arXiv:2304.03513v1 [math.SP] 7 Apr 2023

Magnus展开的收敛估计 IIA.2×2 算子范数下的矩阵

GYULA LAKOS

Abstract. 我们回顾并给出与 Magnus展开 相关的简化证明，并改进收敛估计。此外，我们还对 Baker–Campbell–Hausdorff 展开式提出了一些观察和改进。

在本IIA部分中，我们研究关于算子范数的 2×2 矩阵情形。我们基于Magnus展开式和BCH展开式，考察范数估计和最小表示。在复数情形下，我们得到了一些结果，但在实数情形下获得了更为完整的图景。

Introduction to Part IIA

本文是第一部分 II [11]的直接延续。读者应熟悉第一部分 [10] 并且对第二部分 [11] 有良好的理解。在第二部分中，我们得到了关于保形值域的范数估计和包含定理。在第二部分IIA中，我们更加仔细地研究 2×2 矩阵这一更易处理的情形。一些研究将涉及检验或改进我们先前关于 2×2矩阵的结果；另一些研究则将处理最小 Magnus表示或 Baker–Campbell–Hausdorff 表示。研究2×2 矩阵似乎是一个适度的目标，但实际上，计算并不简单。（基本的解析计算已经出现在 Magnus [14]中；而更复杂的技术则出现在Michel [15] 中，但其背景是 Frobenius 范数。我们的计算在思想上与之相似，但更加复杂，因为我们认真地采用了算子范数。）这里展示的信息对于 2×2 实矩阵的情形相对更加完整，而对于 2×2 复矩阵的情形则要不完整得多。

在第 1 节中，我们回顾了第二部分中的一些定理和例子。本文关于 2×2 矩阵的结果可以结合这些内容来理解。在第 2 节中，我们回顾了有关 2×2 矩阵的一些技术工具。后续各节在不同程度上都会用到这里讨论的信息，因此本节内容至关重要（尽管其性质较为基础）；不过，之后也可以按需查阅本节内容。无论如何，建议至少粗略阅读一遍。

第 3 节和第 4 节分别讨论 Schur 公式和 BCH 公式如何针对 2×2矩阵得到简化。在第 5 节中，我们说明，对于 2×2 复矩阵，指数函数很少扮演“测地线的角色”（即极小 Magnus 表示的组成部分）。第 6 节给出了来自 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的 BCH 展开式实例，并关注范数增长。在第 7 节中，我们证明，累积范数为 π 的 2×2 实矩阵的（适当）平衡 BCH 展开式是一致有界的。接下来，我们转向实 2×2 矩阵的 BCH 极小表示（带有范数限制）。第 8 节和第 9 节研究 Schur 映射的矩，并将其应用于 BCH 极小表示。第 10 节描述了（临界） “BCH 单位球 ”$\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47A12，15A16；次要分类：15A60。

Key words and phrases. Magnus展开、Baker–Campbell–Hausdorff展开式、增长估计、Davis–Wielandt壳、算子的共形值域、最小指数表示。

由此得到“楔形帽”。此时还有若干问题有待解决，但既然已经考察了这个首要的有趣情形，我们就此结束关于 BCH 表示的讨论。

接下来，我们开始研究实数 2×2 矩阵的 Magnus（极小）展开。我们发现，在这种情形下，Magnus 极小表示比 BCH 极小表示更自然，也更容易处理。第 11 节中，我们证明了实 2×2 矩阵的主圆盘具有对数单调性。在第 12 节中，我们考察了一些例子，用以检验此前关于 Magnus 展开的范数估计；这些例子还通过引入“规范 Magnus 展开”，帮助我们更好地理解实数 2×2 情形。第 13 节对实数 2×2 情形进行了系统分析。首先观察到，在这种情形下，可以从共形值域／主圆盘读出 Magnus 指数。基于前面的例子，我们考察了实 2×2 矩阵的（极小）正规表示，这些矩阵表示为时间序指数，而非普通指数。结论是，与惯用的指数函数相比，这些正规表示更适合对 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 进行几何描述。第 14 节介绍了实 2×2 矩阵的最优范数估计的渐近行为。然而，第 15 节表明，复 2×2 矩阵的 Magnus 指数无法像实数情形那样简单地从共形值域中读出。（因此，先前的方法并不能轻易推广。）

记号与术语。公式（X）的第 y 行记作（X/y）。若 a、b 是欧几里得空间（或仅是仿射空间）中的点，则 $[a,b]_{\mathrm{e}}$ 表示连接它们的线段。此记号也用于（半）开线段。在 $\mathbb{R}$ 中，当 $a>b$ 时，也可方便地使用此记号。我们常说“根据解析延拓”，而不说“根据解析延拓的唯一性原理”，即使函数已经构造出来也是如此。总的来说，我们尽量沿用第一部分和第二部分中确立的记号。

1. Some results from Part II (Review)

这里回顾第二部分中的一些内容。这无法取代第二部分中的详细讨论，但可供参考。

1.A. 共形值域。

设 $\mathfrak{H}$ 是实希尔伯特空间。$\mathfrak{H}\setminus\{0\}$ 上的对数距离定义为

$$d_{\log}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sqrt{\left(\log\frac{|\mathbf{w}|_2}{|\mathbf{v}|_2}\right)^2+((\mathbf{v},\mathbf{w})\sphericalangle)^2}. \tag{1}$$

定理 1.1. 设 $\mathbf{z}\colon\ [a,b]\to\mathfrak{H}\setminus\{0\}$ 连续。则

$$d_{\log}(\mathbf{z}(a),\mathbf{z}(b))\le\int_{t\in[a,b]}\frac{|\mathrm{d}\mathbf{z}(t)|_2}{|\mathbf{z}(t)|_2}.$$

等号成立时，$\mathbf{z}$ 是连接 $\mathbf{z}(a)$ 与 $\mathbf{z}(b)$ 的一条距离线段上的单调子路径（不一定是严格单调的）。□

对于 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{H}\setminus\{0\}$，令 $\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 表示它们之间的角。这可以直接由底层的实标量积 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathrm{real}}=$实部$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ 得到。对于 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{H}$、$\mathbf{x}\neq 0$，令

$$\mathbf{y}:\mathbf{x}=\frac{\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_{\mathrm{real}}}{|\mathbf{x}|_2^2}+\mathrm{i}\left|\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|_2}-\frac{\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_{\mathrm{real}}}{|\mathbf{x}|_2^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|_2}\right|_2.$$

对于 $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$，我们将（扩展）共形值域定义为

$$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x}, \overline{(A\mathbf{x} : \mathbf{x})} : \mathbf{x} \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}\};$$

并将受限共形值域定义为

$$\mathrm{CR}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}\}.$$

（这是 Davis-Wielandt 壳的一个部分方面，参见 Wielandt [19], Davis [4], [5]以及 [11]。）

定理 1.2.（时间有序指数映射定理。）

若 ϕ是取值于 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$的有序测度，则

$$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(\exp_{\mathrm{L}} \phi) \subset \exp \mathrm{D}(0, \int \|\phi\|_2), \tag{2}$$

and

$$\mathrm{sp}(\exp_{\mathrm{L}} \phi) \subset \exp \mathrm{D}(0, \int \|\phi\|_2). \tag{3}$$

特别地，若 $\int \|\phi\|_2 < \pi$，则 $\log \exp_{\mathrm{L}} \phi$ 有定义，且其谱半径为

$$\mathrm{r}(\log \exp_{\mathrm{L}} \phi) \leq \int \|\phi\|_2. \tag{4}$$ □

1.B. 收敛定理。

定理 1.3.（Mityagin–Moan–Niesen–Casas 对数收敛定理

.) 如果 ϕ 是一个取值于 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ 的有序测度，且 $\int \|\phi\|_2 < \pi$，那么 Magnus展开 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\ \mathrm{L}}(\phi)$ 绝对收敛。事实上，$\log \exp_{\mathrm{L}}(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\ \mathrm{L}}(\phi)$ 也成立。

如果将 $\mathcal{B}$（$\mathfrak{H}$）替换为任意 C^*-代数，该结论也成立。

*[*参见 Sch ¨afer [18], Mityagin [16], Moan, Niesen [17], Casas [3].*]* □

我们称有序测度 ϕ 是多重Baker–Campbell–Hausdorff（mBCH）测度，如果在重新参数化意义下，ϕ具有 $A_1\mathbf{1}_{\cdot}\ldots_{\cdot}A_n\mathbf{1}$的形式。在这种情况下，$\phi$也允许采用质量归一化版本

$$\psi = B_1\mathbf{1}_{(0,t_1]}{}_{\cdot}\ldots_{\cdot}B_k\mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k]} \tag{5}$$

其中 $t_i < t_{i+1}$, $\|B_i\|_2 = 1$ 因此 $t_k = \int \|\phi\|_2$。它通过在 $\|A_i\|_2 \neq 0$ 时将 A_i 替换为 $A_i/\|A_i\|_2$ 来构造，并在 $A_i = 0$ 时消去该项。由于它是通过一种重新参数化得到的，因此其 Magnus展开不受影响。

定理 1.4。（有限维临界 BCH 收敛定理。）

设 $\mathfrak{H}$是有限维希尔伯特空间。考虑具有累积范数 $\|A_1\|_2 + \ldots + \|A_k\|_2 = \pi$的 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$值 mBCH 测度$\phi = A_1\mathbf{1}_{\cdot}\ldots_{\cdot}A_k\mathbf{1}$。那么，$\phi$ 的 Magnus（mBCH）展开式的收敛半径大于 1。特别地，累积范数为 π 的有限维 mBCH 展开式收敛。□

引理 1.5. 设 ψ 是如 (5) 中所述的质量归一化 mBCH 测度，$\int \|\psi\|_2 > 0$

.

考虑所有满足以下条件的希尔伯特子空间 $\mathfrak{V}$of $\mathfrak{H}$: (i) $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{V}^{\perp}$ 是对所有 B_i的不变正交分解；(ii) $B_1|_{\mathfrak{V}} = \ldots = B_k|_{\mathfrak{V}}$，且这些分解彼此正交（酉）。于是存在唯一的一个最大的此类 $\mathfrak{V}$。 □

在前述引理的语境下，若这样的最大 $\mathfrak{V}$ 为 0，则称 ψ是约化的。特别地，若 $\bigcap_{i<j} \ker(B_i - B_j) = 0$，则此条件成立。

定理 1.6.（有限维对数临界 BCH 收敛定理。）设 $\mathfrak{H}$ 是一个有限维希尔伯特空间。考虑如式 (5) 所示的取值于 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ 的质量归一化 mBCH 测度 ψ，其累积范数为 $\int \|\psi\|_2 = \pi$。我们断言：

(a)除非分量算子 B_i 具有关于i 或 –i的公共特征向量（复-数情形），或具有公共特征块 $\begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$（实数情形），否则对数指数$_{\mathrm{L}}(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{k,\mathrm{L}}(\psi)$ 同样成立。

(b) 如果 ψ 是约化的，那么对于任意 $t \in \mathrm{D}(0,1)$，对数 指数$_{\mathrm{L}}(t \cdot \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \mu_{k,\mathrm{L}}(\psi)$ 成立。因此，Magnus（BCH）展开式的 log-可半径也大于 1。 □

1.C. 增长估计。

对于 $p > 0$，我们将 $0 < \ell(p) < \frac{\pi}{2}$ 定义为该方程的解

$$\ell(p) + p \sin \ell(p) = \frac{\pi}{2}.$$

因此，$\ell : (0,\infty) \to (\pi/2, 0)_{\mathrm{e}}$ 是一个递减微分同胚。特别是，

$$\ell(\pi) = 0.386519539\ldots .$$

定理 1.7.设$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A) \subset$ 指数 $\mathrm{D}(0,p)$，$0 < p < \pi$。那么

$$\|\log A\|_2 \le J(p) = \int_{t=\ell(p)}^{\pi-\ell(p)} \underbrace{\frac{p + \sin(p\sin t) - \cos(p\sin t)\, p \sin t}{2\sin(p\sin t)}}_{JJ(p,t)} \,\mathrm{d}t. \tag{6}$$ □

定理 1.8. (a) 当 $p \searrow 0$,

$$J(p) = p + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{72}p^5 + \frac{211}{15120}p^7 + O(p^9). \tag{7}$$

(b) 当 $p \nearrow \pi$,

$$J(p) = \pi\sqrt{\frac{\pi+p}{\pi-p}} + J_\pi + O(\pi - p), \tag{8}$$

其中

$$J_\pi = -4\tan\ell(\pi) + \int_{t=\ell(\pi)}^{\pi-\ell(\pi)} \left(JJ(\pi,t) - \frac{2}{\cos^2 t} \right) \mathrm{d}t$$

*(th*被积函数可延拓为关于 t 的光滑函数。数值上，$J_\pi = -3.0222\ldots$. □

函数 $J(p)$并不十分特殊，还可以改进。我们曾考虑过一个例子来检验 (6)–(8) 的有效性，该例子是

示例 1.9。（Magnus临界情形的解析展开。）在区间 $[0,\pi]$ 上，我们考虑测度 Φ，使得

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\theta|_{[0,\pi]}.$$

因此，对于 $p \in (0,\pi)$,

$$\int \|p/\pi \cdot \Phi\|_2 = p.$$

然后，

$$\mu_{\mathrm{L}}(p/\pi \cdot \Phi) = \log \exp_{\mathrm{L}}(p/\pi \cdot \Phi)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-(p/\pi)^2}}-1\right)\begin{bmatrix} & -p/\pi-1\\ -p/\pi+1 & \end{bmatrix}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\|\mu_{\mathrm{L}}(p/\pi\cdot\Phi)\|_2 &= \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-(p/\pi)^2}}-1\right)(1+p/\pi)\\ &= \pi\sqrt{\frac{\pi+p}{\pi-p}}-\pi-p\\ &= \sqrt{2}\pi^{3/2}(\pi-p)^{-1/2}-2\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^{1/2}(\pi-p)^{1/2}+O(\pi-p),\end{aligned} \tag{9}$$

当 $p\nearrow\pi$时。 ♢

（不过，我们将看到， $\Phi|_{[0,p]}$ 是检验（6）–（8）的更佳候选。）

2. Computational background for 2×2 matrices

为便于参考，我们在此回顾一些与 2×2矩阵相关的事实和约定，这些内容我们在第二部分中已经讨论过。不过，我们也借此机会通过进一步的解析性质观察来扩充本次回顾。

2.A. 斜四元数形式（回顾）。

2×2 矩阵 A 可以写成斜四元数形式

$$A = \tilde{a}\,\mathrm{Id}_2 + \tilde{b}\tilde{I}+\tilde{c}\tilde{J}+\tilde{d}\tilde{K} \equiv \tilde{a}\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}+\tilde{b}\begin{bmatrix} & -1\\ 1 & \end{bmatrix}+\tilde{c}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}+\tilde{d}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}. \tag{10}$$

然后,

$$\frac{\operatorname{tr} A}{2}=\tilde{a},$$

and

$$\det A = \tilde{a}^2+\tilde{b}^2-\tilde{c}^2-\tilde{d}^2.$$

2.B. 谱类型（回顾）。

我们使用以下记号

$$D_A = \det\left(A-\frac{\operatorname{tr} A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right) = (\det A)-\frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4}.$$

它本质上是 A的判别式，因为 A 的特征值为$\frac{1}{2}\operatorname{tr} A\pm\sqrt{-D_A}$。在形式（10）中,

$$D_A = \tilde{b}^2-\tilde{c}^2-\tilde{d}^2. \tag{11}$$

在实 2×2 矩阵这一特殊情况下，我们采用分类方式。

- •椭圆情形：两个共轭的严格复特征值 值,
- •抛物型情形：两个相等的实特征值,
- • 双曲型情形：两个不同的实特征值。

那么，对于实 2×2 矩阵， D_A 用“椭圆型/抛物型/双曲型”来分类：若 $D_A>0$, 则 A 为椭圆型；若 $D_A=0$, 则 A 为抛物型；若 $D_A<0$, 则 A 为双曲型。

在一般的复数情形中，主要分为两类：抛物型（$D_A = 0$）和非抛物型（$D_A \neq 0$）。

2.C. 主圆盘和手性圆盘（回顾）。

对于 2×2 实矩阵，我们可以如下细化谱数据：假设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \tilde{a}\,\mathrm{Id}_2 + \tilde{b}\tilde{I} + \tilde{c}\tilde{J} + \tilde{d}\tilde{K}$。其主圆盘是

$$\mathrm{PD}(A) := \mathrm{D}\left(\frac{a+d}{2} + \frac{|c-b|}{2}\mathrm{i}, \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2}\right) = \mathrm{D}\left(\tilde{a} + |\tilde{b}|\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right).$$

这可通过手性圆盘进一步细化

$$\mathrm{CD}(A) := \mathrm{D}\left(\frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}\mathrm{i}, \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2}\right) = \mathrm{D}\left(\tilde{a} + \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right).$$

手性圆盘中的附加数据是手性，即扭曲迹的符号，$\operatorname{sgn}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} A\right) = \operatorname{sgn}(c-b) = \operatorname{sgn}\tilde{b}$. 这种手性实际上是相对于 $\mathbb{R}^2$的固定定向来理解的。若我们用旋转共轭 A ，它不会改变；但若用反射共轭 A ，它会改变符号。从扭曲迹的性质也很容易看出，对数保持手性。

从圆盘可以读出许多信息。例如，如果 $\mathrm{PD}(A) = \mathrm{D}((\tilde{a}, b)\ r)$，那么 $\det A = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - r^2$。鉴于

引理 2.1。CD 在 $\mathbb{C}$ 中的可能退化圆盘与 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的轨道之间建立一一对应，其中轨道是指在特殊正交矩阵（即旋转）的共轭作用下得到的轨道。

PD 在中心位于 $\mathbb{C}^+$ 的可能退化圆盘与 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的轨道之间建立一一对应，其中轨道是指在正交矩阵的共轭作用下得到的轨道。□

如果 A 具有复数乘法的作用（也就是说， A 是一个拟复矩阵），那么主圆盘／手性圆盘就是一个点。一般而言，矩阵 A 分为三类：椭圆型、抛物型和双曲型；相应地，主圆盘／手性圆盘与实轴分别相离、相切或相交。

2.D. 2×2 实矩阵的共形值域（回顾）。

主圆盘/保角圆盘最终发现与保角值域密切相关：

引理 2.2. 考虑实矩阵 $A = \tilde{a}\mathrm{Id}_2 + \tilde{b}I + \tilde{c}J + \tilde{d}K$. 我们声称：

(a) 对于 A 作用于 $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{\mathbb{R}}) = \partial\,\mathrm{D}\left(\tilde{a} + \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right) \cup \partial\,\mathrm{D}\left(\tilde{a} - \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right).$$

(b) 对作用于 $\mathbb{C}^2$ 的 A,

$$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{\mathbb{C}}) = \mathrm{D}\left(\tilde{a} + \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right) \setminus \mathring{\mathrm{D}}\left(\tilde{a} - \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right) \cup \mathrm{D}\left(\tilde{a} - \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right) \setminus \mathring{\mathrm{D}}\left(\tilde{a} + \tilde{b}\mathrm{i}, \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}\right).$$

这是 $\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{\mathbb{R}})$，但将 $\mathbb{R}$ 填入后，$\mathbb{C}\backslash\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{\mathbb{R}})$的各分量彼此不相交。 □

因此，$\mathrm{CR}(A^{\mathbb{R}})$ 是主圆盘（或手性圆盘）在共轭作用下取商后的边界。用双曲几何（在 Poincar´e 半空间）来描述时，$\mathrm{CR}(A^{\mathbb{R}})$ 在椭圆情形下可能给出点或圆；在抛物情形下给出渐近点或相应的 horocycle（paracycle）；在双曲情形下给出直线或成对的等距线（hypercycle）。（在正规情形下，它给出点、渐近点或直线；在非正规情形下，它给出圆、渐近闭合的 horocycle、渐近闭合的成对等距线。）$\mathrm{CR}(A^{\mathbb{C}})$ 是 $\mathrm{CR}(A^{\mathbb{R}})$ 的 h-凸包。

2.E. 识别可取对数性。

对于有限矩阵，$\mathrm{sp}(A)\cap\mathbb{R}=\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{(\mathrm{real})})\cap\mathbb{R}$。因此，$A$ 可取对数，当且仅当 $\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}(A^{(\mathrm{real})})\cap(\infty,0]=\emptyset$。（$\mathrm{CR}^{\mathrm{ext}}$ 可替换为 CR。）或者，对于 2×2 实矩阵，用主圆盘表示，A 可取对数，当且仅当 $\mathrm{PD}(A)\cap(\infty,0]=\emptyset$。（PD 可替换为 CD。）

2.F. 反四元数形式的 2×2 矩阵的典范形。

在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中，由旋转矩阵 $\mathrm{Id}_2\cos\theta+I\sin\theta$ 进行共轭的效果为

$$a\,\mathrm{Id}_2+b\tilde{I}+c\tilde{J}+d\tilde{K}\mapsto a\,\mathrm{Id}_2+b\tilde{I}+((\cos 2\theta)\,\mathrm{Id}_2+(\sin 2\theta)\tilde{I})(c\,\mathrm{Id}_2+d\tilde{I})\tilde{K}. \tag{12}$$

因此，通过旋转矩阵的共轭，任意实 2×2 矩阵都可以化为如下形式

$$a\,\mathrm{Id}_2+b\tilde{I}+c\tilde{J}$$

with

$$a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c\geq 0.$$

如果还允许通过 J进行共轭，那么

$$b\geq 0$$

即可实现。（$\mathrm{sgn}\,b$ 是该矩阵的手性类别。）

在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 中，利用旋转矩阵进行共轭，可以将不调整系数的相位，使其取为 I。这样可以得到如下形式

$$a\,\mathrm{Id}_2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(s_1\tilde{I}+s_2\tilde{J}) \tag{13}$$

with

$$a\in\mathbb{C},\ s_1\geq 0,\ s_2\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R}$$

即可实现。通过 K, $\beta\in[0,\pi)$进行共轭，或可假设类似的限制。采用记号上的明显滥用 $\sqrt{\tilde{K}}={}^{1+}{}_{\mathrm{i}\,2}\,\mathrm{Id}_2+\frac{1-\mathrm{i}}{2}\tilde{K}$，我们得到 $\sqrt{\tilde{K}}\tilde{I}\sqrt{\tilde{K}}^{-1}=-\mathrm{i}\,\tilde{J}$和 $\sqrt{\tilde{K}}\tilde{J}\sqrt{\tilde{K}}^{-1}=-\mathrm{i}\,\tilde{I}$；且 $\sqrt{\tilde{K}}$是酉的。因此，再进行一次酉共轭，

$$\beta\in[0,\pi/2)$$

或者可以假设类似的限制。（我们也可以基于 J 和 K构造一个典范形，但当前形式与实数情形较为接近。）

这里的正规矩阵可由 $s_1=0$ or $s_2=0$ 来刻画。

2.G. $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中某些子集的可视化。

下文中，我们将考虑 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的某些子集 S 。根据旋转效应 (12)，不变子集 S 最好通过该映射的像来直观表示

$$\Xi^{\mathrm{PH}}: \qquad a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I} + c\tilde{J} + d\tilde{K} \mapsto (a, b, \sqrt{c^2+d^2}).$$

($\Xi^{\mathrm{PH}}(S)$可被视为渐近闭合的庞加 莱半空间的子集。)特别地，$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中以 0 为中心、半径为 $\frac{\pi}{2}$ 的球面的像是

$$\Xi^{\mathrm{PH}}\left(\partial\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2}}\right) = \left\{(a,b,r) \,:\, \sqrt{a^2+b^2}+r = \frac{\pi}{2}\right\},$$

“圆锥形帽子”。

2.H. 维数 2 的算术后果。

对于 2×2 复矩阵 A，Cayley–Hamilton 方程为

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)\,\mathrm{Id}_2\,. \tag{14}$$

显然可得以下结论：对于迹，

$$\operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A)^2 - 2(\det A);$$

即，

$$\det A = \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2}{2};$$

在可逆的情形下，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{tr} A)\,\mathrm{Id}_2 - A\right);$$

更一般地，对于伴随矩阵

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{tr} A)\,\mathrm{Id}_2 - A. \tag{15}$$

将（15）应用于恒等式 (adj v)(adj A) $=$ adj(Av)，并展开，可得

$$A\mathbf{v} + \mathbf{v}A = (\operatorname{tr} A)\mathbf{v} + (\operatorname{tr}\mathbf{v})A + \operatorname{tr}(A\mathbf{v})\,\mathrm{Id}_2 - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr}\mathbf{v})\,\mathrm{Id}_2\,. \tag{16}$$

乘以 A，并应用（14），容易推出

$$A\mathbf{v}A = \det(A)\mathbf{v} + \operatorname{tr}(A\mathbf{v})A - (\det A)(\operatorname{tr}\mathbf{v})\,\mathrm{Id}_2\,. \tag{17}$$

由此可得

引理 2.3. (o) 任意关于 A,v 的非交换（实）多项式都可以写成以下表达式的线性组合：

$$\mathrm{Id}_2, A, \mathbf{v}, [A, \mathbf{v}] \tag{18}$$

其系数是以下变量的（实）多项式：

$$\operatorname{tr} A,\ \operatorname{tr}\mathbf{v},\ \det A,\ \det\mathbf{v},\ \operatorname{tr}(A\mathbf{v}). \tag{19}$$

(a) 任何由 $\mathrm{Id}_2, A,$ v 和 tr、行列式、adj 通过代数运算构造的标量表达式，都可以写成 (19) 的多项式。

(b)任何由Id_2、 A、v 以及 tr、行列式、adj 通过代数运算构成的矩阵表达式，都可以写成 (18) 的线性组合，其系数是 (19) 的多项式。

证明。 (o) 使用(14)和 (17)，并反复使用将 A 与 v 的角色互换后的相应版本，我们得到Id_2、 A、v Av、vA 的线性组合（带有适当的系数）。然而，由于 (16)，最后两项可以改写为 $[A,\mathrm{v}]$。(a–b) 最好通过对代数表达式的复杂度进行同步归纳来证明。鉴于 (o)，唯一非平凡的步骤是对一个矩阵取行列式
表达式。然而，这可以通过使用 $\det X = (\mathrm{tr}\ X)^2 - \mathrm{tr}_2\ X^2$ 来解决。 □

如果我们考察引理 2.3 的证明，就会看到它还给出了化为标准形式的算法。

示例2.4。如果我们将引理 2.3 应用于 A 和 $\mathrm{v} = A^*$，则 (19) 得到

$$\mathrm{tr}\, A,\ \overline{\mathrm{tr}\, A},\ \det A,\ \overline{\det A},\ \mathrm{tr}(A^*A).$$

（尽管 X 及其共轭 $\overline{X}$ 包含相同的信息，但它们在算术上是不同的对象。）通过取复线性组合，我们有

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, A,\ \mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\, A,\ \mathrm{Re}\det A,\ \mathrm{Im}\det A,\ \mathrm{tr}(A^*A).$$

它们均为实数量。这些就是与 A 相关的“五个数据”（参见 [12]）。 ♢

一般来说，如果我们允许在表达式中使用伴随，那么其复杂性就会增加。我们仅指出恒等式

$$\frac{\mathrm{tr}(A^*A)\,\mathrm{tr}(A^*\mathbf{v})}{2} - (\det A^*)\,((\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\,\mathbf{v}) - \mathrm{tr}(A\mathbf{v})) = \\ = \mathrm{tr}\left(\left(A^*A - \frac{A^*A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)\left(A^*\mathbf{v} - \frac{A^*\mathbf{v}}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)\right), \tag{20}$$

这可以通过直接计算验证。（含有“两个以上变量”的矩阵表达式也可以系统地处理，但情况更为复杂。）

将（14）重新整理为一个完全平方，得到

$$\left(A - \frac{\mathrm{tr}\, A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)^2 = (-D_A)\,\mathrm{Id}_2\,. \tag{21}$$

引入如下记号很有用。

$$T_{A,\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\left(A - \frac{\mathrm{tr}\, A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)\left(\mathbf{v} - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{v}}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)\right).$$

由（21），$D_A = -T_{A,A}$，因此 $T_{A,\mathbf{v}}$ 可以视为极化 D_A （乘以 -1）。然后可以证明

$$[A,[A,[A,\mathbf{v}]]] = -4D_A[A,\mathbf{v}]; \tag{22}$$

$$[A,[\mathbf{v},[A,\mathbf{v}]]] = [\mathbf{v},[A,[A,\mathbf{v}]]] = 4T_{A,\mathbf{v}}[A,\mathbf{v}]; \tag{23}$$

$$[\mathbf{v},[\mathbf{v},[A,\mathbf{v}]]] = -4D_{\mathbf{v}}[A,\mathbf{v}]. \tag{24}$$

事实上，在 (22) 中， A 可以替换为 $A - \frac{\mathrm{tr}\, A}{2}\,\mathrm{Id}_2$，，此时 (21) 蕴含 (22)。然后 (24) 由交换变量得到，而 (23) 则由对前两个交换子变量进行极化得到。

引理 2.3 的交换子类比为

引理2.5。任何不含未交换项的 A,$\mathbf{v}$ 的（实）交换子多项式都可以写成以下各项的线性组合

$$[A,\mathbf{v}],[A,[A,\mathbf{v}]],[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]] \tag{25}$$

其系数是实多项式

$$D_A,\ T_{A,\mathbf{v}},\ D_{\mathbf{v}}. \tag{26}$$

证明。交换子表达式可以化为迭代左交换子的线性组合，其中长度为四的端项要么平凡，要么（基本上）可由（22）或（23）化简。化简后，只剩下长度为 2 或 3 的交换子，并带有适当的系数。反过来，根据（22）、（23）或（24），乘子 D_A, $T_{A,\ \mathbf{v}}$,$D_{\mathbf{v}}$ 可以吸收到交换子中。□

引理2.6。我们得到：

(a) 在引理 2.3 中，项 (18) 和 (19) 在形式代数意义下是代数独立的。(b) 在引理2.5 中，项 (25) 和 (26) 在形式代数意义下是代数独立的。

证明。(a) 即使是例 2.4 的特例，也表明 (18) 和 (19) 的各项在实数域上代数独立。这也意味着一般情形下它们在实数域上独立。由于所有代数规则本质上都是实数的，这也意味着它们在复数域上独立。

(b) 显然，在引理 2.3 的陈述中，$\det A$、$\operatorname{tr}(A\mathbf{v})$、$\det \mathbf{v}$ 可以分别替换为 D_A、 $T_{A,\ \mathbf{v}}$、$D_{\mathbf{v}}$。关于基项，这些恒等式

$$[A,[A,\mathbf{v}]] = -4D_A\left(\mathbf{v}-\frac{\operatorname{tr}\mathbf{v}}{2}\operatorname{Id}_2\right)-4T_{A,\mathbf{v}}\left(A-\frac{\operatorname{tr}A}{2}\operatorname{Id}_2\right) \tag{27}$$

and

$$[\mathbf{v},[\mathbf{v},\mathbf{A}]] = -4T_{A,\mathbf{v}}\left(\mathbf{v}-\frac{\operatorname{tr}\mathbf{v}}{2}\operatorname{Id}_2\right)-4D_{\mathbf{v}}\left(A-\frac{\operatorname{tr}A}{2}\operatorname{Id}_2\right) \tag{28}$$

表明新基项 $\begin{vmatrix} D_A & T_{A\,\mathbf{v}} \\ T_A & D_{\mathbf{v}} \end{vmatrix} \neq 0$ 彼此独立。 □

由此，我们得到了 2×2 矩阵情形下（形式）交换子表达式的标准形。由于吸收规则 (22–24) 相当简单，这种标准形在实践中十分实用。

我们还提及以下恒等式

$$T_{A,[A,\mathbf{v}]} = 0; \tag{29}$$

$$T_{A,[A,[A,\mathbf{v}]]} = 0; \tag{30}$$

$$T_{A,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]} = 4(D_AD_{\mathbf{v}}-T_{A,\mathbf{v}}^2); \tag{31}$$

这些很容易通过直接计算验证。

2.I. 自伴性、共形酉性、正规性。

注意，如果 B 是一个 2×2 复自伴矩阵，那么它属于实双曲型或抛物型。因此

$$-D_B \geq 0 \qquad \text{if} \qquad B = B^*,$$

当且仅当 B 是一个（实）标量矩阵时，等号成立。

特别地，对于任意 2×2 复矩阵 A,

$$-D_{A^*A} = \left(\frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}\right)^2 - |\det A|^2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(A^*A - \frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}\operatorname{Id}_2\right)^2 \quad \geq \quad 0.$$

当且仅当 A 是正规矩阵且其特征值的绝对值相等时，等号成立，即 A是共形酉矩阵（也就是说，它是一个酉矩阵与一个正标量的乘积），或者 A 是零矩阵。（这可通过考察矩阵经酉共轭后的三角形式得出。）请注意，零矩阵不属于共形酉矩阵。在实数情形下，我们可以讨论保角正交矩阵。此时，2×2保角正交矩阵要么是保角旋转，要么是保角反射。

对于 2×2 复矩阵，以 Frobenius 范数表示，

$$\|[A,A^*]\|_{\mathrm{Frob}}^2 = \operatorname{tr}\left([A,A^*]^*[A,A^*]\right) = \operatorname{tr}[A,A^*]^2 = -2\det[A,A^*] = -2D_{[A,A^*]}.$$

因此，$\operatorname{tr}\ [A,A^*]^2 = 0$、$\det[A,A^*] = 0$、 $D_{[A,A^*]} = 0$都等价于A的正规性。实际上，从算子范数的角度可以看出， $\|[A,A^*]\|_{\mathrm{Frob}}^2 = 2\|[A,A^*]\|_2^2$。

一个有些奇怪的量是 $-D_{(\operatorname{tr}A)A+(\operatorname{tr}A)\overline{A^*}}$ 可以验证，当且仅当 $\operatorname{tr}A = 0$ 或 A 是共形酉矩阵时，该量才为零。

引理 2.7. 若 A 是一个复 2×2 矩阵，则

$$-D_{A^*A} = \left(\frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}\right)^2 - |\det A|^2;$$

$$-D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr}A)}A+(\operatorname{tr}A)A^*}{2}} = \frac{\operatorname{tr}(A^*A)|\operatorname{tr}A|^2 - \det(A^*)\operatorname{tr}(A)^2 - \det(A)\operatorname{tr}(A^*)^2}{4};$$

$$-D_{\frac{1}{2}[A,A^*]} = \left(\frac{\operatorname{tr}A^*A}{2} - \frac{|\operatorname{tr}A|^2}{4}\right)^2 - \left|(\det A) - \frac{(\operatorname{tr}A)^2}{4}\right|^2.$$

