位于流体层下方的各向异性非均质多孔层中非等温平面库埃特流的线性稳定性分析

Nandita Barman、Anjali Aleria、Premananda Bera*

印度理工学院鲁尔基分校数学系，印度鲁尔基 *247667*，印度

arXiv:2304.03499v1 [physics.flu-dyn] 7 Apr 2023

摘要

本文对位于流体层下方的多孔层中的平面库埃特流进行了线性稳定性分析，其中多孔层具有各向异性和非均质性。平面库埃特流由上板的匀速运动诱导产生，而上板与下板之间温差的维持导致了对流。所考虑的流体为牛顿流体且不可压缩。采用达西模型描述多孔层中的流动，并在界面处采用Beavers-Joseph条件。采用切比雪夫配置法求解广义特征值问题。本文研究了多孔介质的各向异性和非均匀性，以及流体层与多孔层厚度之比，即深度比（$\hat{}d$）、雷诺数（Re）和达西数（δ）的影响。研究主要针对水开展；然而，通过改变普朗特数（Pr），也研究了各向异性和非均匀性对不同流体的影响。根据参数值的不同，可获得中性曲线的单模态（多孔模态或流体模态）、双模态（多孔模态和流体模态）以及三模态（多孔模态、流体模态和多孔模态）特征。非均匀性参数或深度比的增大，或各向异性参数、雷诺数、普朗特数和达西数的减小，都会提高系统不稳定性。对于 $\delta = 0.002$，$Pr = 6.9$ 和$Re = 10$，无论各向异性参数和非均匀性参数取何值，当$d < 0.07$时始终观察到多孔模态占主导的$\hat{}\hat{}$特征，而当$d > 0.21$ 时则由流体模态占主导。借助能量收支分析，对不稳定性的类型进行了分类，同时验证了线性稳定性分析所得的模态类型。还对二次流型进行了可视化，以理解流动动力学。

关键词：叠加流体-多孔介质对流，达西方程，线性稳定性

1. 引言

近几十年来，由于流体覆盖多孔系统中的传输现象在地球物理学中有着广泛的应用，因此引起了人们极大的关注：地表以下的水流以及地下储层中的石油流动 [1, 2, 23]；在工业领域，则包括污染土壤的生物修复 [43], 以及复合材料的

*通讯作者。电子邮箱：pberafma@iitr.ac.in（Premananda Bera）

制造等应用于汽车和航空工业的设备 [8, 9]等。这促使我们研究此类上下叠置系统中非等温库埃特流作用下的这一现象。此外，多孔介质的渗透率通常具有各向异性和非均质性，这启发我们对各向异性非均质多孔层 [34]中的流动进行建模。因此，本研究探讨流体层下方各向异性非均质多孔层中的非等温平面库埃特流的流体动力稳定性分析。下面简要回顾这一方向的文献，并按以下顺序展开：首先是自然对流下的流体流动；其次是非等温条件（混合对流）下的泊肃叶流和库埃特流；最后是等温和非等温情况下各向异性、非均质多孔介质中的流动。

关于叠置流体—多孔层中自然对流起始的首项研究由 Sun [44] 开创。他报告称，随着深度比增加，多孔层中的临界瑞利数持续降低，而流体层中的临界瑞利数持续升高。Nield [33] 将上表面的表面张力纳入考虑，并采用恒定热通量边界条件，求得了相应的解析解。Chen 和 Chen [16] 研究了热扩散率和溶质扩散率对流动不稳定性的综合影响，发现当深度比较低时，稳定性曲线呈现双模态（$\hat{}d \leq 0.14$）。对于 $\hat{}d < 0.12$，长波 $\hat{}$ 分支对应多孔层；而对于 $d > 0.12$，短波分支对应的流体层主导系统不稳定性。$\hat{}$ 长波区域中的相对极小值在 d 取较大值时消失。Sun [44]未能得到这一结果，因为他仅在长波临界点附近的有限波数范围内观察了中性稳定曲线。Chen 和 Chen 甚至通过实验验证了他们的线性稳定性结果 [17]。此外，Chen 等 [18] 研究了各向异性多孔层上方流体中的对流起始，并发现：当多孔介质沿垂直方向的渗透率固定时，降低水平与垂直渗透率之比，会增加叠置层状构型对运动的阻力，从而使其更加稳定。在多孔层中，当 $d \geq 0.2$ 时，对流几乎消失，运动主要发生在流体层内。Chen 和 Hsu [19]通过考虑各向异性多孔介质中的非均质渗透率，扩展了 Chen 等 [18]的分析。他们发现，当 $d \geq 0.2$ 时，各向异性和非均质效应可以忽略，此时对流主要局限于流体层。此外，研究表明，非均质性会使对流从渗透率较高的邻近区域开始，从而驱动对应于较短临界波长的对流。这些文献中最重要的理论和实验研究结果表明，深度比以及由各向异性和非均质性表征的介质渗透率，在决定流动稳定性方面起着重要作用。

近期，人们广泛讨论了热对流中压力梯度驱动的剪切流（即泊肃叶流）和上板运动（即库埃特流）的应用。众所周知，通道中的平面泊肃叶流在雷诺数小于 5772 时线性不稳定，而通道中的平面库埃特流在所有雷诺数下均线性稳定 [35], 这一事实本身就表明，对这两种流动的研究彼此独立，不能根据一种流动的结果预测另一种流动的结果。此外，Chang 研究了叠加流体— [12]泊肃叶流 [13]的平面库埃特流热对流

多孔系统中的热对流，研究显示库埃特流和泊肃叶流之间存在显著差异，具体如下：随着d减小，库埃特流中的振荡频率和波速均呈上升趋势 [12] 而泊肃叶流 [13]则呈现相反的特征。此外，在泊肃叶流中 [13], ，流体层模态的振荡频率随Re 的变化相对较小，与库埃特流 [12]中的情况相比尤为如此。进一步地，Yin 等 [46] 和 Yin 等 [47] 通过考虑黏弹性流体扩展了相关研究[12, 13] ，他们发现，当黏弹性流体参数取适当值时，优选的对流模态为横向模态，这与牛顿流体[12, 13]的情况相反。

多孔介质的属性，即各向异性和非均质性，显著影响了流体覆盖多孔层时等温流动的稳定性机制 [20]。Deepu 等人 观察到，随着各向异性参数增大，系统稳定性增强；而随着非均质性参数增大，系统稳定性减弱。最近，Anjali 等人 [4]研究了流体覆盖各向异性非均质多孔层时平面泊肃叶流的稳定性分析。他们发现，非均质性增强、各向异性减弱会促使多孔模态不稳定性。此外，ˆˆ他们指出，对于$d > 0.16$ ，最不稳定的模态是流体模态；对于$d < 0.05$，则是多孔模态。值得指出的是，Anjali 等人 [4] 的研究与本研究存在显著差异，详见§3。

上述文献表明，在上板运动产生的剪切作用下，各向异性和非均质性的影响，以及上、下板之间温差的引入，尚未得到探讨。此外，Chang [12]的研究似乎也未考察介质渗透率的影响。本研究还探讨了在各向同性（各向异性）和均质（非均质）多孔介质条件下，这些因素将如何影响系统稳定性。一个值得探究的问题是， [17] 的实验结果在当前情形下是否仍然成立。文献还提出了以下问题：这些参数会如何影响次级流的形态和不稳定性模态？此外，导致这种不稳定性的根本类型是什么？本研究旨在回答上述问题。

本文安排如下：第2节介绍物理问题及其数学 formul；第3节给出结果并进行讨论；第4节作出总结性说明。

2. 问题的表述

2.1. 物理问题与控制方程

所研究问题的示意图如图 1 所示。这里考虑一个厚度为d的水平流体层，其下方为厚度为d_m 的各向异性非均质多孔层，这两个层之间的界面位于$z = 0$处。上板的温度保持为T_U，低于下板的温度（T_L）。T_0 是 $z = 0$ 处的参考温度，因此$T_U < T_0 < T_L$ ，且流体层的上板以恒定速度U移动。这里所考虑的流体具有黏性，属于牛顿流体且不可压缩

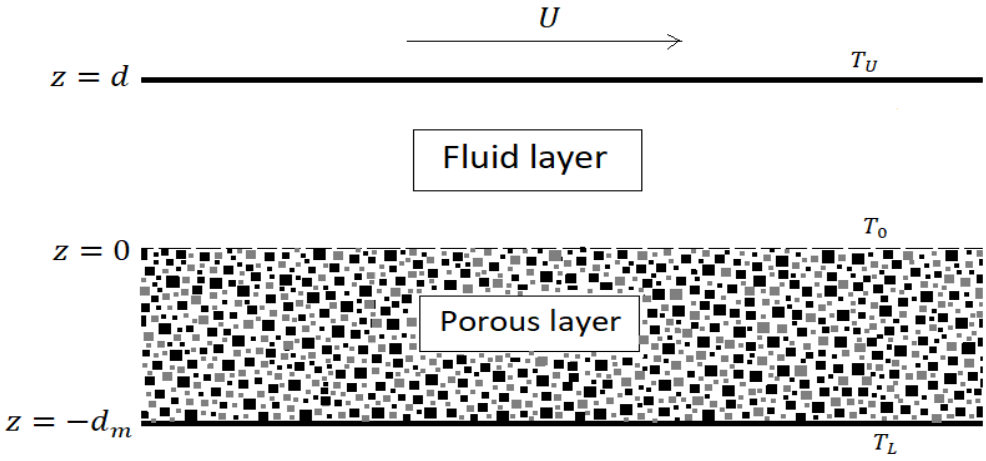


图1：系统示意图

并满足Boussinesq近似。流体层在笛卡尔坐标系下的有量纲质量、动量和能量守恒方程 [12] 写为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta w-g[1-\beta_T(T-T_0)]\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha\Delta T\quad, \tag{4}$$

时间为$t>0$，且$x\in\mathbb{R}$、$z\in[0,d]$}。其中，速度的水平分量和垂直分量分别记为u和w，T 表示温度，p 表示流体层中的压力，ν 表示流体的运动黏度，ρ_0 表示流体在参考温度$T0$下的密度，β_T 表示热膨胀系数，α 表示热扩散率，g 表示重力，Δ 表示二维拉普拉斯算子。

本分析中所取的孔隙率为 0.3，数值较小。因此，运动方程由达西定律 [13, 25, 3, 38]描述。多孔层 [4] 的有量纲质量、动量和能量守恒方程在笛卡尔坐标系中写为：

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial w_m}{\partial z}=0\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial u_m}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_m}{\partial x}-\frac{\nu}{K_x\eta_x(z/d_m)}u_m\,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial w_m}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_m}{\partial z}-\frac{\nu}{K_z\eta_z(z/d_m)}w_m-g[1-\beta_T(T_m-T_0)]\,, \tag{7}$$

$$G_m\frac{\partial T_m}{\partial t}+u_m\frac{\partial T_m}{\partial x}+w_m\frac{\partial T_m}{\partial z}=\alpha_m\Delta T_m\,, \tag{8}$$

其中 t >0 和 {x $\in \mathbb{R}$、z $\in [-$d$_m$、0]}。在多孔介质中，渗流速度的水平分量和垂直分量分别表示为 u$_m$ 和 w$_m$。 η_x & η_z 表示非均匀性函数，K$_x$ & K$_z$ 分别表示 x 和 z 方向上的渗透率。参数 χ 表示孔隙率，K* = K$_x$/K$_z$ 为各向异性参数， $\alpha_m = \kappa^*/\rho_0 c_p$和 G$_m$ =(ρ_0c$_p$)*/(ρ_0c$_p$)，其中 X* = χX +(1 − χ)X$_m$，X 可替换为 κ或 $\rho_0 c_p$， c$_p$ 为流体的比热容， κ 表示相应的热导率。

边界条件如下：

在流体层的上板处 $z = d$,

$$u = U, \quad w = 0, \quad T = T_U \ . \tag{9}$$

在多孔层的下板处 $z = -d_m$,

$$w_m = 0, \quad T_m = T_L \ . \tag{10}$$

在流体层与多孔层的界面处，即在 $z = 0$,

$$w = w_m, \quad T = T_m, \quad \alpha \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_m \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = p_m \ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + J \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\alpha_{BJ}}{\sqrt{K_x \eta_x(0)}} (u - u_m) \ , \tag{12}$$

