$

通过应用引理 C.5，结合 $V = D(A)$和 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (B, \mathcal{F}\cap B, \mathbb{P}^{(B)})$，我们得到 $\mathcal{F}_0 \cap B$-可测$(\lambda_k)_{k=1}^m\colon\ B \to [0,\infty)$ 以及 $\mathcal{F}_0 \cap B$-可测 $(h_k)_{k=1}^{m+1}, (h_k^{(n)})_{k=1}^m\colon\ B \to H^{m+1}$，$n \in \mathbb{N}$，它们满足该引理的性质 (i)–(vi)。为记号简便，我们引入 $\lambda_{m+1} := 0$, I_n $:= \{1,\dots,n\}$ $(n \in \mathbb{N})$，以及 $h_{m+1}^{(n)} := h_{m+1}$ $(n \in \mathbb{N})$。现在定义 $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(S_1(H))$-可测映射 $g_n\colon \Omega\ \times$

$S_1(H) \to \mathbb{R}$ 作者

$$(\text{C.7}) \quad g_n(\omega, x) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k \in I_{m+1}} \langle x h_k^{(n)}(\omega), h_{\sigma(k)}^{(n)}(\omega) \rangle_H, & \omega \in B; \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus B, \end{cases}$$

其中 Σ_{m+1} 是 I_{m+1} 的所有排列组成的集合，$\operatorname{sgn}(\sigma)$表示该排列的符号（即，如果 σ 是偶排列，则 $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$；如果 σ 是奇排列，则 $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$）。注意，根据引理 C.5 (iv)，我们有

$$(\text{C.8}) \qquad g_n(\omega, x) = \det(P_n^*(\omega) x P_n(\omega)) 1_B(\omega),$$

其中[10] $P_n\colon \ B \to L(\mathbb{R}^{m+1}, H)$，$P_n(\omega) y = \sum_{k \in I_{m+1}} y_k h_k^{(n)}(\omega)$ 对于 $y \in \mathbb{R}^{m+1}, \omega \in B$。

此外请注意，g_n 关于第二个变量是二阶连续（Fr´echet）可微的，其中

$$(\text{C.9}) \qquad g_n'(x)(a) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i \in I_{m+1}} \langle a h_i^{(n)}, h_{\sigma(i)}^{(n)} \rangle_H \\ \quad \prod_{k \in I_{m+1} \setminus \{i\}} \langle x h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H, & \omega \in B; \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus B, \end{cases}$$

and

$$(\text{C.10}) \qquad g_n''(x)(a,b) = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i \in I_{m+1}} \sum_{j \in I_{m+1} \setminus \{i\}} \langle a h_i^{(n)}, h_{\sigma(i)}^{(n)} \rangle_H \\ \quad \cdot \langle b h_j^{(n)}, h_{\sigma(j)}^{(n)} \rangle_H \prod_{k \in I_{m+1} \setminus \{i,j\}} \langle x h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H, & \omega \in B; \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus B \end{cases}$$

对于所有 $x, a, b \in L(H)$.

恒等算子 (C.5)和伊藤公式（这里我们使用 $h_1^{(n)}, ..., h_{m+1}^{(n)} \in D(A)$ 几乎处处成立，见引理 C.5 (v)）意味着

$$(\text{C.11}) \qquad M(t) := g_n(X_t) - g_n(x_0) - \int_0^t L g_n(X_s)\, ds$$

是一个局部鞅，其中

$$(\text{C.12}) \qquad L g_n(x) = g_n'(x)(\alpha Q + xA + A^* x) + \tfrac{1}{2} \sum_{\ell, p \in \mathbb{N}} g_n''(x)(H_{\ell,p}(x), H_{\ell,p}(x)),$$

以及 $H_{\ell,p}(x) = (\sqrt{Q} g_\ell) \otimes (\sqrt{x} g_p) + (\sqrt{x} g_p) \otimes (\sqrt{Q} g_\ell) (\ell, p \in \mathbb{N})$，其中$(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ 一个（确定性的）正交归一基，适用于 H。设

$$\mu = \inf\{t \geq 0 : L g_n(X_t) \geq 0\}.$$

由于 $\operatorname{rank}(X_0) = m$ on B，我们有（见（C.8））$g_n(X_0) = 0$ 几乎处处成立；又因为$P_n^*(\omega) X_t P_n(\omega)$（$\omega \in B$）是半正定的，由 C.8 可知，对于所有 $t \geq 0$，$g_n(X_t) \geq 0$几乎处处成立。因此，若 $\mathbb{P}(L g_n(X_0) < 0) > 0$，则 $\mathbb{P}(\mu > 0) > 0$，且（$M_{t \wedge \mu}$）$_{t \geq 0}$是一个从 0 出发、在 $(0, \mu)$ 上严格为正的正局部鞅，这就导致矛盾。我们得出 $L g_n(X_0) \geq 0$ 几乎处处成立。