证明。直接计算即可。 □

对于实矩阵，计算通常要简单得多，尤其是在斜四元数形式下。例如，

引理 2.8. 若 $A = \tilde{a}\mathrm{Id}_2 + bI + \tilde{c}J + dK$ 是一个实 2×2 矩阵，则

$$-D_{A^*A} = 4(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2)(\tilde{c}^2+\tilde{d}^2),$$

$$-D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr}A)}A+(\operatorname{tr}A)A^*}{2}} = 4\tilde{a}^2(\tilde{c}^2+\tilde{d}^2),$$

$$-D_{\frac{1}{2}[A,A^*]} = 4\tilde{b}^2(\tilde{c}^2+\tilde{d}^2).$$

证明。简单计算。 □

2.J. 指数函数（复习，替代方案）。

回顾一下，/Cos 和 /Sin 是复平面上的整函数，满足

$$\not{C}\mathrm{os}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(2n)!}\qquad\text{and}\qquad \not{S}\mathrm{in}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(2n+1)!}.$$

对于 $x\in\mathbb{R}$,

$$\not{C}\mathrm{os}(x)=\begin{cases}\cos\sqrt{x} & \text{if } x>0\\ 1 & \text{if } x=0\\ \cosh\sqrt{-x} & \text{if } x<0,\end{cases}\qquad\text{and}\qquad \not{S}\mathrm{in}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{if } x>0\\ 1 & \text{if } x=0\\ \dfrac{\sinh\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{if } x<0.\end{cases}$$

引理 2.9. 设 A 是一个复 2×2 矩阵。那么

$$\exp A=\left(\exp\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)\cdot\left(\not{C}\mathrm{os}\left(D_A\right)\mathrm{Id}_2+\not{S}\mathrm{in}\left(D_A\right)\left(A-\frac{\operatorname{tr}A}{2}\mathrm{Id}_2\right)\right).$$

证明。 $A=\frac{\operatorname{tr}A}{2}\mathrm{Id}_2+\left(A-\frac{\operatorname{tr}A}{2}\mathrm{Id}_2\right)$ 给出了可交换算子的分解，根据乘法性，可以分别计算指数。在第一项的情况下，这是显然的。在第二项的情况下，恒等式 (21) 以及对幂级数的比较蕴含了该结论。□

2.K. /Cos 和 /Sin 的微分学（回顾）。

首先，值得注意的是,

$$z=\frac{1-\not{C}\mathrm{os}(z)^2}{\not{S}\mathrm{in}(z)^2}$$

（作为整解析函数）。随后可以很容易看出

$$\not{C}\mathrm{os}'(z)=-\frac{1}{2}\not{S}\mathrm{in}(z)$$

and

$$\not{S}\mathrm{in}'(z)=\frac{\not{C}\mathrm{os}(z)-\not{S}\mathrm{in}(z)}{2z}=\frac{1}{2}\frac{\not{S}\mathrm{in}(z)^2\cdot(\not{C}\mathrm{os}(z)-\not{S}\mathrm{in}(z))}{1-\not{C}\mathrm{os}(z)^2}$$

（作为整解析函数）。特别地，微分不会超出由 /Cos 和 /Sin 生成的有理域。

2.L. 一个值得注意的微分方程（回顾）。

引理 2.10. 常微分方程的解

$$\frac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}t}A(\theta)^{-1}=a\begin{bmatrix}&-1\\1&\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-\sin 2c\theta&\cos 2c\theta\\ \cos 2c\theta&\sin 2c\theta\end{bmatrix}\equiv a\tilde{I}+\exp(c\theta\tilde{I})b\tilde{K}\exp(-c\theta\tilde{I}),$$

带有初始数据

$$A(0)=\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}\equiv\mathrm{Id}_2,$$

由下式给出

$$A(\theta)=F(a\theta,b\theta,c\theta);$$

其中

$$F(s,p,w)=\exp(w\tilde{I})\exp(-(w-s)\tilde{I}+p\tilde{K}).$$ □

特别是,

$$\exp_{\mathrm{L}}\left(\left(a\begin{bmatrix}&-1\\1&\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-\sin 2c\theta&\cos 2c\theta\\\cos 2c\theta&\sin 2c\theta\end{bmatrix}\right)d\theta|_{[0,\pi]}\right)=F(a\pi,b\pi,c\pi).$$

我们还将使用特殊记号

$$W(p,w)=F(0,p,w)\equiv\exp(w\tilde{I})\exp(-w\tilde{I}+p\tilde{K}).$$

2.M. /Cot的微积分。

下文中，我们还将使用亚纯函数

$$\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)=\frac{\not{\mathrm{C}}\mathrm{os}(z)}{\not{\mathrm{S}}\mathrm{in}(z)}.$$

/Cot 在 $z=k^2\pi^2$ 处有极点，其中 k 是正整数。容易看出,

$$\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}'(z)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)}{z}+\frac{\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)^2}{z}\right).$$

因此， $\mathbb{R}(z,$ /Cot$(z))$ 是一个微分域（例如由 $(-\infty,\pi^2)$ 诱导），它是微分域 $\mathbb{R}($ /Sin$(z),$ /Cos$(z))$ 的子集。它并没有小多少：由于

$$\not{\mathrm{S}}\mathrm{in}(z)^2=\frac{1}{\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)^2+z},$$

不难证明，域扩张的次数为

$$\mathbb{R}\big(\not{\mathrm{S}}\mathrm{in}(z),\not{\mathrm{C}}\mathrm{os}(z)\big):\mathbb{R}\big(z,\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)\big)=2.$$

2.N. 一组辅助函数。

引理2.11。表达式

(a)

$$\not{\mathbf{C}}(z)=-2\frac{\not{\mathrm{S}}\mathrm{in}'(z)}{\not{\mathrm{S}}\mathrm{in}(z)}=\frac{-\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)+1}{z}$$

(b)

$$\not{\mathbf{D}}(z)=2z\,\not{\mathbf{C}}'(z)+\not{\mathbf{C}}(z)=z\,\not{\mathbf{C}}(z)^2-2\,\not{\mathbf{C}}(z)+1=\frac{\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)^2+z-1}{z}$$

(c)

$$\not{\mathbf{W}}(z)=2\,\not{\mathbf{C}}'(z)=\frac{\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)^2+\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)+z-2}{z^2}$$

(d)

$$\not{\mathbf{P}}(z)=\not{\mathbf{C}}(z)^2-2\,\not{\mathbf{C}}'(z)=\frac{-3\,\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}(z)-z+3}{z^2}$$

(e)

$$\not{\mathbf{G}}(z)=\not{\mathbf{D}}'(z)=2z\,\not{\mathbf{C}}''(z)+3\,\not{\mathbf{C}}'(z)=z\,\not{\mathbf{C}}(z)^3-2\,\not{\mathbf{C}}(z)^2-2\,\not{\mathbf{C}}'(z)+\not{\mathbf{C}}(z)$$

$$= \frac{-\not{C}\mathrm{ot}(z)^3 - z\,\not{C}\mathrm{ot}(z) + 1}{z^2}$$

(f)

$$\not{L}(z) = \left(\frac{\not{D}}{\not{C}^2}\right)'(z)\cdot \not{C}(z)^3 = \not{C}(z)^3 + 2\,\not{C}'(z)\,\not{C}(z) - 2\,\not{C}(z)$$
$$= \frac{-2\,\not{C}\mathrm{ot}(z)^3 - z\,\not{C}\mathrm{ot}(z)^2 + 3\,\not{C}\mathrm{ot}(z)^2 - 2z\,\not{C}\mathrm{ot}(z) - z^2 + 3z - 1}{z^3}$$

(g)

$$\not{X}(z) = \frac{4}{3}\,\not{C}''(z) = \frac{-2\,\not{C}\mathrm{ot}(z)^3 - 3\,\not{C}\mathrm{ot}(z)^2 - 2\,z\,\not{C}\mathrm{ot}(z) - 3\,\not{C}\mathrm{ot}(z) - 3\,z + 8}{3z^3}$$

在复平面上定义亚纯函数 /C、/D、/W、/P、/G、/L、/X，使得 (i) 它们在 $\mathbb{C}$ 上全纯，唯独在 $z = (k\pi)^2$ 处除外，其中 k 是正整数。在这些点上，它们具有阶为

$$\not{C} \mapsto 1,\ \not{D} \mapsto 2,\ \not{W} \mapsto 2,\ \not{P} \mapsto 1,\ \not{G} \mapsto 3,\ \not{L} \mapsto 3,\ \not{X} \mapsto 3\ .$$

（ii）它们在区间 $(-\infty, \pi^2)$ 上严格单调递增，值域为 $(0, \infty)$。（iii）特别地，它们在区间 $(-\infty, \pi^2)$ 上严格为正。

证明。这些事实可以通过复分析的各种方法推导出来。 □

下表包含易于恢复的信息：

函数在 $x \searrow -\infty$ 时的渐近行为	$x = 0$ 处的值	$z \sim k^2\pi^2$ 处的渐近行为 $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$
$\not{C}$	$\lvert x\rvert^{-1/2}$	$\frac{1}{3}$	$-2 \cdot \frac{1}{z - k^2\pi^2}$
$\not{D}$	$\lvert x\rvert^{-1}$	$\frac{1}{3}$	$4\pi^2 \cdot \frac{k^2}{(z - k^2\pi^2)^2}$
$\not{W}$	$\lvert x\rvert^{-3/2}$	$\frac{2}{45}$	$4 \cdot \frac{1}{(z - k^2\pi^2)^2}$
$\not{P}$	$\lvert x\rvert^{-1}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2(z - k^2\pi^2)}$
$\not{G}$	$\lvert x\rvert^{-2}$	$\frac{1}{15}$	$-8\pi^2 \cdot \frac{k^2}{(z - k^2\pi^2)^3}$
$\not{L}$	$\lvert x\rvert^{-3}$	$\frac{1}{135}$	$-16 \cdot \frac{1}{(z - k^2\pi^2)^3}$
$\not{X}$	$\lvert x\rvert^{-5/2}$	$\frac{16}{2835}$	$-\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{(z - k^2\pi^2)^3}$

此外，也很容易验证恒等式

$$\not{C}(z)^2 = \not{W}(z) + \not{P}(z)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(z)\,\mathcal{D}(z) &= \mathcal{W}(z) + \mathcal{G}(z)\\
\mathcal{C}(z)\,\mathcal{G}(z) &= \mathcal{D}(z)\,\mathcal{W}(z) + \mathcal{L}(z)\\
\mathcal{P}(z)\,\mathcal{D}(z) &= \mathcal{C}(z)\,\mathcal{W}(z) + \mathcal{L}(z)\\
\mathcal{G}(z)\,\mathcal{P}(z) &= \mathcal{C}(z)\,\mathcal{L}(z) + \mathcal{W}(z)^2\\
\mathcal{C}(z)^2\,\mathcal{D}(z) &= \mathcal{C}(z)\,\mathcal{W}(z) + \mathcal{D}(z)\,\mathcal{W}(z) + \mathcal{L}(z)\\
\mathcal{C}(z)\,\mathcal{P}(z) + 2\,\mathcal{C}(z)\,\mathcal{W}(z) &= \mathcal{L}(z) + \mathcal{W}(z)
\end{aligned}$$

成立。

引理 2.12. (a) 函数 $x \mapsto \sqrt{}^{1}/\mathbf{D}(x)\Big|_{x\in(-\infty,\pi^2)}$ 可延拓为解析函数 $\mathcal{E}$ 于（某邻域内） $\mathbb{R}$。特殊值为 $\mathcal{E}(0) = \sqrt{3}$, $\mathcal{E}(\pi^2) = 0$。

(b) 函数 $x \mapsto /\mathbf{C}(x)\sqrt{}/\mathbf{D}(x)\Big|_{x\in(-\infty,\pi^2)}$ 可延拓为解析函数 $\mathcal{F}$ 于（某邻域内） $\mathbb{R}$。特殊值为 $\mathcal{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathcal{F}(\pi^2) = \frac{1}{\pi}$。

(c) 作为解析函数,

$$\mathcal{E}'(z) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{G}(z)\mathcal{E}(z)^3, \qquad and \qquad \mathcal{F}'(z) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}(z)\mathcal{E}(z)^3.$$

特别地， $\mathcal{E}|_{(-\infty,\pi^2]}$ 和 $\mathcal{F}|_{(-\infty,\pi^2]}$ 严格递减。

证明.(a)只需找到到$(0,+\infty)$的相容延拓。可以验证，在实数轴上，/D(x) 有极点，其渐近行为为 $\sim \frac{4\pi^2k^2}{(x-k^2\pi^2)^2}$，当 $x = k^2\pi^2$ 为正整数~~时；而~~在其他情况下，/D(x) 在实数轴上为正。这意味着

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\operatorname{sgn}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\mathcal{D}(x)}} \qquad \text{for } x > 0$$

定义了一个适当的扩张。特殊值很容易处理。

(b)由于/C 只有具有渐近行为$\sim \frac{-2}{x-k^2\pi^2}$的简单极点，与 $\mathcal{E}(x)$ 相乘后这些极点会被消去。特殊值的处理很直接。

(c) 这很直接。 □

2.O. 函数 AC（评述，替代方案）。

如果 $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, -1]$ 和 $t \in [0,1]$，那么很容易看出 $1 + 2t(1-t)(z-1)$ 是可逆的。（对于固定的 z，可能的取值构成线段 $\left[1, \frac{1+z}{2}\right]$。）于是可以定义，对于 $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, -1]$,

$$\operatorname{AC}(z) = \int_{t=0}^{1} \frac{1}{1 + 2t(1-t)(z-1)}\,\mathrm{d}t. \tag{32}$$

这给出了 $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, -1]$ 中的一个解析函数。

引理 2.13。（a）就实数域而言,

$$\operatorname{AC}(x) = \begin{cases} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} & if\ -1 < x < 1\\ 1 & if\ x = 1\\ \dfrac{\operatorname{arcosh} x}{\sqrt{x^2-1}} & if\ 1 < x. \end{cases}$$

Note, this can be rewritten as $\mathrm{AC}(x) = \dfrac{1}{\cancel{\mathrm{S}}\mathrm{in}(\cancel{\mathrm{C}}\mathrm{os}^{-1}(x))}$ *for* $x \in (-1, +\infty)$.

(b) As 是一个解析函数，ti

$$\mathrm{AC}'(z) = \frac{z\,\mathrm{AC}(z) - 1}{1 - z^2}. \tag{33}$$

(c) AC 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 上处处不为零。仅当 $z = 1$ 且 AC(1) $= 1$ 时，AC(z) $= \pm 1$ 成立。(d) AC(z) $= 1 - \frac{1}{3}(z-1) + O((z-1)^2)$ 于 $z \sim 1$。

(e) AC 在 $(-1, +\infty)$ 上严格单调递减，值域为 $(+\infty, 0)$e。

证明。 (b) 对于 $z \neq \pm 1$，在积分号下求导，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{AC}'(z) &= \int_{t=0}^{1} \frac{-2t(1-t)}{(1+2t(1-t)(z-1))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{1} \frac{z\dfrac{1}{1+2t(1-t)(z-1)} - 1}{1-z^2}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1} \frac{1-6t(1-t)-4t^2(1-t)^2(z-1)}{(1+z)(1+2t(1-t)(z-1))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{z\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{1}{1+2t(1-t)(z-1)}\,\mathrm{d}t - 1}{1-z^2} + \left[\frac{t(1-t)(1-2t)}{(1+z)(1+2t(1-t)(z-1))}\right]_{t=0}^{1} \\
&= \frac{z\,\mathrm{AC}(z) - 1}{1-z^2} + 0.
\end{aligned}$$

(a) 特殊值AC(1) $= 1$ 是平凡的。限制在 $x \in (-1, 1)$上，利用(33)，我们得到 d dx $\left(\mathrm{AC}(x)\sqrt{1-x^2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。考察原函数，我们发现对于 $x \in (-1, 1)$，AC(x) $= (\arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c)$，其中 $c \in \mathbb{C}$ ~~取适当值。~~由于当 $x \nearrow 1$ 时 AC 趋于有限值，因此只有 $c = 0$ 的情形是可能的。对 $(1, +\infty)$ 的限制情形类似。

(e) 由 (32) 立即可得。

(c) 由 (32) 可立即得到，sgn 虚部 AC(z) $= -$ sgn 虚部 z。于是只需将范围限制在 $(-1, +\infty)$。随后该陈述由 (d) 得出。

(d) 初等分析。 □

由引理 2.13(a) 很容易看出，对于 $x \in (-\infty, \pi^2)$，

$$\mathrm{AC}(\cancel{\mathrm{C}}\mathrm{os}(x)) = \frac{1}{\cancel{\mathrm{S}}\mathrm{in}(x)} \tag{34}$$

成立。通过解析延拓，它在 $(-\infty, \pi^2)$ 的一个开邻域内也成立。).

2.P. 对数（复习，替代方案）。

回顾一下，在 Banach代数中， A 可取对数，当且仅当 A 的谱与 $(-\infty, 0]$ 不相交。在这种情况下， A 的对数定义为

$$\log A = \int_{\lambda=0}^{1} \frac{A-1}{\lambda + (1-\lambda)A}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{t=0}^{1} \frac{A-1}{(1-t)+tA}\,\mathrm{d}t. \tag{35}$$

引理 2.14. 设 A 为实 2×2 矩阵。

(a)那么 A 可取对数，当且仅当行列式 $A > 0$ 且迹 $2\sqrt{\underline{\underline{\text{行列式 } A}}} > -1$。

(b) 在可取对数的情形下

$$\log A = (\log\sqrt{\det A})\,\mathrm{Id}_2 + \frac{\mathrm{AC}\left(\dfrac{\operatorname{tr} A}{2\sqrt{\det A}}\right)}{\sqrt{\det A}}\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right). \tag{36}$$

假设 A 是一个可取对数的复矩阵。令

$$\sqrt{\mathbf{det}\,A} := \det\sqrt{A} = \exp\frac{\operatorname{tr}\log A}{2} = \exp\frac{1}{2}\int_{t=0}^{1}\operatorname{tr}\frac{\mathrm{d}((1-t)\,\mathrm{Id}+tA)}{(1-t)\,\mathrm{Id}+tA}.$$

可以看出，这是特征值（计入重数）的平方根之积。

引理 2.15. 假设 A 是一个 2×2 可取对数的复矩阵。

(a) 那么 $\sqrt{\text{行列式}}$ $A\in\mathbb{C}\setminus(\infty,0]$, $\operatorname{tr}2\sqrt{\quad}$ 行列式

A $\in\mathbb{C}\setminus$ $(-\infty,$ {v8。(b) 此外，(36) 的扩展形式成立：

$$\log A = (\log\sqrt{\mathbf{det}\,A})\,\mathrm{Id}_2 + \frac{\mathrm{AC}\left(\dfrac{\operatorname{tr} A}{2\sqrt{\mathbf{det}\,A}}\right)}{\sqrt{\mathbf{det}\,A}}\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right). \tag{37}$$

□

证明。引理 2.14(a) 和引理 2.15(a) 可通过考察特征值，以相对直接的方式得出。对于其余部分，只需证明 2.15(b) 即可。证明几乎是“同义反复”：利用求导法则 (33)，经过冗长但直接的符号计算，可得，对于 $t\in[0,1]$,

$$\frac{A-\mathrm{Id}_2}{(1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\log\sqrt{\mathbf{det}((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)}\right)\mathrm{Id}_2 + \frac{\mathrm{AC}\left(\dfrac{\operatorname{tr}((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)}{2\sqrt{\mathbf{det}((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)}}\right)}{\sqrt{\mathbf{det}((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)}}t\left(A-\frac{\operatorname{tr} A}{2}\,\mathrm{Id}_2\right)\right)$$

˜（事实上，对于例如 $t\sim 1$, $A\sim\exp J$，其中 $\operatorname{tr}((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)\,2\sqrt{\det((1-t)\,\mathrm{Id}_2+tA)}\sim\cosh 1\neq\pm 1$，这种符号计算完全有效；甚至 $\sqrt{\det}\cdot$ 也可以替换为 $\sqrt{\quad}$ $\det$ 。然后，由于关于 t 的解析性以及关于 A 的解析性，一般恒等式成立。）积分后即可得到（37）。□

2.Q. -1 附近的 AC：一些渐近行为。

由引理 2.13(a)（以及解析延拓）很容易看出

$$\mathrm{AC}(y-1) = \frac{\pi}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}} - \mathrm{AC}(1-y)$$

对于 $y\in\mathbb{C}\setminus((-\infty,0]\cup[2,\infty))$ 成立。这有助于了解在 -1 附近，哪种解析重参数化适用于 AC。用实分析的语言来说，有

引理 2.16. (a) 对于 $y \in (0, +\infty)$，函数

$$y \mapsto \frac{\mathrm{AC}(y-1)}{\frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{y}}}$$

单调递减，值域为 $(1, 0)$e。

(b) 特别地，对于 $0 < y_1 < y_2$,

$$\frac{\mathrm{AC}(y_2-1)}{\mathrm{AC}(y_1-1)} < \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_2}}.$$

证明。部分 (a) 可通过初等分析解决。部分 (a) 推出部分 (b)。 □

2.R. 范数（回顾）。

引理 2.17。设 A 是一个实矩阵或复矩阵。那么，对于该范数,

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(A^*A)}{2} + \sqrt{-D_{A^*A}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(A^*A)}{2} + \sqrt{\frac{(\mathrm{tr}(A^*A))^2}{4} - |\det A|^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A) + 2|\det A|} + \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A) - 2|\det A|}}{2};\end{aligned} \tag{38}$$

并且，对于余范数,

$$\begin{aligned}\|A\|_2^- = \left\|A^{-1}\right\|_2^{-1} &= \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(A^*A)}{2} - \sqrt{-D_{A^*A}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(A^*A)}{2} - \sqrt{\frac{(\mathrm{tr}(A^*A))^2}{4} - |\det A|^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A) + 2|\det A|} - \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A) - 2|\det A|}}{2}.\end{aligned} \tag{39}$$

尤其是,

$$\|A\|_2 \cdot \|A\|_2^- = |\det A|. \tag{40}$$

对于实矩阵，希尔伯特空间 $\mathbb{R}^2$ 和$\mathbb{C}^2$ 的结果相同。□

对于 2×2 矩阵，我们将有符号余范数定义为

$$\lfloor A \rfloor_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } A = 0 \\ \dfrac{\det A}{\|A\|_2} & \text{if } A \neq 0. \end{cases} \tag{41}$$

然后,

$$|\lfloor A \rfloor_2| = \|A\|_2^-, \tag{42}$$

and

$$\|A\|_2 \cdot \lfloor A \rfloor_2 = \det A. \tag{43}$$

然而，我们基本上只考虑实矩阵的有符号余范数。

引理 2.18。设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\tilde{a}\,\mathrm{Id}_2+\tilde{b}\tilde{I}+\tilde{c}\tilde{J}+\tilde{d}\tilde{K}$ 是一个实矩阵。则

$$\|A\|_2=\frac{\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)+2\det A}+\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)-2\det A}}{2} \tag{44}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+d)^2+(c-b)^2}+\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}$$

$$=\sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}+\sqrt{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2}. \tag{45}$$

另一方面,

$$\|A\|_2^-=\left\|A^{-1}\right\|_2^{-1}=\left|\frac{\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)+2\det A}-\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)-2\det A}}{2}\right| \tag{46}$$

$$=\left|\frac{\sqrt{(a+d)^2+(c-b)^2}-\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}\right|$$

$$=\left|\sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}-\sqrt{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2}\right|.$$

确实如此

$$\operatorname{sgn}\det A=\operatorname{sgn}\frac{\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)+2\det A}-\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)-2\det A}}{2} \tag{47}$$

$$=\operatorname{sgn}\frac{\sqrt{(a+d)^2+(c-b)^2}-\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}$$

$$=\operatorname{sgn}\left(\sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}-\sqrt{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2}\right).$$

此外,

$$\lfloor A\rfloor_2=\operatorname{sgn}(\det A)\,\|A\|_2^-=\frac{\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)+2\det A}-\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)-2\det A}}{2} \tag{48}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+d)^2+(c-b)^2}-\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}$$

$$=\sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}-\sqrt{\tilde{c}^2+\tilde{d}^2}.$$

□

2.S. 方向导数。

每当 $f\colon M\mapsto f(M)$ 是定义在矩阵开域上的函数时，我们将 f 在 A 处沿光滑曲线方向 $\mathbf{v}$ 的导数定义为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(f(M)\right)=\lim_{t\to 0}f(\gamma(t)),$$

只要对于所有满足 γ 光滑且 $\gamma(0)=A$、$\gamma'(0)=\mathbf{v}$的 γ，它都给出相同的值。这一概念足够灵活，可以处理某些轻微奇异的 f。如果 f 光滑，那么方向导数与通常的多元微分一致。例如。

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(M^{-1}\right)=-A^{-1}\mathbf{v}A^{-1},$$

or

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\operatorname{tr}M\right)=\operatorname{tr}\mathbf{v}, \tag{49}$$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\det M\right)=\operatorname{tr}\left(\mathbf{v}\operatorname{adj}A\right), \tag{50}$$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\operatorname{tr}(M^*M)\right)=2\operatorname{Re}\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v}). \tag{51}$$

注意，对于 2×2 矩阵，(50)可写为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\det M\right)=(\operatorname{tr}A)(\operatorname{tr}\mathbf{v})-\operatorname{tr}(A\mathbf{v}). \tag{52}$$

此外，对于 2×2 矩阵也是如此，

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(D_M\right)=-2T_{A,\mathbf{v}}. \tag{53}$$

此外，

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(T_{M,B}\right)=T_{\mathbf{v},B}. \tag{54}$$

2.T. 范数的光滑性。

现在我们考察复数 2×2 矩阵的范数的光滑性。对于复数 2×2 矩阵 $\mathbf{v}$，我们设

$$S(\mathbf{v}):=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}^*}{2}+\sqrt{-D_{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}^*}{2}}}.$$

（这是 ${}^{\mathbf{v}+\mathbf{v}^*}{}_2$ 的较大特征值。）容易看出，对于

$$\mathbf{v}=v_a\operatorname{Id}+v_b\tilde{I}+v_c\tilde{J}+v_d\tilde{K}$$

(复系数), 它产生

$$S(\mathbf{v})=(\operatorname{Re}v_a)+\sqrt{(\operatorname{Im}v_b)^2+(\operatorname{Re}v_c)^2+(\operatorname{Re}v_d)^2}.$$

引理2.19.(o)在复数 2×2 矩阵空间上，范数运算是光滑的，但满足“范数判别式”的矩阵 A 除外

$$-D_{A^*A}=0.$$

(a) 函数 $A\mapsto\|M\|_2$ 在 $M=0$ 处沿光滑曲线的方向导数，只是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\|M\|_2\right)=\|\mathbf{v}\|_2.$$

(b) 函数 $M\mapsto\|M\|_2$ 在 $M=\mathrm{Id}$ 处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=\mathrm{Id}}\left(\|M\|_2\right)=S(\mathbf{v}).$$

(c) 函数 $M\mapsto\|M\|_2$ 在任意共形酉 A 处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2\right)=\|A\|_2\cdot S(A^{-1}\mathbf{v})=\|A\|_2\cdot S(\mathbf{v}A^{-1})=\frac{S(A^*\mathbf{v})}{\|A\|_2}=\frac{S(\mathbf{v}A^*)}{\|A\|_2}.$$

(d) 函数 $M\mapsto\|M\|_2$ 在任意非共形酉$A\neq 0$处的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2\right)=$$

$$=\frac{1}{\|A\|_2}\operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})}{2}+\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(A^*A-\frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}\operatorname{Id}_2\right)\left(A^*\mathbf{v}-\frac{\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})}{2}\operatorname{Id}_2\right)\right)}{\sqrt{-D_{A^*A}}}\right)$$

$$= \frac{\|A\|_2 \operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})\right) - \|A\|_2^{-1} \operatorname{Re}\left(\det(A^*)\Big(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(\mathbf{v}) - \operatorname{tr}(A\mathbf{v})\Big)\right)}{2\sqrt{-D_{A^*A}}}.$$

证明。(o) 光滑性部分可由范数表达式（38/1–2）推出。非光滑性部分则由方向导数的显式表达式推出。(a) 部分显而易见。(b) 部分最好通过光滑曲线的泰勒展开式来证明。(c) 部分由 (b) 通过共形酉位移论证得出：共形酉矩阵的邻域彼此之间仅通过乘以共形酉矩阵（左乘或右乘均可）相关联。然而，这样的乘法只会缩放范数。(d) 部分由基本观察（49–51）和标准复合规则得出。□

备注 2.20. 如果我们采用记号

$$\{A, B\} = A^*B + B^*A$$

and

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}_2\right)\left(B - \frac{\operatorname{tr} B}{2}\operatorname{Id}_2\right)\right),$$

然后我们得到

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tfrac{1}{2}\{A, A\} + \sqrt{\langle \tfrac{1}{2}\{A, A\}, \tfrac{1}{2}\{A, A\}\rangle}},$$

并且在引理 2.19 (c) 的情况下，

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\|M\|_2\right) = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tfrac{1}{2}\{A, \mathbf{v}\} + \sqrt{\langle \tfrac{1}{2}\{A, \mathbf{v}\}, \tfrac{1}{2}\{A, \mathbf{v}\}\rangle}}{\|A\|_2};$$

以及在引理 2.19 (d) 的情况下，

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\text{ at }M=A}\left(\|M\|_2\right) = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tfrac{1}{2}\{A, \mathbf{v}\} + \frac{\langle \frac{1}{2}\{A, A\}, \frac{1}{2}\{A, \mathbf{v}\}\rangle}{\sqrt{\langle \frac{1}{2}\{A, A\}, \frac{1}{2}\{A, A\}\rangle}}}{\|A\|_2};$$

使计算更具启发性。 △

出于好奇，我们给出相应的余范数陈述。这里的情况是类似的，但略微复杂一些，因为对于非光滑性还存在另一种情形。事实上，有符号余范数(41)具有与范数相似的光滑性性质。然而，当取绝对值以得到余范数时，非光滑性还会有另一个来源：行列式为零的情形。

对于一个复数 2×2 矩阵 $\mathbf{v}$，我们设

$$S^-(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}^*}{2} - \sqrt{-D_{\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}^*}{2}}}.$$

（这是$\mathbf{v}+\mathbf{v}_2{}^*$ 的较小特征值。）容易看出，对于

$$\mathbf{v} = v_a \operatorname{Id} + v_b\tilde{I} + v_c\tilde{J} + v_d\tilde{K}$$

（复系数），可得

$$S^-(\mathbf{v}) = (\operatorname{Re} v_a) - \sqrt{(\operatorname{Im} v_b)^2 + (\operatorname{Re} v_c)^2 + (\operatorname{Re} v_d)^2}.$$

引理 2.21。（o）在复 2×2 矩阵空间上，余范数运算除在满足下式的矩阵 A 处之外均为光滑的

$$\det A = 0$$

or

$$-D_{A^*A} = 0.$$

(a) 函数 $A \mapsto \|M\|_2^-$ 在 $M = 0$ 处沿光滑曲线的方向导数，恰好是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\|M\|_2^-\right) = \|\mathbf{v}\|_2^-.$$

(´a) 函数 $M \mapsto \|M\|_2^-$ 在 A 处且行列式为 $A = 0, A \neq 0$ 时沿光滑曲线的方向导数是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2^-\right) = \frac{|(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr}\mathbf{v}) - \operatorname{tr}(A\mathbf{v})|}{\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}}.$$

(在此情形下，$\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$ 和 $\|A\|_2^- = 0$。)

(b) 函数 $M \mapsto \|M\|_2^-$ 在 $M = \mathrm{Id}$ 处沿光滑曲线的方向导数是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=\mathrm{Id}}\left(\|M\|_2^-\right) = S^-(\mathbf{v}).$$

(c) 函数 $M \mapsto \|M\|_2^-$ 在任意共形酉 A 处沿光滑曲线的方向导数是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2^-\right) = \|A\|_2^- \cdot S^-(A^{-1}\mathbf{v}) = \|A\|_2^- \cdot S^-(\mathbf{v}A^{-1}) = \frac{S^-(A^*\mathbf{v})}{\|A\|_2^-} = \frac{S^-(\mathbf{v}A^*)}{\|A\|_2^-}.$$

（在此情形下，$\|A\|_2 = \|A\|_2^- = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)/2}$。）

(d) 函数 $M \mapsto \|M\|_2^-$ 在任意非共形酉 $A \neq 0$ 处的方向导数是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2^-\right) =$$

$$= \frac{1}{\|A\|_2^-}\operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})}{2} - \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left(A^*A - \frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}\operatorname{Id}_2\right)\left(A^*\mathbf{v} - \frac{\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})}{2}\operatorname{Id}_2\right)\right)}{\sqrt{-D_{A^*A}}}\right)$$

$$= \frac{(\|A\|_2^-)^{-1}\operatorname{Re}\Big(\det(A^*)\Big(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(\mathbf{v}) - \operatorname{tr}(A\mathbf{v})\Big)\Big) - \|A\|_2^-\operatorname{Re}\left(\operatorname{tr}(A^*\mathbf{v})\right)}{2\sqrt{-D_{A^*A}}}.$$

证明。与前一个陈述类似。 □

对于有符号余范数，容易由引理 2.19 推得相应结论。

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ \mathrm{at}\ M=A}\left(\lfloor M\rfloor_2\right) = \frac{(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr}\mathbf{v}) - \operatorname{tr}(A\mathbf{v})}{\|A\|_2} - \frac{\det A}{\|A\|_2^2}\cdot \mathrm{D}_{\mathbf{v}\ \mathrm{at}\ M=A}\left(\|M\|_2\right)$$

（对于 $A \neq 0$）。但是，这个引理 2.19 的对应结果并不特别简单。

然而，对于实数 2×2矩阵，情况是可处理的；这种情形甚至更为简单，因为可以避免使用实部和虚部：

引理 2.22。（o）在实 2×2 矩阵空间上，范数和有符号余范数运算是光滑的，但在满足下列条件的矩阵 A 处除外。

$$-D_{A^*A}=0.$$

(a) 函数 $A\mapsto \|M\|_2$ 在 $M=0$处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\|M\|_2\right)=\|\mathbf{v}\|_2.$$

函数 $A\mapsto \lfloor M\rfloor_2^-$在 $M=0$处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\lfloor M\rfloor_2\right)=\lfloor \mathbf{v}\rfloor_2.$$

(b) 函数 $M\mapsto \|M\|_2$ 在 $M=\mathrm{Id}$处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=\mathrm{Id}}\left(\|M\|_2\right)=S(\mathbf{v}).$$