其中，方程12分别表示当$J = 1$ 和$J = 0$时的Jones [27] 和Beavers-Joseph [5] 条件， α_{BJ} 表示 Beavers-Joseph 常数。由于缺乏关于流体-多孔介质界面条件的统一理论，文献中已经进行了多次尝试来推导相同的条件 [27, 5, 14, 42, 45]。最近， [31]遵循[24]研究了耦合自由流体-多孔系统中非等温流动的线性稳定性分析以及非线性稳定性分析。在流体层和多孔层之间的界面处，采用了Beaver-Joseph-Saffman条件，并得出结论：对于较小的达西数（$\delta = \kappa^{1/2}/xd_m$ ），即对于$\delta \leq 5 \times 10^{-3}$，采用Beavers-Joseph、Jones和Beaver-Joseph-Saffman条件得到的中性稳定曲线之间的相对差异几乎可以忽略不计。此外，我们的数值研究表明，在所考虑的参数范围内，项 $\partial_w \partial_x$对系统不稳定性的贡献并不显著，这一点在附录A中有所说明。因此，在本研究中，流体-多孔介质界面 [14]处采用Beavers-Joseph条件（$J = 0$）。

2.2. 基本流动

假设流动为单向、稳态且充分发展，可得到如下基本解析解：在流体层中，

$$\overline{u}(z) = \left(\frac{\alpha_{BJ} U}{\sqrt{K_x \eta_x(0)} + \alpha_{BJ} d} \right) z + \frac{U \sqrt{K_x \eta_x(0)}}{\sqrt{K_x \eta_x(0)} + \alpha_{BJ} d}, \quad \overline{w} = 0 \ , \tag{13}$$

$$\overline{T}(z) = \left(\frac{T_U - T_0}{d} \right) z + T_0 \ . \tag{14}$$

在多孔层中，

$$\overline{u}_m = 0, \quad \overline{w}_m = 0 \,, \tag{15}$$

$$\overline{T}_m(z) = \left(\frac{T_0 - T_L}{d_m}\right) z + T_0 \,. \tag{16}$$

需要指出的是，与叠置流体-多孔介质系统中的等温/非等温泊肃叶流不同，在后者中，多孔层内的基流不为零；而对于平面库埃特流，多孔层内的基流为零。这提示我们，针对泊肃叶流 [4] 得到的分析结果可能与库埃特流存在显著差异。

2.3. 线性扰动方程

控制方程分别采用流体层的长度、速度、时间、温度和压力对应尺度d、U、d/U、$(T_0 - T_U)\nu/\alpha$和 $\mu U/d$，以及多孔层的长度、速度、时间、温度和压力对应尺度d_m、ν/d_m、d_m^2/ν、$(T_L - T_0)\nu/\alpha_m$和 $\rho_0(\nu/d_m)^2$ 进行无量纲化。为开展线性稳定性分析，我们在如下所示的充分发展层流基流上引入二维无穷小扰动

$$\begin{aligned}
&(u, w, T, p) = (\overline{u}, 0, \overline{T}, \overline{P}) + (u', w', T', p'), \\
&(u_m, w_m, T_m, p_m) = (0, 0, \overline{T}_m, \overline{P}_m) + (u'_m, w'_m, T'_m, p'_m),
\end{aligned} \tag{17}$$

其中，带撇号的量表示无穷小扰动。

忽略非线性项，流体层中的无量纲线性化扰动方程 $z \in [0,1]$ 为：

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \,, \tag{18}$$

$$Re\left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{d\overline{u}}{dz}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \Delta u' \,, \tag{19}$$

$$Re\left(\frac{\partial w'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \Delta w' + \frac{Ra}{Re}T' \,, \tag{20}$$

$$PrRe\left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial T'}{\partial x} + w'\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) = \Delta T' \,, \tag{21}$$

其中

$$Re = \frac{dU}{\nu}, \quad Ra = \frac{g\beta_T(T_0 - T_U)d^3}{\nu\alpha}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \tag{22}$$

在上述公式 22 中，Re、Ra 和 Pr 分别表示流体层中的雷诺数、瑞利数和普朗特数。

在多孔层中，$z_m \in [-1, 0]$，线性化扰动方程为

$$\frac{\partial u'_m}{\partial x_m} + \frac{\partial w'_m}{\partial z_m} = 0 \,, \tag{23}$$

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial u'_m}{\partial t_m} = -\frac{\partial p'_m}{\partial x_m} - \frac{1}{\delta^2}\frac{u'_m}{\eta_x} \,, \tag{24}$$

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial w'_m}{\partial t_m} = -\frac{\partial p'_m}{\partial z_m} - \frac{K^*}{\delta^2}\frac{w'_m}{\eta_z} + \frac{Ra_m}{\delta^2}T'_m \,, \tag{25}$$

$$Pr_m\left(G_m\frac{\partial T'_m}{\partial t_m} + w'_m\frac{\partial \overline{T}_m}{\partial z_m}\right) = \Delta^m T'_m \,, \tag{26}$$

其中

$$\delta = \frac{K_x^{1/2}}{d_m}, \quad Pr_m = \frac{\nu}{\alpha_m}, \quad Ra_m = \frac{g\beta_T (T_L - T_0) d_m K_x}{\nu \alpha_m}. \tag{27}$$

在上述公式 27 中， δ、Pr_m 和 Ra_m 分别表示多孔层中的达西数、普朗特数和瑞利数。参数Pr、 Pr_m 和 Ra、Ra_m 之间的关系如下:

$$Pr_m = \varepsilon Pr, \quad Ra_m = \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{\hat{d}^4} Ra, \tag{28}$$

其中 $\varepsilon = \alpha/\alpha_m$ 是热扩散率之比，而 $\hat{d} = d/d_m$ 是深度比。

上板上的无量纲边界条件，$z = 1$，为

$$u' = w' = T' = 0, \tag{29}$$

并且在底板上，$z_m = -1$,

$$w'_m = T'_m = 0, \tag{30}$$

在界面上，$z = z_m = 0$,

$$Rew' = \hat{d} w'_m, \quad \hat{d} T' = \varepsilon^2 T'_m, \quad \frac{\partial T'}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial T'_m}{\partial z_m}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\alpha_{BJ} \hat{d}}{\delta \sqrt{\eta_x(0)}} \left(u' - \frac{\hat{d}^2}{Re} u'_m \right), \quad p' = 2\frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\hat{d}^2}{Re} p'_m. \tag{32}$$

利用正规模态分析 [22],，扰动可写为

$$(w', T', p') = [W(z), \theta(z), \pi(z)] \exp(-i\sigma t + iax), \tag{33}$$

$$(w'_m, T'_m, p'_m) = [W_m(z_m), \theta_m(z_m), \pi(z_m)] \exp(-i\sigma_m t_m + i a_m x_m). \tag{34}$$

其中 a 和a_m 分别是流体层和多孔层中水平方向上的实值波数，而流体层和多孔层中的复波速分别为 $\sigma = \sigma_r + i\sigma^i$和 $\sigma_m = \sigma_m^r + i\sigma_{im}$。将式（33）—（34）代入式（18）—（21）、（23）—（26）和（29）—（32），并消去压力项，可得流体层中的线性化扰动方程

$$(D^2 - a^2)^2 W - iaRe\bar{u}(D^2 - a^2)W - \frac{Ra}{Re} a^2 \theta = -i\sigma Re (D^2 - a^2) W \ , \tag{35}$$

$$(D^2 - a^2)\theta - iaRePr\bar{u}\theta + ReW = -i\sigma PrRe\theta \ , \tag{36}$$

以及在多孔层中的是

$$\frac{D_m^2 W_m}{\eta_x} - \frac{D_m W_m}{\eta_x^2} D_m \eta_x - \frac{K^* a_m^2}{\eta_z} W_m + Ra_m a_m^2 \theta_m = i\frac{\sigma_m \delta^2}{\chi} (D_m^2 - a_m^2) W_m \ , \tag{37}$$

$$(D_m^2 - a_m^2)\theta_m + W_m = -i\sigma_m G_m Pr_m \theta_m \ . \tag{38}$$

在$z = 1$处的边界条件为

$$W = DW = \theta = 0\,, \tag{39}$$

且在 $z_m = -1$,

$$W_m = \theta_m = 0. \tag{40}$$

在界面处，$z = z_m = 0$,

$$ReW = \hat{d}W_m, \quad \hat{d}\theta = \varepsilon^2\theta_m, \quad D\theta = \varepsilon D_m\theta_m, \tag{41}$$

$$D^2W = \frac{\alpha_{BJ}\hat{d}}{\delta\sqrt{\eta_x(0)}}\left(DW - \frac{\hat{d}^2}{Re}D_mW_m\right), \tag{42}$$

$$D^3W - 3a^2DW - iaRe\bar{u}DW + iaRe\frac{d\bar{u}}{dz}W + \frac{\hat{d}^4}{Re\delta^2\eta_x}D_mW_m = -i\sigma ReDW + i\sigma_m\frac{\hat{d}^4}{\chi Re}D_mW_m. \tag{43}$$

在此,

$$D = \frac{d}{dz}, \quad D_m = \frac{d}{dz_m}, \quad a = \hat{d}a_m, \quad \sigma = \frac{\hat{d}^2}{Re}\sigma_m. \tag{44}$$

采用以切比雪夫多项式为基函数的切比雪夫谱配置法，将上述线性微分方程（35）—（38）和边界条件（39）—（43）在高斯-洛巴托点 [11] 处离散化。分别考虑 $\zeta = 2z - 1$ 和 $\zeta_m = -2z_m - 1$，流体区域 $[0,1]$, 和多孔区域 $[-1,0]$ 被变换 [29] 到切比雪夫区域 $[-1,1]$。

离散化方程写成如下形式的广义特征值问题

$$\mathscr{A}\mathbb{X} = \sigma\mathscr{B}\mathbb{X}, \tag{45}$$

其中， σ 和 $\mathbb{X}$ 分别表示场变量的特征值和特征向量， $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为复方阵。采用 MATLAB 内置的 QZ 算法 [32]来确定广义特征值。

2.4. 动能谱

诱发不稳定性的物理机制可以通过能量收支分析来描述。正如 [26, 10, 37, 39], 所提出的， 流体层扰动动能的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\lambda}\int_0^1\int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(u'^2 + w'^2\right)dxdz = &-\frac{1}{\lambda}\int_0^1\int_0^\lambda u'w'\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)dxdz - \frac{1}{\lambda Re}\int_0^1\int_0^\lambda\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right]dxdz + \frac{Ra}{\lambda Re^2}\int_0^1\int_0^\lambda T'w'\,dxdz + \frac{1}{\lambda Re}\int_0^\lambda\left[w'p'\right]_{z=0}dx\\ &-\frac{1}{\lambda Re}\int_0^\lambda\left[u'\frac{\partial u'}{\partial z} + w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right]_{z=0}dxdz,\end{aligned} \tag{46}$$

其中， $\lambda = 2\pi/a$。

对于多孔层，

$$\frac{1}{2\lambda_m\chi}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}\frac{\partial}{\partial t_m}\left({u_m}'^2+w_m'^2\right)dx_m\,dz_m=\frac{Ra_m}{\lambda_m\delta^2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}T_m'w_m'\,dx_m\,dz_m-\frac{1}{\lambda_m\delta^2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}\left[\frac{u_m'^2}{\eta_x}+\frac{K^*w_m'^2}{\eta_z}\right]dx_m\,dz_m-\frac{1}{\lambda_m}\int_{0}^{\lambda_m}\left[w_m'p_m'\right]_{z_m=0}dx_m, \tag{47}$$

其中， $\lambda_m = 2\pi/a_m$。

结合式（46）和（47），能量收支方程采用标准形式 [6, 30]

$$\frac{\partial(KE)}{\partial t}+\frac{\partial(KE_m)}{\partial t_m}=E_s+E_b+E_d+I+E_{bm}+E_{Dm}, \tag{48}$$

其中，

$$KE=\frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\lambda}\left(u'^2+w'^2\right)dx\,dz, \tag{49}$$

and

$$KE_m=\frac{\hat{d}^3}{2\lambda_m Re^3\chi}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}\left(u_m'^2+w_m'^2\right)dx_m\,dz_m, \tag{50}$$

分别表示流体层和多孔层中的扰动动能，并且

$$E_s=-\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\lambda}u'w'\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)dx\,dz, \tag{51}$$

表示基态与受扰状态之间通过雷诺应力传递的能量量值，

$$E_b=\frac{Ra}{\lambda Re^2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\lambda}T'w'\,dx\,dz, \tag{52}$$

$$E_{bm}=\frac{\hat{d}^3Ra_m}{\lambda_m Re^3\delta^2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}T_m'w_m'\,dx_m\,dz_m, \tag{53}$$

是扰　　动能项，分别由流体层和多孔层中的浮力所做的功产生　　ly,

$$E_d=-\frac{1}{\lambda Re}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\lambda}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dz, \tag{54}$$

表示流体层中的黏性耗散，

$$E_{Dm}=-\frac{\hat{d}^3}{\lambda_m Re^3\delta^2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\lambda_m}\left[\frac{u_m'^2}{\eta_x}+\frac{K^*w_m'^2}{\eta_z}\right]dx_m\,dz_m, \tag{55}$$

表示克服表面阻力所造成的能量损失，以及

$$I=\frac{1}{\lambda Re}\int_0^1\left[w'p'-\left(u'\frac{\partial u'}{\partial z}+w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\right]_{z=0}dx-\frac{\hat{d}^3}{\lambda_m Re^3}\int_{-1}^0\left[w'_m p'_m\right]_{z_m=0}dx_m, \tag{56}$$

表示　　由于流体与多孔层界面处应力和速度连续性而做的功　　s.

