arXiv:2304.03508v1 [math.AG] 7 Apr 2023

# $\boldsymbol{T}$-代数同态：热带曲线有理函数半域之间的同态

SONG JUAE

Abstract. 我们证明，两个热带曲线的有理函数半域之间的一个单射 $\boldsymbol{T}$-代数同态诱导出这两个热带曲线之间的一个满态射，其中 $\boldsymbol{T}$是热带半域（$\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$，max $+$）。

## 1. Introduction

本文的主要目的是为抽象热带几何的代数基础构建作出贡献；粗略地说，热带几何是建立在热带半域$\boldsymbol{T}:=(\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\},\max\ +)$上的代数几何。它已被研究约二十年。一种称为热带化的运算备受关注，因为它将 $n$维代数簇映射到 $n$维多面体复形（称为热带簇），这些复形能够捕捉代数簇的许多重要性质。随着研究的推进，研究抽象热带簇的抽象热带几何应运而生，其内在结构近年来也越来越受到关注。在代数方面， [3] 和 [9] 发展了热带概形理论；与之密切相关的是， [1]和 [5]证明了关于同余关系的热带 Nullstellensatz。

在 [7], 中，作者对以下问题给出了肯定的回答：“对于两条热带曲线 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$， $\boldsymbol{T}$-代数同构 Rat($\Gamma_1$) $\to$Rat($\Gamma_2$) 是否会诱导一个同构（即次数为一的有限调和态射） $\Gamma_2\to\Gamma_1$? ”

在本文中，我们考虑 $\boldsymbol{T}$-代数同态版本的问题的一个答案，即问题“对于两条热带曲线 $\Gamma_1$和 $\Gamma_2$， $\boldsymbol{T}$-代数同态Rat($\Gamma_1$) $\to$ Rat($\Gamma_2$) 是否诱导出一个态射 $\Gamma_2\to\Gamma_1$? ”:

定理 1.1。设 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 为热带曲线。设 $\psi$ ：有理函数($\Gamma_1$) $\to$有理函数($\Gamma_2$) 是它们的 $\boldsymbol{T}$-同态，作用于其有理函数半域之间。若 $\psi$ 是单射的，则存在唯一的满态射$\varphi$: $\Gamma_2\twoheadrightarrow\Gamma_1$，使得对任意 $x'\in \mathrm{Max}'_x$，有 $\varphi(x')=x$。

2020 年数学学科分类。主要分类14T10；次要分类14T20。关键词和短语。热带曲线之间的态射， $\boldsymbol{T}$-代数同-态，热带曲线的有理函数半域之间的代数同-态，热带曲线上的筹码发射移动。

此处 $\mathrm{Max}'_x$ 定义为集合 $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l))(x') = 0\}$当 $x \in \Gamma_1 \backslash \Gamma_{1\infty}$ 与 $l \in \boldsymbol{R}_{>0} \cup \{\infty\}$时； $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \backslash (y, x], \infty))^{\odot(-1)}(x') = \infty\}$ 当 $x \in \Gamma_{1\infty}$ 与有限点 $y$ 位于与$x$相接的唯一边上时。

定理 1.1 有如下推论：

推论 1.2。以下范畴 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$ 同构。

(1) $\mathscr{C}$ 的对象类 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 是热带曲线。

对于 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，集合$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ 中从 $\Gamma_1$ 到$\Gamma_2$ 的态射由所有的单射 $\boldsymbol{T}$-代数同态 $\mathrm{Rat}(\Gamma_1) \hookrightarrow \mathrm{Rat}(\Gamma_2)$ 组成。

(2) 对象类 $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ 属于 $\mathscr{D}$，是热带曲线。

对于 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$，集合$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ 中从 $\Gamma_1$ 到$\Gamma_2$ 的态射由所有的满态射 $\Gamma_2 \twoheadrightarrow \Gamma_1$组成。

本文其余部分的结构如下。第 2 节中，我们给出半环和代数、热带曲线、热带曲线上的有理函数和筹码发射移动，以及热带曲线之间的态射的定义。第 3 节包含上述断言的证明。

## Acknowledgements

作者感谢我的导师 Masanori Kobayashi 和 Yasuhito Nakajima 提供的宝贵意见。

## 2. Preliminaries

本节中，我们回顾后文所需的若干定义。关于半环理论（分别为热带几何）的介绍，请参见 [4]（分别为 [10]）；关于半环（分别为热带曲线）的相关定义，我们采用 [8]（分别为 [6]）中的定义。我们在第 2.4 小节中采用的热带曲线之间的态射定义见 [2]。如今，通常假设热带曲线之间的态射是（有限）调和的（参见 [2], [6]）。然而，由于热带曲线之间的态射的拉回是这些热带曲线的有理函数半域之间的一个 $\boldsymbol{T}$-代数同态（见第 3 节开头），在我们的设定中，采用 Chan 在 [2] 中给出的热带曲线之间的态射定义是自然的。

2.1. 半环与代数。本文中，半环指加法具有吸收性中性元素 0、乘法具有单位元 1 的交换半环。如果半环$S$ 中的每个非零元素在乘法下都可逆，且 $0 \neq 1$，则称 $S$ 为半域。

半环之间的映射 $\varphi : S_1 \to S_2$ 是半环同态，如果对于任意 $x, y \in S_1$,

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),\ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),\ \varphi(0) = 0,\ \text{and}\ \varphi(1) = 1.$$

给定一个半环同态 $\varphi : S_1 \to S_2$，我们将对$(S_2, \varphi)$（简写为 $S_2$）称为一个 $S_1$-代数。对于一个半环 $S_1$，一个映射 $\psi : (S_2, \varphi) \to$

$(S_2', \varphi')$在 $S_1$-代数之间是一个 $S_1$-代数同态，当且仅当 $\psi$ 是一个半环同态并且 $\varphi' = \psi \circ \varphi$。在不引起混淆时，我们简单地写作 $\psi : S_2 \to S_2'$。

集合 $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$，配备两种热带运算：

$$a \oplus b := \max\{a, b\} \quad \text{and} \quad a \odot b := a + b,$$

其中 $a$、$b \in \boldsymbol{T}$ 变成一个半域。在此，对于任意 $a \in \boldsymbol{T}$，我们按如下方式处理 $-\infty$：

$$a \oplus (-\infty) = (-\infty) \oplus a = a \quad \text{and} \quad a \odot (-\infty) = (-\infty) \odot a = -\infty.$$

$\boldsymbol{T}$ 被称为热带半域。 $\boldsymbol{B} := (\{0, -\infty\}, \max, +)$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的子半域，称为布尔半域。

2.2. 热带曲线。本文中，图是指一种无权、无向、有限、连通且非空的多重图，并且可以含有环。对于图 $G$，顶点集记为 $V(G)$，边集记为 $E(G)$。若图 $G$ 的顶点 $v$ 仅与一条边 $v$ 相接，且该边不是环，则称 $v$ 为叶端点。叶边是图 $G$ 中与叶端点相接的边。