这里，对于 $\tilde{\mathbf{v}}=v_a\,\mathrm{Id}+v_bI+v_cJ+v_dK$（实系数），

$$S(\mathbf{v})=v_a+\sqrt{(v_c)^2+(v_d)^2}.$$

函数 $M\mapsto \lfloor M\rfloor_2$ 在 $M=\mathrm{Id}$处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=\mathrm{Id}}\left(\lfloor M\rfloor_2\right)=S^-(\mathbf{v}).$$

这里，对于 $\tilde{\mathbf{v}}=v_a\,\mathrm{Id}+v_bI+v_cJ+v_dK$（系数为实数），

$$S^-(\mathbf{v})=v_a-\sqrt{(v_c)^2+(v_d)^2}.$$

(c) 函数 $M\mapsto \|M\|_2$ 在任意共形酉 A 处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2\right)=\|A\|_2\cdot S(A^{-1}\mathbf{v})=\|A\|_2\cdot S(\mathbf{v}A^{-1})=\frac{S(A^*\mathbf{v})}{\|A\|_2}=\frac{S(\mathbf{v}A^*)}{\|A\|_2}.$$

函数 $M\mapsto \lfloor M\rfloor_2$ 在任意共形酉 A 处沿光滑曲线的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\lfloor M\rfloor_2\right)=\lfloor A\rfloor_2\cdot S^-(A^{-1}\mathbf{v})=\lfloor A\rfloor_2\cdot S^-(\mathbf{v}A^{-1})=\frac{S^-(A^*\mathbf{v})}{\lfloor A\rfloor_2}=\frac{S^-(\mathbf{v}A^*)}{\lfloor A\rfloor_2}.$$

（在这种情况下，$\|A\|_2=\|A\|_2^-=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)/2}$。）

(d) 函数 $M\mapsto \|M\|_2$ 在任意非共形酉$A\neq 0$处的方向导数为

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\|M\|_2\right)=\frac{\|A\|_2\,\mathrm{tr}(A^*\mathbf{v})-\lfloor A\rfloor_2\Big(\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(\mathbf{v})-\mathrm{tr}(A\mathbf{v})\Big)}{2\sqrt{-D_{A^*A}}}.$$

函数 $M\mapsto \lfloor M\rfloor_2$ 在任意非共形酉$A\neq 0$处的方向导数是

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=A}\left(\lfloor M\rfloor_2\right)=\frac{\|A\|_2\Big(\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(\mathbf{v})-\mathrm{tr}(A\mathbf{v})\Big)-\lfloor A\rfloor_2\,\mathrm{tr}(A^*\mathbf{v})}{2\sqrt{-D_{A^*A}}}.$$

证明。它由复数图像得出。 □

接下来，我们将重点讨论关于复数 2×2 矩阵的一个特殊情形。

引理2.23。(a) 设 A 为一个复数 2×2 矩阵。那么

$$D_{A^*A} = D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr} A)}A+(\operatorname{tr} A)A^*}{2}} + D_{\frac{1}{2}[A,A^*]}.$$

(b) 稍微滥用一下记号，对于 $\lambda\in[0,1]$，令

$$A(\lambda) = A - \lambda\frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}_2.$$

然后，

$$D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr} A(\lambda))}A(\lambda)+(\operatorname{tr} A(\lambda))A(\lambda)^*}{2}} = (1-\lambda)^2 D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr} A)}A+(\operatorname{tr} A)A^*}{2}},$$

and

$$D_{\frac{1}{2}[A(\lambda),A(\lambda)^*]} = D_{\frac{1}{2}[A,A^*]}.$$

(c) 该映射

$$\lambda\in[0,1]\mapsto \|A(\lambda)\|_2$$

是光滑的，但 $\lambda = 1$可能是例外。不过，如果 A 是非正规的（或 $\operatorname{tr} A = 0$），那么在 $\lambda = 1$处也具有光滑性。

证明。（a）、（b）是直接计算所得。由（a）、（b）以及范数的具体形式 $\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)_2 \quad + \overline{\sqrt{-D_{A^*A}}}}$ 可得。注意，$D_{\frac{1}{2}[A,A^*]}$ 的消失等价于正规性。□

引理2.24. 假设 A 是一个复 2×2 矩阵。

(a) 如果 A 是保角正交的，那么

$$\mathrm{D}_{(\operatorname{tr} A)\operatorname{Id}_2 \ \ at\ M=A}(\|M\|_2) = \frac{\frac{|\operatorname{tr} A|^2}{2}}{\|A\|_2}.$$

(b) 在一般情形下 $-D_{A^*A} > 0$,

$$\mathrm{D}_{(\operatorname{tr} A)\operatorname{Id}_2 \ \ at\ M=A}(\|M\|_2) = \frac{\frac{|\operatorname{tr} A|^2}{2} + \frac{-D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr} A)}A+(\operatorname{tr} A)A^*}{2}}}{\sqrt{-D_{A^*A}}}}{\|A\|_2}.$$

(c) 因此，如果 $\operatorname{tr} A\neq 0$，那么

$$\mathrm{D}_{(\operatorname{tr} A)\operatorname{Id}_2 \ \ at\ M=A}(\|M\|_2) > 0.$$

(d) 因此，如果 $A\neq 0$ 是正规矩阵，那么

$$\mathrm{D}_{(\operatorname{tr} A)\operatorname{Id}_2 \ \ at\ M=A}(\|M\|_2) = \frac{\frac{|\operatorname{tr} A|^2}{2} + \sqrt{-D_{\frac{\overline{(\operatorname{tr} A)}A+(\operatorname{tr} A)A^*}{2}}}}{\|A\|_2}.$$

证明。（a）和（b）是引理 2.19 的直接推论。（c）是（a）和（b）的显然推论。（d）也是如此，只需考虑引理2.23(a) 即可。□

2.U. 一些范数不等式。

推论2.25。(a) 如果 A 是一个实 2×2 矩阵，那么

$$\left\| A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\|_2 \leq \|A\|_2$$

and

$$\left\lfloor A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\rfloor_2 \leq \lfloor A \rfloor_2.$$

如果满足不等式，则为严格不等式。

(b) 事实上，如果 $\operatorname{tr} A \neq 0$，那么这些映射

$$t \mapsto \left\| A - t\frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\|_2$$

and

$$t \mapsto \left\lfloor A - t\frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\rfloor_2$$

在区间 $t \in [0,1]$ 上严格递减。

Proof. (a) If A is written as in (10), then the inequalities trivialize as $\sqrt{\tilde{b}^2} + \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2} \leq \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} + \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}$ and $\sqrt{\tilde{b}^2} - \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2} \leq \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} - \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{d}^2}$.

(b) follows along similar lines. □

推论2.26. (a) 如果 A 是一个复 2×2 矩阵，那么

$$\left\| A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\|_2 \leq \|A\|_2.$$

当 $\operatorname{tr} A \neq 0$ 时，不等式是严格的。

(b) 事实上，若 $\operatorname{tr} A \neq 0$，则映射

$$t \mapsto \left\| A - t\frac{\operatorname{tr} A}{2} \operatorname{Id}_2 \right\|_2$$

在区间 $t \in [0,1]$ 上严格递减。

证明。只需证明 (b)，这可由引理2.24(c) 得出。 □

（无符号余范数并不满足类似的结论，即使在实数情形下也不成立。）

2.V. 线性映射的矩。

若 $\ell : \mathbf{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ 是一个（实）线性映射，则它可以唯一地表示为一个复数 2×2 矩阵 A 使得

$$\ell(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A^* \mathbf{v}).$$

矩阵 A 是与 ℓ 相关的矩。

引理 2.27。如果 $-D_{A^*A} \neq 0$，则与 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \text{ at } M=A (\|M\|_2)$ 相关的矩是

$$\operatorname{MN}(A) := \frac{1}{\|A\|_2} \left(A + \frac{AA^*A - \frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2} A}{\sqrt{-D_{A^*A}}} \right)$$

$$=\frac{1}{\|A\|_2}\left(A+\frac{\det(A)\,(A^*-(\operatorname{tr}A^*)\operatorname{Id}_2)+\dfrac{\operatorname{tr}(A^*A)}{2}A}{\sqrt{-D_{A^*A}}}\right).$$

证明. 这由引理 2.19(d) 得出。 □

2.W. 来自 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的可能的指数（复习）。

引理 2.28。对于 $A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，我们考虑集合

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\{M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}):\exp(M)=A\}.$$

以下结论成立：

(a) 如果 A 是双曲型的（$D_A<0$），且有两个正特征值，

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\{\log A\};$$

其中对数 A 是双曲型的，且其谱为 $\subset\mathbb{R}$。

(b) 若 A 是双曲型（$D_A<0$），且没有两个正特征值，则

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\emptyset.$$

(c) 如果 $A=a\mathrm{Id}_2$ 是正标量矩阵，则

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\{(\log a)\operatorname{Id}_2+2k\pi L:k\in\mathbb{Z},\,L^2=-\operatorname{Id}_2\}.$$

在其中的元素中，范数最小的是 $\log A=(\log a)\operatorname{Id}_2$。

(d) 如果 $A=a\mathrm{Id}_2$ 是一个负标量矩阵，那么

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\{(\log -a)\operatorname{Id}_2+(2k+1)\pi L:k\in\mathbb{Z},\,L^2=-\operatorname{Id}_2\}.$$

˜在其中的元素中，具有最小范数的两个元素是 $(\log -a)+\pi I$ 和˜$(\log -a)-\pi I$。（A 不可取对数）。

(e) 如果 A 是抛物型（$D_A=0$），但既不是正标量矩阵，也不是负标量矩阵，那么

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\emptyset.$$

(f) 如果 A 是椭圆型（$D_A>0$），那么存在唯一的 $r>0$ 和 $\phi\in(0,\pi)$ 以及 $I_A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，使得 $(I_A)^2=-\mathrm{Id}_2$ 并且

$$A=r(\cos\phi)\operatorname{Id}_2+r(\sin\phi)I_A.$$

在这种情况下，

$$\operatorname{Log}^{\mathbb{R}}A=\{(\log r)\operatorname{Id}_2+\phi I_A+2k\pi I_A:k\in\mathbb{Z}\}.$$

在其中的元素中，范数最小的是 $\log A=(\log r)\operatorname{Id}_2+\phi I_A$。

证明。可通过初等线性代数恢复对数$^{\mathbb{R}}A$。关于范数的说明可由 (44/3) 的简单范数表达式得出。（注意，斜对合均为无迹。）□

2.X. 实数情形中的进一步特点。

(I) 若 $A=\tilde{a}\mathrm{Id}_2+\tilde{b}I+\tilde{c}J+\tilde{d}K$ 是实 2×2 矩阵，则我们定义

$$\boldsymbol{X}^{+}(A):=\tilde{a}\tilde{b}\,\mathrm{Id}_2+(\tilde{c}^2+\tilde{d}^2-\tilde{a}^2)\tilde{I}-\tilde{b}\tilde{c}\tilde{J}-\tilde{b}\tilde{d}\tilde{K}.$$

该运算具有手性；如果 U是正交的，那么 $\boldsymbol{X}^{+}(UAU^{-1})=$(行列式 U) $\cdot U\boldsymbol{X}^{+}(A)U^{-1}$。可以验证

$$\mathrm{tr}\left(A^{*}\boldsymbol{X}^{+}(A)\right)=0.$$

（其他合理的选择是 $\boldsymbol{X}^{-}(A):=-\boldsymbol{X}^{+}(A)$。）

(II) 假设 $A=a\,\mathrm{Id}_2+bI+cJ+dK$ 是一个实 2×2 矩阵，且行列式 $A>0$。我们将 A 的 m-畸变（乘性畸变）定义为

$$\mathrm{mdist}\ A=\frac{\sqrt{\mathrm{tr}(A^{*}A)-2\det A}}{2\sqrt{\det A}}=\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}}.$$

2.Y. 扁平化双曲面模型 HP 及其若干相关模型。

（回顾一下，双曲几何的综述可见 Berger [1]；关于我们的约定，参见 [11]。）

扁平化双曲面模型，有时也被称为“Gans 模型”（参见 [6]），是通常的双曲面模型的“垂直”投影。从 CKB 模型的转写为

$$(x_{\mathrm{HP}},y_{\mathrm{HP}})=\left(\frac{x_{\mathrm{CKB}}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{CKB}})^2-(y_{\mathrm{CKB}})^2}},\frac{y_{\mathrm{CKB}}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{CKB}})^2-(y_{\mathrm{CKB}})^2}}\right);$$

而转录到CKB模型为

$$(x_{\mathrm{CKB}},y_{\mathrm{CKB}})=\left(\frac{x_{\mathrm{HP}}}{\sqrt{1+(x_{\mathrm{HP}})^2+(y_{\mathrm{HP}})^2}},\frac{y_{\mathrm{HP}}}{\sqrt{1+(x_{\mathrm{HP}})^2+(y_{\mathrm{HP}})^2}}\right).$$

HP的一个优点是，其点由 $\mathbb{R}^2$的点表示；然而，其缺点是，双曲平面的渐近点只能由 $\mathbb{R}^2$ 的渐近点表示。

出于技术原因，我们还将考虑反正切变换的 HP 模型 wi th

$$(x_{\mathrm{AHP}},y_{\mathrm{AHP}}):=(\arctan x_{\mathrm{HP}},y_{\mathrm{HP}})\,.$$

Th这种构造的问题在于，它并不适用于渐近点，除非 at $(\pm 1,0)^{\mathrm{CKB}}$，其中它（更确切地说，是其逆变换）实现了爆破。

因此，可以从CKB模型导出一种类似但更优的构造，我们令

$$\begin{aligned}(x_{\mathrm{ACKB}},y_{\mathrm{ACKB}}):&=\left(\arcsin x_{\mathrm{CKB}},\frac{y_{\mathrm{CKB}}}{\sqrt{1-(x_{\mathrm{CKB}})^2}}\right)\\&=\left(\arctan\frac{x_{\mathrm{HP}}}{\sqrt{1-(y_{\mathrm{HP}})^2}},\frac{y_{\mathrm{HP}}}{\sqrt{1-(y_{\mathrm{HP}})^2}}\right).\end{aligned}$$

它（或者更确切地说，其逆映射）实现了 CKB 的单位圆盘关于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[-1,1]$ 的爆破。点 $(\pm 1,0)^{\mathrm{CKB}}$ 被爆破。

3. Schur's formulae for 2×2 matrices

3.A. BCH 和 Schur公式（回顾）。

回想一下，对于形式变量 X 和 Y，

$$\mathrm{BCH}(X,Y) = \log((\exp X)(\exp Y)). \tag{55}$$

每当 A 和 B 是Banach代数 $\mathfrak{A}$中的元素时，就可以考虑 BCH(A,B) 的收敛性。自然的收敛概念包括：(a) 按 A 和 B的联合齐次性分组的项绝对收敛；(b) 按 A 和 B 的分别齐次性分组的项绝对收敛；或 (c) 按 A 和 B的非交换单项式分组的项绝对收敛。我们采用第一种观点，因为它等价于相应马格努斯级数的收敛；(b) 的条件更严格，而 (c) 则更严格且不那么自然；不过，正如第一部分所述，即使是条件 (c)，与 (a) 相比也只有相对较小的差别。现在，如果 BCH(A,B) 绝对收敛，那么 exp BCH(A,B) $=$ (exp A)(exp B)。另一个问题是 BCH(A,B) $=$log((exp A)(exp B)) 是否成立。后一个问题基本上关乎 (exp A)(exp B) 的谱性质。正如第一部分已经讨论过的，如果 $|A| < \pi$，或者仅仅是 sp(A) $\subset \{z\colon$ |虚部 $z| < \pi\}$，并且 t 足够小，那么 BCH$(A,$ $tM)$ $=$log((exp A)(exp tM)) 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(A)\exp(tM))\right|_{t=0} = \beta(-\operatorname{ad}A)M; \tag{56}$$

并且类似地，BCH(tM,A) $=$对数((指数 tM)(指数 A)) 并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(tM)\exp(A))\right|_{t=0} = \beta(\operatorname{ad}A)M; \tag{57}$$

其中，ad$(X)Y = [X,Y] = XY - YX$，且

$$\beta(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j x^j = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \frac{1}{30240}x^6 + \dots \qquad .$$

(56) 和 (57) 是F. Schur 的Schur公式，它们体现了有关 BCH 级数的部分但实用的信息。

3.B. 2×2 矩阵情形下的Schur公式。

在 2×2 情形下，Schur公式可以写成闭式：

引理 3.1.如果 A、v是复矩阵，并且 sp(A) $\subset \{z\colon$ |虚部 $z| < \pi\}$，那么

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\log(\exp(A)\exp(M))\right) = \tag{58}$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(A)\exp(t\mathbf{v}))\right|_{t=0} = \mathbf{v} + \frac{1}{2}[A,\mathbf{v}] + \not{C}(D_A)\cdot\frac{1}{4}[A,[A,\mathbf{v}]]$$

and

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}\ at\ M=0}\left(\log(\exp(M)\exp(A))\right) = \tag{59}$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(t\mathbf{v})\exp(A))\right|_{t=0} = \mathbf{v} - \frac{1}{2}[A,\mathbf{v}] + \not{C}(D_A)\cdot\frac{1}{4}[A,[A,\mathbf{v}]]$$

保持。

证明。这是基于引理 2.9 和引理2.15中的显式公式以及求导法则进行的直接计算。（用于化简回去的关键恒等式是 (34)，该恒等式仅在 x 处于$(-\infty,\pi^2)$ 的某个邻域内时成立，但随后可以使用解析延拓。）□

另一种证明。对于 $A\sim 0$，由 Schur公式的传统形式结合 (22) 可得。然后通过解析延拓推广这些公式。□

简单推论如下

引理 3.2. 若 $D_A\notin\{k^2\pi^2:\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$，则存在唯一的 $\exp^{-1}$ 在 $\exp A$ 附近的局部解析分支 $\log^{\mathrm{loc}}$，使得 $\log^{\mathrm{loc}}(\exp A)=A$。

证明。Schur映射为 exp 的微分提供了一个逆映射，因此可以使用反函数定理。□

引理3.3. 假设 A 是复数 2×2 矩阵，使得 $-D_{A^*A}\neq 0$ 且

$$\mathrm{sp}(A)\subset\{z\in\mathbb{C}:\ |\operatorname{Im} z|<\pi\}.$$

(a) 则与 $\mathrm{v}\mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{v}}$ *at* $M=\mathrm{Id}_2$ $(\|\log(\exp(A)\exp(M))\|_2)$ 相关的矩为

$$\mathrm{MR}(A):=\mathrm{MN}(A)+\frac{1}{2}[A^*,\mathrm{MN}(A)]+\overline{\mathcal{C}(D_A)}\cdot[A^*,[A^*,\mathrm{MN}(A)]].$$

(b) 则与 $\mathrm{v}\mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{v}}$ *at* $M=\mathrm{Id}_2$ $(\|\log(\exp(M)\exp(A))\|_2)$ 相关的矩为

$$\mathrm{ML}(A)=\mathrm{MN}(A)-\frac{1}{2}[A^*,\mathrm{MN}(A)]+\overline{\mathcal{C}(D_A)}\cdot[A^*,[A^*,\mathrm{MN}(A)]].$$

证明。这由引理 3.1 得出。□

利用引理 3.1，我们可以得到 BCH 展开中的高阶项。令 $A^R(t)=\log(\exp(A)\exp(t\mathrm{v})$。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^R(t)=\mathbf{v}+\frac{1}{2}[A^R(t),\mathbf{v}]+\mathcal{C}(D_{A^R(t)})\cdot\frac{1}{4}[A^R(t),[A^R(t),\mathbf{v}]]$$

成立。进一步求导，我们可以计算 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}A^R(t)$。根据求导法则以及形如（29–31）的方程，我们得到 $A^R(t)$、v 的交换子表达式，其系数是 $\mathcal{C}^{(n)}(D_{A^R(t)})$（作为函数的 $\mathcal{C}$ 的高阶导数）以及 $D_{A^R(t)}$、$T_{A^R(t),\ \mathrm{v}}$、$D_{\mathbf{v}}$ 的多项式。指定 $t=0$ 后，即可得到 BCH 表达式中相应的高阶项。对 $A^L(t)=\log(\exp(t\mathrm{v})\exp(A)$，也可以采用类似的论证。特别地，我们得到

引理 3.4. 若 A、v 为复矩阵，且 $\mathrm{sp}(A)\subset\{z:\ |虚部\ z|<\pi\}$，则

$$\begin{aligned}(60)\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2t}\log(\exp(A)\exp(t\mathbf{v}))\Big|_{t=0}&=\frac{\mathcal{C}(D_A)+\mathcal{D}(D_A)}{4}[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]\\&+\frac{\mathcal{C}(D_A)}{4}\underbrace{[A,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]]}_{=-4T_{A,\mathbf{v}}[A,\mathbf{v}]}+\frac{2\mathcal{P}(D_A)+3\mathcal{W}(D_A)}{16}\underbrace{[A,[A,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]]]}_{=-4T_{A,\mathbf{v}}[A,[A,\mathbf{v}]]}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(61)\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2t}\log(\exp(t\mathbf{v})\exp(A))\Big|_{t=0}&=\frac{\mathcal{C}(D_A)+\mathcal{D}(D_A)}{4}[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]\\&-\frac{\mathcal{C}(D_A)}{4}[A,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]]+\frac{2\mathcal{P}(D_A)+3\mathcal{W}(D_A)}{16}[A,[A,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]]].\end{aligned}$$

成立。

证明。直接计算。 □

（尽管较高阶项的生成函数已有所知，参见 Goldberg [7]，但使用它们进行计算更为繁琐。）

由于递推的性质，可以看出 $\mathrm{d}^n\,\mathrm{d}^n t$ 对数(指数(*A*) 指数(*t*v))$\big|_{\overline{t=0}}$ 和$\mathrm{d}^n\,\mathrm{d}^n t$ 对数(指数(*t*v)指数(*A*)) $\big|_{\overline{t=0}}$，对于 $n \geq 2$，将是 $[A,\mathbf{v}]$、 $[A,[A,\mathbf{v}]]$、$[\mathbf{v},[\mathbf{v}\ A]]$ 的线性组合，其系数为 D_A、 $T_{A,\mathbf{v}}$、 $D_{\mathbf{v}}$ 的函数。

从形式上看，参见引理2.5，这一切都意味着Baker–Campbell–Hausdorff公式的定性表述，即按（双）次数分组的BCH展开中的各项，对于 2×2 矩阵而言，都是交换子多项式。这是在使用Schur公式的论证这一特殊情形下得到的。（这是一个典型的论证，参见 Bonfiglioli、Fulci [2] 以回顾这一主题，或参见 [9] 以了解一些补充观点。）与一般情形的区别在于，展开式中的各项（按v的次数分组）可以保持有限形式（即我们所描述的那类多项式）。

4. The BCH formula for 2×2 matrices

现在，让我们从另一个角度来看待BCH展开。回顾一下，在2×2 矩阵的情形下，正如引理2.5和引理2.6所证明的，交换子多项式可以被相当简单地表示出来，并允许进行形式计算。BCH展开中的那些交换子项是否可以通过其他高效方式获得，这也是一个自然的问题。下面的形式计算将对此进行探讨。

我们采用以下记号。

$$\hat{A} = A - \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}_2 \tag{62}$$

and

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \frac{\operatorname{tr}\mathbf{v}}{2}\operatorname{Id}_2\,. \tag{63}$$

那么很容易看出这一点

$$\operatorname{BCH}(A,\mathbf{v}) = \frac{\operatorname{tr} A}{2}\operatorname{Id}_2 + \frac{\operatorname{tr}\mathbf{v}}{2}\operatorname{Id}_2 + \operatorname{BCH}(\hat{A},\hat{\mathbf{v}}). \tag{64}$$

ˆ ˆ 然后可以将引理 2.3 应用于 BCH(*A*, ˆv)。由于 A、ˆv 均为无迹，仅剩下标量项 $\det A = D_A$、 $\det \hat{\mathbf{v}} = D_{\mathbf{v}}$ 和 $\operatorname{tr}(A\hat{\mathbf{v}}) = 2T_{A,\mathbf{v}}$。在向量项中，$\hat{}[A,\hat{\mathbf{v}}] = [A,\mathbf{v}]$。因此我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{BCH}(\hat{A},\hat{\mathbf{v}}) =& \hat{g}_0(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\ \operatorname{Id}_2 \\ &+ \hat{g}_1(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,\hat{A} \\ &+ \hat{g}_2(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,\hat{\mathbf{v}} \\ &+ \hat{g}_3(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}].\end{aligned} \tag{65}$$

ˆ（对于 A、ˆv 的任何形式表达式，这都是成立的。）

由（形式）行列式可推得 $g_0 \equiv 0$。考虑（64），我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{BCH}(\hat{A},\hat{\mathbf{v}}) =& A + \mathbf{v} + \\ &+ g_1(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,\hat{A}\end{aligned} \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&+ g_2(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,\hat{\mathbf{v}} \\
&+ g_3(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}].
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_1(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}) &= \hat{g}_1(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}) - 1,\\
g_2(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}) &= \hat{g}_2(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}) - 1,\\
g_3(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}) &= \hat{g}_3(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}).
\end{aligned}
$$

这与交换子展开式非常接近。利用（27）和（28），我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BCH}(A,\mathbf{v}) = A + \mathbf{v} &+ f_1(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}] \\
&+ f_2(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,[A,[A,\mathbf{v}]] \\
&+ f_3(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})\,[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]].
\end{aligned} \tag{67}
$$

其中

$$
f_1 = g_3,
$$

and

$$
f_2 = \frac{T_{A,\mathbf{v}} g_1 - D_{\mathbf{v}} g_2}{4(D_A D_{\mathbf{v}} - T_{A,\mathbf{v}}^2)}, \tag{68}
$$

$$
f_3 = \frac{-D_A g_1 + T_{A,\mathbf{v}} g_2}{4(D_A D_{\mathbf{v}} - T_{A,\mathbf{v}}^2)}. \tag{69}
$$

由此可见，BCH定理的定性版本是一个很弱但并非完全平凡的结论：它等价于（68）和（69）中的整除性。因此，对于 2×2 矩阵，BCH定理的另一种方法就是计算系数 f_2 和 f_3。由于 2×2 矩阵的简单性，这确实可以通过直接计算来完成：

ˆ 引理 4.1. 考虑前述无迹 2×2 矩阵 A、ˆv。

(a) 那么

$$
\begin{aligned}
&\det\Big((1-t)\,\mathrm{Id}_2 + t\exp(\hat{A})\exp(\hat{\mathbf{v}})\Big) = \\
&\qquad = \underbrace{1 + 2t(1-t)\Big(\not{\sin}(D_A)\not{\sin}(D_{\mathbf{v}})T_{A,\mathbf{v}} + \not{\cos}(D_A)\not{\cos}(D_{\mathbf{v}}) - 1\Big)}_{\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}, t) :=}.
\end{aligned}
$$

(b) 设

$$
C(\hat{A},\mathbf{v}) := \not{\cos}(D_{\mathbf{v}})\not{\sin}(D_A)\hat{A} + \not{\cos}(D_A)\not{\sin}(D_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\not{\sin}(D_A)\not{\sin}(D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}]
$$

ˆ 然后，只要 exp(A) exp(ˆv) 可取对数，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BCH}(\hat{A},\hat{\mathbf{v}}) &= \mathrm{AC}\big(\not{\cos}(D_A)\not{\cos}(D_{\mathbf{v}}) + \not{\sin}(D_A)\not{\sin}(D_{\mathbf{v}})T_{A,\mathbf{v}}\big)\cdot C(\hat{A},\mathbf{v}) \\
&= \left(\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}, t)}\right)\cdot C(\hat{A},\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{70}
$$

证明。由我们关于指数和对数的公式即可得出。 □

我们本可以在一般情形下表述前面的结论，但由于迹项的存在，这样会更加复杂。形式地考虑，我们注意到，行列式项 $\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}})$ 是对 1 的形式扰动。（代入 $D_A = 0, T_{A,\mathbf{v}} = 0, D_{\mathbf{v}} = 0$ 可得 1）。

ˆ 定理 4.2. 设 A、$\mathbf{v}$ A、ˆ$\mathbf{v}$ 如前。令

$$\eta(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) =$$
$$= 1 - 4t(1-t)\Big(1 - \big(t\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_A) + (1-t)\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_{\mathbf{v}})\big)\big(t\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_{\mathbf{v}}) + (1-t)\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_A)\big)\Big);$$
$$\varkappa_2(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) = \not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_{\mathbf{v}}) + 2t(1-t)(\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_A) - \not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_{\mathbf{v}});$$
$$\xi_2(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) = \ = t(1-t)\varkappa_2(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) \cdot \frac{1}{2}\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_A)^2\,\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_{\mathbf{v}});$$
$$\varkappa_3(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) = \not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_A) + 2t(1-t)(\not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_{\mathbf{v}}) - \not\mathbb{C}\mathrm{os}(D_A);$$
$$\xi_3(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) = \ = t(1-t)\varkappa_3(D_A, D_{\mathbf{v}}, t) \cdot \frac{1}{2}\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_{\mathbf{v}})^2\,\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_A).$$

Then

$$\begin{aligned}(71)\qquad \mathrm{BCH}(A,\mathbf{v}) =& A + \mathbf{v}\\ &+ \left(\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}, t)}\right) \cdot \frac{1}{2}\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_A)\,\not\mathbb{S}\mathrm{in}(D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}]\\ &+ \left(\int_{t=0}^{1} \frac{\xi_2(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)}{\eta(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}, t)}\right) \cdot [A,[A,\mathbf{v}]]\\ &+ \left(\int_{t=0}^{1} \frac{\xi_3(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)}{\eta(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\delta(D_A, T_{A,\mathbf{v}}, D_{\mathbf{v}}, t)}\right) \cdot [\mathbf{v},[\mathbf{v},A]]\end{aligned}$$

只要 A, $\mathbf{v}$ ~ 0, 就成立。

（注意，从形式上看，对于 D_A,$T_{A,\mathbf{v}}$, $D_{\mathbf{v}} \sim 0$, $\delta(D_A$,$T_{A,\mathbf{v}}$, $D_{\mathbf{v}}$, $t)$、 $\eta(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)$、 $\xi_2($ D_A, $D_{\mathbf{v}}$, $t)$、 $\xi_2(D_A, D_{\mathbf{v}}, t)$、/Cos($D_A$)、/Cos($D_{\mathbf{v}}$、/Sin($D_A$)、/Sin($D_{\mathbf{v}}$ 都是 1 的扰动。）

证明。作为准备，先设

$$\rho(u,x,y) = \frac{\arctan\left(u\tan\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)\right) + \arctan\left(u\tan\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)\right)}{\sqrt{x}}.$$

这种形式下，这是关于 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{y}$的形式级数，其系数是 u的多项式。通过考察奇偶性，我们看到它给出了一个解析幂级数，对于 $x, y \sim 0$，该级数关于 $u \in [-1,1]$一致收敛。（利用加法公式 arctan(z) $+$arctan(w) $=$arctan $\left(\frac{w+z}{1-wz}\right)$，适用于 $z, w \sim 0$，并借助函数 /Cos 、 /Sin 、 AC，我们可以将其表示为一个解析复合函数，对于 $x, y \sim 0$，关于 $u \in [-1,1]$一致成立。事实上，它给出

$$\rho(u,x,y) =$$
$$= \frac{2u\,\not\mathbb{S}\mathrm{in}(x)\,\mathrm{AC}\left(\dfrac{\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) + \not\mathbb{C}\mathrm{os}(y) + u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) - u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x)}{\sqrt{(\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) + \not\mathbb{C}\mathrm{os}(y) + u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) - u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x))^2 + 4u^2(1 - \not\mathbb{C}\mathrm{os}(x)^2)}}\right)}{\sqrt{(\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) + \not\mathbb{C}\mathrm{os}(y) + u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x) - u^2\,\not\mathbb{C}\mathrm{os}(x))^2 + 4u^2(1 - \not\mathbb{C}\mathrm{os}(x)^2)}}.$$

不过，这并没有特别启发性。）注意，对于 x、 $y \sim 0$,

$$\rho(1,x,y) = 1 \qquad \text{and} \qquad \rho(-1,x,y) = -1.$$

现在，我们开始正式证明。根据引理 4.1 以及本节中的讨论，我们知道

$$(72)\quad \mathrm{BCH}(A,\mathbf{v}) = A + \mathbf{v}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}\right)\cdot\frac{1}{2}\,\not\sin(D_A)\not\sin(D_{\mathbf{v}})\,[A,\mathbf{v}]\\
&+\left(\int_{t=0}^{1}\frac{\not\cos(D_{\mathbf{v}})\not\sin(D_A)}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}\mathrm{d}t\right)\cdot\hat{A}-\underbrace{\left(\int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_A,D_{\mathbf{v}})}{2}\right)\mathrm{d}t\right)}_{=1}\cdot\hat{A}\\
&+\left(\int_{t=0}^{1}\frac{\not\cos(D_A)\not\sin(D_{\mathbf{v}})}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}\mathrm{d}t\right)\cdot\hat{\mathbf{v}}-\underbrace{\left(\int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_{\mathbf{v}},D_A)}{2}\right)\mathrm{d}t\right)}_{=1}\cdot\hat{\mathbf{v}}.
\end{aligned}
$$

因此，我们需要证明

$$\mathrm{RHS}(71/3)+\mathrm{RHS}(71/4)=\mathrm{RHS}(72/3)+\mathrm{RHS}(72/4). \tag{73}$$

由于被积函数可以展开为 D_A、$T_{A,\mathbf{v}}$、$D_{\mathbf{v}}\sim 0$ 的幂级数（在 $t\in[0,1]$ 中一致），因此甚至只需证明对于 D_A、$T_{A,\mathbf{v}}$、$D_{\mathbf{v}}$ 的形式幂级数也成立。现在，很容易检验

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_A,D_{\mathbf{v}})}{2}\right)=\frac{\not\sin(D_A)\varkappa_2(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}{\eta(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_{\mathbf{v}},D_A)}{2}\right)=\frac{\not\sin(D_{\mathbf{v}})\varkappa_3(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}{\eta(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}.$$

因此，利用 (27) 和 (28)，可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\not\cos(D_{\mathbf{v}})\not\sin(D_A)}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_A,D_{\mathbf{v}})}{2}\right)\right)\cdot\hat{A}\\
&+\left(\frac{\not\cos(D_A)\not\sin(D_{\mathbf{v}})}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho(2t-1,D_{\mathbf{v}},D_A)}{2}\right)\right)\cdot\hat{\mathbf{v}}\\
&\quad=\frac{\xi_2(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}{\eta(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}\cdot\frac{1}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}[A,[A,\mathbf{v}]]\\
&\quad+\frac{\xi_3(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}{\eta(D_A,D_{\mathbf{v}},t)}\cdot\frac{1}{\delta(D_A,T_{A,\mathbf{v}},D_{\mathbf{v}},t)}[\mathbf{v},[\mathbf{v},A]].
\end{aligned}
$$