3. 结果与讨论

本文对位于流体层下方的各向异性非均质多孔层中的非等温平面库埃特流进行了严格的稳定性分析，以了解其失稳边界。注意，多孔介质中的粒径分布遵循指数分布 [36, 21]。因此，x 和 z 方向上的非均匀性函数分别取为 $\eta_x=\mathrm{e}^{A(1+z_m)}$ 和 $\eta_z=\mathrm{e}^{B(1+z_m)}$。研究发现，对于所考虑的问题，在固定 B 时改变 A 的影响，与固定 A 时改变 B 的影响几乎相同（见附录B中的图 B.18）。因此，为简化方向性非均质性的处理，流动法向和流动平行方向上的 η_x 和 η_z 取为相同，即考虑 A =B。当 $z_m=-1$, $\eta_x=\eta_z=1$ 且 A 取正（负）值时，水平方向和垂直方向上的非均质性，即 η_x 和 η_z，沿垂直方向增大（减小）。此处的流动主要受七个控制参数支配。达西数（δ）、渗透率比或各向异性参数（K^*）以及非均匀性参数（以 A 表示）控制多孔层的渗透率；深度比（$\hat{d}$）表征界面的位置；雷诺数（Re）决定流动/强迫流动的强度；普朗特数（Pr/Pr_m）表示流体类型；瑞利数（Ra/Ra_m）决定热源强度。因此，以下研究在这些参数的较大取值范围内进行。文献中通常采用的其他参数 [44, 16, 40, 41, 12, 13]，例如孔隙率（χ）、热扩散率之比（ε）、Beavers-Joseph 常数（α_{BJ}）和热容比（G_m），分别固定为 0.3、0.7、0.1 和 10。

理论验证是在各向同性均质多孔介质的极限情况下进行的，与 [12], 的结果完全吻合，并与已发表的结果一致，相关结果列于表1。同时，通过重现 [17] 的结果，将实验结果与本研究中各向同性均质多孔介质内自然对流的理论结果在极限$Re\to 0$ 下进行了验证，相关结果列于表2。基于各种数值实验发现，切比雪夫多项式取50项已足以使本研究获得令人满意的收敛性，因此我们将多项式阶数固定为50。

在讨论所研究问题的稳定性之前，有必要说明非均匀性和介质各向异性可能对多孔系统上覆流体中的等温平面库埃特流稳定性的影响。[15]有人观察到，多孔层为各向同性且均匀时，流体中的等温平面库埃特流无条件稳定。在多孔介质中引入各向异性和非均匀性后，这一观察结果是否仍然成立？我们研究了这一问题，数值实验表明，在等温条件下，对于所考虑的各向异性和非均匀性取值，流体-多孔系统中的库埃特流也始终是线性稳定的。

表 1：Chang [12] 和本研究针对若干 $\hat{d}$ 以及 $Re = 10$, $Pr = 6.5$, $\delta = 0.002$, $\varepsilon = 0.7$,$\alpha_{BJ} = 0.1$, $G_m = 10$ 和 $\chi = 0.3$所得的临界 Ra_m,a_m 值。

$\hat{d}$	Ra_m Chang[12]	Ra_m （本研究）	a_m Chang[12]	a_m （本研究）	$-\sigma_m{}^r$ Chang[12]	$-\sigma_m{}^r$ （本研究）
0.10	23.11	23.109660	2.12	2.12	−0.03627	−0.036267
0.12	22.55	22.545865	2.09	2.09	−0.04079	−0.040793
0.14	13.31	13.312916	18.42	18.42	−704.832	−704.832171
0.16	8.04	8.035135	16.22	16.22	−537.339	−537.338916
0.18	5.14	5.138917	14.49	14.49	−423.208	−423.207972
0.20	3.44	3.440960	13.10	13.10	−342.127	−342.126487

表 2：Chen 与 Chen [17] 通过实验获得的临界 Ra_m 值，以及本研究针对若干 $\hat{d}$所得的临界值。其他参数值可参见 Chen 与 Chen [17] 中的表 1 和表 2。

$\hat{d}$	Ra_m （本研究）	Ra_m Chen 与 Chen [17]
0	39.477879	40.07
0.025	28.145687	31.82
0.1	19.152601	17.57
0.2	3.521270	3.95
0.5	0.158785	0.159
1	0.012084	0.0124

3.1. 各向异性变化的影响

为考察各向异性对不稳定性行为的影响，我们将多孔介质视为均匀介质，即 $\eta_x = \eta_z = 1$，并取各向异性参数 [20] 的五个值：0.001、0.01、0.1、1 和 10。图 2 展示了水中在 $\hat{d} = 0.1$、 $\delta = 0.002$ 和 $Re = 10$ 条件下，若干各向异性参数K^* 对应的中性曲线及其振荡频率的变化。K^* 的不同取值会使中性曲线呈现单模态或双模态行为。与中性曲线在较低振荡频率处的波瓣相关联的模态称为多孔模态，与中性曲线在较高振荡频率处的波瓣相关联的模态称为流体模态；其中，对流分别主要局限于多孔层和流体层内。值得注意的是，当K^*较小时，即取 0.001 和 0.01 时，中性曲线呈单模态，多孔模态完全主导系统不稳定性。随着K^*增大，中性稳定性曲线由单模态行为转变为双模态行为。当$K^* = 0.1$ 和 1 时，多孔模态仍占主导，其对应的波数范围分别为 $0 \le a_m < 21.10$ 和 $0 \le a_m < 9.50$。但当$K^* = 10$ 时，

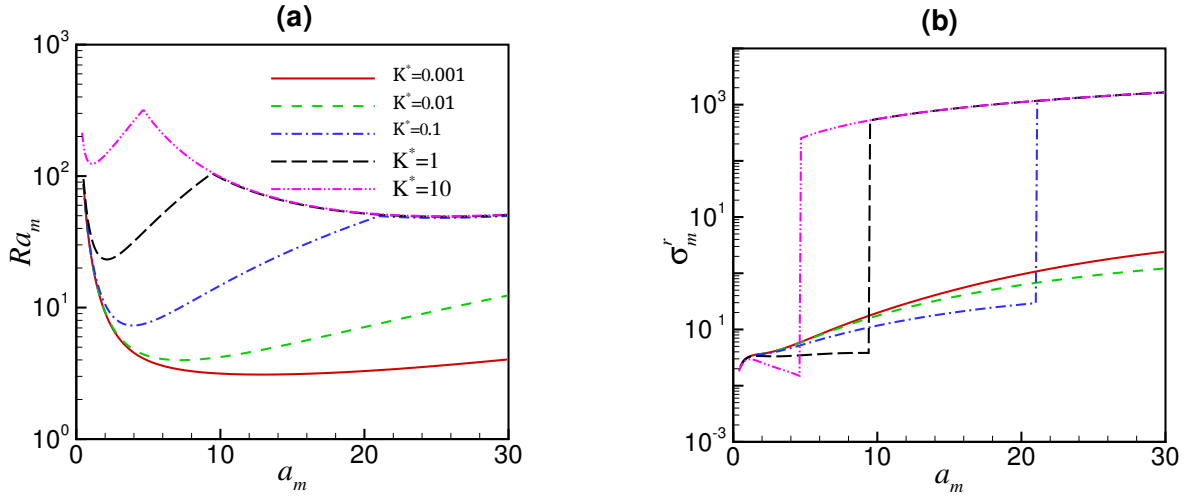


图2：在$\hat{d}=0.1$, $\delta=0.002$、$Pr=6.9$和$Re=10$下，不同各向异性参数对应的中性曲线及振荡频率的变化。

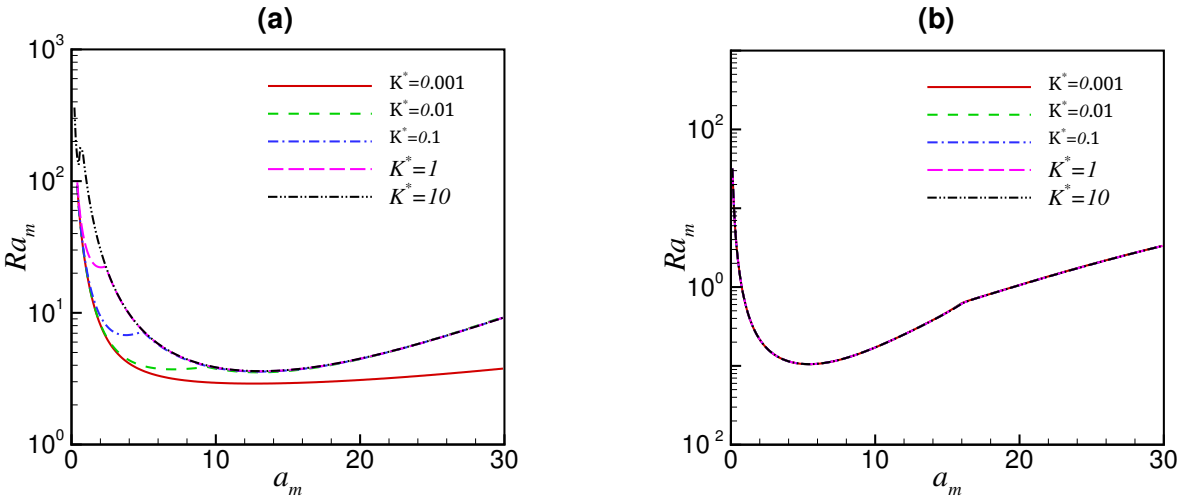


图3：Va　不同各向异性参数下中性曲线的变化，对于(a)$\hat{d}=0.2$，(b) $\hat{d}=0.5$，其中 $\delta=0.002$、$Pr=6.9$ 和$Re=10$　　.

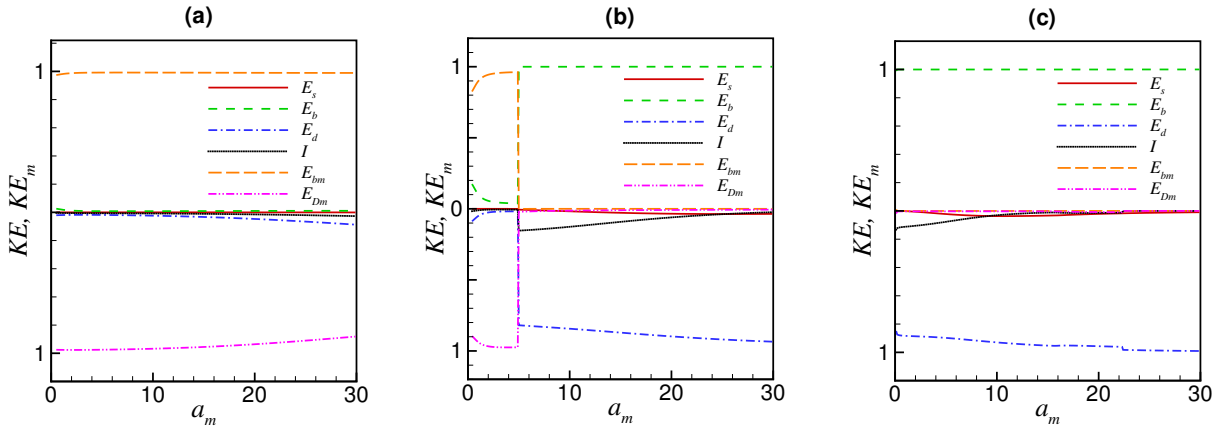


图4：能　　量分量 (a) $\hat{}d = 0.1, K^* = 0.001$, (b) $\hat{}d = 0.1, K^* = 0.1$, (c) $\hat{}d = 0.5, K^* = 0.001$，其中 $\delta = 0.002$、$Pr = 6.9$ 和 $Re = 1$　　0.