热带曲线是图 $G$ 与函数 $l : E(G) \to \boldsymbol{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ 这一对 $(G, l)$ 的底层拓扑空间，其中 $l$ 仅能在叶边上取值 $\infty$；同时，将 $G$ 的每条边 $e$ 与闭区间 $[0, l(e)]$ 进行识别。区间 $[0, \infty]$ 是区间 $[0, \infty)$ 的一点紧化。我们不仅将 $[0, \infty]$ 视为拓扑空间，也将其视为几乎是一个度量空间。 $\infty$ 与任何其他点之间的距离都是无穷大。当 $l(e) = \infty$ 时， $e$ 的叶端点必须与 $\infty$ 识别。如果 $E(G) = \{e\}$ 且 $l(e) = \infty$，则我们可以将 $e$ 的任一叶端点与 $\infty$ 识别。当热带曲线 $\Gamma$ 由 $(G, l)$ 得到时，称有序对 $(G, l)$ 为 $\Gamma$ 的一个模型。 $\Gamma$ 有许多可能的模型。我们经常将 $G$ 的一个顶点（分别地，一条边）与 $\Gamma$ 中对应的点（分别地，对应的闭子集）等同。模型 $(G, l)$ 是无环的，如果 $G$ 是无环的。对于热带曲线 $\Gamma$ 上的点 $x$，若 $x$ 与 $\infty$ 识别，则称 $x$ 为无穷远点；否则，称 $x$ 为有限点。 $\Gamma_\infty$ 表示 $\Gamma$ 的所有无穷远点构成的集合。若 $\Gamma_\infty$ 为空，则称 $\Gamma$ 为度量图。若 $x$ 是有限点，则 $\mathrm{val}(x)$ 是 $U \setminus \{x\}$ 在 $x$ 的任意充分小连通邻域 $U$ 中的连通分支数；若 $x$ 是无穷远点，则 $\mathrm{val}(x) := 1$。我们如下构造一个模型 $(G_\circ, l_\circ)$，称为 $\Gamma$ 的典范模型。通常，我们定义 $V(G_\circ) := \{x \in \Gamma \mid \mathrm{val}(x) \neq 2\}$，但以下两种情况除外。当 $\Gamma$ 同胚于一个圆$S^1$时，我们将 $V(G_\circ)$ 定义为由 $\Gamma$ 中任意一个点组成的集合。当 $\Gamma$ 的模型为有序对 $(T, l)$，其中 $T$ 是由三个顶点和两条边组成的树，且 $l(E(T)) = \{\infty\}$ 时，我们将 $V(G_\circ)$ 定义为由两个无穷远点和 $\Gamma$ 中任意一个有限点组成的集合。 $V(G_\circ)$ 与 $G_\circ$ 的所有环的中点构成的集合之并定义了

$\Gamma$ 的典范无环模型。对于 $\Gamma$ 上的点 $x$， $x$ 的半边是 $U \setminus \{x\}$ 在 $x$ 的任意连通邻域$U$ 中的一个连通分支，该邻域仅由二价点和 $x$ 组成。“ $\Gamma$ 的一条边”一词指的是 $G$。的一条边。

2.3. 有理函数与筹码发射移动。设 $\Gamma$是一条热带曲线。连续映射 $f$: $\Gamma \to \boldsymbol{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是 $\Gamma$ 上的有理函数，如果 $f$ 是 $-\infty$ 上的常值函数，或者是一个具有整数斜率、包含有限个片段，并且仅能在无穷远点处取值 $\pm\infty$ 的分段仿射函数。对于 $\Gamma$ 的一点 $x$ 以及有理函数 $f \in \in$ 有理函数($\Gamma$) $\setminus \{-\infty\}$，如果 $f$ 在 $x$ 处所有出射斜率之和的符号为正（分别为负），则称 $f$是 $x$ 的零点（分别为极点）。如果$x$ 是一个无穷远点，那么我们将 $f$ 在 $x$ 处的出射斜率视为 $f$ 从 $y$ 到 $x$ 的斜率乘以负一，其中 $y$ 是与 $x$ 相incident的叶边上的一个有限点，并且 $f$ 在区间 （$y$， $x$）上具有常斜率。有理函数($\Gamma$)表示 $\Gamma$ 上所有有理函数的集合。对于有理函数 $f$、 $g \in \in$ 有理函数($\Gamma$) 以及一点 $x \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$，我们定义

$$(f \oplus g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{and} \quad (f \odot g)(x) := f(x) + g(x).$$

我们将 $f \oplus g$ 和 $f \odot g$ 延拓到无穷远点，使其在整个 $\Gamma$ 上连续。于是二者都是 $\Gamma$ 上的有理函数。注意，对于任意 $f \in$ 有理函数($\Gamma$)，我们有

$$f \oplus (-\infty) = (-\infty) \oplus f = f$$

and

$$f \odot (-\infty) = (-\infty) \odot f = -\infty.$$

于是，有理函数($\Gamma$)在这两个运算下成为一个半域。同时，有理函数($\Gamma$)通过自然嵌入 $\boldsymbol{T} \hookrightarrow$ 有理函数($\Gamma$)成为一个 $\boldsymbol{T}$-代数。注意，对于 $f$, $g \in$ 有理函数($\Gamma$)， $f = g$意味着对于任意$x \in \Gamma$， $f(x) = g(x)$。

令 $\Gamma_1$ 为热带曲线 $\Gamma$ 的一个闭子集，该曲线具有有限个连通分支，且没有任何连通分支仅由无穷远点组成，并令 $l$ 为一个正数或无穷大。由 $\Gamma_1$ 和 $l$ 进行的筹码发射移动定义为有理函数 $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l)(x) := -\min\{$ $\mathrm{dist}(\Gamma_1, x)$ $l\}$，其中 $x \in \Gamma$，其中 $\mathrm{dist}(\Gamma_1, x)$表示 $\Gamma_1$ 与 $x$之间的距离。

2.4. 热带曲线之间的态射。设 $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ 是热带曲线之间的连续映射。若存在无环模型 $(G, l)$ 和 $(G', l')$，分别对应于 $\Gamma$和 $\Gamma'$，使得 $\varphi$ 可视为映射 $V(G) \cup E(G) \to V(G') \cup E(G')$，且满足$\varphi(V(G)) \subset V(G')$，并且对于 $e \in \varphi(E(G))$，存在一个非负整数 $\deg_e(\varphi)$，使得对任意点 $x, y$ （属于 $e$），$\mathrm{dist}_{\varphi(e)}(\varphi(x)\ \varphi(y)) = \deg_e(\varphi) \cdot \mathrm{dist}_e(x, y)$, 其中 $\mathrm{dist}_{\varphi(e)}(\varphi(x)\ \varphi(y))$ 表示 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 在 $\varphi(e)$ 中的距离。

## 3. Main results

在本节中，我们将证明定理1.1 和推论 1.2。我们首先验证定理 1.1 的逆命题成立：

命题 3.1. 设 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 是热带曲线。若 $\varphi: \Gamma_2 \to \Gamma_1$ 是满态射，则拉回 $\varphi^*$ : 有理函数($\Gamma_1$) $\to$ 有理函数($\Gamma_2$); $f \mapsto f \circ \varphi$ 是一个单射 $\boldsymbol{T}$-代数同态。

证明。由于 $\varphi$ 是一个态射，对于任意 $f \in$ 有理函数($\Gamma_1$)， $f \circ \varphi$ 是 $\Gamma_2$上的有理函数。根据定义， $\varphi^*$ 是一个 $\boldsymbol{T}$-代数同态。对于$f, g \in$ 有理函数($\Gamma_1$)，若 $f \neq g$，则存在 $x \in \Gamma_1$ 使得 $f(x) \neq g(x)$。由于 $\varphi$ 是满射，存在 $x' \in \Gamma_2$ 使得 $x = \varphi(x')$。因此我们有

$$\begin{aligned}\varphi^*(f)(x') &= (f \circ \varphi)(x') \\ &= f(\varphi(x')) \\ &= f(x) \\ &\neq g(x) \\ &= g(\varphi(x')) \\ &= (g \circ \varphi)(x') \\ &= \varphi^*(g)(x').\end{aligned}$$