积分后得到（73）。 □

从形式上看，前一定理的陈述和证明为 BCH定理（对于 2×2矩阵）的定性（交换子展开式）陈述提供了另一种证明。不过，这更多只是出于好奇；在实践中，使用 (70) 按照 (66) 展开会更简单，并结合 (68)、(69) 得到 (67)。

5. Magnus minimality of mBCH expansions in the 2×2 case

回顾（参见第一部分），在 Banach代数 $\mathfrak{A}$ 中，对于元素 A，我们将其 Magnus 指数定义为

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}(A)=\inf\{\textstyle\int|\phi|\,:\,\exp_{\mathrm{L}}(\phi)=A\}$$

（对于空集给出 $+\infty$）。由于有序测度可以用分段常数测度替代，且累积范数的增加可以任意小，因此下确界可以取在mBCH 测度上。我们将称 ϕ 为 Magnus-最小的，若$\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$(指数$_{\mathrm{L}}(\phi)$) $=\int|\psi|$。现在，定理 1.6.(b) 的自然推广如下：

(X) “在有限维希尔伯特空间的情形下，如果 ψ 是一个约化的BCH 测度，那么 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})}($指数$_{\mathrm{L}}(\psi)) < \int \|\psi\|_2$ （即 ψ 不是 Magnus 极小的）。”

本节的目标是通过直接计算验证（X）对于 2×2 矩阵。（在第 13 节中，我们将在实数情形下看到更具信息量的方法。）

定理5.1。（a）假设 A 是实 2×2 矩阵，该矩阵不是正规矩阵。那么 $A\mathbf{1}$不是 Magnus-最小的，即

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A\mathbf{1}) < \|A\|.$$

(b) 类似的表述在复数情形下也成立。

证明。我们可以假设 A 足够小，特别地，sp$(A/2) \subset \{z\in\mathbb{C} : |$虚部 $z| < \pi\}$。对于 $t\sim 0$, $t\in\mathbb{R}$，令

$$A_1(t) = \log\left(\exp(A/2)\exp(t[A,A^*])\right);$$

$$A_2(t) = \log\left(\exp(-t[A,A^*])\exp(A/2)\right).$$

然后，

$$\exp A = \exp(A_1(t))\exp(A_2(t));$$

这就给出了 exp A 的一个 (m)BCH展开式。只需证明

$$\left.\frac{\mathrm{d}\|A_1(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} + \left.\frac{\mathrm{d}\|A_2(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} < 0 \tag{74}$$

为了证明非 Magnus 极小性。利用 (58) 和 (22)，我们得到

$$\underbrace{\mathrm{D}_{[A,A^*]\ \mathrm{at}\ M=0}\left(\log\left(\exp(A/2)\exp(M)\right)\right)}_{\mathbf{v}_1:=} = \not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}\left(D_{A/2}\right)[A,A^*] + \frac{1}{4}[A,[A,A^*]];$$

并且利用引理 2.19(d),

$$\left.\frac{\mathrm{d}\|A_1(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \mathrm{D}_{\mathbf{v}_1\ \mathrm{at}\ M=A/2}\|M\|_2 = -\frac{1}{4}\frac{\|A_2\|(-D_{[A,A^*]})}{\sqrt{-D_{A*A}}} < 0.$$

（注意， $A/2$ 为非正规矩阵意味着范数具有光滑性。）类似地，

$$\underbrace{\mathrm{D}_{-[A,A^*]\ \mathrm{at}\ M=0}\left(\log\left(\exp(M)\exp(A/2)\right)\right)}_{\mathbf{v}_2:=} = -\not{\mathrm{C}}\mathrm{ot}\left(D_{A/2}\right)[A,A^*] + \frac{1}{4}[A,[A,A^*]];$$

and,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\|A_2(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \mathrm{D}_{\mathbf{v}_2\ \mathrm{at}\ M=A/2}\|M\|_2 = -\frac{1}{4}\frac{\|A_2\|(-D_{[A,A^*]})}{\sqrt{-D_{A*A}}} < 0.$$

于是 (74) 成立，该陈述也随之成立。（备注：对于 (13)，使用 s_1、 $s_2 > 0$ 完整地进行这一计算是有帮助的。）□

因此，我们看到，任何 Magnus 最小 mBCH表示都只能包含正规矩阵。

定理 5.2. (a) 设 A 和 B 是实 $n\times n$矩阵，满足 $\|A+B\|_2 \lhd \|A\|_2 + \|B\|_2$。那么 $A\mathbf{1}.B\mathbf{1}$ 不是 Magnus-最小的，即。

$$\mathcal{M}_{n\times n\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{R}}(A\mathbf{1}.B\mathbf{1})) < \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

(b) 复数情形下也有类似结论。

证明。应用 BCH 公式，我们看到

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{\|\log(\exp_{\mathrm{R}}(tA,tB))\|_2}{\|tA\|_2+\|tB\|_2}=\frac{\|A+B\|_2}{\|A\|_2+\|B\|_2}.$$

这意味着，对于足够小的 t，指数$_{\mathrm{R}}((1-t)A1.tC.(1-t)B1)$，其中 tC =对数(指数$_{\mathrm{R}}(tA,tB)$)，将是一个累积范数更小的替代表示。□

定义5.3。（a）如果经过（同时）酉共轭，复正规矩阵 A 和 B 具有如下形式，则称它们是对齐的

$$A=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\begin{bmatrix}1&\\&t_1\end{bmatrix}\qquad\text{and}\qquad B=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\begin{bmatrix}1&\\&t_2\end{bmatrix},$$

其中 $r_1,r_2\in(0,+\infty)$，$\eta\in[0,2\pi)$，$t_1,t_2\in$D(0, 1).

(b) 如果复正规矩阵 A 和 B 在同时酉共轭后具有如下形式，则称它们为斜对齐的。

$$A=r_1\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t&-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sin t\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cos t\end{bmatrix}\qquad\text{and}\qquad B=r_2\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t&-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin t\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos t\end{bmatrix},$$

其中 r_1、$r_2\in(0,\ +\infty)$、$t\in(0,\ \pi)$ 和 η、θ、$\phi\in[0,2\pi)$，但 $\phi\neq\theta$。（注意，在这种情况下，A 和 B 是共形酉的。我们还提供备注，$t\rightsquigarrow\pi-t$、$\eta\rightsquigarrow\eta+\pi$、$\phi\rightsquigarrow\phi+\pi$、$\theta\rightsquigarrow\theta+\pi$ 是通过与 $\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}$ 共轭得到的一个对称性。）

引理 5.4. 假设 A、B 是非零复 2×2 矩阵，且 A 和 B 均为正规矩阵。那么

$$\|A+B\|_2=\|A\|_2+\|B\|_2$$

当且仅当 A 和 B 对齐或斜对齐时，该结论成立。对齐与斜对齐两种情形互不相容。例如，对齐的矩阵对彼此可交换，而斜对齐的矩阵对彼此不可交换。

证明. 若 A （或 B）不是共形酉矩阵，则其范数在某个特征向量处取得。由于加法限制，该特征向量必定是 A 和 B 的公共特征向量。不妨设这个公共特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；于是由正规性（特征子空间的正交性）可知，这些矩阵对齐。若 A 和 B 是共形酉矩阵，则可假设和的范数也在 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 处取得；由这些限制可知，我们得到一种斜对齐构型，但 $t=0$ 和 $\phi=\theta$ 是允许的。多出的情形可归入对齐情形，剩下的就是斜对齐情形。关于交换性的结论很容易验证。□

引理 5.5. 假设 A 和 B 是非零的正规 2×2 实矩阵。

(a) A 和 B 对齐，当且仅当它们经过正交矩阵的同时共轭后具有如下形式

$$A=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\begin{bmatrix}1&\\&t_1\end{bmatrix}\qquad and\qquad B=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\begin{bmatrix}1&\\&t_2\end{bmatrix}$$

其中 $r_1,r_2\in(0,+\infty)$，$\eta\in\{0,\pi\}$，$t_1,t_2\in[-1,1]$ /双曲对齐情形/,或经过正交矩阵的同时共轭后，它们具有如下形式

$$A=r_1\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{bmatrix}\qquad and\qquad B=r_2\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{bmatrix}$$

其中 $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $t \in [0, 2\pi)$ *[椭圆型对齐情形]*。
（双曲型情形和椭圆型情形并非互斥，但通常情形只涉及标量矩阵。）

(b) A 和 B 斜对齐，当且仅当在正交矩阵的同时共轭下，它们具有如下形式

$$A = r_1 \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sin t \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cos t \end{bmatrix} \qquad and \qquad B = r_2 \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin t \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos t \end{bmatrix}$$

其中 $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$, $t \in (0, \pi)$ 以及 $\eta, \theta, \phi \in \{0, \pi\}$, $\phi \neq \theta$。

证明。这是由正规矩阵（在此情形下为对称且保角正交的矩阵）的标准性质得出的。□

定理 5.6。（a）假设 A、B 是实正规 2×2 矩阵，并且它们是斜对齐的。那么 $A\mathbf{1}.B\mathbf{1}$ 不是 Magnus-最小的，即

$$\mathcal{M}_{n\times n \text{ real}}(\exp_{\mathrm{R}}(A\mathbf{1}.B\mathbf{1})) < \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

(b) 类似的陈述在复数情形下也成立。

证明。假设 $\|A\|_2$、$\|B\|_2 < \pi$ 和 C 是任意矩阵。那么

$$\tilde{A}(t) = \log(\exp(A)\exp(tC))$$

and

$$\tilde{B}(t) = \log(\exp(-Ct)\exp(B))$$

ma ˜ ˜有意义，并且对于 $t \sim 0$是解析的。此外，(指数 A)(指数 B) =(指数 $A(t)$)(指数 $B(t)$) .

If

$$\left.\frac{\mathrm{d}\|\tilde{A}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} + \left.\frac{\mathrm{d}\|\tilde{B}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} < 0,$$

˜ ˜那么 $A\mathbf{1}.B\mathbf{1}$ 不可能是Magnus极小的，因为它可以被 $A(t)\mathbf{1}.B(t)\mathbf{1}$ 替代；对于较小的 $t > 0$，后者的累积范数更小。

根据Schur公式，

$$\tilde{A}'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(A)\exp(tC))\right|_{t=0} = \beta(-\operatorname{ad} A)C,$$

$$\tilde{B}'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\exp(-tC)\exp(B))\right|_{t=0} = -\beta(\operatorname{ad} B)C.$$

（这是成立的，因为已假设 $\|A\|_2, \|B\|_2 < \pi$。）

在我们的情形中，矩阵 A 和 B 是共形酉矩阵，因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}\|\tilde{A}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \|\tilde{A}(0)\|_2 \cdot S(\tilde{A}'(0)\tilde{A}(0)^{-1});$$

˜参见引理 2.19(c)；对于 $B(t)$ 也有类似公式。

首先，我们讨论复数情形。现在，假设 that

$$A = r \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sin t \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cos t \end{bmatrix} \equiv r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} & \\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}$$

and

$$B = r \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\cos t & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin t \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin t & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\cos t \end{bmatrix} \equiv r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} & \\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \end{bmatrix}$$

但是 $A \neq B$。注意，在这种情况下， $\phi \not\equiv \theta$ 模 2π 且

$$1 - \cos(\phi - \theta) > 0.$$

在我们的计算中， θ、 ϕ、 η 将保持固定，但 r 可以取“足够小”。

Let

$$C = r \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos(\phi-\theta))} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathfrak{a}_1 + \mathrm{i}\mathfrak{a}_2) r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} & \mathfrak{b} r \\ \mathfrak{b} r & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{2}(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\eta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\eta)}) \sin t,$$

and

$$\mathfrak{a}_1 = \cos(\eta+\theta) - \cos(\eta+\phi),$$

and

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos(\phi-\theta))} \Big(& + \sin(\eta+\theta)(\cos(\eta+\phi)-1)(\cos(\eta+\phi)-2) \\ & - \sin(\eta+\phi)(\cos(\eta+\theta)-1)(\cos(\eta+\theta)-2) \\ & + \frac{1}{2}(\cos(\eta+\theta) - \cos(\eta+\phi)) \sin(2\eta+\theta+\phi) \Big). \end{aligned}$$

在这种情况下，

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\|\tilde{A}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} + \left.\frac{\mathrm{d}\|\tilde{B}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = & \\ = \|A\|_2 \cdot S(\overbrace{\beta(-\operatorname{ad} A)C \cdot A^{-1}}^{\mathbf{v}_1:=}) + \|B\|_2 \cdot S(\overbrace{-\beta(\operatorname{ad} B)C \cdot B^{-1}}^{\mathbf{v}_2:=}) & \\ = -\frac{r^4 \sin^2 t}{6} \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos(\phi-\theta))} (\mathfrak{a}_1\tilde{\mathfrak{a}}_1 + \mathfrak{a}_2\tilde{\mathfrak{a}}_2) + O(r^5), & \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{a}_1 = \tilde{\mathfrak{a}}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2 = \tilde{\mathfrak{a}}_2$。（事实上， $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 正是据此选取的。）关于前面的计算，我们注意到，当 $r \searrow 0$ 时（对固定的 θ、 ϕ、 η）， $D_{\frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i*}{2}} = 1 + O(r)$。因此 $\sqrt{D_{\frac{\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_i*}{2}}} = 1 + O(r)$ 也成立。这使得对于足够小的 r，该计算仍然有效。

我们的下一个观察是，$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \neq (0,0)$。事实上，假设 $\mathfrak{a}_1 = 0$。这意味着

$$\cos(\eta+\phi) = \cos(\eta+\theta).$$

众所周知

$$\eta + \phi \not\equiv \eta + \theta \bmod 2\pi,$$

这意味着

$$\sin(\eta+\phi) = -\sin(\eta+\theta) \neq 0$$

and

$$\cos(\eta+\phi) = \cos(\eta+\theta) \neq \pm 1.$$

代入这些式子可得

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos(\phi-\theta))} \Big(2\sin(\eta+\theta)(\cos(\eta+\theta)-1)(\cos(\eta+\theta)-2) \Big).$$

因此 $\mathfrak{a}_2$ 非零，因为任意乘法分量都非零。

由此，我们证明了

$$\frac{\mathrm{d}\|\tilde{A}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0+} + \frac{\mathrm{d}\|\tilde{B}(t)\|_2}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0+} < 0$$

当 r 足够小时（对于固定的 θ、ϕ、η），这已经与 Magnus极小性 相矛盾，因为我们总可以将范围限制在 A 与 B 之间的连接区域附近。

实数情形并无不同，但我们只能选择 η、θ、$\phi \in \{0, \pi\}$。所得矩阵全部为实矩阵（因为 $\sin(\theta+\eta)$ 等均为 0）。□

定理 5.7. (a) 假设 $\phi = A_1\mathbf{1}_{[0,t_1)}\cdot\ldots\cdot A_k\mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k)}$ 是实 2×2 矩阵的质量归一化 mBCH 测度，且具有 Magnus极小性，即：

$$\mathcal{M}_{n\times n\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{R}}(\phi)) = \int \|\phi\|_2.$$

则存在两种可能的情形：

(i) 在正交矩阵共轭的意义下，ϕ 具有形状 $\phi_1 \oplus \phi_2$，其中一个分量具有形状 $1\cdot\mathbf{1}_{[0,t_k)}$ 或 $-1\cdot\mathbf{1}_{[0,t_k)}$（$1\times 1$ 矩阵）〚双曲型情形〛。或者，

(ii) ϕ 是常数正交，即其形式为 $U\mathbf{1}_{[0,t_k)}$，其中 U 是椭圆情形下的正交〚。

(b) 假设 $\phi = A_1\mathbf{1}_{[0,t_1)}\cdot\ldots\cdot A_k\mathbf{1}_{[t_{k-1},t_k)}$ 是复数 2×2 矩阵的质量归一化 mBCH 测度，且其为 Magnus 极小，即，

$$\mathcal{M}_{n\times n\ \mathrm{complex}}(\exp_{\mathrm{R}}(\phi)) = \int \|\phi\|_2.$$

然后，在酉矩阵的共轭意义下，ϕ 的形状为 $\phi_1 \oplus \phi_2$，其中一个分量的形状为 $u\cdot\mathbf{1}_{[0,t_k)}$，其中 $u \in \partial\mathrm{D}(0,1)$。

因此我们看到，2×2 的约化质量归一化 mBCH 测度不可能是最小的（在实数和复数意义下均成立）。

证明。(a) 根据前述引理，我们知道这些矩阵必为正规矩阵，并且彼此相邻排列。如果其中一个矩阵是椭圆型，那么它的邻项必与它相等。假设所有 A_i 都是可分解型（抛物型或双曲型）。注意，标量矩阵在分解中可以自由移动，因此我们可以暂时假设双曲型的 A_i 彼此相邻。于是，它们的特征子空间分解相同。除此之外，我们只有标量矩阵，因此可分解性随即成立。极小性意味着至少有一个分量是极小的，因此我们得到这种特殊形式。(b) 类似，只是更简单。□

备注。极小性可能会对正交的 U 或单位 u 施加进一步限制。不过，如果 $\int\|\phi\|_2 \le \pi$，那么所有标示的形状都是 Magnus 极小的。△

6. Asymptotics of some BCH expansions from $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

在本节中，我们考虑一些辅助函数。

引理 6.1. (a) 函数

$$\mathrm{AS}(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{AC}(x)^2 - 1}{1 - x^2}}$$

从 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 延拓为定义在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. 上的解析函数。$\mathrm{AS}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$；并且 AS 在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. 上处处不为零。

(b) AS 在（-1，∞）上单调递减，值域为（$+\infty$，0）。

证明。(a) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 是单连通的，平方根的分支点（或消失）可能发生在 $z = \pm$ 或 $\mathrm{AC}(z) = \pm$，因此最终只会发生在 $z = 1$。因此，只需在 $z = 1$ 处用幂级数验证该陈述即可。

(b) 初等函数演算。 □

引理6.2. (a) 函数

$$\mathrm{At}(z) = \frac{\mathrm{AC}(z) - 1}{\mathrm{AS}(z)}$$

在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 上解析。在 (1) 处 $= 0$，且在 $'(0)$ 处 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$；在 (z) 处，仅当 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 时才于 $z = 0$ 处消失。

(b) 函数 $x \mapsto x + \mathrm{At}(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增（双射）；此外，它也给出一个从 $(-1, 1]$ 到其自身的双射。

证明。（a）这是引理 6.1(a) 的推论。

(b) 初等函数演算。 □

备注6.3. 因此，对于 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$,

$$\mathrm{AC}(z) = \frac{1 - z^2 + \mathrm{At}(z)^2}{1 - z^2 - \mathrm{At}(z)^2}$$

and

$$\mathrm{AS}(z) = \frac{2\,\mathrm{At}(z)}{1 - z^2 - \mathrm{At}(z)^2}$$

作为解析函数。但是，事实上，分母仅在 $z = 1$ 处消失。 △

例6.4。考虑矩阵

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于 α、$\beta \in \mathbb{C}$，令

$$\Upsilon_{\alpha,\beta} = \alpha \tilde{J}\mathbf{1}.\beta \tilde{I}\mathbf{1}.$$

Then

$$\int \|\Upsilon_{\alpha,\beta}\|_2 = |\alpha| + |\beta|.$$

对于 $|\alpha| + |\beta| < \pi$，我们可以考虑

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\alpha,\beta}) &= \log(\exp_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\alpha,\beta})) \\ &= \log(\exp(\beta \tilde{I}) \exp(\alpha \tilde{J})) \\ &= \log \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\alpha} \cos\beta & -\mathrm{e}^{-\alpha} \sin\beta \\ \mathrm{e}^{\alpha} \sin\beta & \mathrm{e}^{-\alpha} \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{AC}(\cosh\alpha \cos\beta) \begin{bmatrix} \sinh\alpha \cos\beta & -\mathrm{e}^{-\alpha} \sin\beta \\ \mathrm{e}^{\alpha} \sin\beta & -\sinh\alpha \cos\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

若 α、$\beta \geq 0$，则

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\alpha,\beta})\|_2 = \mathrm{AC}(\cosh\alpha \cos\beta) \cdot (\sinh\alpha + \cosh\alpha \sin\beta).$$

(a) 现在，对于 $p \in [0, \pi)$，令

$$\tilde{\alpha}(p) = p - \pi + \sqrt[3]{\pi^2(\pi - p)},$$
$$\tilde{\beta}(p) = \pi - \sqrt[3]{\pi^2(\pi - p)}.$$

˜于是 $\tilde\alpha(p)\ \beta(p)\ \geq 0$，并且

$$\tilde\alpha(p)+\tilde\beta(p)=p.$$

因此，

$$\int \|\Upsilon_{\tilde\alpha(p),\tilde\beta(p)}\|_2 = p.$$

由于 $p\nearrow\pi$，我们看到 $\tilde\alpha(p)\ \searrow 0$ (最终) 以及 $\beta(p)\nearrow\pi$。因此

$$\lim_{p\to\pi}\cosh\tilde\alpha(p)\cos\tilde\beta(p)=-1.$$

在该（椭圆型）域中，AC通过 arccos 计算。现在，初等函数演算表明，当 $p\nearrow\pi$，

$$\begin{aligned}\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\tilde\alpha(p),\tilde\beta(p)})\|_2 &\stackrel{?}{=} \frac{\arccos(\cosh\tilde\alpha(p)\cos\tilde\beta(p))}{\sqrt{1-\cosh^2\tilde\alpha(p)\cos^2\tilde\beta(p)}}(\sinh\tilde\alpha(p)+\cosh\tilde\alpha(p)\sin\tilde\beta(p))\\ &= \sqrt{\frac{12\pi^{8/3}}{\pi^2+6}}(\pi-p)^{-1/3}+O((\pi-p)^{1/3}).\end{aligned}$$

我们看到，在 Baker–Campbell–Hausdorff 情形下，我们可以得到渐近行为$O((\pi-p)^{-1/3})$，尽管指数是 $-1/3$ 而不是 $-1/2$，这有些奇怪。

(b) 值得注意的是，在本例的情形下，我们几乎无法做得更好：

如果我们尝试优化 $\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\alpha,\beta})\|_2$对于 $\alpha+\beta(\alpha,\beta\geq 0)$，经过一些计算后发现，最佳方法是沿着一条定义明确的脊线进行。这条脊线起初是双曲型的，但随后转为椭圆型。它的椭圆型部分由 $x\in(-1,1]$, 和参数化。

$$\hat\alpha(x)=\operatorname{arcosh}\left(\frac{\operatorname{AC}(x)+\sqrt{\operatorname{AC}(x)^2-4x(1-x\operatorname{AS}(x))\operatorname{AS}(x)}}{2(1-x\operatorname{AS}(x))}\right);$$

$$\hat\beta(x)=\arccos\left(\frac{\operatorname{AC}(x)-\sqrt{\operatorname{AC}(x)^2-4x(1-x\operatorname{AS}(x))\operatorname{AS}(x)}}{2\operatorname{AS}(x)}\right).$$

Then

$$\cosh\hat\alpha(x)\cos\hat\beta(x)=x.$$

实际上，$x=1$ 给出一个抛物型指数$_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\hat\alpha(x),\hat\beta(x)})$，但对于 $x\in(-1,1)$，它是椭圆型的。然后ˆˆ$\alpha(x)\ \beta(x)\ \geq 0$。由于 $x\searrow -1$，可以看出 $\alpha\searrow 0$ (最终)和 $\beta\nearrow\pi$；更重要的是，

$$\hat\alpha(x)+\hat\beta(x)\nearrow\pi.$$

现在，作为 $x\searrow -1$,

$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}(\sinh\hat\alpha(x)+\cosh\hat\alpha(x)\sin\hat\beta(x))=\pi 2^{3/4}(x+1)^{-1/4}+O((x+1)^{1/4}),$$

and

$$\pi-\hat\alpha(x)-\hat\beta(x)=\frac{1}{3}2^{3/4}(x+1)^{3/4}+O((x+1)^{5/4}).$$

ˆ 因此，采用记号 ˆ$p(x)\ =$ˆ$\alpha(x)\ +\beta(x)$，我们得到

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\hat\alpha(x),\hat\beta(x)})\|_2=2\pi 3^{-1/3}(\pi-\hat p(x))^{-1/3}+O((\pi-\hat p(x))^{1/3}).$$

这 $2\pi 3^{-1/3}=4.356\ldots$只是略好于 $\sqrt{\frac{12\pi^{8/3}}{\pi^2+6}}=4.001\ldots$。

(c) 在前一个示例中，令 $\alpha=\pi-p$、$\beta=p$ 与 $p\in[\pi/2,\pi)$。令

(75) $G(p):=\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\pi-p,\ p})\|_2=\mathsf{AC}(\cosh(\pi-p)\cos\ p)\cdot(\sinh(\pi-p)+\cosh(\pi-p)\sin\ p)$。那么

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Upsilon_{\pi-p,p})\|_2=2\pi\sqrt{3}(\pi-p)^{-1}+\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{3}-2\right)(\pi-p)+O((\pi-p)^3).$$

事实上，一个特殊值为

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\exp\frac{\pi}{2}.$$

利用初等分析可知，$G(p)$在$p\in[\pi/2,\pi)$上严格单调递增。♢

例 6.5。考虑矩阵

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}0&-1\\&0\end{bmatrix},\qquad \tilde{I}=\begin{bmatrix}&-1\\1&\end{bmatrix}.$$

对于 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$，令

$$\tilde{\Upsilon}_{\alpha,\beta}=\alpha\tilde{P}\mathbf{1}.\beta\tilde{I}\mathbf{1}.$$

Then

$$\int\|\tilde{\Upsilon}_{\alpha,\beta}\|_2=|\alpha|+|\beta|.$$

对于 $|\alpha|+|\beta|<\pi$，我们可以考虑

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{L}}(\tilde{\Upsilon}_{\alpha,\beta})&=\log(\exp_{\mathrm{L}}(\tilde{\Upsilon}_{\alpha,\beta}))\\&=\log(\exp(\beta\tilde{I})\exp(\alpha\tilde{P}))\\&=\log\begin{bmatrix}\cos\beta&-\alpha\cos\beta-\sin\beta\\\sin\beta&-\alpha\sin\beta+\cos\beta\end{bmatrix}\\&=\mathrm{AC}\left(\cos\beta-\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{2}\sin\beta&\alpha\cos\beta-\sin\beta\\\sin\beta&-\frac{\alpha}{2}\sin\beta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

如果 $\alpha、\ \beta\geq 0,$ 那么

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\tilde{\Upsilon}_{\alpha,\beta})\|_2=\mathrm{AC}\left(\cos\beta-\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)\cdot\left(\sin\beta+\frac{\alpha}{2}\cos\beta+\frac{\alpha}{2}\right).$$

为求得最优方法，考虑 $x\in\ (-1、\ 1]$，并令

$$\hat{\alpha}(x)=\frac{2\,\mathrm{At}(x)}{\sqrt{1-(x+\mathrm{At}(x))^2}};\qquad \hat{\beta}(x)=\arccos\left(x+\mathrm{At}(x)\right).$$

Then

$$\cos\hat{\beta}(x)-\frac{\hat{\alpha}(x)}{2}\sin\hat{\beta}(x)=x.$$

ˆ 当 $x\searrow -1$ 时，我们有 $\alpha\searrow 0$（最终）和 $\beta\nearrow\pi$；并且，ˆα(x) + β(x) $\nearrow\pi$. 现在，当$x\searrow -1$时，

$$\begin{aligned}\|\mu_{\mathrm{L}}(\tilde{\Upsilon}_{\hat{\alpha}(x),\hat{\beta}(x)})\|_2&=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sin\hat{\beta}(x)+\frac{\hat{\alpha}(x)}{2}\cos\hat{\beta}(x)+\frac{\hat{\alpha}(x)}{2}\right)\\&=2^{1/4}\pi(x+1)^{-1/4}+O((x+1)^{1/4}),\end{aligned}$$

and

$$\pi-\hat{\alpha}(x)-\hat{\beta}(x)=\frac{2}{3}2^{1/4}(x+1)^{3/4}+O((x+1)^{5/4}).$$

ˆ 因此，采用记号 ˆ$p(x) = \hat{\alpha}(x) + \beta(x)$，可得

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\tilde{\Upsilon}_{\hat{\alpha}(x),\hat{\beta}(x)})\|_2 = \pi(4/3)^{1/3}(\pi - \hat{p}(x))^{-1/3} + O((\pi - \hat{p}(x))^{1/3}).$$

这个首项系数 $\pi(4/3)^{1/3} = 3.457\ldots$ 比前一个例子中相应的系数更差。♢

前两个例子至少在 2×2 实矩阵的情形下表明了两点。首先，与一般的 Magnus 展开相比，BCH展开适用的渐近估计要强得多。其次，在 BCH展开中，范数较大时更适合使用正规矩阵。这些问题将在后文借助更多工具加以讨论。

7. Critical singular behaviour of BCH expansions in the 2×2 real case

为陈述下一个命题，令

$$U = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \ \|A\|_2 \leq 1\}$$

and

$$X = (-\pi, \pi) \times U \times U.$$

根据定理 1.4，映射

$$\mathcal{B} : (\alpha, A, B) \mapsto \mu_{\mathrm{R}}\left(\frac{\pi - \alpha}{2} A \mathbf{1}. \frac{\pi + \alpha}{2} B \mathbf{1}\right)$$

在所有地方都有定义。特别是，该子集

$$X_0 = (-\pi, \pi) \times \left\{\tilde{I}\right\} \times \left\{\tilde{I}\right\} \cup (-\pi, \pi) \times \left\{-\tilde{I}\right\} \times \left\{-\tilde{I}\right\}$$

˜ ˜已包含，其中 $\mathcal{B}$ 取值为 πI 或 $-\pi I$。

定理 7.1. (a) 对于 $(\alpha, A, B) \in X \setminus X_0$,

$$\mathcal{B}(\alpha, A, B) = \log\left(\exp\left(\frac{\pi - \alpha}{2} A\right) \exp\left(\frac{\pi + \alpha}{2} B\right)\right);$$

且 $\mathcal{B}|_{X \setminus X_0}$ 是解析的（这意味着它是定义在 $(-\pi, \pi) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的某个包含 $X \setminus X_0$ 的开子集上的解析函数的限制）。

(b) 设 $(\alpha_0, I_0, I_0) \in X_0$。则

$$\pi = \liminf_{(\alpha,A,B)\to(\alpha_0,I_0,I_0)} \|\mathcal{B}(\alpha, A, B)\|_2 <$$

$$< \limsup_{(\alpha,A,B)\to(\alpha_0,I_0,I_0)} \|\mathcal{B}(\alpha, A, B)\|_2 = \pi\sqrt{\frac{\pi - |\alpha_0| + 2\cos\frac{\alpha_0}{2}}{\pi - |\alpha_0| - 2\cos\frac{\alpha_0}{2}}}.$$

（这里的下极限和上极限可以理解为对于（α、A、B）$\in X \setminus X_0$ 或（α、A、B）$\in X$。）

证明。(a) 这由定理 1.6 以及对数的解析性得出。

（b）在这些情况下，tr A、tr $B \to 0$ 以及作为迹的项可以提出；又由于去迹不会增大范数（推论2.25），我们可以将问题限制在情形˜tr $A =$ tr $B = 0$。根据共轭不变性，我们还可以假设 $I_0 = I$。考虑到（45），我们可以将问题限制在矩阵

$$A = \left(1 - \frac{1+t}{2}\xi\right)\tilde{I} + \frac{1+t}{2}\xi\left(s_1\tilde{J} + s_2\tilde{K}\right)$$

and

$$B=\left(1-\frac{1-t}{2}\xi\right)\tilde{I}+\frac{1-t}{2}\xi\left(r_1\tilde{J}+r_2\tilde{K}\right),$$

其中 $0<\xi\sim 0$，且 $|t|$、$\sqrt{s_1^2+s_2^2}$、$\sqrt{r_1^2+r_2^2}\le 1$。

本质上，我们需要考虑 $\xi\searrow 0$，同时满足 $\alpha\to\alpha_0$。（因此，所有参数都依赖于指标 $\lambda\in\Lambda$，这里省略不写。）经过计算，我们得到

$$\left\|\log\left(\exp\left(\frac{\pi-\alpha}{2}A\right)\exp\left(\frac{\pi+\alpha}{2}B\right)\right)\right\|_2=(\pi+O(\xi))\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{\xi^2(\frac{\pi-t\alpha}{2})^2+O(\xi^3)}+\sqrt{\xi^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\left(s_1\frac{1+t}{2}-r_1\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(s_2\frac{1+t}{2}-r_2\frac{1-t}{2}\right)^2\right)+O(\xi^3)}}{\sqrt{\xi^2\left((\frac{\pi-t\alpha}{2})^2-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\left(s_1\frac{1+t}{2}-r_1\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(s_2\frac{1+t}{2}-r_2\frac{1-t}{2}\right)^2\right)\right)+O(\xi^3)}}.$$

注意，由于单位圆盘的凸性，

$$0\le\underbrace{\left(s_1\frac{1+t}{2}-r_1\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(s_2\frac{1+t}{2}-r_2\frac{1-t}{2}\right)^2}_{E^2:=}\le 1.$$

此外，$[0,1]$ 中的每个值都可以实现为 E（即使固定 t 也是如此）。因此

$$\left\|\log\left(\exp\left(\frac{\pi-\alpha}{2}A\right)\exp\left(\frac{\pi+\alpha}{2}B\right)\right)\right\|_2=\pi\sqrt{\frac{(\pi-t\alpha)+\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)E}{(\pi-t\alpha)-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)E}}+O(\xi).$$

由此可得该结论。 □

备注 7.2。使用记号 $p=\frac{\pi+|\alpha|}{2}=\max\left\{\frac{\pi-\alpha}{2},\frac{\pi+\alpha}{2}\right\}$，我们得到

$$\pi\sqrt{\frac{\pi-|\alpha|+2\cos\frac{\alpha}{2}}{\pi-|\alpha|-2\cos\frac{\alpha}{2}}}=\pi\sqrt{\frac{\pi-p+\sin p}{\pi-p-\sin p}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi-p}-\frac{\pi\sqrt{3}}{30}(\pi-p)+O((\pi-p)^3)$$

如 $p\nearrow\pi$。至于粗略估计，可以验证，

$$\pi\sqrt{\frac{\pi-p+\sin p}{\pi-p-\sin p}}<\frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi-p}<G(p)$$