对流的临界模态转变为流体模态，与该模态对应的波数范围为$4.70 \leq a_m \leq 30$。显然，随着K^*减小，多孔模态变得更不稳定；从逻辑上看，这也是合理的，因为各向异性减弱会使垂直方向的渗透率增大（因为K_x保持不变），从而降低流动阻力，进而使多孔层中的流动失稳。因此，与 [12]得到的各向同性情形相比，在多孔层中引入各向异性会使对流更早发生。例如， [12] 得到的临界瑞利数为 23.11，其中 $\hat{}d = 0.1$、$\delta = 0.002$、$Pr = 6.5$ 和$Re = 10$。而在多孔介质中引入各向异性并保持其他参数值不变后，本研究得到的 $K^* = 0.001$ 对应的临界瑞利数为 3.09。

当d 增大到 0.2 时（见图 3(a)），对于不同的K^* 值，中性曲线的模态行为与图 2 一致，$K^* = 0.01$值除外。对于这一K^*值，稳定性曲线呈现出双模态特征，这与$d = 0.1$时中性曲线呈现单模态特征的情况相反。我们还观察到，在$K^* > 0.001$ 且$d = 0.2$时，流体模态始终主导系统的不稳定性。因此，自然会想到一个问题：进一步增大d后，$K^* = 0.001$对应的中性曲线单模态特征是否会转变为双模态？为回答这一问题，我们考察了图 3(b)。在$d = 0.5$ 时（图 3(b)），显然，多孔模态对系统的不稳定性行为没有影响。此时，无论各向异性参数K^*取何值，中性曲线都只呈现单模态行为，系统的不稳定性由流体模态主导，而且该参数对库埃特流不稳定性的影响消失。

为了理解不稳定性行为背后的物理机制，我们绘制了动能平衡谱，这将使我们能够对不稳定性的类型进行分类，并验证从中性稳定性曲线获得的模态类型。通过对动能平衡谱的分析，我们观察到只有三个正项充当致失稳因素：E_s、E_b & E_{bm}，根据这三个项的贡献，不稳定性的类型定义为 [28]。如果E_s (E_b 或E_{bm}) 在动能平衡谱中的贡献超过70%，则该不稳定性为热剪切（流体层中的热浮力或多孔层中的热浮力）。为了理解

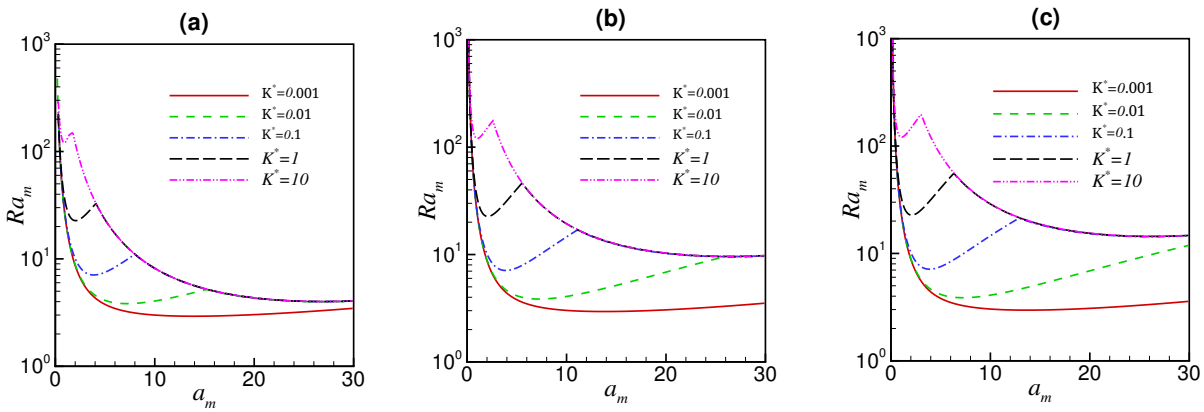


图5：不同各向异性参数下中性曲线的变化，分别对应 (a) $\delta = 0.0005$ (b) $\delta = 0.0008$ (c) $\delta = 0.001$，其中 $\hat{d} = 0.1$、$Re = 10$ 和 $Pr = 6.9$。

对于上述不稳定性，我们考虑了参数 (ˆd, Re,Pr δ,K*)的三组取值 (0.1,10,6.9,0.002,0.001)、(0.1,10,6.9,0.002,0.1) 和 (0.5,10,6.9,0.002,10)。图4显示，在整个过程中，浮力效应在流体区域和多孔区域中始终为正，从而明确表明浮力是致失稳因素。图4(a)显示，E_{bm} 是动能平衡中占主导地位的项；因此，浮力影响多孔层中的主导不稳定性。在图4(b)中，在 $0 \leq a_m < 21.10$范围内，E_{bm} 项占主导地位，而在该范围之外，占主导地位的项是E_b。因此，当 $0 \leq a_m < 21.10$时，可观察到多孔层中的热浮力失稳；在该波数范围之外，则可观察到流体层中的热浮力失稳，这也由中性稳定性曲线得到（见图2）。根据图4(c)，E_b 项在整个波数范围内占主导地位并使流动失稳，而其他各项则负责稳定流动。这导致流体层中的浮力效应使流动失稳，这一点也从中性稳定性曲线中观察到（见图3(b)）。

为考察不同渗透性多孔介质中各向异性参数的影响，本文选取 δ [20] 的三个不同取值：0.0005、0.0008 和 0.001（见图5）。值得注意的是，即使对于各向同性均质多孔介质，达西数的影响在本研究中也具有重要意义，因为迄今为止尚未对此进行研究。当 $\delta = 0.0005$ 时，仅在$K^* = 0.001$下得到单模态中性曲线，此时多孔模态主导不稳定性。随着K^*增大，中性曲线变为双模态；当$K^* > 0.01$时，流体模态主导不稳定性。当 δ 增至 0.0008 时，中性曲线的模态行为没有变化，但多孔层中的不稳定性增强；在$K^* \leq 0.1$时，多孔模态占主导。对于$K^* = 0.01$，随着 δ 增大，流体层中的不稳定性逐渐消失；当 $\delta = 0.001$ 时，中性曲线变为单模态。由此可见，降低 δ 会增加流体层中的不稳定性，因为这会阻碍流体渗入多孔层。

要查看 e　各向异性多孔介质中流体层上板运动引起的剪切效应

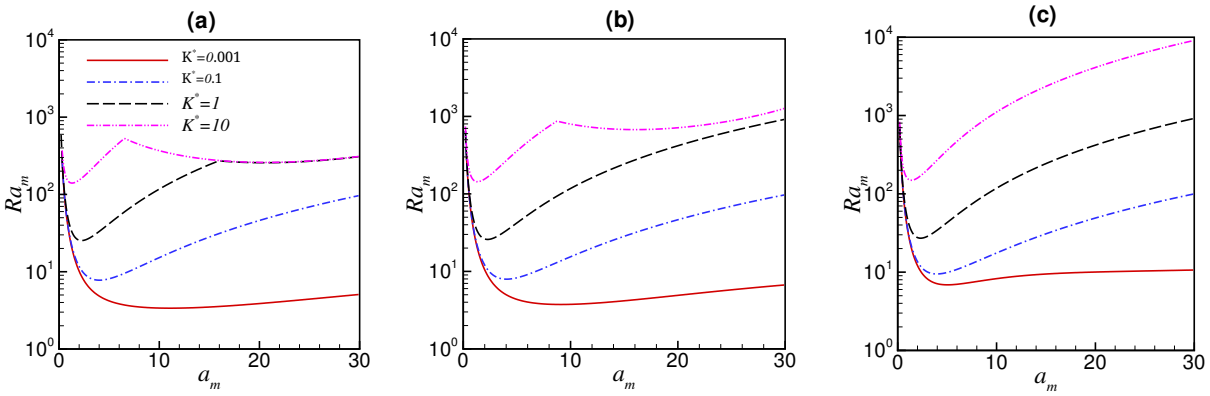


图6：不同各向异性参数下中性曲线的变化 针对 (a) $Re = 50$ (b) $Re = 100$ (c) $Re = 500$，其中 $\hat{d} = 0.1$, $\delta = 0.002$ and $Pr = 6.9$.

介质中，考虑了Re的三个不同值：50、100和 500。这里注意到，中性曲线始终呈现带有多孔模态的单模态特征，并且 $K^* = 0.001$ 和 $K^* = 0.01$ 在 Re 取不同值时没有这种变化。因此，在后续研究中，省略 $K^* = 0.01$。当K^* 从0.1 增加到 1 时，对于$Re = 50$，中性曲线的单模态特征转变为双模态特征，并且与流体模态相对应的a_m 范围为 $16 \le a_m \le 30$，而当 $K^* = 10$时，该范围为 $6.60 \le a_m \le 30$。这里，多孔模态主导系统失稳，这与前一种情况（图 2）相反；在前一种情况下，当$K^* = 10$时，流体模态占主导地位。在$Re = 100$时，只有当 $K^* = 10$ 和$Re = 10$时，中性曲线才呈现双峰行为。当 Re 增加到 500 时，无论K^*取何值，流体层中的不稳定性都会消失。因此，很明显，随着Re值增加，流体模态趋于稳定，流体层中的不稳定性逐渐消失。

为研究液态金属、空气、水和重油等不同流体中的各向异性影响，本文考虑了Pr 的四个取值：0.01、1、10 和 100 [12]。无论Pr取何值，当$K^* = 0.001$ 时，中性曲线均呈单模态，且对应多孔模态（见图7）。对于各向同性多孔介质，即$K^* = 1$时，流体模态开始出现，因此中性曲线呈双模态。不过，不稳定性仍由多孔模态主导。当K^* 从1增至10时，在$Pr = 0.01$、1和10的情况下，流体模态占主导。另一个观察结果是，对于液态金属（$Pr = 0.01$），当$K^* = 0.1$、1和10时，可观察到振荡频率的连续变化模式 σ_m^r（图中未显示）。在上述情况下，多孔模态和流体模态对应的波数范围将通过动能平衡谱确定，因为无法从中性稳定性曲线（图7(a)）中辨明准确范围。

图8表明，在液态金属情况下，流体层和多孔层中由浮力引起的能量传递项对流动失稳的贡献大于其他项。因此，会发生热浮力失稳。此外，对于 $K^* = 0.1$、$E_b < E^{b_m}$，在波数 $0 \le a_m \le 15$ 的范围内，不稳定性由多孔层控制。在该波数范围之外，流体层中的不稳定性占主导。同样，对于 $K^* = 1$ 和$K^* = 10$，当$a_m \le 7.3$ 和$a_m \le 3.6$时，多孔层的主导特征出现，

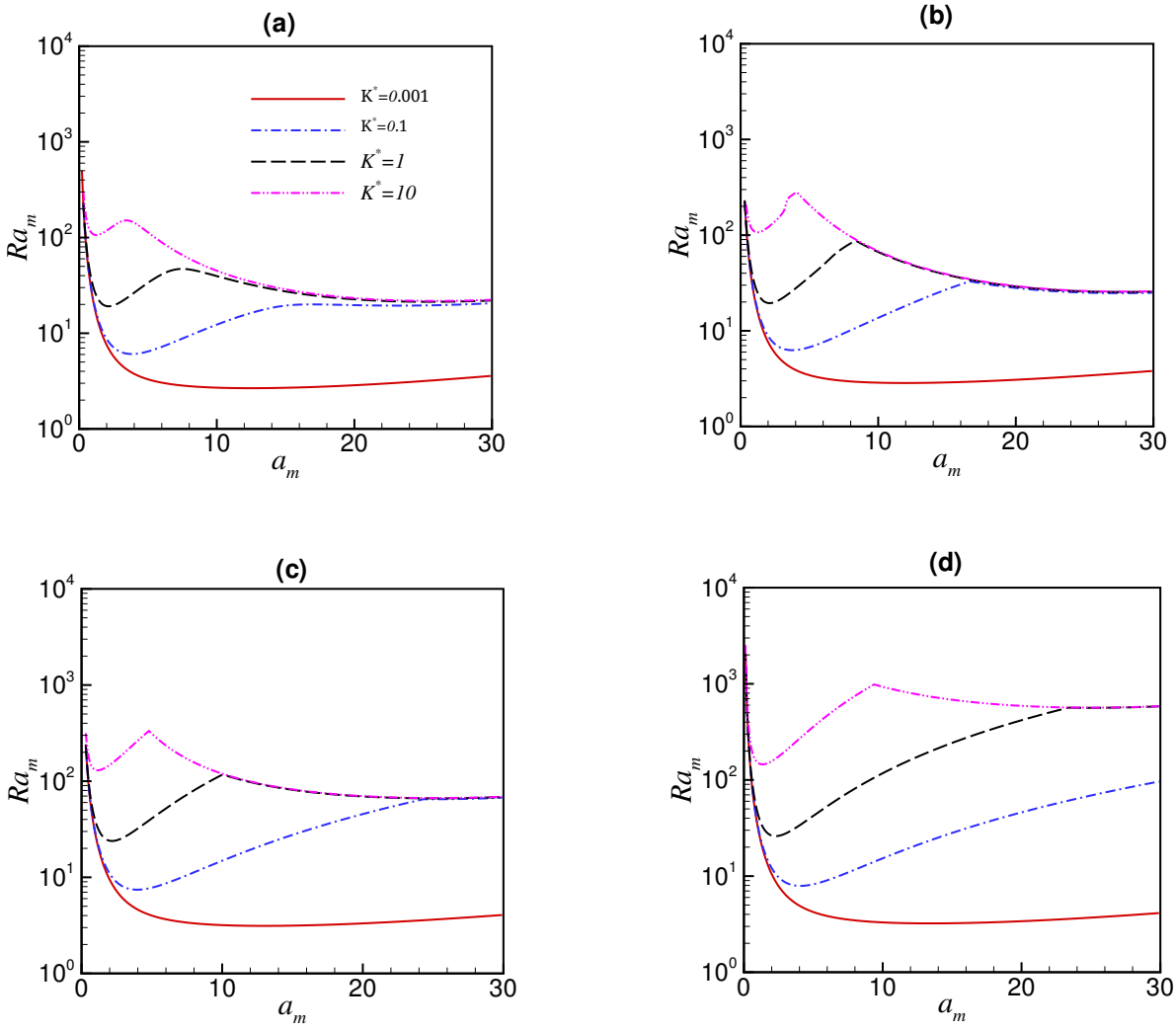


图7：不同各向异性参数下中性曲线的变化，针对(a) $Pr = 0.01$ (b) $Pr = 1$ (c) $Pr = 10$ (d) $Pr = 100$，其中$\hat{d} = 0.1$、$\delta = 0.002$ 和 $Re = 10$。