[10]警告：这并不是与 P_n 引理 C.5 的证明中的 P_n 相同的内容。

现在来计算 $Lg_n(X_0)$。将（C.9）和（C.10）代入（C.12），得到

(C.13)

$$
\begin{aligned}
&Lg_n(X_0)|_B \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i\in I_{m+1}} \langle (\alpha Q + X_0 A + A^* X_0) h_i^{(n)}, h_{\sigma(i)}^{(n)} \rangle_H \prod_{k\in I_{m+1}\setminus\{i\}} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \sum_{\ell,p\in\mathbb{N}} \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i\in I_{m+1}} \sum_{j\in I_{m+1}\setminus\{i\}} \langle H_{\ell,p}(X_0) h_i^{(n)}, h_{\sigma(i)}^{(n)} \rangle_H \langle H_{\ell,p}(X_0) h_j^{(n)}, h_{\sigma(j)}^{(n)} \rangle_H \\
&\qquad \cdot \prod_{k\in I_{m+1}\setminus\{i,j\}} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H .
\end{aligned}
$$

回忆一下，$h_{m+1}^{(n)} = h_{m+1}$，并且根据引理 C.5 (ii)，只要 $\omega \in B$，就有 $h_{m+1}(\omega) \in \ker(X_0)$，因此，只要 $m+1 \in \{k, \sigma(k)\}$，就有 $\langle X_0 h_k, h_{\sigma(k)} \rangle_H = 0$；注意，引理 C.5 (ii) 还意味着

$$
\langle H_{\ell,p}(X_0) h_{m+1}^{(n)}, h_{m+1}^{(n)} \rangle_H = 0, \quad \ell, p \in \mathbb{N}.
$$

这两个观察表明，(C.13) 可化简为

(C.14)

$$
\begin{aligned}
&Lg_n(X_0)|_B \\
&= \alpha \| \sqrt{Q} h_{m+1} \|_H^2 \sum_{\sigma\in\Sigma_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k\in I_m} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H \\
&\quad + \sum_{\ell,p\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_m} \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{m+1}, \\ \sigma(i)=m+1, \sigma(m+1)=i}} \operatorname{sgn}(\sigma) \big| \langle H_{\ell,p}(X_0) h_i^{(n)}, h_{\sigma(i)} \rangle_H \big|^2 \prod_{k\in I_m\setminus\{i\}} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H \\
&= \alpha \| \sqrt{Q} h_{m+1} \|_H^2 \sum_{\sigma\in\Sigma_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k\in I_m} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H \\
&\quad - \sum_{\ell,p\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_m} \sum_{\sigma\in\Sigma_m,\, \sigma(i)=i} \operatorname{sgn}(\sigma) \big| \langle H_{\ell,p}(X_0) h_i^{(n)}, h_{m+1} \rangle_H \big|^2 \prod_{k\in I_m\setminus\{i\}} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H .
\end{aligned}
$$

接下来，注意到

$$
\begin{aligned}
\langle H_{\ell,n}(X_0) h_i^{(n)}, h_{m+1} \rangle_H &= \langle \sqrt{Q} g_\ell, h_i^{(n)} \rangle_H \langle \sqrt{X_0} g_p, h_{m+1} \rangle_H \\
&\quad + \langle \sqrt{Q} g_\ell, h_{m+1} \rangle_H \langle \sqrt{X_0} g_p, h_i^{(n)} \rangle_H \\
&= \langle g_\ell, \sqrt{Q} h_{m+1} \rangle_H \langle g_p, \sqrt{X_0} h_i^{(n)} \rangle_H
\end{aligned}
$$

由此

$$
\sum_{\ell,p\in\mathbb{N}} \big| \langle H_{\ell,p}(X_0) h_i^{(n)}, h_{m+1} \rangle_H \big|^2 = \| \sqrt{Q} h_{m+1} \|_H^2 \| X_0 h_i^{(n)} \|_H^2 .
$$

总之，我们得到

$$
\begin{aligned}
Lg_n(X_0)|_B = \alpha \| \sqrt{Q} h_{m+1} \|_H^2 &\sum_{\sigma\in\Sigma_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k\in I_m} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H \\
&- \| \sqrt{Q} h_{m+1} \|_H^2 \sum_{i\in I_m} \sum_{\sigma\in\Sigma_m,\, \sigma(i)=i} \operatorname{sgn}(\sigma) \| X_0 h_i^{(n)} \|_H^2 \prod_{k\in I_m\setminus\{i\}} \langle X_0 h_k^{(n)}, h_{\sigma(k)}^{(n)} \rangle_H .
\end{aligned}
$$