对 $p\in[\frac{\pi}{2},\pi$ 成立，参见（75）。 △

定理 7.3。令 $\alpha_0\in(-\pi,\pi)$，$p=\frac{\pi+|\alpha_0|}{2}=$最大值 $\left\{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}\right\}$。关于 $G(p)$ 的定义，参见例6.4(c)。那么

$$G(p)\le\left(\sup_{\substack{(\alpha,A,B)\in X\\|\alpha|\le|\alpha_0|}}\|\mathcal{B}(\alpha,A,B)\|_2\right)<+\infty.$$

证明。下界由 (75) 显然可得。至于上界，令 M 满足 $M>\pi\sqrt{\pi-p+\text{正弦}\frac{p}{\pi-p-\quad p}\text{正弦}}$。那么定理 7.1 表明，

$$\{(\alpha,A,B)\in X:|\alpha|\le|\alpha_0|,\mathcal{B}(\alpha,A,B)\ge M\}$$

是 X 的紧子集，$\mathcal{B}$ 在其上连续。由此紧致性可知，$\|\mathcal{B}\|_2$ 有界。□

因此，对于 2×2 实矩阵，充分的平衡性意味着 BCH 展开式一致有界。最有趣的情形是 $p=\pi/2$ （即 $\alpha_0=0$）。在这种情况下，下界是尖锐的；采用稍有不同的表述，见定理 10.5。

8. Moments associated to Schur's formulae

Let

$$\mathcal{S}=\{A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \underbrace{\mathrm{sp}(A)\subset\{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Im} z|<\pi\}}_{\equiv D_A<\pi^2 \text{ in } \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}, -D_{A^*A}\neq 0\}.$$

我们还可以进一步分解 $\mathcal{S}$；从而

$$\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}=\{A\in\mathcal{S} : [A,A^*]\neq 0\}$$

是 $\mathcal{S}$ 的正规或非正规（此处指非自伴）内部；并且

$$\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}=\{A\in\mathcal{S} : A=A^*\}$$

是 Schur-抛物型或正规（此处指自伴）伪边界。然后

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}\dot\cup\,\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}.$$

注意，$\mathcal{S}$ 在 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中是开集，因此，对于 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中的闭包，

$$\overline{\mathcal{S}}=\mathcal{S}\dot\cup\,\partial\mathcal{S}.$$

我们可以将 $\partial\mathcal{S}\subset\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 分解，使得

$$\partial^0\mathcal{S}=\{0\}$$

是零边界；

$\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}=\{A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}):\mathrm{sp}(A)\subset\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Im} z|<\pi\}, A\text{是共形反射}\}$是 Schur 双曲型或共形反射边界；

$\partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}=\{A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}):\mathrm{sp}(A)\subset\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Im} z|<\pi\}, A\text{是共形旋转}\}$是 Schur 椭圆型或共形旋转边界；

$$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}=\{A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{sp}(A)\subset(\mathrm{i}\pi+\mathbb{R})\cup(-\mathrm{i}\pi+\mathbb{R}),\ A\text{ is a conform-rotation}\}$$

是 Schur 椭圆型退化边界；

$$\partial^{\mathrm{dnn}}\mathcal{S}=\{A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{sp}(A)\subset(\mathrm{i}\pi+\mathbb{R})\cup(-\mathrm{i}\pi+\mathbb{R}),\ A\text{ is not a conform-rotation}\}$$

是非正规退化边界。然后

$$\partial\mathcal{S}=\partial^0\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{dnn}}\mathcal{S}.$$

这里的一些分量可以进一步自然地分解：$\partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}$ 可以分解为共形恒等部分 $\partial^{\mathrm{ell}1}\mathcal{S}$ 和一般部分 $\partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$；$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$ 可以分解为无迹部分 $\partial^{\mathrm{dell}0}\mathcal{S}$ 和一般部分 $\partial^{\mathrm{dell}*}\mathcal{S}$；同样，$\partial^{\mathrm{dnn}}\mathcal{S}$ 也可以分解为无迹部分 $\partial^{\mathrm{dnn}0}\mathcal{S}$ 和一般部分 $\partial^{\mathrm{dnn}*}\mathcal{S}$。

令

$$\mathcal{S}^{\mathrm{ext}}=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\setminus\overline{\mathcal{S}},$$

$\mathcal{S}$ 的外部集合。此集合可分解为退化或正规外部$\mathcal{S}^{\mathrm{ellext}}$ 和非正规外部 $\mathcal{S}^{\mathrm{nnext}}$。进一步根据是否满足 $D_A\in\{k^2\pi^2 : k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ 来区分 $\widehat{X}^{\mathrm{ext}}$ 是合理的。不过，$\mathcal{S}^{\mathrm{ext}}$ 最终对我们而言并无太大意义：

Let

$$\mathcal{S}^{\mathrm{acc}}=\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}\dot\cup\,\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^0\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}\dot\cup\,\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$$

（不包括 $\partial^{\mathrm{dnn}}\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}^{\mathrm{ext}}$ ）。这里的关键在于， $\partial^{\mathrm{dnn}}\mathcal{S}$ 和$\mathcal{S}^{\mathrm{ext}}$ 中的元素不太适合求指数，因为它们可以轻易地替换为范数更小的元素：

引理 8.1. (a) 若 $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$，则存在 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$，使得 $\exp B = \exp A$且 $\|B\|_2 < \|A\|_2$。

(b) 若 $A \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}} \setminus \partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，则仅有一个 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$ 满足 $\exp B = \exp A$；即 $B = A$。

(c) 若 $A \in \partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，则有两个可能的 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$ 满足 $\exp B = \exp A$。若 $\tilde{A} = a\mathrm{Id}_2 + \pi I$或 $\tilde{A} = a\,\mathrm{Id}_2 - \pi I$，则 $B = a\,\mathrm{Id}_2 \pm \pi I$。

证明。这可由引理 2.28 直接得出。 □

注意， $A \in \mathcal{S}$当且仅当 $\log \exp A = A$，且范数在 A 处是光滑的。（这就是采用该记号的原因。）于是

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v} \text{ at } M=0}\left(M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \|\log((\exp A)(\exp M))\|_2\right) \tag{76}$$

得到一个线性算子 MR_A。这可以表示为 $\mathrm{MR}(A) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，使得

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{v}\mathrm{MR}(A)^*\right).$$

类似地，我们可以定义

$$\mathrm{ML}_A(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v} \text{ at } M=0}\left(M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \|\log((\exp M)(\exp A))\|_2\right) \tag{77}$$

以及 $\mathrm{ML}(A) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，使得

$$\mathrm{ML}_A(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{v}\mathrm{ML}(A)^*\right).$$

由于对数、指数和 $\|\cdot\|_2$ 在这些表达式处局部开，我们知道 $\mathrm{ML}(A)$、$\mathrm{MR}(A) \neq 0$（对于 $A \in \mathcal{S}$）。容易看出，如果 U 是正交的，那么

$$\mathrm{MR}_{UAU^{-1}}(U\mathbf{v}U^{-1}) = \mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) \tag{78}$$

and

$$\mathrm{MR}(UAU^{-1}) = U\mathrm{MR}(A)U^{-1}.$$

对于 ML，同样的陈述也成立。此外，

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_{A^*}(\mathbf{v}^*) \tag{79}$$

and

$$\mathrm{MR}(A) = (\mathrm{ML}(A^*))^*.$$

根据引理 3.2，条件 $A \in \mathcal{S}$ （即 $D_{A^*A} \neq 0$ & $D_A < \pi^2$）可以放宽为$D_{A^*A} \neq 0$ & $D_A \notin \{k^2\pi^2 : \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ 在前面的讨论中。（因此它扩展到 $\mathcal{S}^{\mathrm{ext}}$的大部分。）

如果 $A \in \partial^0\mathcal{S} \cup \partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S} \cup \partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}$，那么 (76) 仍然有意义，尽管它关于 v 不是线性的。因此，（非线性）形式 $\mathrm{MR}_A(\mathbf{v})$ 和 $\mathrm{ML}_A(\mathbf{v})$ 有定义，但我们不定义 $\mathrm{MR}(A)$ 和 $\mathrm{ML}(A)$。尽管如此，(78) 和 (79) 仍然成立。

如果 $A \in \partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，那么我们就只需定义 $\mathbf{v}$ 属于 $\in \mathbb{R}\mathrm{Id}_2 + \mathbb{R}$ 时的 $\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_A(\mathbf{v})$。$\tilde{I}$。具体做法如下：我们将 log 扩展为 $\log^*$，使其对于负标量矩阵$\tilde{B} = -\lambda\,\mathrm{Id}_2$，取值为 $\log^* B = (\log \lambda)\,\mathrm{Id}_2 \pm \pi I$（二值）。这样， $\|\log^* B\|_2$仍有唯一的意义。现在，对于 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}\mathrm{Id}_2 + \mathbb{R}I$，我们定义

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_A(\mathbf{v}) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\|\log^*(\exp(\mathbf{v}t)\exp(A))\|_2 - \|A\|_2}{t}$$

(exp A 是中心元)。如果 $D_A \in \{k^2\pi^2 : \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$，则这一论证对于适当的斜对合 I_A也更一般地适用；但这与我们无关。

另一个观察是，$\mathrm{MR}_A(\cdot)$ 和 $\mathrm{ML}_A(\cdot)$ 永远不会是平凡的（即恒等于零）。事实上，在每种情况下，方向 $\mathrm{v} = A$ 都会使范数可微地增加或减少（对于 $A \in \partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，是减少）。稍后我们将看到 $\mathrm{MR}_A(\mathrm{v})$ 和 $\mathrm{ML}_A(\mathrm{v})$ 的具体表达式。

引理 8.2. 假设 $A = a\mathrm{Id}_2 + bI + (r\cos\psi)J + (r\sin\psi$，满足

$$a^2 + b^2 > 0, \qquad r > 0, \tag{80}$$

and

$$b^2 - r^2 \notin \{k^2\pi^2 : \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}. \tag{81}$$

（注意，$A \in \mathcal{S}$ 当且仅当 (80) 和 $b^2 - r^2 < \pi^2$ 成立。）

（o）那么

$$\begin{aligned}\mathrm{MR}(A) =& \hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I} + \hat{c}_{\mathrm{R}}\tilde{J} + \hat{d}_{\mathrm{R}}\tilde{K}\\ =& \hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I} + (\cos\psi\,\mathrm{Id}_2 + \sin\psi\tilde{I})(\breve{c}\tilde{J} + \breve{d}\tilde{K}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{ML}(A) =& \hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I} + \hat{c}_{\mathrm{L}}\tilde{J} + \hat{d}_{\mathrm{L}}\tilde{K}\\ =& \hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I} + (\cos\psi\,\mathrm{Id}_2 + \sin\psi\tilde{I})(\breve{c}\tilde{J} - \breve{d}\tilde{K}),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \hat{b} &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(1 + \left(\sqrt{a^2+b^2} + r\right)\cdot r\,\text{¢}(b^2 - r^2)\right)\\ \breve{c} &= 1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + r\right)\cdot b\,\text{¢}(b^2 - r^2)\\ \breve{d} &= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + r\right).\end{aligned} \tag{82}$$

(a) 因此,

$$\begin{aligned}\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \breve{c}^2 - \breve{d}^2 = \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}_{\mathrm{R}}^2 - \hat{d}_{\mathrm{R}}^2 = \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}_{\mathrm{L}}^2 - \hat{d}_{\mathrm{L}}^2 =\\ = -\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} + r\right)\sqrt{\text{Đ}(b^2 - r^2)}\right)^2 \le 0,\end{aligned} \tag{83}$$

等号成立当且仅当 $b = 0$。特别是,

$$\breve{c}^2 + \breve{d}^2 = \hat{c}_{\mathrm{R}}^2 + \hat{d}_{\mathrm{R}}^2 = \hat{c}_{\mathrm{L}}^2 + \hat{d}_{\mathrm{L}}^2 > 0. \tag{84}$$

(b) 如果 $a > 0$ 和 $b = 0$，那么 $(\hat{a}, b, \breve{c}, d) = (1, 0, \cos\psi, \sin\psi)$，因此

$$\mathrm{MR}(A) = \mathrm{ML}(A) = \mathrm{Id}_2 + \cos\psi\tilde{J} + \sin\psi\tilde{K}.$$

若 $a < 0$ 且 $b = 0$，则 $(\hat{a}, b, \breve{c}, d) = (-1, 0, \cos\psi, \sin\psi)$，因此

$$\mathrm{MR}(A) = \mathrm{ML}(A) = -\mathrm{Id}_2 + \cos\psi\tilde{J} + \sin\psi\tilde{K}.$$

(c) 限制在 $A \in \mathcal{S}$、$b \neq 0$以及水平集 $\mathcal{N} = \sqrt{a^2+b^2} + r > 0$ 上，映射 MR(A) 和 ML(A) 是单射的。

(d) 我们也可以考虑由正交矩阵共轭所诱导的对应关系，也就是映射。

$$\breve{\mathrm{M}}:(a,b,r)\mapsto\left(\hat{a},\hat{b},\sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2}\right),$$

其中，定义域由限制条件 (80) 和 (81) 确定。

将映射限制在 $b^2-r^2<\pi^2$、 $b\neq 0$以及水平集 $\not{N}=\sqrt{a^2+b^2}+r>0$ 上，$\breve{}$映射 M 是单射。

证明。(o)、(a) 和 (b) 可通过直接计算得出，参见引理3.3。只有 (84) 需要特别论证：由 (83) 可知， $\breve{c}=\breve{d}=0$ 蕴含 $\hat{}a=\hat{}b=0$；然而，$\hat{}a=\breve{d}=0$ 与 $a^2+b^2>0$矛盾。由于关于旋转矩阵共轭的纤维化性质，(d) 将推出 (c)。关于 (d)：假设已知 ($\hat{}a$, $\hat{}b$, $\sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2}$) 和 $\not{N}$。注意，由于 $b^2-r^2<\pi^2$，我们不仅知道 $\operatorname{sgn} a=\operatorname{sgn}\hat{}a$，还知道 $\operatorname{sgn} b=\operatorname{sgn}\hat{}b$。因此，利用 $\hat{}a=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，可以恢复 $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的值。利用 (83)，可以计算 $\sqrt{}/\mathrm{D}(b^2-r^2)$。由于 $b^2-r^2<\pi^2$，可~~以恢复b^2~~ r^2。接着，根据 $\hat{}b$，可以恢复 r。因此，我们也知道 b^2。利用 $\operatorname{sgn} b$，可以推导出 b 的值。由于 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$： $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 已知，因此也可以恢复 a 的值。□

受后文引理9.4的启发，在引理 8.2的语境下，我们也定义归一化表达式

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A)=\frac{1}{\hat{c}_{\mathrm{R}}^2+\hat{d}_{\mathrm{R}}^2}\mathrm{MR}(A),\qquad \mathrm{ML}^{\mathrm{CKB}}(A)=\frac{1}{\hat{c}_{\mathrm{L}}^2+\hat{d}_{\mathrm{L}}^2}\mathrm{ML}(A)\tag{85}$$

and

$$\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(a,b,r)\equiv(\hat{a}^{\mathrm{CKB}},\hat{b}^{\mathrm{CKB}})=\left(\frac{\hat{a}}{\sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2}},\frac{\hat{b}}{\sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2}}\right).\tag{86}$$

我们希望将引理 8.2(c)(d)推广到归一化表达式。为此， $\breve{}\mathrm{M}^{\mathrm{CKB}}$ 将发挥关键作用。该记号指的是（渐近闭合的）CKB模型，因为 $\breve{}\mathrm{M}^{\mathrm{CKB}}$ 按设想应取值于其中。（事实上，由(83)可知，当 $b\neq 0$时，我们得到CKB模型中的内点；当 $b=0$时，则得到渐近点。）

暂且考虑采用下式所给出的扁平化双曲面模型的变体

$$\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(a,b,r)\equiv(\hat{a}^{\mathrm{HP}},\hat{b}^{\mathrm{HP}})=\left(\frac{\hat{a}}{\sqrt{-\hat{a}^2-\hat{b}^2+\breve{c}^2+\breve{d}^2}},\frac{\hat{b}}{\sqrt{-\hat{a}^2-\hat{b}^2+\breve{c}^2+\breve{d}^2}}\right).\tag{87}$$

对于 $b=0$ ，它没有定义（此时分母为零），不过这只是个小问题。利用(82)，我们可以写成

$$\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(a,b,r)=\left(\frac{a}{|b|}\cdot\frac{1}{\sqrt{\not{\mathrm{D}}(b^2-r^2)}\sqrt{a^2+b^2}+r},(\operatorname{sgn} b)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\not{\mathrm{D}}(b^2-r^2)}\sqrt{a^2+b^2}+r}+r\frac{\not{\mathrm{C}}(b^2-r^2)}{\sqrt{\not{\mathrm{D}}(b^2-r^2)}}\right)\right).\tag{88}$$

利用引理 2.12，我们可以将其写为

$$\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(a,b,r)=\left(\frac{a}{|b|}\cdot\frac{\mathcal{E}(b^2-r^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+r},(\operatorname{sgn} b)\cdot\left(\frac{\mathcal{E}(b^2-r^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+r}+r\mathcal{F}(b^2-r^2)\right)\right).$$

此形式表明，只要 $b \neq 0$，上述表达式对于 $(a,b,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 意外地定义良好。这同样适用于 $\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$，因为 HP 可以简单地写回 CKB。

现在，我们证明，只要在$b=0$中进行适当的爆破，$\breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$ 就可以推广到 $b=0$ 的情形。这意味着，我们不再尝试使用定义域

$$\breve{\mathcal{M}} = \{(a,b,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,+\infty)\},$$

而是考虑定义域

$$\widehat{\mathcal{M}} = \{(s,r,\theta) \in [0,+\infty)\times[0,+\infty)\times(\mathbb{R} \bmod 2\pi)\}$$

其中，典范对应关系由下式给出

$$a = s\cos\theta, \qquad b = s\sin\theta \qquad r = r.$$

（这可以稍微通俗地描述为映射 $\widehat{\mathcal{M}} \to \breve{\mathcal{M}}$。）

因此，只要 $s\sin\theta \neq 0$，我们就可以定义 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s,\theta,r) = \breve{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s\cos\theta, s\sin\theta, r)$.

引理 8.3. (a) $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$ 通过以下公式延拓。

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s,r,\theta) = \left(\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}}, \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}}\right)$$

with

$$\mathcal{A} \equiv (\cos\theta)\cdot\mathcal{E}((s\sin\theta)^2 - r^2),$$

and

$$\mathcal{B} \equiv (\sin\theta)\cdot\underbrace{\big(\mathcal{E}((s\sin\theta)^2-r^2) + r(s+r)\mathcal{F}((s\sin\theta)^2-r^2)\big)}_{\mathcal{B}_0\equiv},$$

and

$$\mathcal{G} \equiv (\sin\theta)\cdot\underbrace{(s+r)}_{\mathcal{G}_0\equiv},$$

$\widehat{\ }$平滑地映射到区域 $\mathcal{M}$，即映射到满足下列条件的区域

$$0 \leq s, \qquad 0 \leq r, \qquad \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi. \tag{89}$$

(b) 若 $\sin\theta = 0$，则 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s,r,\theta) = (\cos\theta, 0)$（即(1,0) 或 $(-1,0)$）。

若 $s = r = 0$，则 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(0,0,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$。

然而，如果 $\sin\theta \neq 0$ 和 $s+r>0$，那么 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s,r,\theta)$ 位于开单位圆盘内。

(c) $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}$ 通过该公式扩展

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(s,r,\theta) = \left(\frac{\mathcal{A}}{|\mathcal{G}|}, \frac{\mathcal{B}}{|\mathcal{G}|}\right) = \left(\frac{\mathcal{A}}{|\mathcal{G}|}, (\operatorname{sgn}\sin\theta)\cdot\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{G}_0}\right),$$

但形式上对 $s+r=0$ 或 $\sin\theta = 0$ 并未定义。

证明。(a) 只需证明 $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2$ 不会消失。若 $s=r=0$，则 $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2 = \mathcal{E}(0)^2 = 3$。若 $s+r>0$，则消失要求 $\sin\theta = 0$；因此 $(\cos\theta)^2 = 1$；于是 $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2 = \mathcal{E}(-r^2)^2 \geq \mathcal{E}(0)^2 = 3$，矛盾。

(b)、(c)：直接计算。 □

注意，分解 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^{\mathrm{nn}} \cup \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S} \cup \ldots$ 在旋转矩阵的共轭$\breve{\ }$作用下保持不变，因此它下降为一个分解 $\mathcal{M} = X^{\mathrm{nn}} \cup \eth^{\mathrm{par}}X \cup \ldots$。通过$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$爆破映射，这诱导出一个分解 $\mathcal{M} = X^{\mathrm{nn}} \cup \eth^{\mathrm{par}}X \cup \ldots$。我们概述$\widehat{\ }$ $\mathcal{M}$的情形。我们有

• 子集 $\widehat{X}_{\mathrm{nn}}$，其中 $0<r$、 $0<s$、$\sin\theta\neq 0$、$(s\sin\theta)^2-r^2<\pi$作为正规（或非正规）内部；

• 子集 $\eth_{\text{抛物型}}\widehat{X}$其中 $0<r$, $0<s$, $\sin\theta=0$,$(s\sin\theta)^2-r^2<\pi$作为 Schur-抛物型（或自伴）伪边界。

• 子集 $\partial^0\widehat{X}$，其中 $r=0$、 $s=0$ 为零边界；

• 子集 $\partial_{\text{双曲型}}\widehat{X}$，其中 $s=0$、 $r>0$ 为 Schur-双曲型（或共形反射）边界；

• 该子集 $\partial_{\text{椭圆型}}\widehat{X}$满足 $s>0$、 $r=0$，以（$s\sin\theta$）$^2-r^2<\pi$作为 Schur-椭圆型（或共形旋转型）边界；

• 子集 $\partial_{\mathrm{dell}}\widehat{X}$满足 $r=0$，$(s\sin\theta)^2-r^2=\pi^2$是 Schur-椭圆型退化边界；

• 子集 $\partial_{\mathrm{dnn}}\widehat{X}$满足 $r>0$，$(s\sin\theta)^2-r^2=\pi^2$作为非正规退化边界；

• 子集 $\widehat{X}_{\text{外部}}$以 $(s$正弦 $\theta)^2-r^2>\pi^2$作为外部集。因此

$$\widehat{\mathcal{M}}=\widehat{X}^{\mathrm{nn}}\dot\cup\eth^{\mathrm{par}}\widehat{X}\dot\cup\partial^0\widehat{X}\dot\cup\partial^{\mathrm{hyp}}\widehat{X}\dot\cup\partial^{\mathrm{ell}}\widehat{X}\dot\cup\partial^{\mathrm{dell}}\widehat{X}\dot\cup\partial^{\mathrm{dnn}}\widehat{X}\dot\cup\widehat{X}^{\mathrm{ext}}.$$

再次，某些分量可以自然地分解：$\partial^{\mathrm{hyp}}\widehat{X}$ 可分解为带有$\sin\theta=0$的 $\partial^{\mathrm{hyp1}}\widehat{X}$，以及带有$\sin\theta\neq 0$ 的 $\partial^{\mathrm{hyp*}}\widehat{X}$。 $\partial^{\mathrm{ell}}\widehat{X}$可分解为带有$\sin\theta=0$的 $\partial^{\mathrm{ell1}}\widehat{X}$，以及带有$\sin\theta\neq 0$ 的 $\partial^{\mathrm{ell*}}\widehat{X}$。 $\partial^{\mathrm{dell}}\widehat{X}$可分解为带有 $\cos\theta=0$ 的$\partial^{\mathrm{dnn0}}\widehat{X}$，以及带有 $\cos\theta\neq 0$的 $\partial^{\mathrm{dnn*}}\widehat{X}$。 $\widehat{X}^{\mathrm{ext}}$可分解为带有 $r=0$的 Schur-椭圆型部分 $\widehat{X}^{\mathrm{ellext}}$，以及带有 $r>0$的非正规部分 $\widehat{X}^{\mathrm{nnext}}$。（我们还可以根据 $(s\sin\theta)^2-r^2\in\{k^2\pi^2$ 来进一步区分 $\widehat{X}^{\mathrm{ext}}$： $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$成立与否。）

注意，$\partial^{\mathrm{hyp}}\widehat{X}$ 是由 $\partial^{\mathrm{hyp}}X$非平凡地吹起得到的，但除此之外，$\widehat{\mathcal{M}}$ 和 $\breve{\mathcal{M}}$ 非常相似。只要我们避开（$\pm1,0$）^{CKB}，就可以毫无问题地从 CKB 转到 ACKB。在引理 8.3 的语境下，关键情形是 $\sin\theta=0$。不过，从技术上讲，这要求在定义域中再进行一次（非常简单的）吹起。

考虑定义域

$$\widetilde{\mathcal{M}}=\{(s,r,\theta,\sigma)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times \\ \times(([0,\pi]\bmod 2\pi)\times\{+1\}\cup([\pi,2\pi]\bmod 2\pi)\times\{-1\})\}$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$其中，典范的$\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 只是忘掉了 σ。从技术上讲，这次吹起只是复制了 $\partial^{\mathrm{hyp1}}\widehat{X}\cup\eth^{\mathrm{par}}\widehat{X}\cup\partial^{\mathrm{ell1}}\widehat{X}$（沿 $\partial^{\mathrm{hyp1}}\widehat{X}\cup\eth^{\mathrm{par}}\widehat{X}\cup\partial^{\mathrm{ell1}}\widehat{X}$切开），从而将连通的 $\widehat{\mathcal{M}}$ 分成 $\mathcal{M}$ 的两个$\widetilde{\ }$分支。

现在，只要 $\sin\theta\neq 0$， $\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}(s,r,\theta,\sigma)$ 就是良定义的。与引理 8.3 类似的陈述是

引理 8.4. (a) $\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}$ 按以下公式延拓

$$\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}(s,r,\theta,\sigma)=\left(\arcsin\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}},\sigma\cdot\frac{\mathcal{B}_0}{\sqrt{(\mathcal{B}_0)^2+(\mathcal{G}_0)^2}}\right)$$

(b) 如果 $s=r=0$，则 $\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}(0,0,\theta,\sigma)=(\frac{\pi}{2}-\theta,\sigma)$。

然而，如果 $s+r>0$，那么 $\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}(s,r,\theta,\sigma)$ 属于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times(-1,1)$。

(c) $\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{AHP}}$ 通过公式延拓。

$$\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{AHP}}(s,r,\theta,\sigma)=\left(\arctan\frac{\mathcal{A}}{|\mathcal{G}|},\sigma\cdot\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{G}_0}\right),$$

取值于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{R}$，但形式上未定义于 $s+r=0$。

证明。直接计算。 □

我们使用记号 $\mathcal{N}=s+r$（指范数）。最终，我们将关注 $\mathcal{N}>0$ 且 $\mathcal{N}$ 固定的情形。为便于直观展示，在图 1 中，我们给出了其横截面 $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\sigma=+1}$，其中 $\mathcal{N}=5\pi/3$。

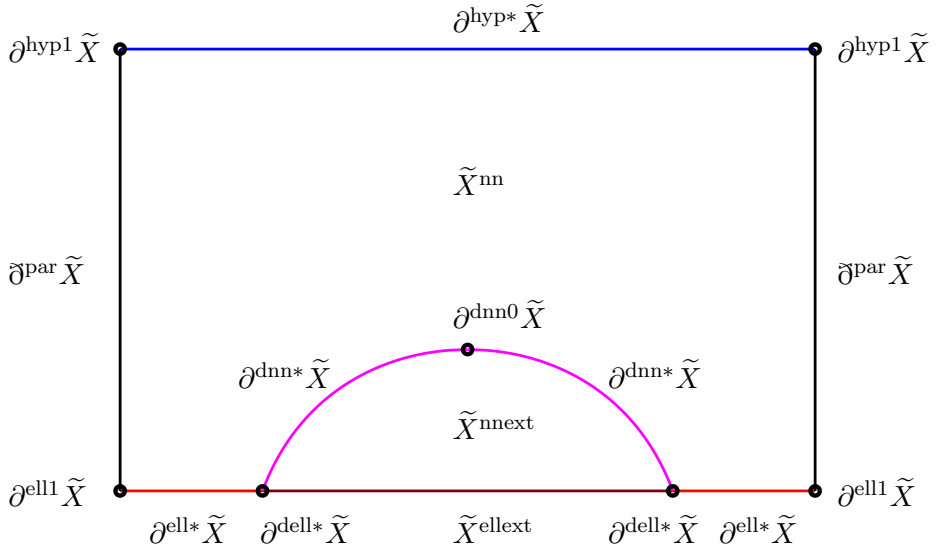


图 1. $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\sigma=+1}$ 的 $\mathcal{N}=5\pi/3$ 横截面

一般而言，对于 $\mathcal{N}>\pi$，情况也是类似的。对于 $\mathcal{N}=\pi$，退化边界仅收缩为 $\partial^{\mathrm{dell}0}\widetilde{X}$；而对于 $\pi<\mathcal{N}$，不存在退化边界。现在，$\widetilde{\mathcal{M}}$ 包含两个这样的带，而 $\mathcal{M}$ 是两个这样的带粘合在一起（所有这些都针对固定的$\mathcal{N}>0$）。在这种情况下，$\partial^0\widetilde{\mathcal{M}}$ 包含两个线段，而 $\partial^0\widehat{\mathcal{M}}$ 是一个圆。

另一种影响变量 s、r 的爆破可通过转到坐标 $\mathcal{N}$、t 来实现，使得 $t\in[0,1]$，并且

$$s=\mathcal{N}t,\qquad\text{and}\qquad r=\mathcal{N}(1-t). \tag{90}$$

就其本身而言，作为一种放大，这只影响零边界的 $s=r=0$ 情形（在那里略有优势）。因此，对我们而言，其用途很有限。然而，(90) 仍保留为一种实用的坐标变换；如果 $\mathcal{N}$ 保持不变，这一点尤其有用。

引理 8.5。在引理 8.3和引理 8.4的语境下，某些边界部分上的扩展作用（固定 $\mathit{N}>0$，取 $\mathit{N}=s+r$ 限制）如下所示：(a)如果 $s=0$ （因此 $r=\mathit{N}$），即我们考虑 Schur-双曲型边界 $\partial^{\mathrm{hyp}}\widehat{X}$，那么

$$(\hat{a},\hat{b},\breve{c},\breve{d})=\left(\cos\theta,(\coth\mathit{N})\mathit{N}\sin\theta,1,-\mathit{N}\sin\theta\right).$$

$$\breve{c}^2+\breve{d}^2=1+\left(\mathit{N}\sin\theta\right)^2.$$

$$\hat{a}^2+\hat{b}^2-\breve{c}^2-\breve{d}^2=(\sin\theta)^2\left(\left(\frac{\mathit{N}}{\sinh\mathit{N}}\right)^2-1\right).$$

这里的 θ 是任意的。

归一化表达式扩展为

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(0,\mathit{N},\theta)=\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\left(\mathit{N}\sin\theta\right)^2}},\frac{(\coth\mathit{N})\mathit{N}\sin\theta}{\sqrt{1+\left(\mathit{N}\sin\theta\right)^2}}\right)$$

以及（若 $\sin\theta\neq 0$，）

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(0,\mathit{N},\theta)=\left(\frac{|\cot\theta|}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathit{N}}{\sinh\mathit{N}}\right)^2}}\operatorname{sgn}\cos\theta,\frac{(\coth\mathit{N})\mathit{N}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathit{N}}{\sinh\mathit{N}}\right)^2}}\operatorname{sgn}\sin\theta\right).$$

这些曲线（位于 θ 中）是双侧 h-超循环曲线（h-距离线）。

(b)如果 $r=0$ （因此 $s=\mathit{N}$），即我们考虑纯椭圆型边界 $\partial^{\mathrm{ell}}\widehat{X}$，那么

$$(\hat{a},\hat{b},\breve{c},\breve{d})=\left(\cos\theta,\sin\theta,(\mathit{N}\sin\theta)\cot(\mathit{N}\sin\theta),-\mathit{N}\sin\theta\right),$$

$$\breve{c}^2+\breve{d}^2=\left(\frac{\mathit{N}\sin\theta}{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}\right)^2,$$

$$\hat{a}^2+\hat{b}^2-\breve{c}^2-\breve{d}^2=1-\left(\frac{\mathit{N}\sin\theta}{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}\right)^2.$$

这里的定义域限制可表示为

$$|\sin\theta|<\frac{\pi}{\mathit{N}}.$$

归一化表达式可扩展为

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(\mathit{N},0,\theta)=\left(\frac{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}{\mathit{N}}\cot\theta,\frac{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}{\mathit{N}}\right),$$

且（如果 $\sin\theta\neq 0$，）

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(\mathit{N},0,\theta)=\left(\hat{a}^{\mathrm{HP}},\hat{b}^{\mathrm{HP}}\right)=\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{\mathit{N}\sin\theta}{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}\right)^2-1}},\frac{\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{\mathit{N}\sin\theta}{\sin\left(\mathit{N}\sin\theta\right)}\right)^2-1}}\right).$$

CKB模型中的这些曲线（在 θ 中）是单位圆的径向收缩像（可能是单位圆的两个开弧段）。（它们给出了拟卡西尼卵形线。）

(c) 如果 $(s\sin\theta)^2-(\mathcal{N}-s)^2=\pi^2$，也就是说，我们考虑 $\partial^{\mathrm{dell}}\widehat{X}\cup\partial^{\mathrm{dnn}}\widehat{X}$（特别是 $\mathcal{N}\geq\pi$），那么

$$|\sin\theta|=\frac{\sqrt{\pi^2+(\mathcal{N}-s)^2}}{s}.$$

定义域限制表示为

$$|\sin\theta|\geq\frac{\pi}{\mathcal{N}},\qquad or\qquad s\geq\frac{\mathcal{N}^2+\pi^2}{2\mathcal{N}},\qquad or\qquad r\leq\frac{\mathcal{N}^2-\pi^2}{2\mathcal{N}}.$$

扩展作用由以下公式给出。

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}(s,r,\theta)=\left(0,\frac{\frac{\mathcal{N}-s}{\pi}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathcal{N}-s}{\pi}\right)^2}}\operatorname{sgn}\sin\theta\right)=\left(0,\frac{\frac{r}{\pi}}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\pi}\right)^2}}\operatorname{sgn}\sin\theta\right),$$

and

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}(s,r,\theta)=\left(0,\frac{\mathcal{N}-s}{\pi}\operatorname{sgn}\sin\theta\right)=\left(0,\frac{r}{\pi}\operatorname{sgn}\sin\theta\right).$$