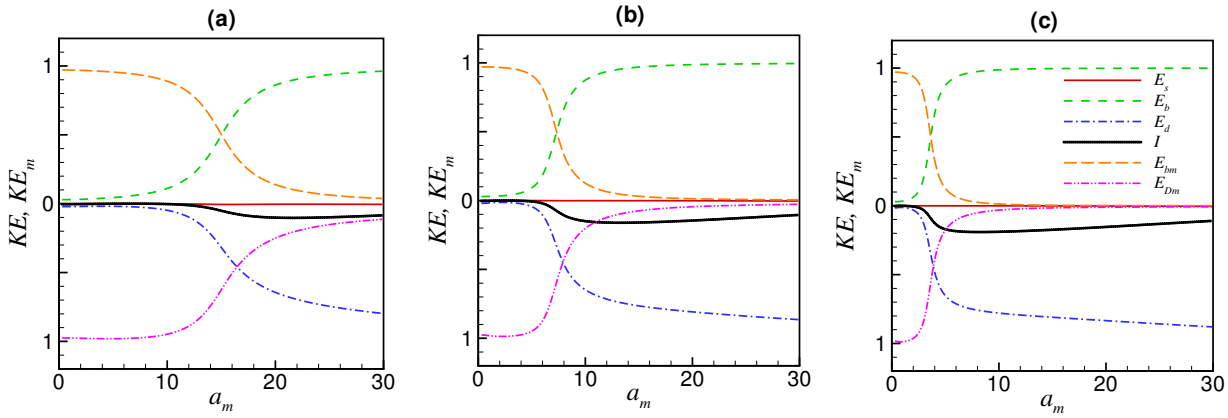


图8：能量分量 (a) $K^* = 0.1$，(b) $K^* = 1$，(c) $K^* = 10$，其中 $Pr = 0.01$、$\hat{}d = 0.1$、$\delta = 0.002$ 和 $Re = 10$。

分别；在其他地方，流体层主导不稳定性。只有借助观测到的 KE 谱，才能计算出这一确切范围。

此外，当模态从多孔模态过渡到流体模态时，可能出现怎样的流型？通过绘制以流函数和温度等值线表示的二次流型，可以得到这一问题的答案。图 9 展示了不同参数值（0.1,10,0.01,0.002,0,0.1）下的二次流型，这些参数为（$\hat{}d$,Re,Pr δ,A,K^*）。在水平方向上，多孔层的波长以 $\hat{}d$ 倍流体层的尺度进行缩放。沿垂直方向，多孔层从 -1 延伸至0，流体层从0延伸至1。本研究中的系统从下方受热，且上板的温度低于下板的温度，因此最初的热传递是由底部向顶部的传导，以及由上板运动导致的从左向右的传导。当温差超过阈值时，基本流变得不稳定，因此系统中发生对流。图 9(a) 表明，在$a_m = 9.6$时，流函数型在流体层和多孔层中几乎均匀分布，并且可以观察到多孔模态占主导地位，这也通过图 8(a) 中的动能谱得到了验证。图 9(b)表明，对于 $a_m = 21.7$，流函数型主要位于流体层内，这意味着流体模态主导不稳定性。相应的温度等值线显示于图9(c,d)中。对于多孔模态，温度等值线均匀分布于流体层和多孔层中；而对于流体模态，温度等值线主要局限于流体层内。这有助于验证前述章节所得出的观察结果。

到目前为止，我们的分析仅限于均质多孔介质；然而，正如文献中所述 [20, 4, 21]，非均匀性对界面位置、介质渗透率、上板运动以及流体类型的影响可能十分显著。

3.2. 非均匀性变化的影响

本节将讨论非均匀性变化的影响，同时保持$K^* = 1$不变，即采用各向同性多孔介质。非均匀性参数A 取值为 -2、 -1、0、1和 2 [20]。图10展示了变化

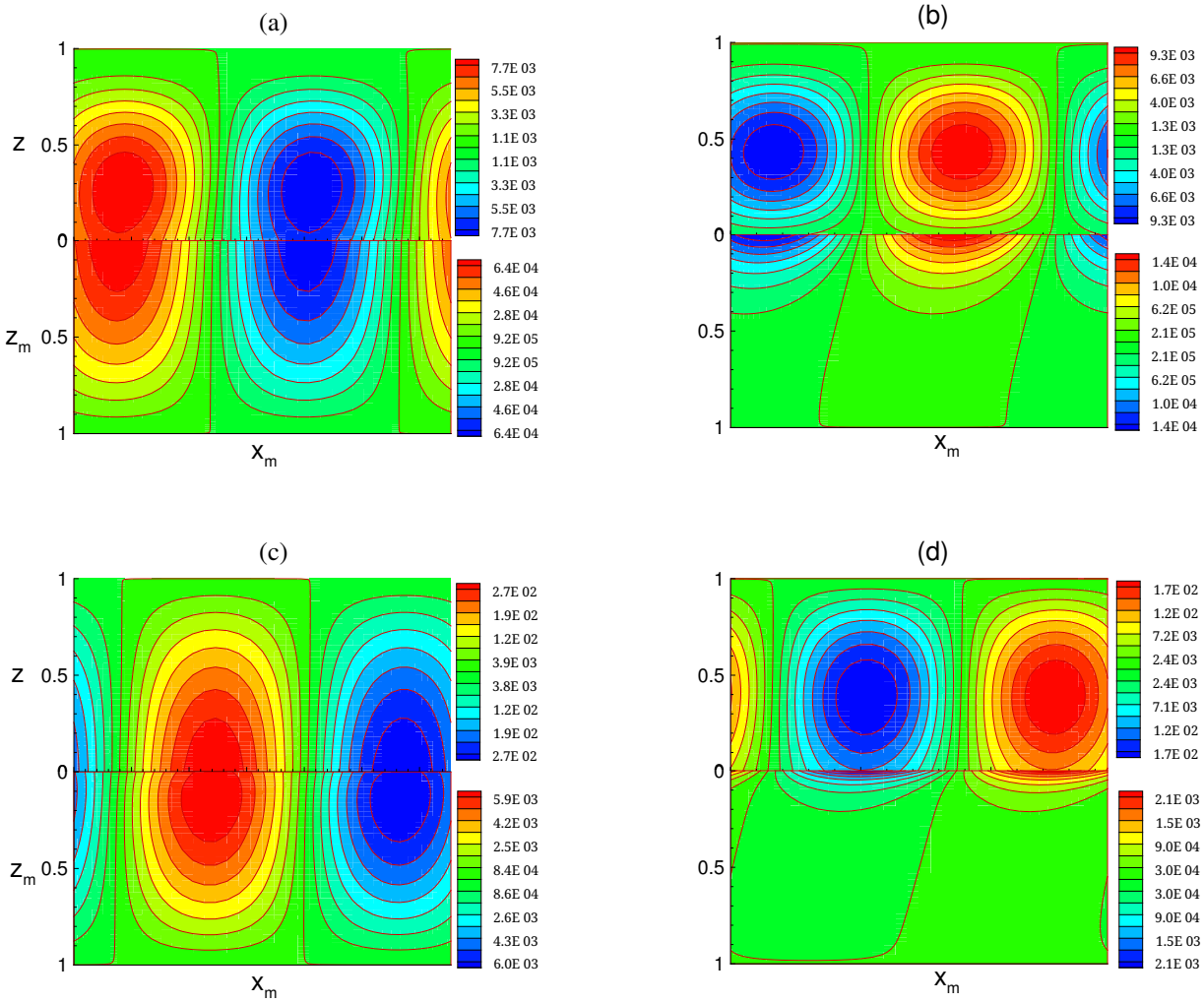


图9：流函数分布 (a, b) 以及相应的温度分布(c, d)，其中(a,c) $a_m = 9.6$，$\hat{d} = 0.1$，$\delta = 0.002$，$Re = 10$，$Pr = 0.01$ 和$K^* = 0.1$；(b,d) $a_m = 21.7$，$\hat{d} = 0.1$，$\delta = 0.002$，$Re = 10$，$Pr = 0.01$ 和$K^* = 0.1$。

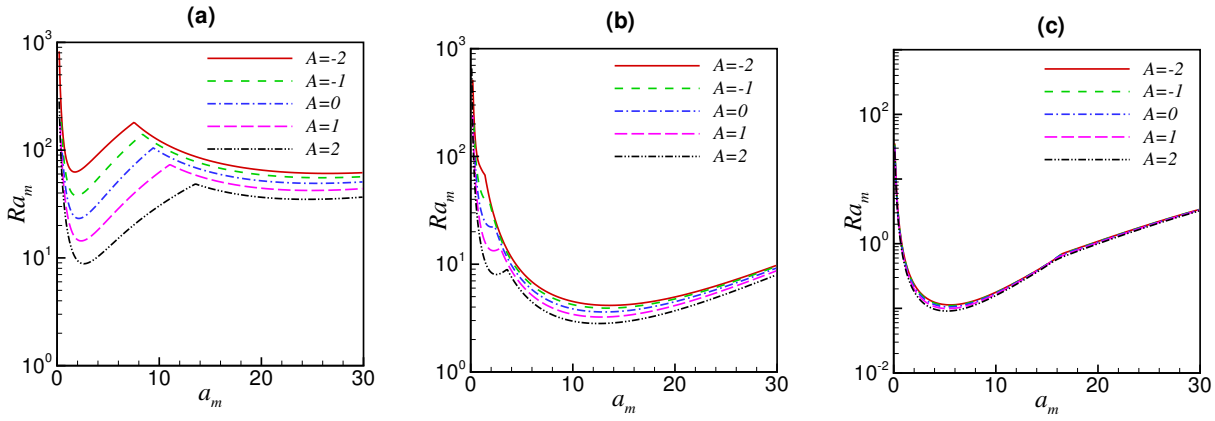


图10：不同非均匀性参数下的中性曲线变化：（a）$\hat{d}=0.1$（b）$\hat{d}=0.2$（c）$\hat{d}=0.5$，其中 $\delta=0.002$、$Re=10$ 和$Pr=6.9$。

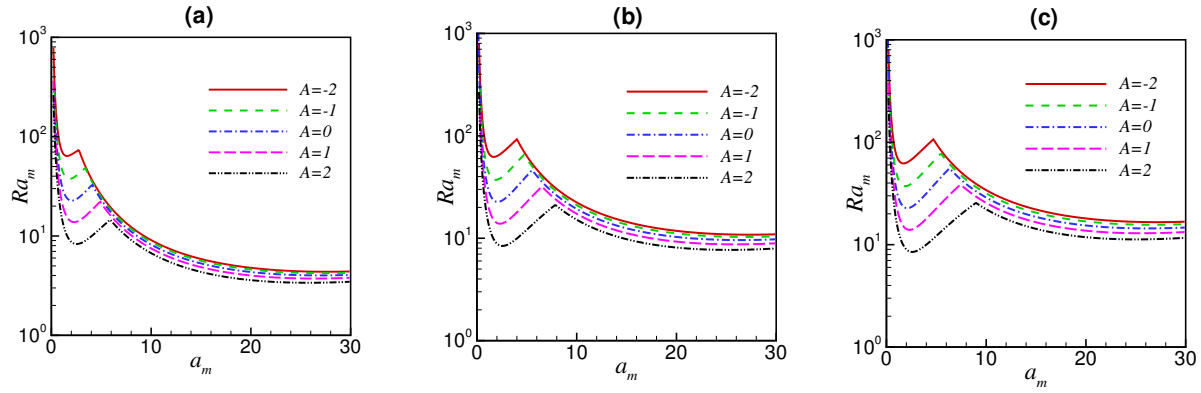


图11：对于（a） $\delta=0.0005$（b） $\delta=0.0008$（b） $\delta=0.001$，在 $\hat{d}=0.1$、$Pr=6.9$ 和$Re=10$条件下，不同非均匀性参数对应的中性曲线变化。