因此 $\varphi^*$ 是单射。 □

根据以下例子可知，一般来说，半域之间的半环同态未必是单射。

例 3.2. 对应关系 $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{B}$; $-\infty \neq t \mapsto 0$; $-\infty \mapsto -\infty$ 是一个非单射半环同态。

例 3.3. 设 $\Gamma := [0, 2]$ 和 $\Gamma_1 := [0, 1] \subset \Gamma$。自然嵌入 $\iota: \Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma$ 是一个非满态射，而拉回 $\iota^*$: Rat($\Gamma$) $\to$Rat($\Gamma_1$); $f \mapsto f \circ \iota$ 是限制映射 $f \mapsto f|_{\Gamma 1}$，并且是一个非单射的满 $\boldsymbol{T}$-代数同态。

由例 3.3 还可知，热带曲线之间的态射未必是满射，因此考察条件“$\psi$ 是单射”至关重要。关于热带曲线之间态射的更多细节，参见 [2]。

设 $\Gamma_1$、 $\Gamma_2$ 为热带曲线，且 $\psi$ : Rat($\Gamma_1$) $\to$ Rat($\Gamma_2$) 是一个单射 $\boldsymbol{T}$-代数同态。下面的引理虽简单，却很重要，其证明方法与 [7, 引理 3.7] 的证明相同。为便于阅读，我们在此给出证明。

引理 3.4. 对于任意 $f \in$有理函数($\Gamma_1$)，以下结论成立：

（1）max$\{f(x) \mid x \in \Gamma_1\}$ =max$\{\psi(f)(x') \mid x' \in \Gamma_2\}$；以及

（2）min$\{f(x) \mid x \in \Gamma_1\}$ =min$\{\psi(f)(x') \mid x' \in \Gamma_2\}$。

证明：若 $f \in \boldsymbol{T}$，则断言显然成立。

假设 $f$ 不是常值函数。令 $a$ 为 $f$ 的最大值。在这种情况下，$a$ 位于 $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ 中。

假设 $a \in \boldsymbol{R}$。对于 $b \in \boldsymbol{R}$，我们有

$$f \oplus b \begin{cases} = b & \text{if } b \geq a, \\ \neq b & \text{if } b < a. \end{cases}$$

因此我们有

$$\psi(f) \oplus b = \psi(f) \oplus \psi(b) = \psi(f \oplus b)$$
$$\begin{cases} = \psi(b) = b & \text{if } b \geq a, \\ \neq \psi(b) = b & \text{if } b < a. \end{cases}$$

因此，$\psi(f)$ 的最大值为 $a$。

假设 $a = \infty$。那么对于任意 $t \in \boldsymbol{T}$，我们有 $f \oplus t \neq t$。因此

$$\psi(f) \oplus t = \psi(f) \oplus \psi(t) = \psi(f \oplus t) \neq \psi(t) = t$$

成立。这意味着 $\psi(f)$ 的最大值是 $\infty$。

对于 $f$ 和 $\psi$（$f$）的最小值，我们可以应用 $f^{\odot(-1)} = -f$ 和 $\psi$（$f^{\odot(-1)}$）$= -\psi$（$f$）的最大值情形得出结论，因为

$$\min\{f(x) \mid x \in \Gamma_1\} = -\max\{-f(x) \mid x \in \Gamma_1\}$$

and

$$\min\{\psi(f)(x') \mid x' \in \Gamma_2\} = -\max\{-\psi(f)(x') \mid x' \in \Gamma_2\}. \qquad \square$$

现在我们开始证明定理1.1。证明分为若干步骤。构造映射 $\varphi : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ 的主要思想是：当 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$ 与 $l \in \boldsymbol{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ 时，我们从 $\Gamma_2$ 上的形如 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l))$的有理函数中提取 $x \in \Gamma_1$ 的“纤维”信息；或者当 $x \in \Gamma_{1\infty}$ 与 $y$在唯一边 $x$上且 $y$为有限点时，从 $\Gamma_2$ 上的形如 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y, x], \infty))^{\odot(-1)}$ 的有理函数中提取该信息。注意，形如 $\mathrm{CF}(\{x\}, l)$ 或 $\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y, x], \infty)^{\odot(-1)}$ 的筹码发射移动，其最大值当且仅当在 $x$处取得。

断言 3.5。对于任意 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$ 和 $l_1, l_2 \in \boldsymbol{R}_{>0} \cup \{\infty\}$，

$$\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l_1))(x') = 0\} = \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l_2))(x') = 0\}.$$

证明。对于满足 $0 < l < \infty$ 的 $l$，由于

$$\mathrm{CF}(\{x\}, l) = \mathrm{CF}(\{x\}, \infty) \oplus (-l),$$

我们有

$$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l)) = \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \infty)) \oplus (-l). \tag{1}$$

因此，由引理 3.4 可得结论。 $\square$

根据断言 3.5，对于 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，集合 $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l))(x') = 0\}$ 与 $l \in \boldsymbol{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ 的选取无关。令 $\mathrm{Max}'_x$ 表示该集合。

类似地，我们可以证明以下命题：

命题 3.6. 对于与 $x$ 相邻的唯一边 $e$ 上的任意 $x \in \Gamma_{1\infty}$ 和有限点 $y_1$、$y_2$，

$$\begin{aligned}&\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1, x], \infty))^{\odot(-1)}(x') = \infty\}\\ =\ &\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_2, x], \infty))^{\odot(-1)}(x') = \infty\}.\end{aligned}$$

证明。我们可以选择曲线上的一个有限点 $y_3$，使得每个 $y_1$ 和 $y_2$ 到 $x$ 的距离都不超过 $y_3$。根据引理 3.4，$\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1, x], \infty))^{\odot(-1)}$ 的最大值为 $\infty$。对于 $i = 1, 2$ 以及值 $a_i := \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_3, x], \infty)(y_i) < 0$，

$$a_i \odot \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_3, x], \infty)^{\odot(-1)} \oplus 0 = \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_i, x], \infty)^{\odot(-1)}.$$

因此我们有

(2)

$$a_i \odot \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_3, x], \infty))^{\odot(-1)} \oplus 0 = \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_i, x], \infty))^{\odot(-1)}.$$

因此我们得出结论。 □

由命题 3.6 可知，对于 $x \in \Gamma_{1\infty}$，集合 $\{x' \in \Gamma_1 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_2 \setminus (y, x], \infty))^{\odot(-1)}(x') = \infty\}$ 不依赖于 $e$ 上有限点 $y$ 的选取。令 $\mathrm{Max}'_x$ 表示该集合。

断言 3.7。对于任意 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$ 在 $U' \setminus \mathrm{Max}'_x$ 的每个连通分支上具有恒定斜率，并且在 $\Gamma_2 \setminus U'$ 上 $-\varepsilon$ 为常数，其中 $U'$ 是 $\mathrm{Max}'_x$ 的 $\varepsilon$-邻域。

证明。由断言 3.5 的证明中的等式 (1) 可知，此结论显然。 □

同样，我们有如下结论：

命题3.8.对于任意 $x \in \Gamma_{1\infty}$，存在一个有限点 $y$ 位于与 $x$ 相接的唯一边上，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y, x], \infty))^{\odot(-1)}$ 将 $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y, x], \infty))^{\odot(-1)}(x') = 0\}$ 的每个边界点作为其零点；从每个这样的点开始具有常斜率；在且仅在 $\mathrm{Max}'_x$ 的每个点处有极点；并且没有其他零点和极点。