特别地，$\partial^{\mathrm{dell}}\widehat{X}\cup\partial^{\mathrm{dnn}}\widehat{X}$ 的像是

$$\textit{the segment connecting }\left(0,\frac{\mathcal{N}^2-\pi^2}{\mathcal{N}^2+\pi^2}\right)\textit{ and }\left(0,-\frac{\mathcal{N}^2-\pi^2}{\mathcal{N}^2+\pi^2}\right)\textit{ in the CKB model,}$$

and

$$\textit{the segment connecting }\left(0,\frac{\mathcal{N}^2-\pi^2}{2\mathcal{N}\pi}\right)\textit{ and }\left(0,-\frac{\mathcal{N}^2-\pi^2}{2\mathcal{N}\pi}\right)\textit{ in the HP model.}$$

（对于 $\mathcal{N}=\pi$，这就是原点，它来自 $\partial^{\mathrm{dell0}}\widehat{X}$。对于 $\mathcal{N}>\pi$，端点来自 $\partial^{\mathrm{dnn0}}\widehat{X}$，原点来自 $\partial^{\mathrm{dell*}}\widehat{X}$，中间点来自 $\partial^{\mathrm{dnn*}}\widehat{X}$。）

(d) 若 $\sin\theta=0$，即考虑 $\partial^{\mathrm{hyp1}}\widehat{X}\cup\eth^{\mathrm{par}}\widehat{X}\cup\partial^{\mathrm{ell1}}\widehat{X}$，或者更准确地说，$\partial^{\mathrm{hyp1}}\widetilde{X}\cup\eth^{\mathrm{par}}\widetilde{X}\cup\partial^{\mathrm{ell1}}\widetilde{X}$，那么

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}(\mathcal{N}-r,r,\theta,\sigma)=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\cos\theta,\frac{\frac{1}{\mathcal{N}}\mathcal{E}(-r^2)+r\mathcal{F}(-r^2)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\mathcal{E}(-r^2)+r\mathcal{F}(-r^2)\right)^2}}\cdot\sigma\right),$$

and

$$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{AHP}}(\mathcal{N}-r,r,\theta,\sigma)=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}\cos\theta,\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\mathcal{E}(-r^2)+r\mathcal{F}(-r^2)\right)\cdot\sigma\right).$$

第二坐标的绝对值在 r 中严格单调递增。

$$\textit{with range }\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\mathcal{N}^2}},\frac{\mathcal{N}\coth\mathcal{N}}{\sqrt{1+\mathcal{N}^2}}\right]\textit{ in the ACKB model,}$$

and

$$\textit{with range}\quad \left[\frac{\sqrt{3}}{\not{N}},\ \frac{(\coth \not{N})\not{N}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\not{N}}{\sinh \not{N}}\right)^{2}}}\right]\quad \textit{in the AHP model.}$$

（下限来自 $\partial^{\mathrm{ell1}}\widetilde{X}$，上限来自 $\partial^{\mathrm{hyp1}}\widetilde{X}$，中间$\widetilde{\ }$值来自 $\eth^{\mathrm{par}}X$。

证明。直接计算。 □

为便于直观展示，在图 2 中，我们展示了 $\widehat{\ }\mathrm{M}^{\mathrm{CKB}}(s,r,\theta)$ 的值域分别限制在 $\overline{X}\equiv \widehat{X}^{\mathrm{nn}}\cup \eth^{\mathrm{par}}\widehat{X}\cup \partial^{\mathrm{hyp}}\widetilde{X}\cup \partial^{\mathrm{ell}}\widetilde{X}\cup \partial^{\mathrm{dell}}\widetilde{X}\cup \partial^{\mathrm{dnn}}\widetilde{X}$ 和固定的 $\not{N}>0$ 上时的图像，其中参数线由 s 和 θ 诱导，对应于 $\not{N}=\frac{\pi}{2}$、$\not{N}=\frac{5\pi}{6}$、$\not{N}=\pi$、$\not{N}=\frac{5\pi}{3}$ 四种情形；以及在 $\not{N}=\frac{5\pi}{3}$、$\not{N}=5\pi$ 两种情形下相关边界部分的像。此外，在图 3 中，我们还展示了 $\widetilde{\ }\mathrm{M}^{\mathrm{ACKB}}(s,r,\theta,\sigma)$ 在 $\not{N}=5\pi/6$ 情形下相应值域的图像。

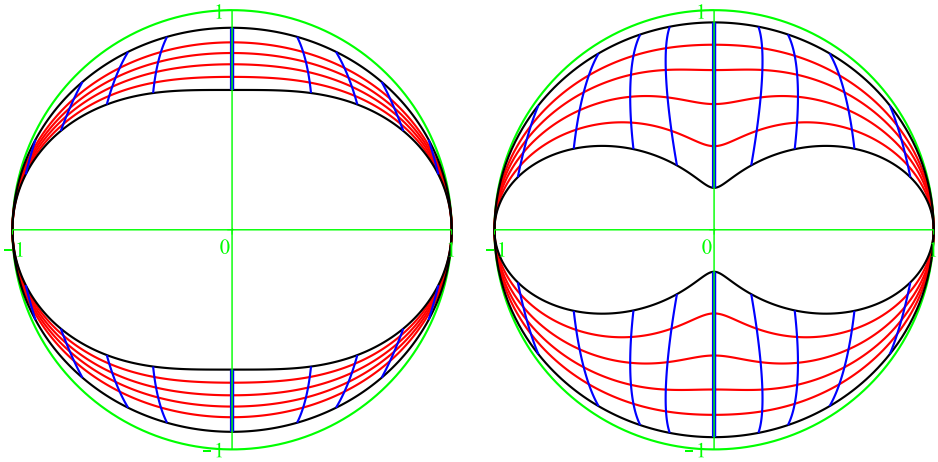
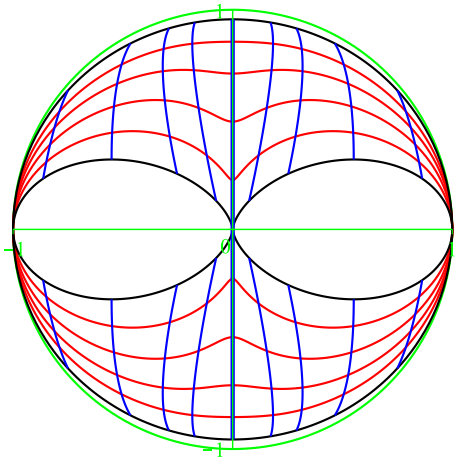
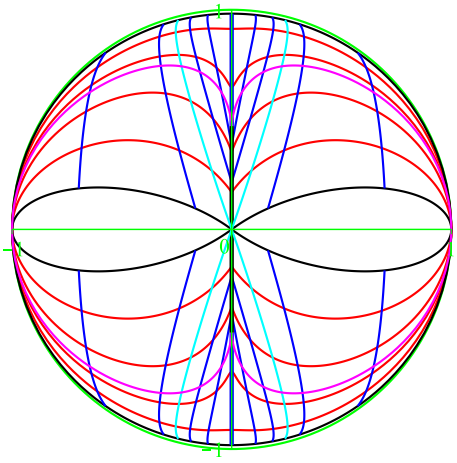


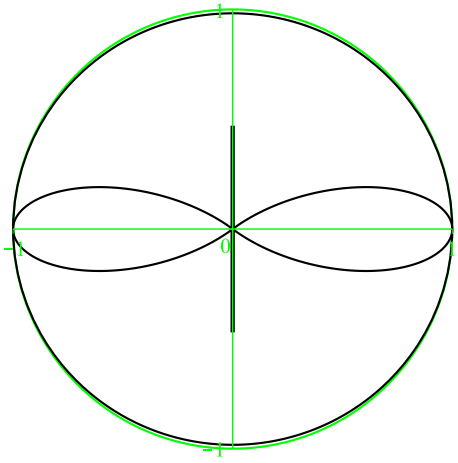
图 2(a) $\not{N}=\pi/2$　　2(b) $\not{N}=5\pi/6$



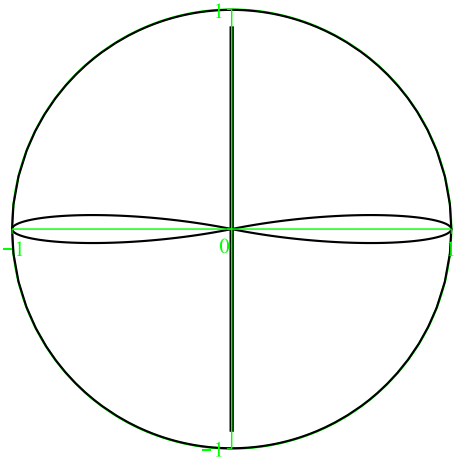
2(c) $\not{N} = \pi$



2(d) $\not{N} = 5\pi/3$



2(e) $\not{N} = 5\pi/3$ （仅边界）



2(f) $\not{N} = 5\pi$ (仅边界)

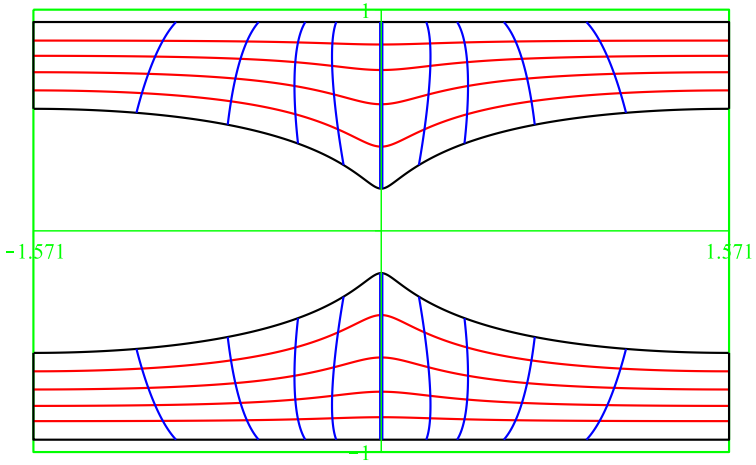


图 3. $\not{N} = 5\pi/6$ 在 ACKB

我们看到如下结果：通过 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$，$\widehat{X}$ 映射的各个分量如下：

- Schur-双曲型边界 $\partial^{\text{hyp}}\widehat{X}$（即 $s=0, t=0$）单射映射到外缘。
- 舒尔椭圆型边界 $\partial^{\text{假设}}\widehat{X}$（即 $r=0$、$t=1$）单射映射到内边缘，但不包括原点。
- 伪边界的闭包 $\partial^{\text{双曲}1}\widehat{X}\cup\partial^{\text{抛物}}\widehat{X}\cup\partial^{\text{椭圆}1}\widehat{X}$（即 $\sin\theta=0$）在两侧形成两个尖点。（$\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{ACKB}}$ 对此有所改进，它在$\partial^{\text{双曲}1}\widetilde{X}\cup\partial^{\text{抛物}}\widetilde{X}\cup\partial^{\text{椭圆}1}\widetilde{X}$上是单射。）
- 退化边界映射到内部裂缝。更准确地说：
  - 对于 $\not{N}<\pi$，不存在退化边界。
  - 对于 $\not{N}=\pi$，退化边界为 $\partial^{\text{dell}0}\widehat{X}$，它映射到原点。
  - 对于 $\not{N}>\pi$（限制为范数退化边界），$\partial^{\text{dnn}0}\widehat{X}$ 映射到中央裂缝的上下端点，$\partial^{\text{dell}*}\widehat{X}$ 映射到原点，$\partial^{\text{dnn}*}\widehat{X}$ 映射到连接它们的线段。
- 红线：θ 变化，s（或 r）固定。蓝线：s（或 r）变化，θ 固定。很自然会想到，X_{nn} 单射地映射到两个单连通区域中，但这需要一些论证，如下所示。

事实上，下一个引理的证明将介绍一些重要的计算技巧:

引理 8.6. 假设 $\not{N}>0$。

(a) 令 $\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}_{\not{N}}$ 为 $\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$ 的子集，其中包含范数为 $\not{N}$ 的元素。则运算 $\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}$ 和 $\mathrm{ML}^{\mathrm{CKB}}$（参见 (85)）在 $\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}_{\not{N}}$ 上是单射的。

(b)设 $X^{\mathrm{nn}}_{\not{N}}$是 X^{nn} 的子集，它是对 $\not{N}=r+s$的限制。则运算 $\mathrm{M}^{\mathrm{CKB}}$（参见 (86)）在 $X^{\mathrm{nn}}_{\not{N}}$ 上是单射的。

事实上，它的像是两个单连通区域的并集，这两个区域分别位于上半平面和下半平面，并由边界部分 X^{nn} 的像所围成。

证明。由于圆周纤维化性质，只需证明 (b)。根据边界部分的单调性性质（参见引理 8.5），可以刻画单连通区域。然后可以验证，$\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$（或 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}$）在边界部分附近开始映射到两个单连通区域中；这一过程繁琐但可行。（只有在 $\partial^{\text{dell}0}\widehat{X}\cup\partial^{\text{dnn}0}\widehat{X}$ 的情况下才需要特殊论证；见后文评论。）接着，出于拓扑原因，只需证明 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{CKB}}$（或 $\widehat{\mathrm{M}}^{\mathrm{HP}}$）在 $X^{\mathrm{nn}}_{\not{N}}$ 上的雅可比矩阵从不消失。

因此，只需考虑 HP 模型。我们必须计算.....的雅可比矩阵。

$$(\hat{a}^{\mathrm{HP}},\hat{b}^{\mathrm{HP}})=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\not{N}\sqrt{\not{D}(b^2-r^2)}},\frac{1}{\not{N}\sqrt{\not{D}(b^2-r^2)}}+r\frac{\not{C}(b^2-r^2)}{\sqrt{\not{D}(b^2-r^2)}}\right)$$

with

$$a=t\not{N}\cos\theta,\qquad b=t\not{N}\sin\theta,\qquad r=\not{N}-t\not{N}$$

关于 t,θ（$\not{N}$固定），满足 $0<t<1,\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$。我们发现

$$\frac{\partial(\hat{a}^{\mathrm{HP}},\hat{b}^{\mathrm{HP}})}{\partial(t,\theta)}=-\frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\not{C}}{\not{D}}-\frac{1-t\,(\cos\theta)^2}{(\sin\theta)^2}\frac{\not{G}}{\not{D}^2}\tag{91}$$

$$- \frac{\left(1 - t\,(\cos\theta)^2\right)}{(\sin\theta)^2}\,(1-t)\,\mathit{N}^2\,\frac{\mathit{L}}{\mathit{D}^2}$$
$$- \mathit{N}^2 t^2\,(\cos\theta)^2\,\frac{\mathit{C}\,\mathit{G}}{\mathit{D}^2}$$

/C、/D、/G、/L 的自变量应为 $b^2 - r^2 = (t\mathit{N}\sin\theta)^2 - (1-t)^2\mathit{N}^2$。每一项都非正；事实上，除最后一项外，其余各项都严格为负。因此，雅可比矩阵为负。

此外，这种结合雅可比矩阵的方法适用于约为 $\partial^{\mathrm{hyp}*}X$（即 $t = 0$，$\sin\theta \neq 0$）和 $\partial^{\mathrm{ell}*}X$（即 $t = 1$，$\sin\theta \neq 0$）的情形，因为 (91rhs/1) 始终为负。此外，它也适用于$\partial^{\mathrm{dell}*}\widehat{X}$ 和 $\partial^{\mathrm{dnn}*}\widehat{X}$，在这种情况下，(91rhs/1)–(91rhs/3) 平滑地趋于 0，但 (91rhs/4) 会产生非零贡献。

事实上，如果我们转到($\hat{a}^{\mathrm{AHP}}$,$\hat{b}^{\mathrm{AHP}}$)，那么即使在渐近点附近它也变得正则：它给出

$$\frac{\partial(\hat{a}^{\mathrm{AHP}}, \hat{b}^{\mathrm{AHP}})}{\partial(t,\theta)} = -\frac{1}{\frac{1}{\mathit{N}^2\mathit{D}}(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\left(\frac{\mathit{C}}{\mathit{D}} + (1 - t\,(\cos\theta)^2)\,\frac{\mathit{G}}{\mathit{D}^2}\right.$$
$$\left. + \left(1 - t\,(\cos\theta)^2\right)(1-t)\,\mathit{N}^2\,\frac{\mathit{L}}{\mathit{D}^2} + \mathit{N}^2 t^2\,(\cos\theta)^2\,(\sin\theta)^2\,\frac{\mathit{C}\,\mathit{G}}{\mathit{D}^2}\right).$$

这可以平滑地扩展到 $\sin\theta = 0$ 的情形，即扩展到 $\eth^{\mathrm{par}}\widehat{X} \cup \partial^{\mathrm{hyp1}}X \cup \partial^{\mathrm{ell1}}X$。容易看出，在此集合上，雅可比矩阵再次严格为负。（注意，在此情形下$b^2 - r^2 = -r^2 \leq 0$，因此/C /D 和 $\frac{1}{}$/D 均为正。）$\square$

这仍然留下了关于边界行为的令人不安的情形 $\partial^{\mathrm{dell}0}\widehat{X} \cup \partial^{\mathrm{dnn}0}\widehat{X}$。不过，即使是这些情形也可以处理，因为在这些点（对于固定的 $\mathit{N} \geq \pi$，每个单连通域中的 1-1 点）不符合所述行为，会导致其他点出现不规则行为。$\square$

以下讨论对我们很重要。对于 $A \in \mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$，我们令

$$\mathrm{NR}(A) := \frac{\boldsymbol{X}^+(\mathrm{MR}(A))}{\det \mathrm{MR}(A)} \equiv \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \check{c}^2 - \check{d}^2}\left(\hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \frac{\check{c}^2 + \check{d}^2 - \hat{a}^2}{\hat{b}}\tilde{I} - \check{c}\tilde{J} - \check{d}K\right).$$

可以立即看出，

$$\mathrm{MR}_A(\mathrm{NR}(A)) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{MR}(A)^*\mathrm{NR}(A)) = 0,$$

也就是说

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\log((\exp A)(\exp(t\mathrm{NR}(A)))\|_2\Big|_{t=0} = 0.$$

另一方面，

引理 8.7。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\|\log((\exp A)(\exp(t\mathrm{NR}(A)))\|_2\Big|_{t=0} < -\frac{1}{\mathit{N}} < 0.$$

证明。通过直接计算可以验证

$$\mathrm{LHS} = -\frac{1}{\mathit{N}}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{\mathbb{N}}(1-t(\cos\theta)^2)\frac{\mathbb{G}}{\mathbb{D}^2}\\
&- \mathbb{N}2(1-t)(1-t(\cos\theta)^2)\frac{\mathbb{G}\,\mathbb{C}}{\mathbb{D}^2}\\
&- \mathbb{N}2t(\sin\theta)^2\frac{\mathbb{G}}{\mathbb{D}}\\
&- \mathbb{N}(1-t)\frac{\mathbb{C}^2}{\mathbb{D}}\\
&- \mathbb{N}^3(1-t)^2(1-t(\cos\theta)^2)\frac{\mathbb{C}\,\mathbb{L}}{\mathbb{D}^2}\\
&- \mathbb{N}^3t(1-t)(\sin\theta)^2\frac{\mathbb{L}}{\mathbb{D}}.
\end{aligned}
$$

(/C、/D、/G、/L的参数应为 $b^2-r^2\equiv \mathbb{N}^2t^2(\sin\theta)^2-\mathbb{N}^2(1-t)^2$。)

接着，由于和式中的每一项在指定区域内都严格为负，结论便随之成立。□

这里有一个重要观察：NR(A)仅取决于MR(A)，而根据齐次性，它只取决于MR^{CKB}(A)。关于ML(A)和NL(A)，也可以给出类似的定义、陈述和观察。

备注8.8. 我们来讨论这样一个问题：MR^{CKB}(A)和ML^{CKB}(A)能否在形式上扩展到已经讨论过的情形之外。

(o) 若 $A=a\mathrm{Id}_2+bI+(r\cos\psi)J+(r\sin\psi)$，使得

$$a^2+b^2>0,\qquad r>0, \tag{92}$$

那么MR^{CKB} 可通过以下公式扩展

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A)=\frac{\mathcal{A}\,\mathrm{Id}_2+\mathcal{B}\tilde{I}+((\cos\psi)\,\mathrm{Id}_2+(\sin\psi)\tilde{I})(\mathcal{C}\tilde{J}+\mathcal{D}\tilde{K})}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}},$$

其中

$$\mathcal{A}\equiv(\cos\theta)\cdot\mathcal{E}((s\sin\theta)^2-r^2),$$

and

$$\mathcal{B}\equiv(\sin\theta)\cdot\left(\mathcal{E}((s\sin\theta)^2-r^2)+r(s+r)\mathcal{F}((s\sin\theta)^2-r^2)\right),$$

and

$$\mathcal{C}\equiv\mathcal{E}((s\sin\theta)^2-r^2)+(\sin\theta)^2\cdot s(s+r)\mathcal{F}((s\sin\theta)^2-r^2),$$

and

$$\mathcal{D}\equiv(\sin\theta)\cdot(r+s)\mathcal{E}((s\sin\theta)^2-r^2),$$

and

$$\mathcal{G}\equiv(\sin\theta)\cdot(s+r).$$

这样便无需满足条件（81）。

(a) 如果 $s>0$、 $r=0$，那么 $(\mathcal{C}J+\mathcal{D}K)\overline{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}}$ 可以替换为任意的 $(\cos\xi)\tilde{J}+(\sin\xi)\tilde{K}$。形式化地说，这将导致

$$\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A)=\frac{\mathcal{A}\,\mathrm{Id}_2+\mathcal{B}\tilde{I}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{G}^2}}+((\cos\psi)\tilde{J}+(\sin\psi)\tilde{K})$$

其中 ψ 尚未确定。这里

$$\mathcal{A} \equiv (\cos\theta)\cdot\mathcal{E}((s\sin\theta)^2),$$

and

$$\mathcal{B} \equiv (\sin\theta)\cdot\left(\mathcal{E}((s\sin\theta)^2)\right),$$

and

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{E}((s\sin\theta)^2) + (s\sin\theta)^2\mathcal{F}((s\sin\theta)^2),$$

and

$$\mathcal{D} \equiv (s\sin\theta)\cdot\mathcal{E}((s\sin\theta)^2),$$

and

$$\mathcal{G} \equiv s\sin\theta.$$

（ ψ 的未决性不会在 $\widehat{\mathbf{M}}^{\mathrm{CKB}}$中出现。）

（b）若 $s=0, r>0$，则 θ 变为未决。这里

$$\mathcal{A} \equiv (\cos\theta)\cdot\mathcal{E}(-r^2),$$

and

$$\mathcal{B} \equiv (\sin\theta)\cdot\left(\mathcal{E}(-r^2) + r^2\mathcal{F}(-r^2)\right),$$

and

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{E}(-r^2),$$

and

$$\mathcal{D} \equiv (\sin\theta)\cdot r\mathcal{E}(-r^2),$$

and

$$\mathcal{G} \equiv r\sin\theta.$$

（ θ 的未决性会在 $\widehat{\mathbf{M}}^{\mathrm{CKB}}$中出现。）

这些计算是形式上的。实际的几何图像将在下文中求得。“未决性”将表现为锥形退化。△

引理 8.9. 设 $A = a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I}$ 且 $-\pi < b < \pi$（因此 $A \in \partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}$），并且 $\mathbf{v} = \tilde{v}_1\mathrm{Id}_2 + \tilde{v}_2 I + v_3 J + v_4 K$。则

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_A(\mathbf{v}) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}v_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}v_2 + \frac{b}{\sin b}\sqrt{(v_3)^2+(v_4)^2}.$$

尤其是，如果

$$\mathbf{v} = \hat{v}_1\frac{a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \hat{v}_2\frac{-b\,\mathrm{Id}_2 + a\tilde{I}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \hat{v}_3\frac{\tilde{J}}{\frac{b}{\sin b}} + \hat{v}_4\frac{\tilde{K}}{\frac{b}{\sin b}}$$

then

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_A(\mathbf{v}) = \hat{v}_1 + \sqrt{(\hat{v}_3)^2+(\hat{v}_4)^2}.$$

（对于 $b = \cancel{0,}$ $\frac{b}{\text{正弦}\,b}$ 应理解为 1。）

证明。直接计算。 □

引理 8.10. 假设 $A = c\tilde{J} + d\tilde{K}$、 $c^2+d^2>0$ 和 $\mathbf{v} = v_1\,\mathrm{Id}_2 + v_2\tilde{I} + v_3\tilde{J} + v_4\tilde{K}$。那么

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \frac{cv_3+dv_4}{\sqrt{c^2+d^2}} + \sqrt{v_1^2 + \left(\sqrt{c^2+d^2}\frac{\cosh\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}v_2 - cv_4 + dv_3\right)^2}.$$

特别是，如果

$$\begin{aligned}\mathbf{v} =&\hat{v}_1\frac{c\tilde{J}+d\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}+\hat{v}_2\frac{(\sinh\sqrt{c^2+d^2})\tilde{I}+(\cosh\sqrt{c^2+d^2})\frac{-d\tilde{J}+c\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}}{\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}}\\&+\hat{v}_3\,\mathrm{Id}_2+\hat{v}_4\frac{(\cosh\sqrt{c^2+d^2})\tilde{I}+(\sinh\sqrt{c^2+d^2})\frac{-d\tilde{J}+c\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}}{\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}},\end{aligned}$$

then

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v})=\hat{v}_1+\sqrt{(\hat{v}_3)^2+(\hat{v}_4)^2}.$$

类似地,

$$\mathrm{ML}_A(\mathbf{v})=\frac{cv_3+dv_4}{\sqrt{c^2+d^2}}+\sqrt{v_1^2+\left(\sqrt{c^2+d^2}\frac{\cosh\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}v_2+cv_4-dv_3\right)^2}.$$

尤其是，如果

$$\begin{aligned}\mathbf{v} =&\hat{v}_1\frac{c\tilde{J}+d\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}+\hat{v}_2\frac{(\sinh\sqrt{c^2+d^2})\tilde{I}+(\cosh\sqrt{c^2+d^2})\frac{d\tilde{J}-c\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}}{\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}}\\&+\hat{v}_3\,\mathrm{Id}_2+\hat{v}_4\frac{(\cosh\sqrt{c^2+d^2})\tilde{I}+(\sinh\sqrt{c^2+d^2})\frac{d\tilde{J}-c\tilde{K}}{\sqrt{c^2+d^2}}}{\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sinh\sqrt{c^2+d^2}}},\end{aligned}$$

then

$$\mathrm{ML}_A(\mathbf{v})=\hat{v}_1+\sqrt{(\hat{v}_3)^2+(\hat{v}_4)^2}.$$

证明。直接计算。 □

引理 8.11。假设 $A_1\in\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，特别是 $A_1=a\,\mathrm{Id}_2+\pi\tilde{I}$ 或 $A_1=-a\mathrm{Id}_2-\pi I$。令 $\mathbf{v}=v_1\,\mathrm{Id}_2+v_2I$。那么

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v})=\mathrm{ML}_A(\mathbf{v})=\frac{av_1-\pi|v_2|}{\sqrt{a^2+\pi^2}}.$$

证明。直接计算。 □

9. BCH MINIMALITY

定义9.1. 我们称 $(A,B)\in\mathsf{M}_2(\mathbb{R})\times\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ 为 BCH 极小对（对应 C），如果对于任意满足 $(\exp A)(\exp B)=(\exp A)(\exp B)(=C)$ 的 $(A,B)\in\mathsf{M}_2(\mathbb{R})\times\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$，都有 $\|A\|_2>\|A\|_2$ 或 $\|B\|_2>\|B\|_2$。

本节我们将探讨 BCH 极小对的限制。

任何元素 $C\in\mathsf{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 都可以轻易扰动为两个可取对数元素的乘积（例如，一个接近 A，另一个接近 Id_2）。通过一个简单的紧性论证，我们得到：若 $C=(\exp A)(\exp B)$，则 C 允许存在一个极小对 (A,B)，使得 $\|A\|_2\le\|A\|_2$ 且 $\|B\|_2\le\|B\|_2$。然而，对于极小对，我们可以立即将注意力限制在某些特殊矩阵上：

由引理 8.1可知，所有极小对都来自 $\mathcal{S}^{\mathrm{acc}} \times \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$。根据同一引理，我们还可以看到，$\mathcal{S}^{\mathrm{acc}} \times \partial^0\mathcal{S}$和 $\partial^0\mathcal{S} \times \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$ 的元素都是极小对。

定义 9.2. 假设 $(A, B) \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}} \times \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$。如果不存在 $\mathbf{v} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 使得……，则称 (A, B) 是一个无穷小极小 BCH 对。

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) < 0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ML}_B(-\mathbf{v}) < 0. \tag{93}$$

引理 9.3. 假设 $(A, B) \in \mathcal{S}^{\mathrm{acc}} \times \mathcal{S}^{\mathrm{acc}}$，且 (A, B) 不是无穷小极小的。则可以找到 $A, B \in \mathcal{S}$ 使得……

$$\|\tilde{A}\|_2 < \|A\|_2, \qquad and \qquad \|\tilde{B}\|_2 < \|B\|_2,$$

yet

$$(\exp \tilde{A})(\exp \tilde{B}) = (\exp A)(\exp B).$$

特别地，无穷小极小性是极小性的必要条件。

证明. 若 (93) 成立，则令 $A = \log((\exp A)(\exp t\mathbf{v}))$，并令 $B = \log((\exp -t\mathbf{v})(\exp B))$，其中 $t > 0$ 足够小。□

引理9.4. 假设 $A, B \in \mathcal{S}$，使得 MR(A) 和 ML(B) 不是彼此的正倍数。那么对 (A, B) 而言，它不是无穷小极小的；特别地，(A, B) 不是极小的。

证明。非零线性泛函 $\mathrm{MR}_A(\cdot)$ 和 $\mathrm{ML}_A(\cdot)$ 不是彼此的正倍数，因此可以找到 $\mathbf{v}$ 使得 (93) 成立。□

引理9.5. 如果$(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$是 BCH 极小的，那么 $(A, B) \in \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S} \times \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$。

证明。对于 $A \in \mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$，$\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A)$和 $\mathrm{ML}^{\mathrm{CKB}}(A)$ 是 CKB的内点；对于 $A \in \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$，$\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A)$和$\mathrm{ML}^{\mathrm{CKB}}(A)$ 是CKB 的渐近点。由此以及前述引理可知，如果 (A, B) 是无穷小极小的，那么 $(A, B) \in \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S} \times \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$或 $(A, B) \in \mathcal{S}^{\mathrm{nn}} \times \mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$。关于第二种情况，根据无穷小极小性，需要 $\mathrm{MR}^{\mathrm{CKB}}(A) = \mathrm{ML}^{\mathrm{CKB}}(B)$。于是我们可以取$\mathbf{v} = \mathrm{NR}(A) = \mathrm{NL}(B)$，并且根据引理 8.7，$A =$ 对数((指数 A)(指数 $t\mathbf{v}$)) 和 $B =$ 对数((指数 $-t\mathbf{v}$)(指数 B)) 将在 $t > 0$ 足够小时给出一个反例，说明 BCH 极小性不成立。□

引理 9.6. 假设 $(A, B) \in S^{\mathrm{acc}} \times S^{\mathrm{acc}}$ 是一个无穷小极小 BCH 对。我们断言：

(a) 若 $A \in \partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$，则 $B \in \partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$。(b) 若 $A \in \partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$，则 $B \in \partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$ 或 $B \in \partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$ 或 $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$。(c) 若 $A \in \partial^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S}$，则 $B \in \partial^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S}$ 或 $B \in \partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$ 或 $B \in \eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$。

证明。(a) 根据引理 8.11，对于 $\mathbf{v} \sim \pm I$，关系 $\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) < 0$成立。（“$\sim$ ”表示“约等于”。）于是该结论由引理 9.3 得出，进而也由引理 8.9 得出。

(b) 和 (c) 可由以下观察得出：如果映射 $\mathrm{MR}^A|_{\mathbb{R}\,\mathrm{Id}_2 + \mathbb{R}\tilde{I}}$和 $\mathrm{ML}^B|_{\mathbb{R}\,\mathrm{Id}_2 + \mathbb{R}\tilde{I}}$是线性泛函，那么它们应当彼此成比例（参见引理 9.3）。□

通过取伴随，前述引理中描述的关系关于 A 和 B 是对称的。这就得到了

定理 9.7. 对于最小 BCH 对，若所有因子的范数均为正，则存在以下关联可能性：

	$\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$	$\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$
$\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$	×	×	✓	×	×	✓
$\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$	×	✓	×	✓	×	✓
$\partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$	✓	×	✓	×	×	✓
$\partial^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S}$	×	✓	×	✓	×	✓
$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$	×	×	×	×	×	✓
$\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

这里 ✓ 表示“或许可行”，而 × 表示“不可能”。

证明。这是前述结论的推论。 □

接下来，我们将得到更具定量性的限制。

引理 9.8. (a) 对于 $\not{N}_1,\ \not{N}_2 > 0$ 考虑以下各对

$$(A,B)=\left(\begin{bmatrix}\not{N}_1 & \\ & t_1\not{N}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\not{N}_2 & \\ & t_2\not{N}\end{bmatrix}\right)$$

or

$$(A,B)=\left(-\begin{bmatrix}\not{N}_1 & \\ & t_1\not{N}\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}\not{N}_2 & \\ & t_2\not{N}\end{bmatrix}\right)$$

其中 $t_1,\ t_2\in(-1,\ 1)$。那么，各对（$A,\ B$）经旋转矩阵共轭后，将给出 $\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\times\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$ 中的每一个（无穷小）BCH 极小对。在这些情况下

$$\|\log((\exp A)(\exp B)\|_2=\not{N}_1+\not{N}_2.$$

(b) 对于 $t_1,t_2\in(-1,1]$ 关于 $(\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\cup\eth^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S})\times(\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\cup\eth^{\mathrm{ell0}}\mathcal{S})$）也有类似的结论。

证明。(a) 根据无穷小极小性，矩阵应当对齐。BCH极小性可由 Magnus极小性推出。(b) 这是 (a) 的一个平凡推广。□

引理 9.9。考虑由下式给出的函数

$$\alpha(t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4)=t_1+\sqrt{t_3^2+t_4^2}$$

以及由下式给出的线性泛函

$$\beta(t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4)=\beta_1t_1+\beta_2t_2+\beta_3t_3+\beta_4t_4.$$

然后我们可以选择$\mathbf{v}=t_1U_1+t_2U_2+t_3U_3+t_4U_4$使得 $\alpha(\mathbf{v})<0$并且 $\beta(-\mathbf{v})<0$除非

$$\beta_2=0\qquad and\qquad \beta_1\geq\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2} \tag{94}$$