由引理 C.5 的 (ii) 和 (vi) 可得

$$\lim_{n\to\infty} Lg_n(X_0)|_B = (\alpha - m)\|\sqrt{Q}h_{m+1}\|_H^2 \prod_{k\in I_m} \lambda_k. \tag{C.15}$$

由于对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $Lg_n(X_0) \geq 0$ 几乎处处成立，且 $\mathbb{P}(\|\sqrt{Q}h_{m+1}\|_H^2 > 0 \cap B) > 0$（见引理 C.5 (iii)），因此可得 $\alpha \geq m$。

最后，假设 (4.7) 成立，即我们有 $\mathbb{P}(\tau > 0) > 0$，其中

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 \colon \operatorname{rank}(X_t(\omega)) > m\}, & \omega \in B; \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

注意，τ 是一个停时（rank(·) 下半连续）。因此，$(M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$是一个局部鞅。注意，(C.8) 意味着对于所有 $t \geq 0$, $g_n(X_{t\wedge\tau}) = 0$。因此，我们可以由 (C.11) 得出 $Lg_n(X_0) = 0$，进而由 (C.15) 得出$m = \alpha$。□

注 C.6. 关于定义 g_m 的 H-值函数 $(h_k^{(n)})_{k=1}^{m+1}$ 的以下条件（见 (C.7)），正是命题 4.7 的证明如此繁复的原因：

(i)$(h_k^{(n)})_{k=1}^{m}$ 必须近似于 X_0 的特征向量系，当 $n \to \infty$ 时，以获得 (C.15)；(ii)$(h_k^{(n)})_{k=1}^{m+1}$ 必须是 $\mathcal{F}_0$-可测的，并且取 $D(A)$值，以确保我们可以应用(C.5)；(iii) $(h_k^{(n)})_{k=1}^{m+1}$ 必须是 H 中的标准正交系，以确保(C.7)中的 g_n 是一个行列式（这是得出 $g_n(X_t) \geq 0$所必需的）；(iv)我们需要 $X_0 h_{m+1}^{(n)} = 0$，以确保(C.13)中涉及 A 的各项在取 $n \to \infty$ 之前消失（否则在取极限时会遇到问题，因为 A 无界）；(v)我们需要 $Qh_{m+1} \neq 0$ 在一个正测度集上，以便在证明结尾得出所需结论。

References

[1] E. A. Azoff。线性代数中的博雷尔可测性。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 42 2 346 350, 1974 , ( ) : –。[2] F. E. Benth 和 P. Kr¨uhner。商品市场中无限维远期价格模型的表示。 *Communications in Mathematics and Statistics*, 2：47–106，2014。[3] F. E. Benth 和 C. Sgarra。用于商品远期市场的希尔伯特空间中带杠杆效应的 Barndorff-Nielsen–Shephard模型。 *Available at SSRN 3835053*，2021。[4] F. E. Benth 和 I. C. Simonsen。希尔伯特空间中的 Heston随机波动率模型。*Stoch. Anal. Appl.*，36(4)：733–750，2018。[5] C. Bertucci、M. Debbah、J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。大型随机矩阵的谱支配方法。 *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*，164：27–56，2022。[6] M.-F. Bru。扰动主成分分析的扩散。 *J. Multivariate Anal.*，29 1 127( )：–136，1989。[7] M.-F. Bru。Wishart 过程。 *Journal of Theoretical Probability*，4(4)：725–751，1991。[8] A. Buraschi、P. Porchia 和 F. Trojani。相关性风险与最优投资组合选择。 *The Journal of Finance* 65 1 393 420, 2010 , ( ) : –。[9] R. Carmona 和 M. R. Tehranchi。 *Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective* 2007 。施普林格科学与商业媒体，。[10] P. Carr 和 D. Madan。使用快速傅里叶变换进行期权估值。 *Journal of computational finance* 2 4 61 73, 1999 , ( ) : –。[11] J. B. Conway。 *A course in functional analysis*， *Graduate Texts in Mathematics*第96卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1990。