证明。由命题 3.6 证明中的等式 (2) 可知。 □

断言 3.9。对于 $x$、$y \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，如果 $x \neq y$，那么 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y = \varnothing$。

证明。假设 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y \neq \varnothing$。由于 $x \neq y \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\{z \in \Gamma_1 \mid \mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)(z) = -\varepsilon\} \cup \{z \in \Gamma_1 \mid \mathrm{CF}(\{y\}, \varepsilon)(z) = -\varepsilon\} = \Gamma_1.$$

我们有

$$\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon)^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon)^{\odot(-1)} = \varepsilon.$$

Thus

$$\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-1)} \oplus \psi(\mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon))^{\odot(-1)} = \varepsilon.$$

另一方面，对于任意 $z' \in \mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y$,

$$\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-1)}(z') \oplus \psi(\mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon))^{\odot(-1)}(z') = 0 \neq \varepsilon.$$

这是矛盾。因此，我们有 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y = \varnothing$。 □

命题 3.10。对于 $x$、$y \in \Gamma_{1\infty}$，若 $x \neq y$，则 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y = \varnothing$。

证明。假设 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y \neq \varnothing$。由于 $x \neq y$，存在一个有限点 $x_1$（分别为 $y_1$）位于与 $x$（分别为 $y$）相 incident 的唯一边上，使得 $\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty) \oplus \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1, y], \infty) = 0$。因此我们有$\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty)) \oplus \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1, y], \infty)) = 0$。另一方面，对于任意 $z' \in \mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y$，我们有

$$\begin{aligned}
&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty))(z') \oplus \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1, y], \infty))(z') \\
=\ & -\infty \oplus (-\infty) \\
=\ & -\infty \\
\neq\ & 0,
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

命题 3.11. 若 $x \in \Gamma_{1\infty}$ 且 $y \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，则 $\mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y = \varnothing$。

证明。假设存在一个元素 $z' \in \mathrm{Max}'_x \cap \mathrm{Max}'_y$。存在满足以下条件的 $x_1 \in \Gamma_1$ 和 $\varepsilon > 0$

$$\{z \in \Gamma_1 \mid \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty)(z) = 0\} \cup \{z \in \Gamma_1 \mid \mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon)(z) = -\varepsilon\} = \Gamma_1.$$

于是我们有

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty) \oplus (-\varepsilon) \odot \mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon)^{\odot(-1)} = 0,$$

从而

$$\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty)) \oplus (-\varepsilon) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon))^{\odot(-1)} = 0.$$

另一方面，根据假设，我们有

$$\begin{aligned}
&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (x_1, x], \infty))(z') \oplus (-\varepsilon) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y\},\varepsilon))^{\odot(-1)}(z') \\
=\ & -\infty \oplus (-\varepsilon) \odot 0 \\
=\ & -\varepsilon \\
\neq\ & 0,
\end{aligned}$$

这与事实相矛盾。 □

由断言 3.9、3.10、3.11 可知，对应关系 $\mathrm{Max}'_x \ni x' \mapsto x$ be-变为从 $\bigcup_{x\in\Gamma_1} \mathrm{Max}'_x$ 到 $\Gamma_1$ 的映射。我们将此映射称为 $\varphi$。

断言 3.12. 对于 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}, \varepsilon > 0$，若 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$ 满足断言 3.7 中的所有条件，并且对于任意满足 $0 < d < \varepsilon$,$\bigcup_{y\in\Gamma_1:\ \mathrm{dist}(x,\ y)=d} \mathrm{Max}'_y \subset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') = -d\}$ 的 $d$ 。

证明。对于满足 $\mathrm{dist}(x, y) = d$ 的 $y$，取满足 Claim 3.7 中所有条件的 $\delta > 0$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{y\}, \delta))$。对于任意正数 $\varepsilon_1 <\varepsilon$，由 Claim 3.5 证明中的等式 (1)，$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon_1))$ 满足 Claim 3.7 中的所有条件。因此，如有需要，通过将 $\varepsilon$ 替换为更小的正数，我们可以假设 $d < \varepsilon < d + \delta$。由于

$$\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon) \oplus (-d) \odot \mathrm{CF}(\{y\}, \delta) = \mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon),$$

我们有

$$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)) \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y\}, \delta)) = \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)).$$

因此，对于任意的 $y' \in \mathrm{Max}'_y$, $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(y') \geq -d$。

假设存在 $y' \in \mathrm{Max}'_y$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(y') > -d$。由于

$$\begin{aligned} &\mathrm{CF}(\{y\}, d) \oplus (-d) \odot \mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)^{\odot(-1)} \\ =\ & -d \odot \mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)^{\odot(-1)}, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} &\psi(\mathrm{CF}(\{y\}, d)) \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))^{\odot(-1)} \\ =\ & -d \odot \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))^{\odot(-1)}. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} &\psi(\mathrm{CF}(\{y\}, d))(y') \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))^{\odot(-1)}(y') \\ =\ & 0 \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))^{\odot(-1)}(y') \\ =\ & 0 \\ >\ & -d \odot \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))^{\odot(-1)}(y'), \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

断言 3.13. 对于 $x \in \Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$满足断言3.7 中的所有条件，并且对于任意 $d$ 使得$0 < d < \varepsilon$, $\bigcup_{y\in\Gamma_1:\mathrm{dist}(x,y)=d} \mathrm{Max}'_y \supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') = -d\}$。

证明。设 $\varepsilon > 0$ 满足以下条件：$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$ 满足断言 3.7 中的所有条件，且 $\{y \in \Gamma_1 \mid 0 < \mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon\}$ 仅由二价点组成。对于任意满足 $0 < d < \varepsilon$ 的 $d$，设 $y_1 \ldots, y_{\mathrm{val}(x)}$ 为 $\Gamma_1$ 中所有满足 $\mathrm{dist}(x, y_i) = d$ 的互异点。设 $\delta > 0$ 满足每个 $\psi(\mathrm{CF}(\{y_i\}, \delta))$ 都满足断言 3.7 中的所有条件。对于任意正数 $\varepsilon_1 < \varepsilon$（分别地，$\delta_1 < \delta$），由断言 3.5 的证明中的等式 (1)，$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon_1))$（分别地，$\psi(\mathrm{CF}(\{y_i\}, \delta_1))$）满足断言 3.7 中的所有条件。因此，如有必要，通过替换 $\varepsilon$ 或

$\delta$ 取一个较小的正数，我们可以假设 $d < \varepsilon = d + \delta$。我们有

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon)^{\odot(-1)} \oplus d\big)^{\odot(-1)}\\ =\ &\big(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon)^{\odot(-2)} \oplus 2d\big)^{\odot(-1)} \odot d\\ &\oplus (-d) \odot \mathrm{CF}(\{y_1\},\delta) \oplus \cdots \oplus (-d) \odot \mathrm{CF}(\{y_{\mathrm{val}(x)}\},\delta),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-1)} \oplus d\big)^{\odot(-1)}\\ =\ &\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-2)} \oplus 2d\big)^{\odot(-1)} \odot d\\ &\oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y_1\},\delta)) \oplus \cdots \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y_{\mathrm{val}(x)}\},\delta)).\end{aligned}$$