成立，在这种情况下，不可能找到这样的 $\mathbf{v}$。

证明。如果 $\beta_2\neq 0$，或 $\beta_1<0$，或 $0=\beta_1<\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}$，或 $0<\beta_1<\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}$，那么

$$\mathbf{v}=-U_1+\frac{\beta_1+1}{\beta_2}U_2$$

or

$$\mathbf{v}=-U_1,$$

or

$$\mathbf{v} = -2U_1 + \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}}U_3 + \frac{\beta_4}{\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}}U_4$$

or

$$\mathbf{v} = -\frac{\beta_1+\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}}{2\beta_1}U_1 + \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}}U_3 + \frac{\beta_4}{\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}}U_4$$

分别是不错的选择。

反之，假设（94）成立，并且 $\alpha(\mathbf{v}) < 0$，即 $t_1 < -\sqrt{t_3^2+t_4^2}$ 也成立。于是，

$$\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \beta_4 t_4 \leq -\sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}\sqrt{t_3^2+t_4^2} + 0 + \sqrt{\beta_3^2+\beta_4^2}\sqrt{t_3^2+t_4^2} = 0$$

表明 $\beta(-\mathbf{v}) \geq 0$。

（实质上，这只是关于半锥的一个简单几何陈述。） □

引理 9.10. 假设 $A_1 = a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I} + c\tilde{J} \in \mathcal{S}$, $c > 0$，以及 $B_1 = \acute{a}\,\mathrm{Id}_2 + \acute{b}\tilde{I} \in \partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}$，其中 $\acute{N} = \sqrt{\acute{a}^2+\acute{b}^2}$。假设 (A_1, B_1) 是无穷小 BCH 极小的。则

$$B_1 = \frac{\hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}\acute{N}$$

and

$$\frac{\hat{b}\acute{N}}{\sin\dfrac{\hat{b}\acute{N}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}} \geq \sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2}. \tag{95}$$

（对于 $\hat{b} = 0$，左端应理解为 $\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}$，但此时该条件无论如何都是空的。另外请注意，条件 $\left|\hat{b}\acute{N}\right| < \pi$ 是由 $B_1 \in \partial^{\mathrm{ell}}\mathcal{S}$ 施加的。）

证明。这是引理 9.9 和引理 8.9 的推论。由 (94/cond1),

$$B_1 = \pm\frac{\hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}\acute{N}.$$

由 (94/cond2)，只有符号选择 $+$ 有效，且 (95) 成立。 □

引理 9.11。假设 $A_1 = a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I} + c\tilde{J} \in \mathcal{S}$、 $c > 0$和 $B_1 = \acute{c}\tilde{J} + \acute{d}\tilde{K} \in \partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$，其中 $\acute{N} = \sqrt{\acute{c}^2+\acute{d}^2}$。如果 (A_1, B_1) 是无穷小 BCH 极小的，那么

$$B_1 = \left(\sqrt{\breve{c}^2+\breve{d}^2 - \left(\frac{\sinh\acute{N}}{\cosh\acute{N}}\hat{b}\right)^2}\,\mathrm{Id}_2 - \frac{\sinh\acute{N}}{\cosh\acute{N}}\hat{b}\tilde{I}\right)\frac{\breve{c}\tilde{\mathrm{Id}}_2 + \breve{d}\tilde{I}}{\breve{c}^2+\breve{d}^2}\acute{N}\tilde{J}$$

and

$$\breve{c}^2+\breve{d}^2 \geq \hat{a}^2 + \left(\frac{\sinh\acute{N}}{\cosh\acute{N}}\hat{b}\right)^2\frac{\acute{N}^2+1}{\acute{N}^2}. \tag{96}$$

证明。这是引理 9.9 和引理 8.10 的推论。由 (94/cond1),

$$B_1 = \left(\pm \sqrt{\check{c}^2 + \check{d}^2 - \left(\frac{\sinh \acute{\mathcal{N}}}{\cosh \acute{\mathcal{N}}} \hat{b} \right)^2} \, \mathrm{Id}_2 - \frac{\sinh \acute{\mathcal{N}}}{\cosh \acute{\mathcal{N}}} \hat{b} \tilde{I} \right) \frac{\check{c} \tilde{\mathrm{Id}}_2 + \check{d} \tilde{I}}{\check{c}^2 + \check{d}^2} \acute{N} \tilde{J}.$$

由（94/cond2）可知，只有符号选择 $+$ 有效，且（96）成立。 □

引理9.12。设 $A_1 = c_1 J + d_1 K$ 和$A_2 = c_2 J + d_2 K$。假设$\mathcal{N}_1 = \sqrt{c_1^2 + d_1^2} > 0$和 $\mathcal{N}_2 = \sqrt{c_2^2 + d_2^2} > 0$。令 ψ表示向量（c_1, d_1）与（c_1, d_2）之间的角。我们断言，如果（A_1, A_2）是一个无穷小 BCH 极小对，那么 $\psi < \pi$，并且

$$\tan \frac{\psi}{2} \le \frac{\left(\left(\coth \mathcal{N}_1 \right) + \left(\coth \mathcal{N}_2 \right) \right) \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1 \left(\coth \mathcal{N}_1 \right) + \mathcal{N}_2 \left(\coth \mathcal{N}_2 \right)}. \tag{97}$$

证明。 $\psi < \pi$ 是显然的。若 (97) 不成立，则按此选择

$$\mathbf{v} = \frac{A_1}{\mathcal{N}_1} - \frac{A_2}{\mathcal{N}_2} + \frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1 (\coth \mathcal{N}_1) + \mathcal{N}_2 (\coth \mathcal{N}_2)} \frac{A_1 A_2 - A_2 A_1}{2 \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2},$$

它得出

$$\mathrm{MR}_A(\mathbf{v}) = \mathrm{ML}_A(-\mathbf{v}) = \left(\frac{\left(\left(\coth \mathcal{N}_1 \right) + \left(\coth \mathcal{N}_2 \right) \right) \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1 \left(\coth \mathcal{N}_1 \right) + \mathcal{N}_2 \left(\coth \mathcal{N}_2 \right)} - \tan \frac{\psi}{2} \right) \sin \psi < 0.$$

(通过共轭，我们可以假设

$$c_1 = \mathcal{N}_1 \cos \frac{\psi}{2}, \qquad d_1 = \mathcal{N}_1 \sin \frac{\psi}{2}, \qquad c_2 = \mathcal{N}_2 \cos \frac{\psi}{2}, \qquad d_2 = -\mathcal{N}_2 \sin \frac{\psi}{2}.$$

然后通过直接计算可得该结论。) □

假设 U 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 中在旋转矩阵共轭作用下封闭的子集。那么集合 $\exp(U) = \{(\exp A)(\exp B) : (A, B) \in U\}$ 也在旋转矩阵共轭作用下封闭。因此，可以通过 Ξ^{PH} 的像准确地表示该集合。若映射 Ξ^{PH} 作用于 $\exp(U)$ 集合后，可以经由一个维数为 p 的光滑流形光滑地因子分解，则称该集合的因子维数为 p。

定理9.13。集合 $U_1 \times U_2$ 限制于 $(A, B) \in U_1 \times U_2$, $\|A\|_2 = \mathcal{N}_1$, $\|B\|_2 = \mathcal{N}_2$ 的 BCH 极小子集的因子维数是

	$\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$	$\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{ell1}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$	$\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$
$\mathcal{S}^{\mathrm{nn}}$			2			2
$\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$		1		1		1
$\partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$	2		1			1
$\partial^{\mathrm{ell1}}\mathcal{S}$		1		0		0
$\partial^{\mathrm{dell}}\mathcal{S}$						0
$\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}$	2	1	1	0	0	1

备注。所给出的数值在某种程度上是上估计，但可以看出，一般而言无法将其降低。

证明。前面的陈述和简单的论证表明了这一点。例如，引理 9.10 处理 $\mathcal{S}^{\mathrm{nn}} \times \partial^{\mathrm{ell}*}\mathcal{S}$，等等。 □

此外，请注意， $\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\times\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$ 的限制的像包含 $\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}\times\partial^{\mathrm{ell1}}\mathcal{S}$ 和 $\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}\times\eth^{\mathrm{par}}\mathcal{S}$的限制的像，而后两者又包含 $\partial^{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}\times\partial^{\mathrm{ell1}}\mathcal{S}$ 的限制的像（反向顺序亦然）。

让我们定义映射

$$\mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}:X^{\mathrm{nn}}_{\mathcal{N}}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

by

$$(a,b,r)\mapsto\exp\left(a\,\mathrm{Id}_2+b\tilde{I}+r\tilde{J}\right)\exp\left(\frac{\hat{a}\,\mathrm{Id}_2+\hat{b}\tilde{I}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}\,\acute{\mathcal{N}}\right),$$

其中 $\hat{}a$ 和 $\hat{}b$ 如引理 8.2 所示，以及 $\acute{\mathcal{N}}\geq 0$。

请注意，如果 $0<\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}+\acute{\mathcal{N}}\leq\pi$，$\log\mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}$ 肯定是定义良好的（因为 BCH 表示不是 Magnus-最小）。

引理9.14。考虑映射$\mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}$其中 $a=\mathcal{N}t\cos\theta$, $b=\mathcal{N}t\sin\theta$, $r=\mathcal{N}(1-t)$。（因此 $0<t<1$ 且 $\sin\theta\neq 0$。）我们断言：

(a)

$$\mathrm{mdis}\ \mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(a,b,r)=r\,\text{¢}\mathrm{in}(b^2-r^2).$$

(b) 当且仅当 $\mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(a,b,r)$ 可对数化。

$$\text{¢}\mathrm{os}(b^2-r^2)\cos\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}-b\,\text{¢}\mathrm{in}(b^2-r^2)\sin\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}>-1.$$

(c) 在可取对数的情形下：令 π_{23} 表示到第二和第三个坐标的投影。那么，对于雅可比矩阵，

$$\frac{\partial\left(\pi_{23}\circ\Xi^{\mathrm{PH}}\circ\log\circ\mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta,\mathcal{N}t\sin\theta,\mathcal{N}(1-t))\right)}{\partial(t,\theta)}=$$

$$(\cos\theta)\cdot\mathrm{AC}\left(\text{¢}\mathrm{os}(b^2-r^2)\cos\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}-b\,\text{¢}\mathrm{in}(b^2-r^2)\sin\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}\right)\cdot\text{¢}\mathrm{in}(b^2-r^2)\cdot$$

$$\left(\mathcal{N}^2t+\frac{\mathcal{N}\acute{\mathcal{N}}}{(\hat{a}^2+\hat{b}^2)^{3/2}}\left(1+(1-t)(2-t(\cos\theta)^2)\mathcal{N}^2\,\text{¢}+t^2(1-t)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2\mathcal{N}^4\,\text{₩}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-t)((1-t)(\sin\theta)^2+(1-t)^2(\cos\theta)^2+t^2(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2)\mathcal{N}^4\,\text{¢}^2\right)\right),$$

其中 /C 和 /W 的参数应为 b^2-r^2。

特别地，当 $\cos\theta\neq 0$ 时，此值非零。

证明。(a) 这是直接计算。(b) 这是引理 2.14(a) 的推论。

(c) 可以应用对数公式，然后通过直接计算得出结果。关于非零性，我们可以看到，除了 $\cos\theta$ 之外，所有乘法项都是正数。□

定义该映射。

$$\mathrm{SH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}:X^{\mathrm{nn}}_{\mathcal{N}}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

by

$$(a,b,r)\mapsto\exp\left(a\,\mathrm{Id}_2+b\tilde{I}+r\tilde{J}\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left(\left(\sqrt{\check{c}^2+\check{d}^2-\left(\frac{\sinh \acute{\mathcal{N}}}{\cosh \acute{\mathcal{N}}}\hat{b}\right)^2}\,\mathrm{Id}_2-\frac{\sinh \acute{\mathcal{N}}}{\cosh \acute{\mathcal{N}}}\hat{b}\tilde{I}\right)\frac{\check{c}\tilde{\mathrm{Id}}_2+\check{d}\tilde{I}}{\check{c}^2+\check{d}^2}\acute{\mathcal{N}}\tilde{J}\right),$$

其中，\hat$a$ 和 \hat$b$ 如引理 8.2 中所述，而 $\acute{\mathcal{N}}\geq 0$。

注意，如果 $0<\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}+\acute{\mathcal{N}}\leq\pi$，那么 log SH$_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}$必然是良定义的（因为 BCH 表示不是 Magnus-最小）。

引理 9.15. 考虑映射SH $_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}$其中 $a=\mathcal{N}t\cos\theta$, $b=\mathcal{N}t\sin\theta$, $r=\mathcal{N}(1-t)$。（因此 $0<t<1$ and $\sin\theta\neq 0$。）我们断言：

(a)

$$\mathrm{mdis}\ \mathrm{SH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(a,b,r)=(\cosh\acute{\mathcal{N}})\,\not{\mathrm{sin}}(b^2-r^2)\frac{rZ+SH}{\sqrt{P}}$$

其中

$$S\equiv\frac{\sinh\acute{\mathcal{N}}}{\cosh\acute{\mathcal{N}}},$$

$$Z\equiv\sqrt{\check{c}^2+\check{d}^2-\left(\frac{\sinh\acute{\mathcal{N}}}{\cosh\acute{\mathcal{N}}}\hat{b}\right)^2},$$

$$P\equiv\check{c}^2+\check{d}^2=1+2(1-t)(\sin\theta)^2\mathcal{N}^2\,\not{\mathrm{C}}+(\sin\theta)^2\mathcal{N}^2\,\not{\mathrm{D}}+(1-t)^2(\sin\theta)^2\mathcal{N}^4\,\not{\mathrm{C}}^2>0,$$

$$H\equiv\frac{\hat{b}\,\check{c}}{\sin\theta}(1-t)+(\check{c}^2+\check{d}^2)t=1+(1-t)(1-t(\cos\theta)^2)\mathcal{N}^2\,\not{\mathrm{C}}+t(\sin\theta)^2\mathcal{N}^2\,\not{\mathrm{D}}>0,$$

因此 /C 和 /D 的参数应为 b^2-r^2。

(b) SH $_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(a,b,r)$ 可取对数，当且仅当

$$(\cosh\acute{\mathcal{N}})\,\not{\mathrm{cos}}(b^2-r^2)+(\sinh\acute{\mathcal{N}})r\,\not{\mathrm{sin}}(b^2-r^2)\frac{\hat{b}\check{d}S+\check{c}Z}{P^2}>-1.$$

其中 S、Z、P 如前所述。

(c) 在可取对数的情形下：令 π_{23} 表示投影到第二和第三个坐标。那么，对于雅可比矩阵，

$$\frac{\partial\left(\pi_{23}\circ\Xi^{\mathrm{PH}}\circ\log\circ\mathrm{SH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta,\mathcal{N}t\sin\theta,\mathcal{N}(1-t))\right)}{\partial(t,\theta)}=$$

$$(\cos\theta)\cdot\mathrm{AC}\left((\cosh\acute{\mathcal{N}})\,\not{\mathrm{cos}}(b^2-r^2)+(\sinh\acute{\mathcal{N}})r\,\not{\mathrm{sin}}(b^2-r^2)\frac{\hat{b}\check{d}S+\check{c}Z}{P^2}\right)\cdot\not{\mathrm{sin}}(b^2-r^2)\cdot$$

$$\frac{\mathcal{N}^2(\cosh\acute{\mathcal{N}})}{P\sqrt{P}}\left(rSF+\frac{S^2FH+t(1-S^2)P^2}{Z}\right),$$

其中 S、Z、P、H 与前文相同，并且

$$F\equiv(\cos\theta)^2+t(\sin\theta)^2\mathcal{N}^2\,\not{\mathrm{C}}+t^2(\sin\theta)^4\mathcal{N}^4\,\not{\mathrm{W}},$$

且 /C 和 /W 的参数应为 b^2-r^2。

特别地，如果 $\cos\theta\neq 0$，则其不为零。

证明。(a) 可通过直接计算得到。(b) 是引理 2.14(a) 的推论。(c) 可以应用对数公式，然后通过直接计算得出结果。关于非零性，我们可以看到，除了 $\cos\theta$ 之外，所有乘法项均为正数。□

令 SEH $\mathcal{N}$, $\acute{\mathcal{N}}$表示 SE $\mathcal{N}$, $\acute{\mathcal{N}}$或 SH $\mathcal{N}$, $\acute{\mathcal{N}}$。我们希望证明

(SEHC$_1$) "如果 $0 < \mathcal{N}$、$\acute{\mathcal{N}}$ 和 $\mathcal{N} + \acute{\mathcal{N}} \leq \pi$，那么

$$\| \log \circ \mathrm{SEH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}} \|_2 : X_{\mathcal{N}}^{\mathrm{nn}} \to [0, +\infty)$$

没有局部极值。"

能够提供这一点的一个陈述可以表述如下。对于 $(a, b, r) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$, $\sqrt{a^2 + b^2}, r > 0$ 令 $\nabla(a, b, r) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 1\right)$。可以将其看作某种范数的梯度。于是，更强的陈述是

(SEHC$_2$) "如果 $0 < \mathcal{N}$, $\acute{\mathcal{N}}$ 和 $\mathcal{N} + \acute{\mathcal{N}}$ 那么

$$\nabla \left(\Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SEH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)$$

and

$$\frac{\partial \left(\Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SEH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)}{\partial \theta} \times \\ \times \frac{\partial \left(\Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SEH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)}{\partial t}$$

（指标准的向量积）不成非负比例。"

一个可能更强的命题如下。对于 $(a, b, r) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$, 令$\pi_{(12)3}$由 $\pi_{(12)3}(a, b, r) = (\sqrt{a^2 + b^2}, r)$ 定义

(SEHC$_3$)"如果 $0 < \mathcal{N}, \acute{\mathcal{N}}$ 和 $\mathcal{N} + \acute{\mathcal{N}} \leq \pi$，那么雅可比矩阵

$$\frac{\partial \left(\pi_{(12)3} \circ \Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SEH}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)}{\partial (t, \theta)}$$

不为零。"

这一后一个命题在某些特殊情况下（对于 $\mathcal{N}$ 和 $\acute{\mathcal{N}}$）可以得到证明，但我不知道一般性的论证。

备注 9.16。对于 SE,

$$0 \ll \frac{\frac{\partial \left(\pi_{(12)3} \circ \Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)}{\partial (t, \theta)}}{(\sin\theta)(\cos\theta)(1-t)\,\mathrm{AC}\left(\not{C}\mathrm{os}(b^2 - r^2)\cos\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}} - b\not{S}\mathrm{in}(b^2 - r^2)\sin\frac{\hat{b}\acute{\mathcal{N}}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}} \right)^2} \ll +\infty$$

似乎是这样（对于固定的 $\mathcal{N}$ 和$\acute{\mathcal{N}}$ ）。对于 SH,

$$0 \ll \frac{\frac{\partial \left(\pi_{(12)3} \circ \Xi^{\mathrm{PH}} \circ \log \circ \mathrm{SE}_{\mathcal{N},\acute{\mathcal{N}}}(\mathcal{N}t\cos\theta, \mathcal{N}t\sin\theta, \mathcal{N}(1-t)) \right)}{\partial (t, \theta)}}{(\sin\theta)(\cos\theta)(t^2 + (\cos\theta)^2)} \cdot \sqrt{t^2 + (\sin\theta)^2} \ll +\infty$$

似乎成立。这些估计可在若干特殊情形下建立。 △

10. The balanced critical BCH case

设 $\alpha_0 \in (-\pi, \pi)$。考虑

$$\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}} = \left\{ \log(\exp(A)\exp(B)) \,:\, A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \|A\|_2 \le \frac{\pi-\alpha_0}{2}, \|B\|_2 \le \frac{\pi+\alpha_0}{2} \right\}.$$

这不是一个闭集。原因是对数在 –Id 处未定义，因此通常的紧性论证不适用。这一良定义性方面的失败只影响两种情况，即（A, B）$= \left(\frac{\pi-\alpha_0}{2}\tilde{I}, \frac{\pi+\alpha_0}{2}\tilde{I}\right)$和（$A$, B）$= \left(-\frac{\pi-\alpha_0}{2}\tilde{I}, -\frac{\pi+\alpha_0}{2}\tilde{I}\right)$。然而，闭包$\overline{\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2}\ \frac{\pi+\alpha_0}{2}}}$比 $\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2}\ \frac{\pi+\alpha_0}{2}}$更大，还包含若干个 $-\mathrm{Id}_2$, 的拟对数，正如定理 7.1₂ ， ₂ ₂ ， ₂所示。（在此情形下，对数(指数(A)指数(B)) 与BCH(A, B)相同，只是后者处处有定义，但在临界点仍不连续。因此，将上述集合与 $\{\pi I, -\pi I\}$ 的并集作为其一个相当合理的版本是可行的。）

定理 10.1. (a) 元素

$$\overline{\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}} \setminus \mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}} = \partial\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}} \setminus \mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}$$

恰好是形如 B 的元素

$$B = b\tilde{I} + c\tilde{J} + d\tilde{K}$$

with

$$b^2 - c^2 - d^2 = \pi^2$$

and

$$\pi \le |b| + \sqrt{c^2+d^2} \le \pi\sqrt{\frac{\pi - |\alpha_0| + 2\cos\frac{\alpha_0}{2}}{\pi - |\alpha_0| - 2\cos\frac{\alpha_0}{2}}}.$$

(b) .....的元素

$$\partial\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}} \cap \mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}$$

都具有 log((exp A)(log B)) 的形式，其中 $\|A\|_2 = \frac{\pi-\alpha_0}{2}$和 $\|B\|_2 = \frac{\pi+\alpha_0}{2}$满足 ($A, B$ 是 BCH 极小对。

(c) The interior of $\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}$ *is connected, containing* 0.

证明。(a) 该集合应当在正交矩阵的共轭作用下保持闭合，并且根据指数的连续性，它们的指数函数为 –Id₂。因此，唯一需要考虑的就是范数，但定理 7.1 已经解决了这一点。(b)、(c) 只要将定义域限制为 $\{z \in \mathbb{C}$ 中的谱： |虚部 $z| < \pi\}$，这些结论就可由指数的开性推出。□

集合 $\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2}\ \frac{\pi+\alpha_0}{2}}$ 在正交旋转的共轭作用下是闭的，因此可以通过 Ξ^{PH} 对其进行可视化。然后， $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\left(\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}\right)$按预期是一个二维对象，描述了 $\left(\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}\right)$。在上一节中，我们为（无穷小）BCH 极小对设计了若干限制。事实上，我们发现，$\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\left(\mathcal{B}_{\frac{\pi-\alpha_0}{2},\frac{\pi+\alpha_0}{2}}\right)$必须包含在有限个、至多二维的流形的连续像的并集中，这些流形可以被明确描述。尽管如此，与这些对象进行计算仍然十分繁琐。

因此，我们将注意力限制在$\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$（即 $\alpha_0 = 0$）这一情形上，这对我们而言是最重要的情形。在给出任何论证之前，先通过下面的图 4 展示我们将得到的结果：

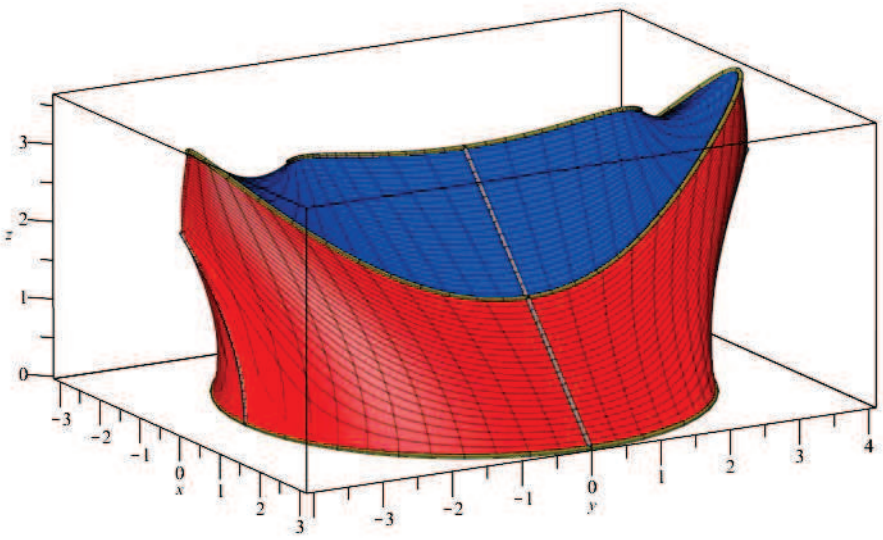
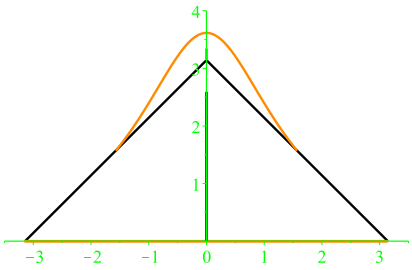
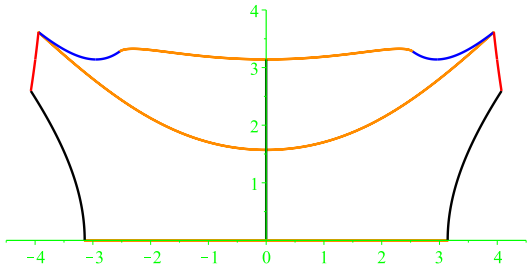


图 4(a) $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$



4(b) xz-投影



4(c) yz-投影

$\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$是一个“楔形帽”。看到的是以下内容（注意，此处的 $\mathcal{N} \equiv \pi/2$）：

- 在中上部，我们看到Schur 双双曲脊线，即来自 $\partial_{\text{双曲型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{双曲型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ 的（无穷小）极小对的像。
- 与之相连，我们看到舒尔抛物线段（在 xz-平面中），它们是来自 $\partial_{\text{抛物}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{抛物}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$的（无穷小）极小对的像。
- 中间的脊是舒尔椭圆-双曲脊，即来自 $\partial_{\text{椭圆型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{双曲型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$或 $\partial_{\text{双曲型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{椭圆型}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$的（无穷小）极小对的像（转置不变性表明两者相等）。
- 在前后方可以看到闭包奇异线段（位于 yz-平面中），这些˜ ˜像来自趋近于 $\pm(\frac{\pi}{2}I, \frac{\pi}{2}I)$
- 最底部可以看到舒尔双椭圆边缘，即来自 $\partial_{\text{椭圆型}^1}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{椭圆型}^1}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$和 $\partial_{\text{椭圆型}^*}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \partial_{\text{椭圆型}^*}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$的（无穷小）极小对的像，但不包括 $\pm(\frac{\pi}{2}\tilde{I}, \frac{\pi}{2}\tilde{I})$，因为它们是例外情形（也就是说，前一种情况被排除）。
- 上方的蓝色区域是舒尔光滑-双曲区域，即来自 $\mathcal{S}_{\mathrm{nn}^{\mathcal{N}}} \times \partial_{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ 或 $\partial_{\mathrm{hyp}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \mathcal{S}_{\mathrm{nn}^{\mathcal{N}}}$ 的（无穷小）极小对的像。（再次注意转置不变性。）

• 下方的红色区域是 Schur 光滑-椭圆型区域，即来自 $\mathcal{S}_{\mathrm{nn}\mathcal{N}} \times \partial_{\mathrm{ell}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ 或 $\partial_{\mathrm{ell}}\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \times \mathcal{S}_{\mathrm{nn}\mathcal{N}}$ 的（无穷小）极小对的像。

Re标记 10.2。$\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\mathcal{N},\mathcal{N}}$ 的情况与 $0 < \mathcal{N} < \frac{\pi}{2}$ 类似，参见图 5 ，

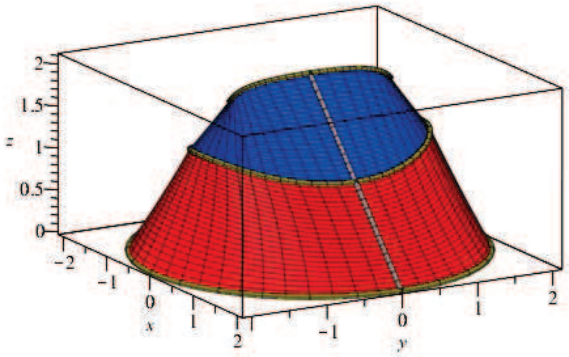
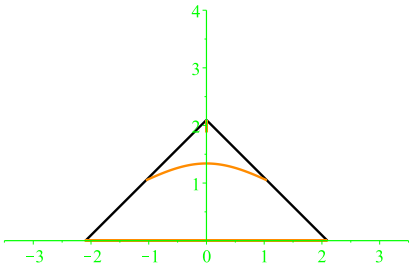
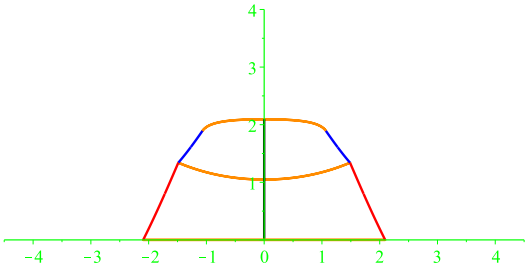


图 5(a) $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}}$



5(b) xz-投影



5(c) yz-投影

但“闭合”奇点不会出现。 △

现在让我们把图 4 的“表述”说得更精确一些。让我们固定选择$\mathcal{N} = \pi/2$。

• 我们将 Schur 双双曲型参数化定义为映射

$$\psi \in \left[-2\arctan\mathcal{N}, 2\arctan\mathcal{N}\right] \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}} \log\left(\exp\left(\mathcal{N}\tilde{J}\right)\exp\left(\mathcal{N}((\cos\psi)\tilde{J} + (\sin\psi)\tilde{K})\right)\right).$$

• 我们将 Schur 抛物型参数化定义为映射

$$(\sigma, t) \in \{1,-1\} \times (-1,1) \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}}\left(\sigma \cdot \mathcal{N} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & t \end{bmatrix}\right).$$

• 我们将 Schur 椭圆型*-双曲型参数化定义为映射

$$\psi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}} \log\left(\exp\left(\mathcal{N}((\cos\psi)\tilde{\mathrm{Id}}_2 + (\sin\psi)\tilde{I})\right)\exp\left(\mathcal{N}\tilde{J}\right)\right).$$

• 我们将闭合参数化定义为映射

$$(\sigma, r) \in \{-1,1\} \times \left[0, \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2 - 4}}\right] \mapsto \left(0, \sigma \cdot \sqrt{\pi^2 + r^2}, r\right).$$

- 我们将 Schur 双椭圆参数化定义为映射

$$\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}}\left(\not{N}((\cos\psi)\tilde{\mathrm{Id}}_2 + (\sin\psi)\tilde{I})\right).$$

- 我们将 Schur 光滑双曲参数化定义为映射

$$(a,b,r) \in X_{\not{N}} \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}} \log\Bigg(\exp\left(a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I} + r\tilde{J}\right) \cdot \\ \cdot \exp\left(\left(\sqrt{\check{c}^2 + \check{d}^2 - \left(\frac{\sinh\not{N}}{\cosh\not{N}}\hat{b}\right)^2}\,\mathrm{Id}_2 - \frac{\sinh\not{N}}{\cosh\not{N}}\hat{b}\tilde{I}\right)\frac{\check{c}\tilde{\mathrm{Id}}_2 + \check{d}\tilde{I}}{\check{c}^2 + \check{d}^2}\not{N}\tilde{J}\right)\Bigg).$$

（这里使用了引理 8.2 中的缩写。）

- 类似地，我们将 Schur 光滑椭圆参数化定义为映射

$$(a,b,r) \in X_{\not{N}} \mapsto \Xi^{\mathrm{PH}} \log\left(\exp\left(a\,\mathrm{Id}_2 + b\tilde{I} + r\tilde{J}\right)\exp\left(\frac{\hat{a}\,\mathrm{Id}_2 + \hat{b}\tilde{I}}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2}}\not{N}\right)\right).$$

我们将这些映射称为 $\left(\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right)$ 情形下的典范参数化。

注 10.3。对于 $0 < \not{N} < \frac{\pi}{2}$，$\left(\not{N}\ \not{N}\right)$ 情形下的典范参数化也可以类似地定义，但情况更简单：没有闭合参数化，不过 Schur 双椭圆参数化可以对 $[0, 2\pi]$ mod 2π 完整定义。△

定理 10.4. (a) $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$中的每个元素都是某个 BCH 极小对的像，满足范数条件 $\not{N}_1 = \not{N}_2 = \pi/2$，但闭包奇点除外。反过来，任意此类 BCH 极小对的像或闭包奇点中的点都属于 $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$。

(b) 典范参数化合在一起双射到 $\partial\Xi^{\mathrm{PH}}\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$，且这些像在拓扑上拼接起来的方式如图 4 所示。

证明。首先我们证明，非BCH极小点映射到内部。事实上，至少有一个分量可以替换为范数小于 $\pi/2$的元素。由于在这些情况下指数映射和对数将是开映射，对该项进行扰动会在像中产生一个开邻域。这证明了 (a)的第一部分。第二部分，事实上也是该陈述的其余部分，只要我们证明典范映射的像在拓扑上拼合成一个半球面，就可由拓扑原因得到。对于1维典范参数化，单射性和拓扑关联很容易检验。接下来可以证明，2 维参数化以预期的方式在其边界上取极限。在这方面，ACKB或 AHP中的爆破是˜ ˜必不可少的，但在对 $\pm(\frac{\pi}{2}I, \frac{\pi}{2}I)$ 这些点对处，连续性（事实上是良定义性）会˜失效。然而，我们知道这些极限经过指数映射后得到 $\pm\pi I$，并且根据定理 7.1，我们知道范数的值域。由此可以恢复闭合奇点。此外，由于BCH公式，（迹）坐标 x 中的符号关系很容易得到。对于1 维典范参数化，我们还可以加入光滑双曲型和光滑椭圆型典范参数化的 $a = 0$ 情形。根据 x中的符号关系，只需证明光滑双曲型和光滑椭圆型典范参数化的 $a \neq 0$ 部分的 yz-投影具有不消失的雅可比矩阵。因此，它们会如预期填充图4(c) 中相应的区域。（这也表明它们与闭合奇点恰当地拼合。）□

定理 10.5。

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\exp\frac{\pi}{2} = \left(\sup_{\substack{A,B\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\\ \|A\|_2=\|B\|_2\le\pi/2}} \|\log((\exp A)(\exp B))\|_2\right).$$

~ ~（这里的例外情形 $A = B = \frac{\pi}{2}I$和 $A = B = -\frac{\pi}{2}I$不参与上确界。不过，记作 BCH(A, B) 时，它们也可以参与。）