$\hat{}$ 中性曲线对于不同非均匀性参数 A 取值的情况，在.1、0.12 和 0.5 三个不同的d值下，并且$Re=10$，水的情况。对于$\hat{d}=0.1$，中性曲线始终呈双模态，且不稳定性由多孔模态主导，$A=-2$除外。这里注意到，随着A值增加，多孔介质瑞利数的临界值，即Ra_{m_c}，降低，也就是说，随着A值增加，多孔层变得更加不稳定。当 $\hat{d}$ 增加到 0.2 时，无论A取何值，中性曲线的模态行为保持不变，且流体模态控制系统的$\hat{}$ 不稳定性。进一步将d 值增加到0.5 时，中性曲线呈现单模态$\hat{}$ 行为，即对于A的所有取值均为流体模态。这里注意到，随着d值增加，非均匀性参数的影响变得不那么显著。

图11表示在 $\delta=0.0005$、0.0008和0.001时，不同非均匀性参数取值对应的中性曲线。此处，无论A 以及 δ取何值，中性曲线始终呈双模态。对于 $\delta=0.0005$ 和0.0008，不稳定性的主导模态始终为流体模态。当 δ 增加到0.001时，多孔层的不稳定性增强，

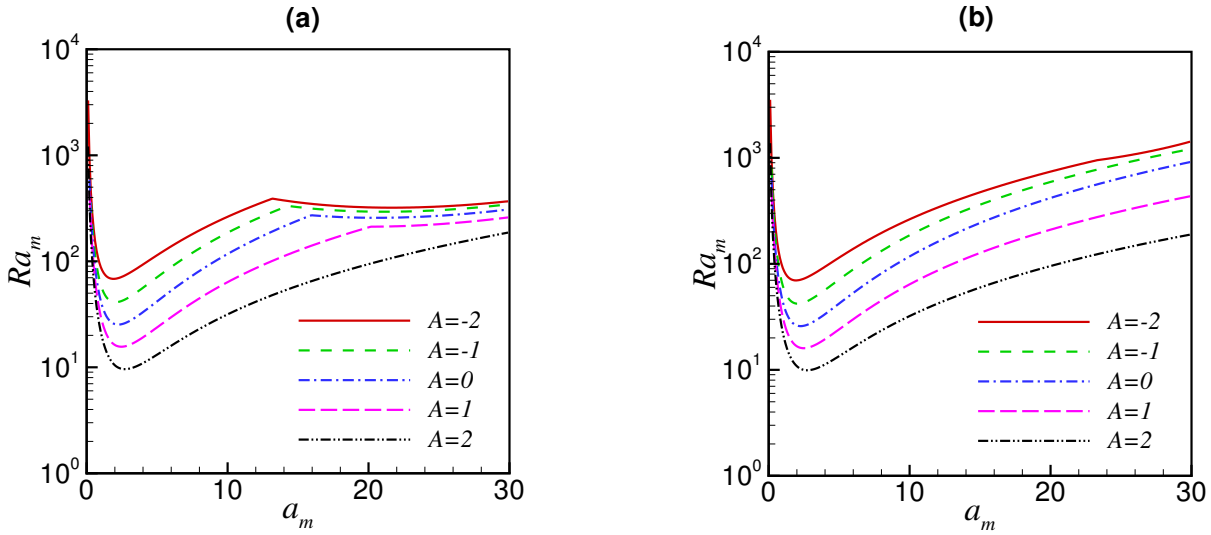


图12：变化　　不同非均匀性参数下的中性曲线，其中 (a) $Re = 50$，(b) $Re = 100$，$\hat{d} = 0.1$、$\delta = 0.002$ 和 $Pr = 6.9$。

并且仅当$A = 2$时，多孔层不稳定性才占主导。在图12中，展示了不同Re下、不同非均匀性参数幅值对应的中性曲线。当$Re = 50$时，可以观察到，随着A 增大，流体层中的不稳定性减弱，并在$A = 2$时消失。无论A取何值，多孔模态都主导系统的不稳定性。随着Re 增加至100，流体层中的不稳定性消失，而多孔模态成为唯一持续存在的模态。对于$Re = 500$，趋势同样如此。

不同流体类型的非均质性效应如图 13 所示。对于液态金属，即 $Pr = 0.01$，观察到中性曲线呈双模态，这与其他流体（空气、水、重油）不同；在此情况下，振荡频率随波数平滑变化。还观察到，当 $A = -2$ 和 $A = -1$时，流体模态控制系统不稳定性。对于 $Pr = 1$ 和 10，中性曲线呈现双峰行为，并且观察到多孔模态占主导地位，但 $Pr = 1$ 与 $A = -2$ 和 -1 时除外（图未显示）。随着 Pr 增加，多孔层中的不稳定性增强。除非 $A = -2, -1, 0$，否则在 $Pr = 100$时，中性曲线呈单模态。此外，无论 A取何值，不稳定性主要由多孔模态引起。

3.3. 各向异性变化与非均匀性的综合影响

前几节分别讨论了各向异性和非均匀性的影响。然而，为了理解上述参数对失稳机制的同时影响，对图14–16进行了分析。对于水这种流体，图14(a)和14(b)分别展示了在K^* 取不同值时，中性曲线在$A = -2$和 -1下的变化，其中$\hat{d} = 0.2$、 $\delta = 0.002$ 以及$Re = 10$。有趣的是，各向异性和非均匀性的同时变化引入了三模态失稳。在三模态特征中，随着波数增加，最不稳定模态从多孔模态转移到流体模态，随后又从流体模态转移到多孔模态。在$A = -2$时，对于 $0 < a_m \leq 8.2$，多孔模态在不稳定性中占主导地位。此后，对于 $8.2 < a_m \leq 25$，可以观察到流体模态占主导，进一-

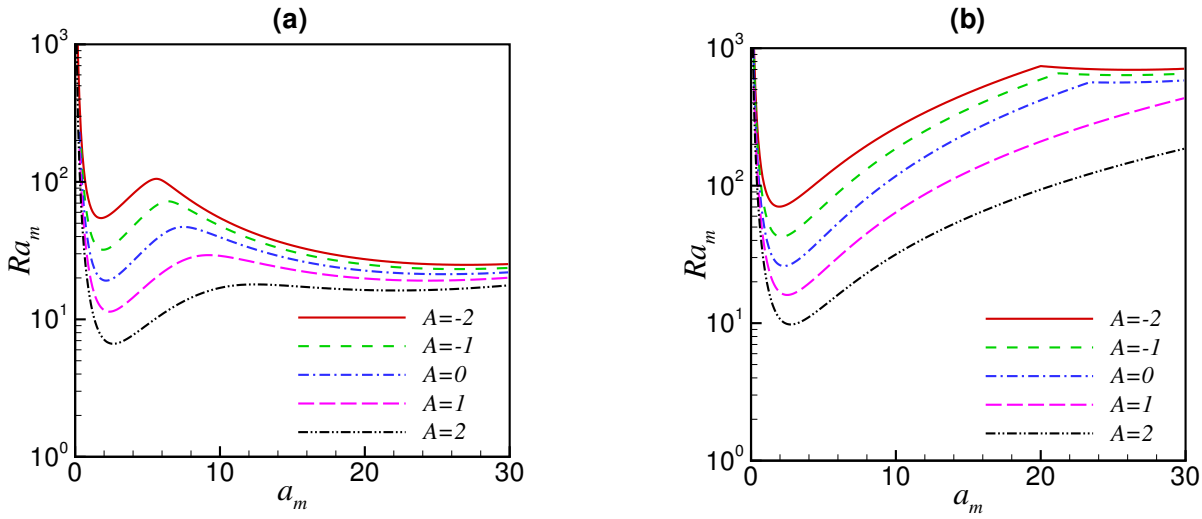


图13：不同非均匀性参数下中性曲线的变化，对于 (a) $Pr = 0.01$ (b) $Pr = 100$，其中 $\hat{d} = 0.1$、$\delta = 0.002$ 和 $Re = 10$。

增强的a_m 再次引入了多孔模态，对于 $a_m > 25$. 同样地，在 $A = -1$处，对于 $a_m \leq 12.50$，第一模态是多孔模态，随后对于 $12.50 < a_m \leq 15.30$ 是流体模态，然后对于$a_m > 15.30$再次变为多孔模态。我们还绘制了图15中的相应动能谱，以了解三模态失稳背后的物理机制。可以看出，整个波数范围内，只有流体层和多孔层中由浮力引起的能量传递项为正，其起到致失稳因素的作用。从图14可以观察到，当 $E_{bm} > E_b$ 且 $a_m \leq 8.2$ 和 $a_m > 25$时，多孔层中存在热浮力失稳。在其他范围内，E_b 主导不稳定性，这表明流体层中存在热浮力失稳。负剪切表明，扰动动能通过雷诺剪切应力损失给平均流，这被称为剪切耗散[7]。在多孔模态中，致失稳动能主要由表面阻力（E_{Dm}）平衡；而对于流体模态，则由流体层中的动能耗散（E_d）平衡。此外，为了了解当失稳模态从多孔模态变为流体模态、再从流体模态变为多孔模态时次级流模式的变化，我们在图16中绘制了 $A = -2$ 对应的所选波数3.7,20.5和27.10处的相应结果。图16(a)-(c)显示，流函数等值线遍布流体区域和多孔区域。图16(a)和16(c)显示，多孔层中的流动对流相对较强，表明系统中多孔模态占主导地位；而在图16(b)中，对流在流体区域占主导地位，这表明此时为流体模态。相应的温度等值线如图16(d)-(f)所示。可以看出，与流体模态对应的温度等值线占据整个流体层，并在流体层中形成完整的椭圆回路，表明其在相应层中的强度较高。对于从多孔模态中选取的波数，情况同样如此：通过温度等值线表现出的流动强度在多孔层中占主导地位。除此之外，对于相同的失稳模态，随着波数增加，次级流的强度（以幅值计）相对较低。这些流动模式也为我们通过线性稳定性和能谱获得的结果提供了验证。

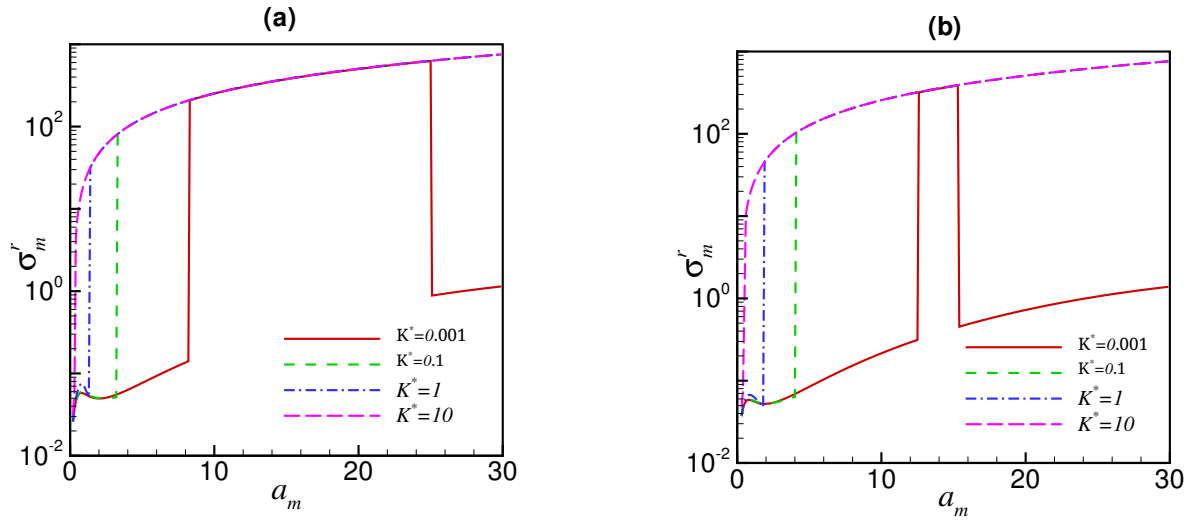
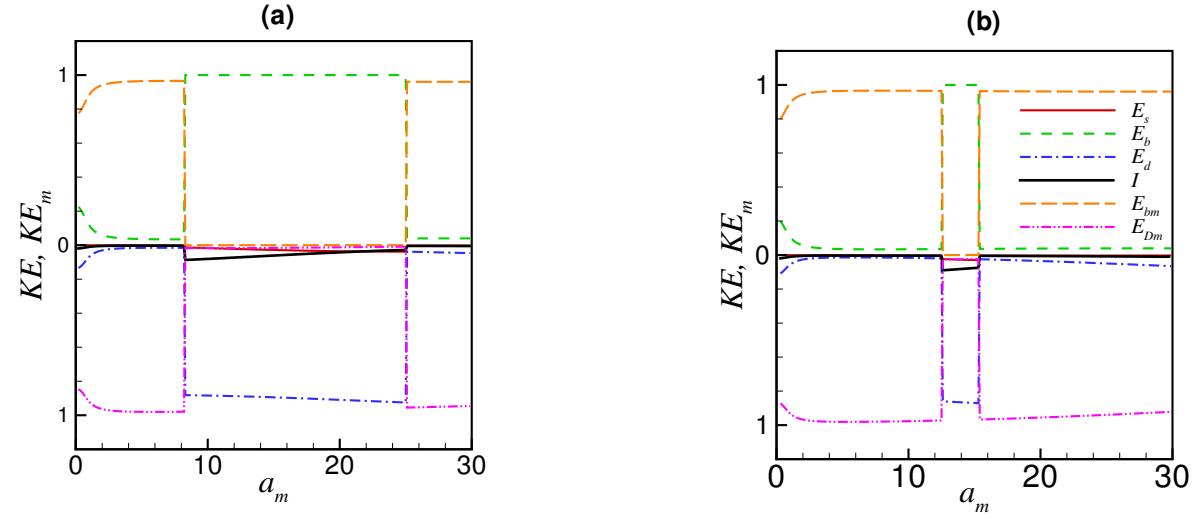


图14：变化　　不同各向异性参数下中性曲线的变化，对于 (a) $A=-2$ (b) $A=-1$，其中 $\hat{}d=0.2$、 $\delta=0.002$、$Pr=6.9$ 和$Re=10$　　.