假设 $\bigcup_{i=1}^{\mathrm{val}(x)} \mathrm{Max}'_{y_i} \not\supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))(x') = -d\}$。存在 $z' \in \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))(x') = -d\} \setminus \bigcup_{i=1}^{\mathrm{val}(x)} \mathrm{Max}'_{y_i}$。当 $z'$ 是 $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))(x') \geq -d\}$的边界点时，存在靠近 $z'$ 的 $w'$，使得 $-d - \frac{\delta}{2} < \psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))(w') < -d$。由于我们可以假设 $\delta$ 足够小，从而 $\psi(\mathrm{CF}(\{y_i\},\delta))(w') = -\delta$，因此有。

$$\begin{aligned}&\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-1)}(w') \oplus d\big)^{\odot(-1)}\\ =\ &\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))(w')\\ \neq\ &\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot 2}(w') \odot d\\ =\ &\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon))^{\odot(-2)}(w') \oplus 2d\big)^{\odot(-1)} \odot d\\ &\oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y_1\},\delta))(w') \oplus \cdots \oplus (-d) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{y_{\mathrm{val}(x)}\},\delta))(w').\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，即使存在满足 $d$ 的值，它们也是离散的。因此，如有需要，将 $\varepsilon$ 替换为一个更小的正数，我们便可得出结论。□

命题 3.14。对于命题 3.8 中的 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}$ 以及任意 $z \in (y,x)$，$\mathrm{Max}'_z \subset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(x') = \mathrm{dist}(y,z)\}$。

证明。对于任意 $z \in (y,x)$，由于

$$\begin{aligned}&\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty)^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{dist}(y,z) \odot \mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z))\\ =\ &\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty)^{\odot(-1)},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{dist}(y,z) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))\\ =\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $z' \in \mathrm{Max}'_z$，我们有

$$\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(z') \geq \mathrm{dist}(y,z).$$

假设存在 $z' \in \mathrm{Max}'_z$ 使得 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-1)}(z') > \mathrm{dist}(y,z)$。由于

$$\begin{aligned}&\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty) \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)) \oplus (-\,\mathrm{dist}(y,z)) \odot \mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z))\\ =\ &\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty) \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)),\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty)) \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)) \oplus (-\,\mathrm{dist}(y,z)) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))\\ =\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty)) \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))(z') \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)) \oplus (-\,\mathrm{dist}(y,z)) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))(z')\\ =\ &-\,\mathrm{dist}(y,z)\\ >\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))(z') \oplus (-2\,\mathrm{dist}(y,z)),\end{aligned}$$

这是一个矛盾。总之，对于任意 $z' \in \mathrm{Max}'_z$, $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(z') = \mathrm{dist}(y,z)$。□

命题 3.15. 对于命题 3.8 中的 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}$，以及任意 $z \in (y,x)$，$\mathrm{Max}'_z \supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(x') = \mathrm{dist}(y,z)\}$。

证明。假设存在 $z \in (y,x)$，使得 $\mathrm{Max}'_z \not\supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(x') = \mathrm{dist}(y,z)\}$。对于任意 $y_1 \in (y,z)$，由于

$$\begin{aligned}&\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1,x],\infty)^{\odot(-1)} \odot \mathrm{dist}(y,y_1)\\ =\ &\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty)^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{dist}(y,y_1),\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(x') = \mathrm{dist}(y,z)\}\\ =\ &\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y_1,x],\infty))^{\odot(-1)}(x') = \mathrm{dist}(y_1,z)\}.\end{aligned}$$

由于 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}$ 满足断言 3.8 中的所有条件，根据命题 3.6 证明中的等式 (2)，$\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y_1,x],\infty))^{\odot(-1)}$ 也满足这些条件。因此，如有必要，将 $y$ 替换为 $y_1$ 后，我们可以假设 $\mathrm{dist}(y,z)$ 在断言 3.13 中对 $\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))$ 起到 $\varepsilon$ 的作用，并且存在某个点 $w'$，它位于点 $\{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (y,x],\infty))^{\odot(-1)}(x')$ 的某条半边上，使得 $= \mathrm{dist}(y,z)\} \setminus \mathrm{Max}'_z \neq \varnothing$，从而 $\mathrm{dist}(y,z) < \psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-1)}(w') < \frac{3}{2}\mathrm{dist}(y,z)$，且 $\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))(w') =$

$-\mathrm{dist}(y,z)$。因此我们有

$$\begin{aligned}
&\big(\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-1)}(w')\oplus\mathrm{dist}(y,z)\big)^{\odot(-1)}\\
&\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))(w')\\
=\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))(w')\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot(-\mathrm{dist}(y,z))\\
=\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))(w')\\
\neq\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot 2}(w')\odot\mathrm{dist}(y,z)\\
=\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot 2}(w')\odot\mathrm{dist}(y,z)\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot(-\mathrm{dist}(y,z))\\
=\ &\big(\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-2)}(w')\oplus 2\,\mathrm{dist}(y,z)\big)^{\odot(-1)}\odot\mathrm{dist}(y,z)\\
&\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))(w').
\end{aligned}$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty)^{\odot(-1)}\oplus\mathrm{dist}(y,z))^{\odot(-1)}\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z))\\
=\ &(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty)^{\odot(-2)}\oplus 2\,\mathrm{dist}(y,z))^{\odot(-1)}\odot\mathrm{dist}(y,z)\\
&\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)),
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\big(\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-1)}\oplus\mathrm{dist}(y,z)\big)^{\odot(-1)}\\
&\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z)))\\
=\ &\big(\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1\setminus(y,x],\infty))^{\odot(-2)}\oplus 2\,\mathrm{dist}(y,z)\big)^{\odot(-1)}\odot\mathrm{dist}(y,z)\\
&\oplus(-\mathrm{dist}(y,z))\odot\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\mathrm{dist}(y,z))),
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

根据断言 3.12、3.13、3.14、3.15， $\varphi$ 是连续的。

断言 3.16。对于任意 $x\in\Gamma_{1\infty}$，$\mathrm{Max}'_x\subset\Gamma_{2\infty}$。

证明。根据引理 3.4，显然。 □

断言 3.17. $\bigcup_{x\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}}\mathrm{Max}'_x\supset\Gamma_2\setminus\Gamma_{2\infty}$.

证明。假设 $\bigcup_{x\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}}\mathrm{Max}'_x\not\supset\Gamma_2\setminus\Gamma_{2\infty}$。由于 $\Gamma_2\setminus\Gamma_{2\infty}$ 中 $\bigcup_{x\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}}\mathrm{Max}'_x$ 的边界集非空，对于其中任意元素 $z'$，都存在 $z\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}$，使得 $\Gamma_2\setminus\Gamma_{2\infty}$ 中 $\mathrm{Max}'_z$ 的边界集包含 $z'$。因此，根据引理 3.4， $\psi(\mathrm{CF}(\{z\},\varepsilon))$ 在 $z'$ 中不属于 $\mathrm{Max}'_z$ 的任意半边上，取值均小于带正值的 $\varepsilon$。另一方面，根据断言 3.13，当 $\varepsilon$ 充分小时，对于 $z$ 附近的任意点 $z_1$，所有这类半边都包含在 $\mathrm{Max}'_{z_1}$ 中，这就产生了矛盾。□