[12] J. B. Conway。 *A course in operator theory*， *Graduate Studies in Mathematics*第21卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。[13] S. Cox、S. Karbach 和 A. Khedher。正希尔伯特–施密特算子上的仿射纯跳过程。 *Stochastic Processes and their Applications*，151：191–229，2022。[14] S. Cox、S. Karbach 和 A. Khedher。无限维仿射随机波动率模型。*Mathematical Finance*，32(3)：878–906，2022。[15] C. Cuchiero、D. Filipovi´c、E. Mayerhofer 和 J. Teichmann。半正定矩阵上的仿射过程。 *The Annals of Applied Probability*，21(2)：397–463，2011。[16] J. Da Fonseca、M. Grasselli 和 F. Ielpo。使用方差互换对（协）方差风险进行对冲。
International Journal of Theoretical and Applied Finance，14(06)：899–943，2011。[17] J. Da Fonseca、M. Grasselli 和 C. Tebaldi。多因子波动率 Heston模型。 *Quantitative Finance* 8 6 591 604, 2008 ，（）：–。

[18] G. Da Prato 和 J. Zabczyk。 *Stochastic equations in infinite dimensions* 44 *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* ，[19] 卷。
剑桥大学出版社，剑桥，1992。[19] E. Eberlein、K. Glau 和 A. Papapantoleon。傅里叶变换估值公式的分析及其应用。 *Applied Mathematical Finance*，17(3)：211–240，2010。[20] K.-J. Engel 和 R. Nagel。 *One-parameter semigroups for linear evolution equations*， *Graduate Texts in Mathematics*第194卷。施普林格出版社，纽约，2000。由 S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 参与撰写。[21] D. Filipovic。 *Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate models*。施普林格科学与商业媒体，2001。[22] J. D. Fonseca、M. Grasselli 和 C. Tebaldi。相关性随机时的期权定价：一个分析框架。 *Review of Derivatives Research*，10：151–180，2007。[23] C. Gourieroux 和 R. Sufana。使用Wishart多元随机波动率进行衍生品定价。 *Journal of Business & Economic Statistics*，28(3)：438–451，2010。[24] P. Graczyk 和 J. Ma lecki。多维 Yamada-Watanabe 定理及其在粒子系统中的应用。 *Journal of Mathematical Physics*，54(2)：021503，2013。[25] P. Graczyk、J. Ma lecki 和 E. Mayerhofer。Wishart 过程与 Wishart 分布的刻画。 *Stochastic Processes and their Applications*，128(4)：1386–1404，2018。[26] P. Graczyk 和 E. Mayerhofer。Wishart 理论中的随机分析方法。载于 *CIMPA Workshop* 2011 ，。[27]
M. Grasselli 和 C. Tebaldi。可解的仿射期限结构模型。 *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics Statistics and Financial Economics* 18 1 135 ，，（）：–153，2008。[28] A. Harvey、E. Ruiz 和 N. Shephard。多元随机方差模型。 *The Review of Economic Studies* 61 2 247 264, 1994 ，（）：–。

[29] M. Katori 和 H. Tanemura。矩阵值随机过程与不相交扩散粒子系统的对称性。 *Journal of mathematical physics*，45(8)：3058–3085，2004。[30] M. Leippold 和 F. Trojani。矩阵仿射跳扩散的资产定价。载于 *Seminars Stern NYU link* 2008 *Stern NYU* ，。
Citeseer，。[31] G. Letac 和 H. Massam。作为指数族的非中心 Wishart 分布及其矩。
Journal of Multivariate Analysis，99(7)：1393–1417，2008。[32] G. Letac 和 H. Massam。拉普拉斯变换（det s）$^{-p}$ exp tr($s^{-1}w$)与非中心 Wishart 分布的存在性。 *J. Multivariate Anal.*，163：96–110，2018。[33] E. Mayerhofer。对称锥上的 Wishart 分布与非中心 Wishart 分布。 *Transactions of the American Mathematical Society* 371 10 7093 7109, 2019 ，（）：–。

[34] E. Mayerhofer。重构 Wishart 特征函数。 *arXiv:1901.09347* 2019 *arXiv preprint* ，。[35]
J. v. Neerven。 *Functional Analysis*，第201卷。剑桥大学出版社，2022。[36] J. v. Neerven、M. Veraar 和 L. Weis。巴拿赫空间中的随机积分——综述。载于 *Stochastic analysis: a series of lectures*， *Progr. Probab.*第68卷，第297–332页。Birkh¨auser/Springer，巴塞尔，2015。[37] A. Pazy。“线性算子半群及其在偏微分方程中的应用”， *Applied Mathematical Sciences*第44卷。施普林格出版社，纽约，1983。[38] A. Philipov 和 M. E. Glickman。通过 Wishart 过程实现多元随机波动率。
Journal of Business & Economic Statistics，24(3)：313–328，2006。

[39]D. Revuz 和 M. Yor。*Continuous martingales and Brownian motion*，第 293 卷，属于 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1999 。施普林格出版社，柏林，第三版，。[40] D. Werner。 *Funktionalanalysis*。施普林格出版社，柏林，扩充版，2000 年。