能量分量，对于 (a) $A=-2$ (b) $A=-1$，其中 $\hat{}d=0.2$、 $\delta=0.002$、$Re=10$ 和$Pr=6.9$。

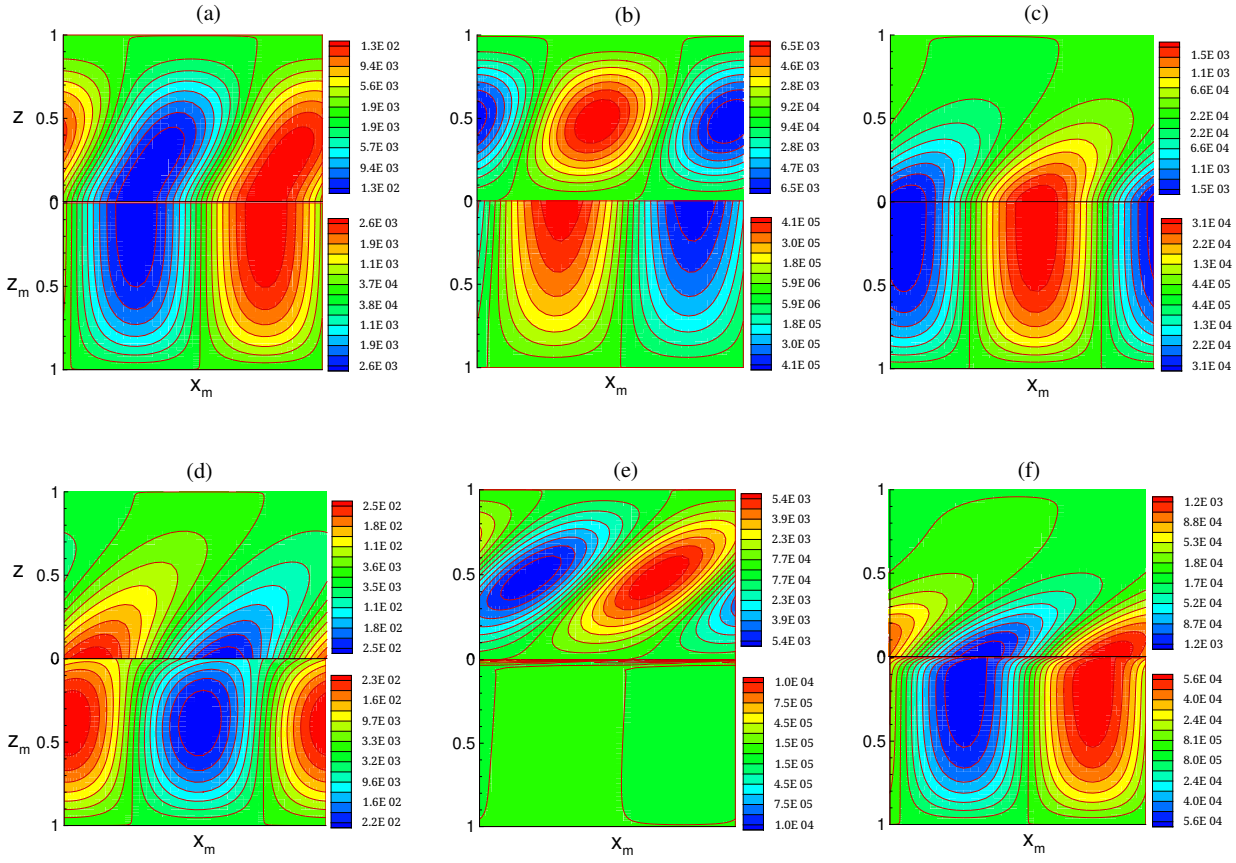


图16：流函数分布（a、b、c）及相应的温度分布（d、e、f），其中（a、d）$a_m = 3.7$、$\hat{}d = 0.2$, $\delta = 0.002$、$Pr = 6.9$、$Re = 10$、$K^* = 0.001$ 和$A = -2$；（b、e）$a_m = 20.5$、$\hat{}d = 0.2$, $\delta = 0.002$、$Pr = 6.9$、$Re = 10$、$K^* = 0.001$ 和$A = -2$；（c、f）$a_m = 27.10$、$\hat{}d = 0.2$,$\delta = 0.002$、$Pr = 6.9$、$Re = 10$、$K^* = 0.001$ 和$A = -2$。

与叠置系统中的非等温泊肃叶流不同，在该系统中，当各向异性参数（$K^* = 0.001$）、非均匀性参数（$A = -1$）以及 $\hat{}d = 0.13, Pr = 10, Re = 10$ 和 $\delta = 0.001$取值较小时，中性曲线呈现双模态特征；而在此处的库埃特流中，中性曲线呈现单模态（多孔模态）特征。$\hat{}$ 对于$A = 0$ 和 1，当$d = 0.1, Pr = 100, Re = 10$、$\delta = 0.001$ 和$K^* = 10$ 时，平面泊肃叶流的不稳定性由流体模态控制；而在相同的一组参数值下，库埃特流的不稳定性则由多孔模态主导。

4. 结论

本研究采用双区域方法，分析了位于各向异性非均质多孔层上方流体中的非等温平面库埃特流的线性稳定性。为离散线性化后的扰动方程，采用了切比雪夫配置法，并通过采用 QZ 算法求解广义特征值问题。本研究通过将多孔层视为各向同性且均质的极限情形，与 [12] 和 [17] （$Re \to 0$）的理论和实验结果进行了对照验证。本文讨论了深度比、各向异性、非均质性、雷诺数、达西数和普朗特数的影响。

研究发现，介质的各向异性和非均匀性不会改变多孔层上方流体中等温平面库埃特流的稳定性特征，即该流动仍然无条件稳定。考察各向异性和非均匀性对非等温库埃特流的影响时，随着d 增大，可观察到流动由单模态（多孔模态）$\hat{}$ $\hat{}$转变为双模态，再转变为单模态（流体模态）。当d取值较大时，非均匀性和各向异性的影响变得不显著，在所考虑的参数范围内，多孔层中的不稳定性消失。研究还发现，当下方多孔介质由水饱和时，对于$\delta = 0.002$ 和$Re = 10$，当$\hat{}d < 0.07$时，多孔模态始终主导不稳定性；而当$d > 0.21$ 时，无论A 和K^*取何值，流体模态都主导$\hat{}$不稳定性。随着K^* 减小，多孔模态变得更不稳定，双模态中性曲线转变为单模态（多孔模态）。临界瑞利多孔数随非均匀性参数增大而增大，这表明系统的不稳定性随非均匀性参数增大而增强。随着 δ、Re 和Pr 增大，中性曲线的双模态特征转变为单模态，流体层中的不稳定性也逐渐消失。

与均匀各向同性多孔介质的中性曲线呈单模态和双模态特征相反，在本研究中，参数（$\hat{}d, Re, Pr\ \delta, K^*, A$）取值为（$0.2, 10, 6.9, 0.002, 0.001, -2$）和（$0.2, 10, 6.9, 0.002, 0.001, -1$）时，出现了三模态失稳。除液态金属外，在所考察的参数变化范围内，失稳模态会突然改变。动能谱表明，在平衡促失稳动能时，由表面阻力（耗散）产生的能量是稳定多孔模态（流体模态）的主要因素。从动能谱可知，流体层和多孔层中的热浮力失稳是驱动系统失稳的主导因素。此外，研究还反复呈现了二次流型以 乐彩

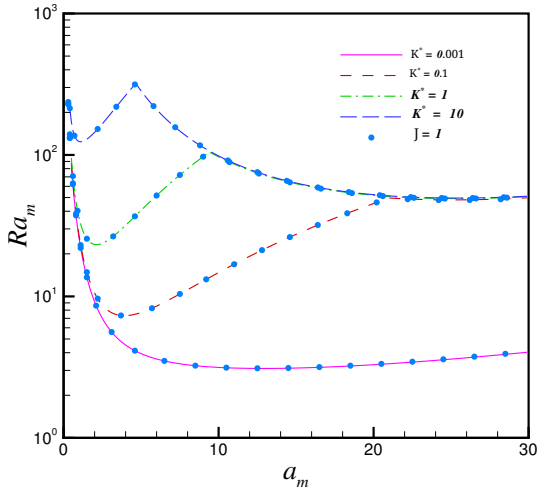


图 A.17：变化量 不同K^*下$J=0$（实线）和$J=1$（点线）的中性曲线，$\hat{}d=0.1$，$\delta=0.002$，$Re=10$，$A=0$和$Pr=6.9$.

理解流动动力学。

本研究聚焦于线性稳定性分析；为了超越该分析的范围，还需要进行弱非线性稳定性分析。此外，非线性稳定性分析有助于更清楚地理解向湍流的转变。沿着这一思路，本研究的非线性稳定性分析正在进行中。

致谢

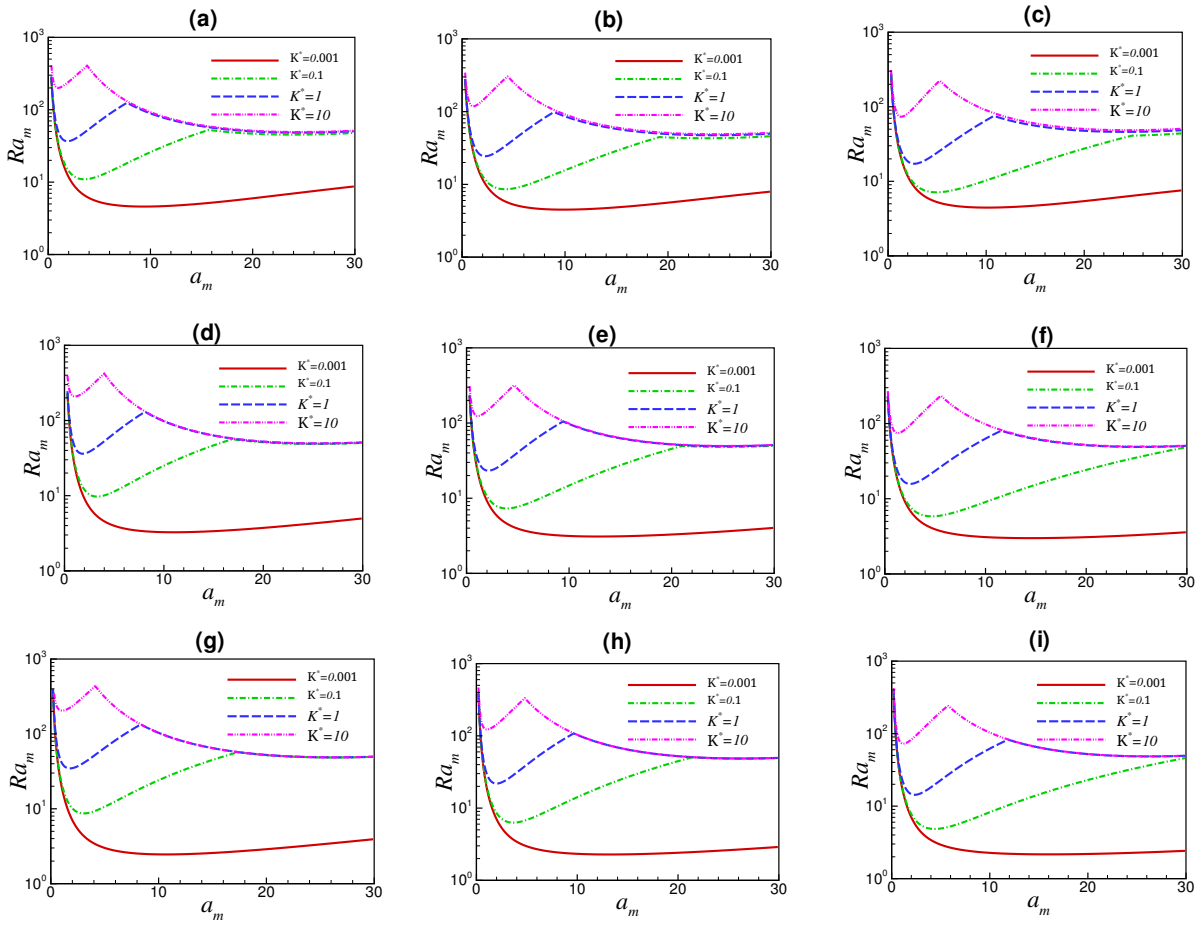
财政支持由印度人力资源与发展部（MHRD）和印度SERB提供（项目资助编号EEQ/2020/000101）。