断言 3.18. $\bigcup_{x\in\Gamma_1}\mathrm{Max}'_x=\Gamma_{2\infty}$

证明。由断言 3.17，$\left(\Gamma_2 \setminus \bigcup_{x\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}} \mathrm{Max}'_x\right) \subset \Gamma_{2\infty}$。设 $x'_1, \ldots, x'_n$ 为 $\Gamma_2\setminus\bigcup_{x\in\Gamma_1\setminus\Gamma_{1\infty}} \mathrm{Max}'_x$中的所有不同点。设 $e'_i$ 为与 $x'_i$相接的唯一边。

设 $\{z'_j\} \subset \Gamma_2 \setminus \Gamma_{2\infty}$ 是一个收敛序列，满足 $z'_j \to x'_i$ as$j \to \infty$。由于 $\varphi$ 在$\bigcup_{x\in\Gamma_1}\mathrm{Max}'_x$ 上连续，并且对每个充分大的数 $j$，$z'_j$ 在 $e'_i$ 上连续，因此序列 $\{\varphi(z'_j)\}$ 收敛。$\{\varphi(z'_j)\}$ 的极限 $x$ 必须属于 $\Gamma_{1\infty}$。事实上，若 $x$ 不属于 $\Gamma_{1\infty}$，则存在一个充分小的正数 $\varepsilon > 0$，如断言 3.13 中关于 $\psi$(CF($\{x\}, \varepsilon$)) 所述。根据断言 3.12、3.13，存在一个充分大的数 $M$，使得对任意 $j > M$，$-\varepsilon < \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(z'_j) < 0$。这意味着序列 $\{z'_j\}$ 不收敛于无穷远点，矛盾。因此 $x \in \Gamma_{1\infty}$。我们可以选取 $z'_j$，使其在 $\varphi$ 下的像位于与 $x$ 相连的唯一边上，并且使 $\psi$(CF($\Gamma_1 \setminus (\varphi(z'_j)\ x], \infty)$)$^{\odot(-1)}$ 满足断言 3.8 中的所有条件。对于任意 $w \in (\varphi(z'_j)\ x)$，由于

$$\begin{aligned}&\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (\varphi(z'_j), x], \infty)^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{dist}(\varphi(z'_j), w) \odot \mathrm{CF}(\{w\}, \mathrm{dist}(\varphi(z'_j), w))\\ =\ &\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (\varphi(z'_j), x], \infty)^{\odot(-1)},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (\varphi(z'_j), x], \infty))^{\odot(-1)} \oplus \mathrm{dist}(\varphi(z'_j), w) \odot \psi(\mathrm{CF}(\{w\}, \mathrm{dist}(\varphi(z'_j), w)))\\ =\ &\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (\varphi(z'_j), x], \infty))^{\odot(-1)}.\end{aligned}$$

这意味着 $x'_i \in \mathrm{Max}'_{x}$。总之，$\bigcup_{x\in\Gamma_1}\mathrm{Max}'_x = \Gamma_{2\infty}$ □

断言 3.19。$\varphi$ 是从 $\Gamma_2$ 到 $\Gamma_1$的满态射。

证明。根据目前为止的讨论和断言 3.18，$\varphi$ 是从 $\Gamma_2$ 到 $\Gamma_1$的满连续映射。对于 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$，根据 $\mathrm{Max}'_x$的定义，如果 $\mathrm{Max}'_x \cap \Gamma_{2\infty} \neq \varnothing$，那么对于每个 $x' \in \mathrm{Max}'_x \cap \Gamma_{2\infty}$，$\mathrm{Max}'_x$ 都包含线段 $(y', x']$，其中有一个有限点 $y'$ 位于与 $x'$相接的唯一边上。由于 $\Gamma_{2\infty}$ 是有限的，根据断言 3.9、3.10、3.11，这样的点 $x$只有有限多个。此外，根据断言 3.14、3.15，对于$\bigcup_{x\in\Gamma_{1\infty}}\mathrm{Max}'_x$中的每个点 $x'$，该点根据断言 3.16 属于 $\Gamma_{2\infty}$，存在一个有限点 $y'$ 位于与 $x'$ 相接的唯一边上，使得任意 $z' \in (y', x')$ 都是 $\mathrm{Max}'_{\varphi(z')}$中的孤立点。对于这两类 $x'$中的每一类，我们~固定一个 $y'$。从 $\Gamma_2$ 中删除所有区间 $(y', x']$ 所得到的 $\Gamma_2$ 的闭子集 $\Gamma_2$ 根据断言 3.18 是一个度量图。由于 $\Gamma_2$ 是紧度量空间，因此它是序列紧的。令 $V'_1$ 为所有满足如下条件的点的集合：每个点的邻域都包含一些半边，并且在这些半边上 $\varphi$ 具有不同的膨胀因子。

~假设 $V'_1$ 是一个无限集。那么 $\Gamma_2$ 有 $V'_1$的无穷多个点~。$\Gamma_2 \cap V'_1$中的每个序列都有一个收敛子列 $\{x'_i\}$。如果$x'_i \to x'$ 当 $i \to \infty$时，则由$\varphi$的连续性，$\varphi(x'_i) \to \varphi(x')$当 $i \to \infty$ 时。对于 $x'$，令 $\varepsilon > 0$ 如断言 3.13中所述。存在无穷多个 $i$

使得根据断言 3.12，$x_i'$ 属于 $\{y' \in \Gamma_2 \mid -\varepsilon < \psi(\mathrm{CF}(\{\varphi(x')\}, \varepsilon))(y') < 0\}$。由于热带曲线上只有有限个非二价点，我们可以假设这个 $x_i'$ 是二价的。根据断言 3.12、3.13，存在 $x_i'$ 的一个邻域 $U$，在此邻域内 $\varphi$ 的膨胀因子为常数，这就产生了矛盾。因此，$V_1'$ 必定是有限集。

令 $V_2'$ 为 $V_1'$ 与 $\Gamma_2$ 的典范无环模型的底层图的顶点集之并。令 $V$ 为 $\varphi(V_2')$ 与 $\Gamma_1$ 的典范无环模型的底层图的顶点集之并。令 $V'$ 为 $V_2'$ 与 $\varphi^{-1}(V)$ 在 $\Gamma_2$ 中的边界集之并。则 $V$ 和 $V'$ 分别确定了 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 的无环模型。根据 $V$ 和 $V'$ 的构造，我们可以验证，$\varphi$ 是关于这些无环模型的满态射 $\Gamma_2 \to \Gamma_1$。□

根据 $\varphi$ 的定义，这种 $\varphi$ 的唯一性显而易见。总之，我们得到定理 1.1。

引理 3.20。对于满足断言 3.7 所有条件的 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$、$\varepsilon > 0$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$，以及任意满足 $0 < d < \varepsilon$、$\bigcup_{y \in \Gamma_1:\ \mathrm{dist}(x,\ y)=d} \mathrm{Max}'_y \supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') \text{ 的 } d = -d\}$。

证明。根据断言 3.13 的证明，即使存在满足 $0 < d < \varepsilon$ and $\bigcup_{y \in \Gamma_1:\mathrm{dist}(x,y)=d} \mathrm{Max}'_y \not\supset \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') = -d\}$ 的数 $d$，这些数也构成离散集。令 $d_1$ 为这类 $d$ 中的最小数。那么对于任意满足 $0 < l < d_1$ 的 $l$，根据 $d_1$ 的定义和断言 3.12，我们有 $\bigcup_{y \in \Gamma_1:\mathrm{dist}(x,y)=l} \mathrm{Max}'_y = \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') = -l\}$。令 $z' \in \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(x') = -d_1\} \setminus \bigcup_{y \in \Gamma_1:\mathrm{dist}(x,y)=-d_1} \mathrm{Max}'_y$。由于 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(z') = -d_1 > -\varepsilon$，且 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))$ 满足断言 3.7 中的所有条件，故 $z' \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_{2\infty}$。根据断言 3.17，存在 $z \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$ 使得 $\mathrm{Max}'_z \ni z'$。于是 $\mathrm{dist}(x, z) > d_1$。根据断言 3.12、3.13，存在 $\delta > 0$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{z\}, \delta))$ 满足断言 3.7 中的所有条件，并且对于任意满足$0 < l < \delta$的 $l$，都有 $\bigcup_{y \in \Gamma_1:\mathrm{dist}(z,y)=l} \mathrm{Max}'_y = \{x' \in \Gamma_2 \mid \psi(\mathrm{CF}(\{z\}, \delta))(x') = -l\}$。由于热带曲线上的有理函数，存在一个靠近 $z'$ 的 $y' \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_{2\infty}$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(y') > -d_1$，且 $\psi(\mathrm{CF}(\{z\}, \delta))(y') > -\delta$。于是我们有 $d_1 < \mathrm{dist}(x, z) \leq \mathrm{dist}(x, \varphi(y')) + \mathrm{dist}(\varphi(y'), z) = -\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon))(y') - \psi(\mathrm{CF}(\{z\}, \delta))(y') < d_1 + \delta$。由于我们可以用一个无穷小正数替换$\delta$，因此产生矛盾。□

引理 3.21。令 $V$ 如断言 3.19 的证明中所述，并令 $(G, l)$ 为 $\Gamma_1$ 的模型，使得 $V(G) = V$。令 $e \in E(G)$。对于 $e$ 中除 $e$ 的端点 $v$、$w$（可能为 $v = w$）之外的任意点 $x$，令 $l_x$ 为 $\mathrm{dist}(x, v)$ 与 $\mathrm{dist}(x, w)$ 中的最小值。那么，$\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l_x))$ 满足断言 3.7 中的所有条件。

证明。假设该断言不成立。存在 $e \in E(G)$ 以及 $e$ 上的一个非端点 $x$，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{x\}, l_x))$

不满足断言 3.7 中的某个条件。根据断言 3.7 以及断言 3.5 证明中的等式 (1)，存在 $\varepsilon$，使得 $0<\varepsilon<l_x$, $\psi$(CF($\{x\},\varepsilon$)) 满足断言 3.7 的所有条件，并且对于任意 $l>0$，$\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+l$)) 都不满足断言 3.7 中的某个条件。设 $y_1,y_2$ 是满足 dist$(x,y_i)=\varepsilon$ 的两个不同点。设 $\delta>0$ 满足 $\psi$(CF($\{y_i\},\delta$)) 符合断言 3.7 中的所有条件，且 $\varepsilon+\delta\le l_x$，并且 dist$(y_1,y_2)>2\delta$。由于

$$\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta)\oplus(-\varepsilon)\odot\mathrm{CF}(\{y_i\},\delta)=\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta),$$

我们有

$$\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta))\oplus(-\varepsilon)\odot\psi(\mathrm{CF}(\{y_i\},\delta))=\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta)).$$

根据断言 3.12和引理3.20，$\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))（分别为 $\psi$(CF($\{y_i\},\delta$))）在 $\{x'\in\Gamma_2\,|\,-\varepsilon<\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(x')<0\}$（分别为 $\{x'\in\Gamma_2\,|\,-\delta<\psi$(CF($\{y_i\},\delta$))$(x')<0\}$）的每个连通分量上的斜率，与 $\varphi$在该连通分量上的膨胀因子一致。因此，存在 $z'\in\Gamma_2$，使得 $\psi$(CF($\{y_i\},\delta$))$(z')=-$dist$(y_i,\varphi(z'))>-\delta$，并且 $-\varepsilon+\psi$(CF($\{y_i\},\delta$))$(z')<\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(z')\le-\varepsilon$，对于 $i=1$ 或 2。不失一般性，我们可以假设该 $i$ 为 1。注意，在此情况下，$\psi$(CF($\{y_2\},\delta$))$(z')=-\delta$。对于任意正整数 $n$，由于

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta)^{\odot(-1)}\oplus\varepsilon\big)^{\odot(-1)}\\=\;&\big(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta)^{\odot(-n)}\oplus n\varepsilon\big)^{\odot(-1)}\odot(n-1)\varepsilon\\&\oplus(-\varepsilon)\odot\mathrm{CF}(\{y_1\},\delta)\oplus(-\varepsilon)\odot\mathrm{CF}(\{y_2\},\delta),\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta))^{\odot(-1)}\oplus\varepsilon\big)^{\odot(-1)}\\=\;&\big(\psi(\mathrm{CF}(\{x\},\varepsilon+\delta))^{\odot(-n)}\oplus n\varepsilon\big)^{\odot(-1)}\odot(n-1)\varepsilon\\&\oplus(-\varepsilon)\odot\psi(\mathrm{CF}(\{y_1\},\delta))\oplus(-\varepsilon)\odot\psi(\mathrm{CF}(\{y_2\},\delta)).\end{aligned}$$

若 $\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(z')<-\varepsilon$，则上述等式不可能成立，因为左边在 $z'$ 处取值为 $\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(z')$，而右边在 $z'$处的值小于它。因此 $\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(z')=-\varepsilon$。由上述论证可知，对于 $w'\in\Gamma_2$，若 $\psi$(CF($\{y_k\},\delta$))$(w')>-\delta$且 $-\varepsilon+\psi$(CF($\{y_k\},\delta$))$(w')<\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(w')\le-\varepsilon$，则$\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(w')=-\varepsilon$。由于 $\delta$ 很小，且热带曲线上的有理函数连续，因此存在 $w'\in\Gamma_2$，使得 $\psi$(CF($\{y_1\},\delta$))$(w')=\psi$(CF($\{y_2\},\delta$))$(w')=-\delta$且 $-\varepsilon-\frac{\delta}{n}<\psi$(CF($\{x\},\varepsilon+\delta$))$(w')<-\varepsilon$。然而，由上述等式可知，这样的 $w'$不可能存在。因此得出结论。□

推论 3.22。设 $\psi$ 和 $\varphi$ 如定理 1.1 中所述。则

$$\psi(f)=f\circ\varphi$$

对任意 $f\in$有理函数($\Gamma_1$) 均成立。

在推论 3.22 的证明中，我们将用到 [6] 的主定理证明：“对于一条热带曲线 $\Gamma$，Rat($\Gamma$) 作为半域 $\boldsymbol{T}$ 上的有限生成半域”；在该证明中，作者给出了 Rat($\Gamma$) 的一个有限生成集，如下所示。设 $\Gamma'$ 是由 $\Gamma$ 收缩所有长度为 $\infty$ 的边得到的度量图。对于 $\Gamma'$ 的典范模型 $(G'_\circ, l'_\circ)$，在 $G'_\circ$ 的边上固定一个方向。我们将每条边 $e' \in E(G'_\circ)$ 与区间 $[0, l'_\circ(e)]$ 按照此方向对应起来。对于每条边$e' \in E(G'_\circ)$，令 $x_{e'} = {}^{l'_\circ(e')}\!/_{4}$、$y_{e'} = {}^{l'_\circ(e')}\!/_{2}$ 和 $z_{e'} = {}^{3l'_\circ(e')}\!/_{4}$。令

$$f'_e := \mathrm{CF}\left(\{y_{e'}\}, \frac{l'_\circ(e')}{2}\right), g'_e := \mathrm{CF}\left(\{x_{e'}\}, \frac{l'_\circ(e')}{4}\right), h'_e := \mathrm{CF}\left(\{z_{e'}\}, \frac{l'_\circ(e')}{4}\right).$$