附录A。不同 K^* 取 $J=0$ 和$J=1$ 时中性曲线的变化

图 A.17 表示在流体-多孔介质界面处考虑 Jones条件（$J=1$）和Beavers-Joseph条件（$J=0$）时，不同K^* 值的中性稳定性曲线变化。

附录B. 不同A 和B下中性曲线的变化

考虑沿水平方向和垂直方向分别取不同的非均匀性函数 $\eta_x=e^{A(1+z_m)}$ 和 $\eta_z=e^{B(1+z_m)}$ 时，不同各向异性参数（0.001,0.1,1,10）和非均匀性参数（-1,0,1）下的中性稳定性曲线变化如图 B.18 所示。



图B.18：中性曲线的变化，对于(a)A $=-1$，B $=-1$ (b)A $=-1$，B $=0$ (c)A $=-1$，B $=1$ (d) A $=0$，B $=-1$ (e) A $=0$，B $=0$ (f) A $=0$，B $=1$ (g) A $=1$，B $=-1$ (h) A $=1$，B $=0$ (i) A $=1$，B $=1$，其中 $\hat{}\mathrm{d}=0.1$、$\delta=0.002$，Re $=10$ 和 Pr $=6.9$。

参考文献

Allen, M.B.（1984）。用于模拟油藏中组分流的配置技术。施普普林格。doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-82213-1。

Allen, M. B.，& Khosravani, A.（1992）。采用修正特征线法，通过交替方向配置法进行溶质运移。水资源进展，*15*，125–132。doi：https://doi.org/10.1016/ 0309-1708(92)90039-5。

Anjali，& Bera, P.（2022）。流体上覆高度多孔区域中的非等温泊肃叶流稳定性。《流体力学专题问题会议论文集》，（第1–8页）。doi：https://doi.org/10.14311/TPFM.2022.001。

Anjali，Khan, A.，& Bera, P.（2022）。流体上覆各向异性非均质多孔区域中的非等温泊肃叶流稳定性。《流体力学杂志》，*949*，A44。doi：https://doi.org/10.1017/jfm. 2022.783。

Beavers, G. S., & Joseph, D. D. (1967). 天然可渗透壁面上的边界条件。*J. Fluid Mech.*, *30*, 197–207. doi:https://doi.org/10.1017/S0022112067001375.

Bera, P., & Khalili, A. (2002). 各向异性垂直多孔通道中混合对流的稳定性。《流体物理学》,*14*, 1617–1630. doi:https://doi.org/10.1063/1.1460879.

Bera, P., & Khalili, A. (2006). 普朗特数对充满多孔介质的垂直通道中混合对流流动稳定性的影响。《流体物理学》, *18*, 124103. doi:https://doi.org/10.1063/1.2405321.

Blest, D. C., Duffy, B. R., McKee, S., & Zulkifle, A. K. (1999). 热固性复合材料的固化模拟。*Compos.-A: appl.sci. and manuf.*, *30*, 1289–1309. doi:https://doi.org/10.1016/S1359-835X(99) 00032-9.

Blest, D. C., McKee, S., Zulkifle,A.K., &Marshall, P. (1999).通过高压釜树脂灌注进行固化模拟。复合材料科学与技术，*59*，2297–2313。doi:https://doi.org/10.1016/S0266-3538(99) 00084-6。

Boomkamp,P. A.M.&Miesen, R. H. M.（1996年）。平行两相流中失稳的分类。《国际多相流期刊》，*22*，67–88。doi:https://doi.org/10.1016/S0301-9322(96)90005-1。

Canuto,C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang,T.A.（1988年）。流体动力学中的谱方法。施普林格。doi:https://doi.org/10.1007/978-3-642-84108-8。

Chang,M.H.（2005年）。受水平平面库埃特流作用的叠置流体层和多孔介质层中的热对流。《流体物理学》，*17*，064106。doi:https://doi.org/10.1063/1.1932312。

Chang,M.H.（2006）。叠置流体层和多孔层中平面泊肃叶流作用下的热对流。《流体物理学》，*18*，035104。doi:https://doi.org/10.1063/1.2182004。Chang, M.H.、Chen,F.和Straughan, B.（2006）。流体上覆多孔层中泊肃叶流的不稳定性。《流体力学杂志》，*564*，287–303。doi:https://doi.org/10.1017/S0022112006001583。Chang, T. Y.、Chen,F.和Chang,M.H.（2017）。流体层上覆多孔层中平面泊肃叶–库埃特流的稳定性。《流体力学杂志》，*826*，376–395。doi:https://doi.org/10.1017/jfm.2017.442。Chen,F.和Chen,C. F.（1988年）。流体层下方水平多孔层中指状对流的起始。《传热学杂志》，*110*，403–409。doi:https://doi.org/10.1115/1.3250499。Chen,F.和Chen, C. F.（1989）。底部加热时叠置流体层和多孔层中对流稳定性的实验研究。《流体力学杂志》，*207*，311–321。doi:https://doi.org/10.1017/S0022112089002594。Chen, F.、Chen, C.F.和Pearlstein, A.J.（1991）。叠置流体层和各向异性多孔层中的对流不稳定性。《流体物理学 *A*》，*3*，556–565。doi:https://doi.org/10.1063/1.858117。Chen,F.和Hsu,L.H.（1991）。流体层下方各向异性非均质多孔层中热对流的起始。《应用物理学杂志》，*69*，6289–6301。doi:https://doi.org/10.1063/1.348827。

Deepu, P., Anand, P., & Basu, S. (2015). 各向异性和非均质多孔层上方流体中的泊肃叶流稳定性。*Phys. RevE.*, *92*, 023009. doi:https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92. 023009.

Doomra, S., Sharma, G., & Bera, P. (2022). 各向异性和非均质性对沿多孔倾斜平面向下流动的液膜稳定性的影响。《流体物理学》, *34*, 124116. doi:https://doi.org/10.1063/5. 0127512. Drazin, P. G., & Reid, W. H. (2004). 流体动力学稳定性. Cambridge University Press. doi:https://doi.org/10.1017/CBO9780511616938. Ewings, R. E., & Weekes, S. (1998). 多孔介质中污染物输运的数值方法。*Adv. Comput.Math.*,*202*, 75–95. Girault, V., & Rivi`ere, B. (2009). 采用 Beaver–Joseph–Saffman 界面条件对耦合的 Navier–Stokes 方程和达西方程进行 DG 近似。*SIAM J. Numer.Anal.*, *47*, 2052–2089. doi:https://doi.org/10.1137/ 070686081. Hill, A. A., & Straughan, B. (2009). 覆盖在高孔隙率材料上的流体中的泊肃叶流。*Adv. Water Resour.*,*32*, 1609–1614. doi:https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2009.08.007.

Hooper, A. P., & Boyd, W. G. C. (1983). 两种黏性流体界面处的剪切流失稳。*J. FluidMech.*,*128*, 507–528. doi:https://doi.org/10.1017/S0022112083000580. Jones, I. P. (1973). 低雷诺数流动绕过多孔球形壳体。载于*Proc.Camb. Phil.Soc.*（第 231–238 页）。第 73 卷。doi:https://doi.org/10.1017/S0305004100047642. Khan, A., & Bera, P. (2020). 普朗特数对非等温环形泊肃叶流分岔及模式变化的影响。《流体物理学》, *32*, 114101. doi:https://doi.org/10.1063/5.0021104. Khan, A., & Bera, P. (2020). 同心环形流的线性不稳定性：普朗特数和圆柱间隙的影响。*Int.J. HeatMass Trans.*, *152*, 119530. doi:https://doi.org/10.1016/j. ijheatmasstransfer.2020.119530. Khan, A., Bera, P., & Khandelwal, M. K. (2019). 稳定热分层条件下环形泊肃叶流的分岔与不稳定性：对曲率参数的依赖。《流体物理学》, *31*, 104105. doi:https: //doi.org/10.1063/1.5122289. McCurdy, M., Moore, N., & Wang, X. (2019). 自由流与多孔介质耦合系统中的对流。*SIAM J. Appl.Math.*,*79*, 2313–2339. doi:https://doi.org/10.1137/19M1238095. Moler, C. B., & Stewart, G. W. (1973). 广义矩阵特征值问题的一种算法。*SIAM J.Numer.Anal.*, *10*, 241–256. doi:https://doi.org/10.1137/0710024. Nield, D. A. (1977). 覆盖在多孔介质层上的流体层中对流的起始。*J. Fluid Mech.*, *81*, 513–522. doi:https://doi.org/10.1017/S0022112077002195. Nield, D. A., & Bejan, A. (2013). 多孔介质中的对流. Springer. doi:https://doi.org/10.1007/ 978-1-4614-5541-7. Orszag, S. A., & Patera, A. T. (1980). 平面通道流向湍流的亚临界转变。*Phys.Rev.Lett.*, *45*, 989–993. doi:https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.989. Perkins, T. K., & Johnston, O. C. (1963). 多孔介质中的扩散与弥散综述。*Soc.Petrol. Eng. J.*,*3*, 70–84. doi:https://doi.org/10.2118/480-PA. Sahu, K., & Matar, O. (2011). 压力驱动双层通道流中的三维对流失稳和绝对失稳。*International JournalofMultiphase Flow*, *37*, 987–993. doi:https://doi.org/10.1016/ j.ijmultiphaseflow.2011.05.005. Samanta, A. (2022). 非均质各向异性多孔通道流动的非模态与模态分析。*International Journalof MultiphaseFlow*, *157*, 104230. doi:https://doi.org/10.1016/ j.ijmultiphaseflow.2022.104230.

Sharma，A. K.、Khandelwal，M.K.和Bera,P.（2018）。充满高渗透性多孔介质的垂直通道中非等温平行流的有限振幅分析。流体力学杂志，*857*，469–507。doi:https: //doi.org/10.1017/jfm.2018.745。Straughan，B.（2001）。覆盖多孔层的流体中的表面张力驱动对流。计算物理学杂志，*170*，320–337。doi:https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6739。Straughan，B.（2002）。性质变化和建模对覆盖多孔层的流体中对流的影响。国际数值分析与地质力学方法杂志，*26*，75–97。doi:https://doi.org/10.1002/nag.193。Straughan，B.（2004）。能量方法、稳定性与非线性对流 第91卷。施普林格。doi:https: //doi.org/10.1007/978-0-387-21740-6。Suchomel，B.J.、Chen，B.M.和Allen，M.B.（1998）。多孔介质中流动、输运和生物膜效应的网络模型。多孔介质输运，*30*，1–23。doi:https://doi.org/10.1023/A:1006560705680。Sun，W. J.（1973）。叠置多孔层和自由层中的对流不稳定性。明尼苏达大学博士论文。Wu，Z. 和 Mirbod，P.（2019）。两平行板之间流动的不稳定性分析，其中底板涂覆有多孔介质。《水资源进展》，*130*，221–228。doi:https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2019.06.002。Yin，C.、Niu，J.、Fu，C.和 Tan，W.（2013）。受水平平面库埃特流作用的流体-多孔系统中黏弹性流体的热对流。国际传热与流体流动杂志，*44*，711–718。doi:https: //doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.10.002。Yin，C.、Wang，C. 和Wang，S.（2020）。具有平面泊肃叶流的流体-多孔系统中黏弹性流体的热不稳定性。应用数学与力学（英文版），*41*，1631–1650。doi:https://doi.org/10.1007/ s10483-020-2663-7。