自然嵌入 $\iota : \Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ 诱导出自然嵌入 $\kappa$ : 有理函数($\Gamma'$) $\hookrightarrow$ 有理函数($\Gamma$)，使得对于任意 $f' \in$ 有理函数($\Gamma'$) 和 $x' \in \Gamma'$,$\kappa(f')(\iota(x')) = f'(x')$，且 $\kappa(f')$ 在 $\Gamma \backslash \iota(\Gamma')$ 的每个连通分支上延拓为常值。设 $L_1, \ldots, L_m$ 是 $\Gamma \backslash \iota(\Gamma')$ 的所有连通分支。那么 $\{\kappa(f_{e'})\ \kappa(g_{e'})\ \kappa(h_{e'})\ \kappa(\mathrm{CF}(\{v'\}, \infty)),$ $\mathrm{CF}(\Gamma \backslash L_1, \infty) \ldots, \mathrm{CF}(\Gamma \backslash L_m, \infty) \mid e' \in E(G'_\circ)\ v' \in V(G'_\circ)\}$ 就是所需的生成集（参见第 1 节和引理 1.4] 的证明）。注意，我们选择 $\Gamma'$ 的典范模型，使生成集尽可能小，但同样的证明适用于 $\Gamma'$ 的任意模型。

推论 3.22 的证明。设 $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1\infty}$ 和 $\varepsilon > 0$ 满足条件，使得 $\psi$ (CF($\{x\}, \varepsilon$)) 满足断言 3.7 中的所有条件。设 $y \in \Gamma_{1\infty}$ 和 $z$ 是与 $y$ 相连的唯一边上的有限点，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (z, y], \infty))^{\odot(-1)}$ 满足命题 3.8 中的所有条件。设 $f := \mathrm{CF}(\{x\}, \varepsilon)$ 和 $g := \mathrm{CF}(\Gamma_1 \setminus (z, y], \infty)^{\odot(-1)}$。由引理 3.20、断言 3.12、3.14 和 3.15，以及 $\varphi$ 的定义，我们有

$$\psi(f) = f \circ \varphi \quad \text{and} \quad \psi(g) = g \circ \varphi.$$

由于所有这样的 $f$ 和 $g$ 都生成 Rat($\Gamma_1$)，使其成为在 $\sim$ $\sim \boldsymbol{T}$ 上的热带半域，因此对任意 $h \in$ Rat($\Gamma_1$)，我们有 $\psi(h) = h \circ \varphi$。事实上，若 $\psi(f) = f \circ \varphi$ 且 $\psi(\widetilde{g}) = \widetilde{g} \circ \varphi$，则有

$$\begin{aligned} \psi(\widetilde{f} \oplus \widetilde{g}) &= \psi(\widetilde{f}) \oplus \psi(\widetilde{g}) \\ &= \widetilde{f} \circ \varphi \oplus \widetilde{g} \circ \varphi \\ &= (\widetilde{f} \oplus \widetilde{g}) \circ \varphi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \psi(\widetilde{f} \odot \widetilde{g}) &= \psi(\widetilde{f}) \odot \psi(\widetilde{g}) \\ &= \widetilde{f} \circ \varphi \odot \widetilde{g} \circ \varphi \\ &= (\widetilde{f} \odot \widetilde{g}) \circ \varphi. \end{aligned}$$

对于每个 $y \in \Gamma_{1\infty}$，按上述方式固定 $z$。令 $\Gamma_{11}$ 为通过将 $\Gamma_1$ 中长度为 $\infty$ 的所有边分别收缩到每个 $z$ 和 $\kappa$ 而得到的度量图：如上所述，Rat($\Gamma_{11}$) $\hookrightarrow$ Rat($\Gamma_1$)。根据引理 3.21，对于一个模型 $(G_1, l_1)$

对于满足 $V(G_1)$ 包含 $V \setminus \Gamma_{1\infty}$ 的 $\Gamma_{11}$，其中 $V$ 如断言 3.19 的证明中所述，以及任意边 $e \in E(G_1)$，我们可以按上述方式选择 $\kappa(f_e)$、$\kappa(g_e)$、$\kappa(h_e)$。根据 [7, 注 3.1]（参见 [7, 引理 3.3]），$\mathrm{CF}(\{v\}, \infty)$ 包含于由 $\{f_e, g_e, h_e, \mathrm{CF}(\{w\}, \varepsilon_w) \mid e \in E(G_1)\ w \in V(G_1)\}$ 在 $\Gamma_{11}$ 上关于 $\boldsymbol{T}$ 生成的半域中，其中 $\varepsilon_w$ 是一个正数，使得 $\psi(\mathrm{CF}(\{w\}, \varepsilon_w))$ 满足断言 3.13 中的所有条件。因此，我们得出结论。□

现在我们可以证明推论 1.2：

推论 1.2 的证明。显然，$\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$ 都是范畴。

Let

$$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

be

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D}); \qquad \Gamma \mapsto \Gamma$$

且对于 $\Gamma_1$、$\Gamma_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Gamma_1, \Gamma_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\Gamma_2, \Gamma_1); \qquad \psi \mapsto \varphi,$$

其中，$\varphi$ 是满态射 $\Gamma_2 \twoheadrightarrow \Gamma_1$，其定义如定理 1.1 所述。令

$$G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$$

be

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}); \qquad \Gamma \to \Gamma$$

且对于 $\Gamma_1$、$\Gamma_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\Gamma_1, \Gamma_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Gamma_2, \Gamma_1); \qquad \varphi \mapsto \varphi^*.$$

根据定理 1.1 和命题 3.1，$F$ 和 $G$ 被定义。于是，$F$ 和 $G$ 是（逆变）函子。根据推论 3.22，我们有 $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$。显然，$F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ 成立。□

## References

[1] Aaron Bertram和Robert Easton，《同余关系的热带零点定理》，《数学进展》308:36–82，2017年。[2] Melody Chan，《热带双曲曲线》，《代数组合学杂志》37:331-359，2013年。[3] Jeffrey Giansiracusa和Noah Giansiracusa，《热带簇的方程》，《杜克数学杂志》165(18):3379–3433，2016年。[4] Jonathan S. Golan，《半环及其应用》，《半环理论及其在数学与理论计算机科学中的应用》的更新扩充版。Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，1999年。[5] D´aniel Jo´o和Kalina Mincheva，《加法幂等半环的素同余关系与热带多项式的零点定理》，《Sekecta Mathematica》24(3):2207–2233，2018年。[6] Song JuAe，《热带曲线的有理函数半域在热带半域上有限生成》，《国际代数与计算杂志》32(08):1575–1594，2022年。

[7] SONG JUAE, 《热带曲线的有理函数半域之间的半环同构诱导热带曲线之间的同构》, arXiv:2110.08091。[8] Jaiung Jun, 《半环赋值》, Journalof PureandAppliedAlgebra 222(8):2063–2088, 2018。[9] DianeMaclagan 和 Felipe Rinc´on, 《热带理想》, CompositioMathematica 154(3):640–670, 2018。[10] DianeMaclagan和 BerndSturmfels, 《热带几何导论》, 数学研究生教程, 第161卷。美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 2015年。

Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo,192-0397, Japan.电子邮箱地址: songjuae@tmu.ac.jp