证明思路。因此，需要证明

$$\sup\{\|S\|_2 : S \in \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\} = \frac{\pi}{2}\exp\frac{\pi}{2}.$$

根据定理 10.1，我们可以用 $\partial\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}}$替换 $\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}}$，实际上可以用 $\partial\mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}} \cap \mathcal{B}_{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}}$替换。通过各种估计，我们可以将极大值局部化到图 4(a)中尖角附近。进一步估计表明，尖角附近 Schur 光滑椭圆部分和 Schur 光滑双曲部分的梯度方向与极大值所在方向不一致。因此，只需在 Schur 椭圆*-双曲部分上求最优值。最终，我们在那里得到了预期的极大值尖角。□

注 10.6. 在前面的证明中，关键在于将问题约化到一维边界部分。更不那么临时凑合的做法是证明（例如），（SECH_3）对 $\mathcal{N} = \mathcal{N} = \frac{\pi}{2}$ 成立，这作为一个特例相当容易处理。对于一维优化，方法不过寥寥几种。△

似乎可以合理地预期

（SM_0）“如果 $0 < \mathcal{N}, \mathcal{N}$ 并且 $\mathcal{N} + \mathcal{N} \le \pi$，那么对于 $E \in \mathcal{B}_{\mathcal{N},\ \mathcal{N}}$， $\|E\|_2$的最大值在无迹矩阵对处取得。”

看来，大范数源于非交换性，因此加入迹部分似乎毫无意义。同样，这在若干特殊情形下很容易证明，但我不知道一般性的证明。不过，也许一个相当简单的论证就足够了。

注 10.7. 然而，即使在情形 $\mathcal{N} = \mathcal{N}$下，极大值的位置也并非显而易见。事实上，在这种情况下，存在一个临界值

$$C_0 = \pi \cdot 0.392744\ldots$$

使得当 $0 < \mathcal{N} = \mathcal{N} < C_0$时，极大值在 Schur 双双曲脊线上取得（参见图 5）；当 $C_0 < \mathcal{N} = \mathcal{N} \le \pi$时，极大值在 Schur 椭圆*-双曲脊线上取得；而当 $p = C_0$时，两处都能取得。△

因此，可以预期

(SM+)“如果 $0 < \mathcal{N}, \mathcal{N}$且 $\mathcal{N}+\mathcal{N} \le \pi$，但 $\mathcal{N}+\mathcal{N}$足够大，那么对于 $E \in \mathcal{B}_{\mathcal{N},\mathcal{N}}$， $\|E\|_2$的最大值在无迹 Schur 椭圆型-双曲型对处取得，conform-involution 的范数小于或等于 conform-skew-involution 的范数。”

不过，这一点仍需进一步探讨。

备注 10.8. 如果这是真的，那么例6.4似乎就是紧确情形。 △

11. Principal disks and logarithm

引理 11.1. 设 A 是一类可取对数的实 2×2 矩阵，其主圆盘

$$\mathrm{PD}(A)=\mathrm{D}(a+\mathrm{i}b,r).$$

在这种情况下,

$$\|\log A\|_2=f_{\mathrm{CA}}(a,b,r)+f_{\mathrm{RD}}(a,b,r), \tag{98}$$

and

$$\lfloor\log A\rfloor_2=f_{\mathrm{CA}}(a,b,r)-f_{\mathrm{RD}}(a,b,r), \tag{99}$$

其中

$$f_{\mathrm{CA}}(a,b,r)=\sqrt{\left(\log\sqrt{a^2+b^2-r^2}\right)^2+\left(\frac{b\,\mathrm{AC}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\right)^2}$$

and

$$f_{\mathrm{RD}}(a,b,r)=\frac{r\,\mathrm{AC}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}.$$

特别地，若 $\det A=1$，则 $a^2+b^2-r^2=1$，且 $f_{\mathrm{CA}}(a,b,r)=\mathrm{AC}(a)b$,$f_{\mathrm{RD}}(a,b,r)=\mathrm{AC}(a)r$。

证明。这只是对 (36) 和 (44)–(48) 的组合，并已显式计算。 □

定理 11.2. 假设 A_1、A_2 是可取对数的实 2×2 矩阵，使得

$$\mathrm{PD}(A_1)\subset\mathrm{PD}(A_2).$$

Then

$$\|\log A_1\|_2\le\|\log A_2\|_2. \tag{100}$$

and

$$\lfloor\log A_1\rfloor_2\ge\lfloor\log A_2\rfloor_2. \tag{101}$$

备注。$\|\cdot\|_2$ 的单调性是严格的，除非 $\mathrm{PD}(A_1)$ 和 $\mathrm{PD}(A_2)$ 以实数轴为中心，且 $\sup\{|\text{对数 } x|:x\in\mathbb{R}\cap\mathrm{PD}(A_1)\}=\sup\{|\text{对数 } x|:\ x\in\mathbb{R}\cap\mathrm{PD}(A_2)\}$。

$\lfloor\cdot\rfloor_2$ 的单调性是严格的，除非 $\mathrm{PD}(A_1)$ 和 $\mathrm{PD}(A_2)$ 以实数轴为中心，且 $\inf\{|\text{对数 } x|:x\in\mathbb{R}\cap\mathrm{PD}(A_1)\}=\inf\{|\text{对数 } x|:\ x\in\mathbb{R}\cap\mathrm{PD}(A_2)\}$。 □

证明。令 $f(a,b,r)$ 表示(98) 右侧的函数表达式。然后，通过直接但冗长的计算即可验证恒等式 (102)

$$\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial a}\right)^2-\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial b}\right)^2=\left(\frac{f(a,b,r)}{f_{\mathrm{CA}}(a,b,r)}\frac{b\,\mathrm{AS}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\right)}{a^2+b^2-r^2}\right)^2.$$

这是有效的，但 $b=0$ 且 $a=\sqrt{1+r^2}$ 这两种例外构型除外。特别是，如果 $b>0$，那么

$$\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial a}\right)^2-\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial b}\right)^2>0.$$

主圆盘与 $b>0$ 构成一个连通集合，因此

$$\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial r} > \sqrt{\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial b}\right)^2} \tag{103}$$

or

$$\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial r} < -\sqrt{\left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial b}\right)^2}$$

对 $b>0$ 应当全局成立。问题是：哪一个？只需在某一点检查符号 $^{\partial f}{}_{(a,\ b,\ r)\ \partial r}$。现在，~~不难验~~证

$$\frac{\partial f(a,b,r)}{\partial r}\Big|_{r=0} = \frac{\mathrm{AC}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（除非 $a=1, b=0$），这说明 (103) 成立。(103) 的含义是，以非实中心平滑地扩张主圆盘，会导致对数的范数增大。

我们回到陈述中的主圆盘 $D_i = \mathrm{PD}(A_i)$。若 $b_1, b_2 > 0$，则可将较小的圆盘扩张至较大的圆盘，同时保持中心非实。（事实上，从 D_2 的最低点开始放大，直至圆周相切，然后从切点开始放大。）这就证明了 $b_1, b_2 > 0$ 时的 (100)。一般情形可由对数范数的连续性得出。注意，如果我们能够通过 $b>0$ 扩张，范数就会增大。

关于 (101)：令 $f_{\mathrm{co}}(a,b,r)$ 表示(99) 右侧的函数表达式。它满足完全相同的方程 (102)，但其中的 $f(a,b,r)$ 全部替换为 $f_{\mathrm{co}}(a,b,r)$。然而，

$$\frac{\partial f_{\mathrm{co}}(a,b,r)}{\partial r}\Big|_{r=0} = -\frac{\mathrm{AC}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

其余部分类似。 □

引理 11.3. 假设 A_1、A_2 是实 2×2 矩阵。那么

$$\mathrm{PD}(A_1) \subset \mathrm{PD}(A_2)$$

当且仅当成立。

$$\|A_1 + \lambda \,\mathrm{Id}\,\|_2 \le \|A_2 + \lambda \,\mathrm{Id}\,\|_2 \qquad \textit{for all } \lambda \in \mathbb{R}$$

and

$$\lfloor A_1 + \lambda \,\mathrm{Id}\rfloor_2 \ge \lfloor A_2 + \lambda \,\mathrm{Id}\rfloor_2 \qquad \textit{for all } \lambda \in \mathbb{R}.$$

证明。范数和余范数可以立即从主圆盘中读出。因此，该陈述是简单的几何结论。 □

定理 11.4. 假设 A_1, A_2 是可取对数的实 2×2 矩阵。如果

$$\mathrm{PD}(A_1) \subset \mathrm{PD}(A_2),$$

then

$$\mathrm{PD}(\log A_1) \subset \mathrm{PD}(\log A_2).$$

单调性是严格的。类似的陈述适用于 CD。

证明。在这种情况下，矩阵 $\mathrm{e}^{\lambda}A_i$ 也将是可取对数的。此外，$\mathrm{PD}(\mathrm{e}^{\lambda}A_1) \subset \mathrm{PD}(\mathrm{e}^{\lambda}A_2)$成立。现在，对数$(\mathrm{e}^{\lambda}A_i) =$对数 $A_i + \lambda\,\mathrm{Id}$。根据前述定理，$\|$对数 $A_1 + \lambda\,\mathrm{Id}\,\|_2 \leq \|$对数 $A_2 + \lambda\,\mathrm{Id}\,\|_2$ 以及 $\lfloor A_1 + \lambda\,\mathrm{Id}\rfloor_2 \geq \lfloor A_2 + \lambda\,\mathrm{Id}\rfloor_2$ 对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$都成立。根据前述引理，这意味着主要结论。在这种情况下，单调性是显然的，因为对数和指数都与正交矩阵的共轭相容，因此轨道对应是一一对应的。对数保持手性，因此该结论也可以转移到手性圆盘。□

12. Examples: The canonical Magnus developments in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

例 12.1。（Magnus 抛物型展开。）在区间 $[0,\pi]$ 上，再次考虑测度 Φ，使得

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\theta|_{[0,\pi]}.$$

那么，对于 $p \in [0,\pi)$，

$$\int \|\Phi|_{[0,p]}\|_2 = p.$$

Here

$$\exp_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]}) = W(p,p) = \begin{bmatrix} \cos p & 2p\cos p - \sin p \\ \sin p & 2p\sin p + \cos p \end{bmatrix} = (\cos p\,\mathrm{Id} + \sin p\tilde{I})(\mathrm{Id}_2 - p\tilde{I} + p\tilde{K}).$$

Thus

$$\mu_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]}) = \log \exp_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]}) = \mathrm{AC}(\cos p + p\sin p) \begin{bmatrix} -p\sin p & 2p\cos p - \sin p \\ \sin p & p\sin p \end{bmatrix}.$$

因此，

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]})\|_2 = \mathrm{AC}(\cos p + p\sin p)\cdot(\sin p - p\cos p + p).$$

当 $p \searrow 0$

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]})\|_2 = p + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{72}p^5 + \frac{17}{3024}p^7 + O\left(p^9\right). \tag{104}$$

由于 $p \nearrow \pi$,

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]})\|_2 = \sqrt{2}\pi^{3/2}(\pi-p)^{-1/2} - 2\pi + \frac{\sqrt{2\pi}(\pi^2-1)}{4}(\pi-p)^{1/2} + O(\pi-p). \tag{105}$$

这不仅优于（9），而且还有一个优点：可以从发散的微分方程解来理解。♢

例 12.2.（Magnus 椭圆型展开。）设 $h \in [0,1]$ 为参数。在区间 $\widehat{\ } [0,\pi]$ 上，考虑测度 Φ_h，使得

$$\widehat{\Phi}_h(\theta) = (1-h)\begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\theta|_{[0,\pi]}.$$

那么，对于 $p \in [0,\pi)$

$$\int \|\widehat{\Phi}_h|_{[0,p]}\|_2 = p.$$

容易看出，

$$\exp_{\mathrm{L}}(\widehat{\Phi}_h|_{[0,p]}) = F((1-h)p, hp, p) =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos p & 2w\cos p - \sin p \\ \sin p & 2w\sin p + \cos p \end{bmatrix} = (\cos p\,\mathrm{Id} + \sin p\tilde{I})(\mathrm{Id}_2 - w\tilde{I} + w\tilde{K}).$$

此处有 $\Phi_1=\Phi$。我们发现,

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi_h|_{[0,p]})\| = \|\text{对数 指数}_{\mathrm{L}}(\Phi_h|_{[0,p]})\| = \mathrm{AC}(\cos p + hp\sin p)\cdot(\sin p - hp\cos p + hp)$$

。因此，如果 $h\neq 0$，则

$$\lim_{p\nearrow\pi}\|\mu_{\mathrm{L}}(\widehat{\Phi}_h|_{[0,p]})\|_2 = +\infty.$$

值得注意的是

$$\mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\widehat{\Phi}_h|_{[0,p]})) = \mathrm{D}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}ph, ph),$$

它是由边界点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$ 以因子 h 收缩得到的 $\mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\Phi|_{[0,p]}))$。 ♢

例 12.3.（Magnus 双曲型发展。）更一般地，设 t 为实参数。在区间 $[0,\pi]$ 上考虑测度 $\Phi_{\sin t}$，使得

$$\Phi_{\sin t}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin 2(\theta\sin t) & \cos 2(\theta\sin t) \\ \cos 2(\theta\sin t) & \sin 2(\theta\sin t)\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta|_{[0,\pi]}.$$

那么，对于 $p\in[0,\pi)$

$$\int \|\Phi_{\sin t}|_{[0,p]}\|_2 = p.$$

~ ~Φ_1 与 Φ 相同，且 $\Phi_{-1}=K\cdot\Phi_1\cdot K$。若 $t\in(-\pi/2,\pi/2)$，则

$$\begin{aligned}&\exp_{\mathrm{L}}(\Phi_{\sin t}|_{[0,p]}) = W(p, p\sin t)\\ &= (\cos(p\sin t)\,\mathrm{Id} + \sin(p\sin t)\tilde{I})\cdot\left(\cosh(p\cos t)\,\mathrm{Id}_2 + \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\left(-\sin t\tilde{I}+\tilde{K}\right)\right).\end{aligned}$$

因此,

(106)

$$\begin{aligned}\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi_{\sin t}|_{[0,p]})\|_2 &= \mathrm{AC}\left(\cosh(p\cos t)\cos(p\sin t) + \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\sin(p\sin t)\sin t\right)\\ &\cdot\left(\left|\cosh(p\cos t)\sin(p\sin t) - \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\cos(p\sin t)\sin t\right| + \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\right).\end{aligned}$$

现在，在特殊情形 $p/\pi=\sin t$ 下，我们看到

$$\int\|\Phi_{p/\pi}|_{[0,p]}\|_2 = p,$$

and

$$\begin{aligned}(107)\quad \|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi_{p/\pi}|_{[0,p]})\|_2 &= \sqrt{2}\pi^{3/2}(\pi-p)^{-1/2} - 2\pi + \frac{\sqrt{2\pi}(4\pi^2-3)}{12}(\pi-p)^{1/2}\\ &- \frac{4\pi^2-3}{3}(\pi-p)^1 + \frac{\sqrt{2}(368\pi^2-840\pi^2-45)}{1440\sqrt{\pi}}(\pi-p)^{3/2} + O((\pi-p)^2).\end{aligned}$$

这也表明 (105) 不是最优的。 ♢

备注 12.4. 对于 $t\in[-\pi/2,\pi/2]$ 和 $p\in[0,\pi]$,

$$\cosh(p\cos t)\sin(p\sin t) - \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\cos(p\sin t)\sin t \geq 0$$

成立。（理解为 $=0$ 对于 $t=0$。它对于 $p=0$也 $=0$ 。）因此，在这些假设下，式 (106) 中的绝对值是不必要的。△

13. Magnus minimality in the $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ case

定理 13.1。设 $p \in (0,\pi)$。考虑由 $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ 参数化的圆盘族，其中心和半径为

$$\Omega_p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\sin t}\left(\cosh(p\cos t) - \mathrm{i}\frac{\sinh(p\cos t)\sin t}{\cos t}\right),$$

$$\omega_p(t) = \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t},$$

对于 $t \neq \pm\pi/2$；以及

$$\Omega_p(\pm\pi/2) = (\cos p + p\sin p) \pm \mathrm{i}(\sin p - p\cos p),$$

$$\omega_p(\pm\pi/2) = p.$$

(a) 圆 $\partial\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t))$ 与 $\partial\exp\mathrm{D}(0,p)$ 相切于

$$\gamma_p(t) = \mathrm{e}^{p\cos t + \mathrm{i}p\sin t} \qquad and \qquad \gamma_p(\pi - t \bmod 2\pi) = \mathrm{e}^{-p\cos t + \mathrm{i}p\sin t}.$$

这些点关于单位圆互为反演点。如果这两点重合（$t = \pm\pi/2$），那么该圆盘就是 $\gamma_p(t)$ 处的密切圆盘。

这些圆盘本身与单位圆正交。它们彼此不同。将 $t \in [-\pi,\pi]$ 延拓后，我们有 $\Omega_p(t) = \Omega_p(\pi - t \bmod 2\pi)$, $\omega_p(t) = \omega_p(\pi - t \bmod 2\pi)$.

(b)

$$\mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\Phi_{\sin t}|_{[0,p]}) = \mathrm{CD}(W(p, p\sin t)) = \mathrm{D}(\Omega_p(t), \omega_p(t)).$$

(c) 圆盘 $\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t))$ 是 $\exp\mathrm{D}(0,p)$ 中的极大圆盘。极大圆盘 $\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t))$ 仅在 $\gamma_p(t)$ 处与 $\partial\exp\mathrm{D}(0,p)$ 相切，其中 $\gamma_p(\pi - t \bmod 2\pi)$。

Proof. (a) 这些圆盘彼此不同，因为它们的中心各不相同：对于 $t \in (-\pi/2,\pi/2)$，

$$\frac{\mathrm{d}\arg\Omega_p(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\log\Omega_p(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{(p\sin(t)\cosh(p\sin t) - \cosh(p\cos t))\cosh(p\sin t)}{\cosh(p\sin t)^2 - \sin^2 t} > 0.$$

（参见 $\int_0^x y\sinh y\,\mathrm{d}y = x\cosh x - \sinh x$.）其余部分利用这一观察很容易验证

$$\Omega_p(t) = \mathrm{e}^{p\cos t + \mathrm{i}p\sin t} - \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t + p\sin t)} = \mathrm{e}^{-p\cos t + \mathrm{i}p\sin t} + \frac{\sinh(p\cos t)}{\cos t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-t + p\sin t)}.$$

(b) 这是直接计算。

(c) 一般而言，极大圆盘与边界曲线 γ_p 相切，而任意这样的切点都确定一个极大圆盘。（但一个极大圆盘可能对应不同的点。）由于双切线／密切性质，一旦证明给定的圆盘确实包含于 $\exp\mathrm{D}(0,p)$ 中，它们显然就是极大圆盘。然而，$\mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\Phi_{\sin t}|_{[0,p]}) = \mathrm{D}(\Omega_p(t)\,\omega_p(t))$ 与定理 1.2 一起表明，$\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t)) \subset \exp\mathrm{D}(0,p)$。这些圆彼此不同，这意味着它们仅在所指示的点处与边界相切。□

$\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t)) \subset$ 指数 $\mathrm{D}(0,p)$ 的另一种证明。这里给出一种纯粹的微分几何论证。

可以看出，给定的圆盘 $\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t))$ 由以下性质刻画：

(α) 如果$\gamma_p(t) \neq \gamma_p(\pi - t$ 模 $2\pi)$，那么圆盘在这些点处与γ_p 相切。
(β) 如果 $\gamma_p(t) = \gamma_p(\pi - t \bmod 2\pi)$，即 $t = \pm\pi$，那么该圆盘是$\gamma_p(\pm\pi/2)$处的密切圆盘。

现在，我们证明 $\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t)) \subset$ 指数 $\mathrm{D}(0,p)$。首先，我们证明 $\mathrm{D}(\Omega_p(0)\,\omega_p(0)) \subset$指数 $\mathrm{D}(0,p)$。事实上，

$$\mathrm{D}(\Omega_p(0),\omega_p(0)) = \mathrm{PD}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{p} & \\ & \mathrm{e}^{-p}\end{bmatrix}\right);$$

因此，根据定理 1.2，$\mathrm{D}(\Omega_p(0)\omega_p(0))$ 中任意元素的对数包含于

$$\mathrm{PD}\left(\log\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{p} & \\ & \mathrm{e}^{-p}\end{bmatrix}\right) = \mathrm{PD}\left(\begin{bmatrix} p & \\ & -p\end{bmatrix}\right) = \mathrm{D}(0,p).$$

令 L 为最大的实数，使得对于任意 $t\in[-L,L]$ 和 $L<\pi/2$，$\mathrm{D}(\Omega_p(t)\omega_p(t)) \subset \exp \mathrm{D}(0,p)$。（由连续性可知，最大值存在。）间接地，假设 $L<\pi/2$。那么以下情况之一应当发生:

(i) 除了 $\gamma_p(L)$ 和 $\gamma_p(\pi - L \bmod 2\pi)$ 之外，还有另一对不同的点（由于反演对称性），即 $\gamma_p(L)$ 和 $\gamma_p(\pi - L \bmod 2\pi)$，在此处 $\mathrm{D}(\Omega_p(L)\omega_p(L))$ 与 $\exp \mathrm{D}(0,p)$ 的边界相切。

(ii) $\mathrm{D}(\Omega_p(L)\omega_p(L))$ 在 $\gamma_p(\pi/2)$ 或 $\gamma_p(-\pi/2)$ 处接触边界。

(iii) $\mathrm{D}(\Omega_p(L)\omega_p(L))$在 $\gamma_p(L)$ 处或在 $\gamma_p(\pi - L \bmod 2\pi)$ 处密切接触。

（对称性意味着 $t=\pm L$ 同样糟糕。）情况（i）不可能，因为给定的圆彼此不同，且特征性质成立。情况（ii）不可能，因为由于 $\omega_p(L) > p$ 以及 $\arg\gamma_p(\pm\pi/2)$ 的极值性，该情形将意味着 $\mathrm{D}(\Omega_p(L)\omega_p(L))$ 严格包含 $\gamma_p(\pi/2)$ 或 $\gamma_p(-\pi/2)$ 处的密切圆盘，这与 $\mathrm{D}(\Omega_p(L)\omega_p(L)) \subset$ 指数 $\mathrm{D}(0,p)$ 矛盾。情况（iii）不可能，因为对于 γ_p 的有向平面曲率，

$$\varkappa_{\gamma_p}(t) = \frac{1+p\cos t}{p\mathrm{e}^{p\cos t}} < \frac{1}{\omega_p(t)} = \frac{\cos t}{\sinh(p\cos t)}$$

当 $\cos t\neq 0$ 时成立。（一般而言，对于 $x\neq 0$，$\frac{1+x}{\mathrm{e}^x} < \frac{x}{\text{双曲正弦}\,x}$。）这意味着 $L=\pi/2$，从而证明了该结论。□

下文中，对于诸如 $\frac{px}{\text{双曲正弦}_x}$ 当$x=0$这样的表达式，我们不会过于纠结；本着连续性的精神，我们只是假定它们等于 p。

定理 13.2. 假设 $p\in(0,\pi)$。假设 D 是 $\exp \mathrm{D}(0,p)$ 中的一个圆盘，它在 $\gamma_p(t) = \mathrm{e}^{p\,\text{余弦}\,t+\text{虚数单位}p\,\text{正弦}\,t}$ 处与 $\partial\exp \mathrm{D}(0,p)$ 相切。那么，对于适当的非负分解 $p=p_1+p_2$，

$$D = \mathrm{CD}\left(\exp(p_1(\mathrm{Id}\cos t + \tilde{I}\sin t))\cdot W(p_2, p_2\sin t)\right).$$

p_2 越大，相应的圆盘就越大。$p_2=p$ 对应最大圆盘，$p_2=0$ 对应点圆盘。

证明。令 $W_{p_1,\ p_2,\ t}$ 表示 CD 的辐角。那么，它的第一分量由范数 p_1 可 Magnus 可指数化，第二分量由范数 p_2 可 Magnus 可指数化。因此，主圆盘必定包含于 $\exp \mathrm{D}(0,p)$。可以计算手性圆盘的中心和半径（参见备注），并发现 $\gamma_p(t)$ 位于该圆盘的边界上。因此，$\mathrm{CD}(W_{p_1,\ p_2,\ t})$ 必定是由 $\gamma_p(t)$ 收缩而来的最大 $\mathrm{CD}(W_{0,\ p_1+p_2,\ t})$。特别地，可以得到 $\mathrm{CD}(W_{p_1,\ p_2,\ t})$ 的半径为

$$\frac{\mathrm{e}^{p_1+p_2}-\mathrm{e}^{p_1-p_2}}{2\cos t} = \frac{\mathrm{e}^{p}}{\cos t}(1-\mathrm{e}^{-2p_2}).$$

这表明，p_2 越大，圆盘也越大。 □

备注：容易看出，对于 $p = p_1 + p_2$,

$$\begin{aligned}
&\exp(p_1(\mathrm{Id}\cos t + \tilde{I}\sin t)) \cdot W(p_2, p_2\sin t) = \\
&= \mathrm{e}^{p_1\cos t}\exp((p_1+p_2)\sin t\tilde{I}) \cdot \left(\cosh(p_2\cos t)\,\mathrm{Id}_2 + \frac{\sinh(p_2\cos t)}{\cos t}\left(-\sin t\tilde{I} + \tilde{K}\right)\right) \\
&= \exp_{\mathrm{L}}\left(\frac{p_1}{p}\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} + \frac{p_2}{p}\begin{bmatrix}-\sin(2\theta\sin t) & \cos(2\theta\sin t)\\ \cos(2\theta\sin t) & \sin(2\theta\sin t)\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta|_{[0,p]}\right) \\
&= \exp_{\mathrm{L}}\left(p_1\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} + p_2\begin{bmatrix}-\sin(2p\theta\sin t) & \cos(2p\theta\sin t)\\ \cos(2p\theta\sin t) & \sin(2p\theta\sin t)\end{bmatrix}\mathrm{d}\theta|_{[0,1]}\right). \qquad \triangle
\end{aligned}$$

这立即意味着某种标准形的存在。为简洁起见，令

$$\tilde{\mathbb{K}} := \{-\sin\beta\tilde{J} + \cos\beta\tilde{K} \,:\, \beta\in[0,2\pi)\},$$

~这是由正交矩阵共轭得到的 K 的集合。

°定理 13.3. 假设 $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，使得CD($A$) $\subset$ 指数D(0, π)。假设 p 是满足CD(A) $\subset$ 指数 D(0, p) 的最小实数，并且 CD(A) 在 $\mathrm{e}^{p(\cos t+\mathrm{i}\sin t)}$处与指数 ∂D(0, p) 相切。那么存在一个非负分解 $p = p_1 + p_2$、 ~ ~以及一个矩阵 $F \in \mathbb{K}$，使得

(108)
$$A = \mathrm{e}^{p_1\cos t}\exp(p\sin t\tilde{I}) \cdot \left(\cosh(p_2\cos t)\,\mathrm{Id}_2 - \frac{\sinh(p_2\cos t)}{\cos t}\sin t\tilde{I}\right) + \frac{\sinh(p_2\cos t)}{\cos t}\tilde{F}$$

(109)
$$= \exp_{\mathrm{L}}\left(p_1\exp(t\tilde{I}) + p_2\exp(2p\theta\sin t\tilde{I})\cdot\tilde{F}\;\mathrm{d}\theta|_{[-1/2,1/2]}\right)$$

(110)
$$= \exp_{\mathrm{L}}(\exp(t\tilde{I})\,\mathrm{d}\theta|_{[0,p_1]})\exp_{\mathrm{L}}\left(\exp((2\theta - p_1 - p_2)\sin t\tilde{I})\tilde{F}\,\mathrm{d}\theta|_{[0,p_2]}\right)$$

(111)
$$= \exp_{\mathrm{L}}\left(\exp((2\theta + p_1 - p_2)\sin t\tilde{I})\tilde{F}\,\mathrm{d}\theta|_{[0,p_2]}\right)\exp_{\mathrm{L}}(\exp(t\tilde{I})\,\mathrm{d}\theta|_{[0,p_1]}).$$

情形 $p_1 = p_2 = 0$ 对应于 $A = \mathrm{Id}_2$。

情形 $p_1 > 0, p_2 = 0$ 对应点圆盘情形，该表达式不依赖于~ F。

情形 $p_1 = 0, p_2 > 0$ 对应于极大圆盘情形，其在模 2π 意义下有退化性$t \leftrightarrow \pi - t$ 。

在F~般情形，这是前一结论及如模观察的直接推论；(cos $\alpha + \tilde{I}$ sin α)$^{-1}$ = (cos $2\alpha + \tilde{I}$ sin 2α) $\tilde{K}$ = $-\tilde{J}$ sin $2\alpha + \tilde{K}$ cos 2α. □

在下文中，我们采用以下记号

$$\mathrm{N}(p_1, p_2, t, \tilde{F})$$

用于表示（108）右侧的算术表达式。就其本身而言，它只是一个矩阵值，但上述表述提供了三种特别方便的方式（标准形），将其表示为左指数形式：（109）在单位长度的区间上具有范数密度p，足够简洁紧凑。（110）和（111）则分别是长度为p_1 和 p_2、范数密度为 1的区间的拼接。其中一部分本质上是一个复指数，不太有趣；另一部分则是例 12.1 和 12.3中的 Magnus 抛物型或双曲型发展，不过要通过一个特殊正交矩阵进行共轭，这也就是说“相差一个相位”。

°定理 13.4. 假设 $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 满足 $\mathrm{CD}(A)\subset$ 指数 $\mathrm{D}(0,\pi)$。那么

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)=\inf\{\lambda\in[0,\pi)\ :\ \mathrm{CD}(A)\subset\exp \mathrm{D}(0,\lambda)\}.$$

换句话说,

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)=\sup\{|\log z|\ :\ z\in \mathrm{CD}(A)\}.$$

证明。设 p 是满足 $\mathrm{CD}(A)\subset\exp \mathrm{D}(0,p)$ 的最小实数。根据定理 1.2, $\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)$ 至少为 p, 而定理 13.3 的左指数确实能以范数 p 对它们进行 Magnus 指数化。□

°设 $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 满足 $\mathrm{CD}(A)\subset\exp \mathrm{D}(0,\pi)$, $A\neq \mathrm{Id}_2$, $p=\mathcal{M}_{2\times 2\,\text{实}}(A)$。若 $\det A=1$, 则 A 可分为三种类型: Magnus 椭圆型, 此时 $\mathrm{CD}(A)$ 与 $\exp\ \partial\mathrm{D}(0,p)$ 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p}$ 处相切, 但它不是密切圆盘; Magnus 抛物型, 此时 $\mathrm{CD}(A)$ 与 $\exp\ \partial\mathrm{D}(0,p)$ 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p}$ 处相切, 且它是密切圆盘; 或者 Magnus 双曲型, 此时 $\mathrm{CD}(A)$ 与 $\exp\ \partial\mathrm{D}(0,p)$ 在两个不同点相切。若 $\det A\neq 1$, 则 $\mathrm{CD}(A)$ 与 $\exp\ \partial\mathrm{D}(0,p)$ 在一个点非对称相切; 我们可以称之为 Magnus 螺旋型。由此可见, 例 12.1、12.2 和 12.3 涵盖了所有 Magnus 抛物型、双曲型和椭圆情形（相差一个正交矩阵共轭）。一般而言, 若 A 不是 Magnus 双曲型, 则它确定唯一的 Magnus 方向 $\cos\ t+\mathrm{i}\sin\ t$（采用定理 13.3 中的记号）。这个方向就是 $\{\log z:\ z\in\mathrm{CD}(A)\}$ 中距离原点最远点的方向。若 A 是 Magnus 双曲型, 则该方向在实部中仅能确定到一个符号。

°引理 13.5. 假设 $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, 使得 $\mathrm{CD}(A)\subset\exp \mathrm{D}(0,\pi)$, $A\neq \mathrm{Id}_2, \det A=1$, $\mathrm{CD}(A)=\mathrm{D}((a,b)\ r)$。那么 $a^2+b^2=r^2+1$ 且 $a+1>0$。

我们断言, A是 Magnus 双曲或抛物型, 当且仅当

$$2\arctan\frac{r+|b|}{a+1}\leq r.$$

若 A 是 Magnus椭圆型或抛物型, 则

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)=2\arctan\frac{r+|b|}{a+1}.$$

证明。 $\partial\mathrm{D}((a,b)\ r)$ 与单位圆相交于

$$(\cos\varphi_\pm,\sin\varphi_\pm):=\left(\frac{a\pm br}{a^2+b^2},\frac{b\mp ar}{a^2+b^2}\right),$$

$\varphi_\pm\in(-\pi,\pi)$。特别地, $\dfrac{a\pm br}{a^2+b^2}+1>0$; 将它们相乘, 得到 $a+1>0$。于是$\phi_\pm=2\arctan\ \frac{r\pm b}{a+1}$。若其中一个等于 r, 则为 Magnus 抛物型情形; 若它们都小于 r, 则为 Magnus 双曲情形; 若其中一个大于r, 则必为 Magnus椭圆型情形。（参见定理 13.2 中手性圆盘的大小。）□

我们称测度 ϕ 是 A的极小 Magnus表示, 如果指数$_{\mathrm{L}}(\phi)=A$ 且 $\int\|\phi\|_2=\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)$。

引理 13.6。任意元素 $A\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 至少有一个极小 Magnus 表示。

证明。$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 是连通的, 这意味着任意元素 A 至少有一个 Magnus 表示 ψ。如果 $\int\|\phi\|_2$ 足够小, 那么我们可以将 ϕ 的支撑区间划分为 $\lfloor\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A)/\pi\rfloor$ 个子区间, 使得 ϕ 在任意彩在线

其中有一个小于 π。将每个这样的子区间上的 ϕ 替换为标准形。这样，我们便设法通过来自 $([0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\times\mathbb{K})^{\lfloor \mathcal{M}_{2\times 2\ \text{实数}}(A)/\pi\rfloor}$ 的数据，得到一个变差至多为 $\int\|\phi\|_2$ 的表示。反过来，这样的数据总会给出一个表示，其指数 L 连续依赖于该数据。然后，该结论由标准的紧性论证得出。 □

引理 13.7。假设 $A_\lambda\to$Id，使得 A_λ 是 Magnus 双曲，但对于任意 λ， $A_\lambda\neq$ Id。假设 $\mathrm{CD}(A_\lambda)=\mathrm{D}((1+a_\lambda,b_\lambda)\ r_\lambda)$。

然后，随着该序列收敛，

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A_\lambda)^2=2a_\lambda+O(\mathrm{itself}^2);$$

或者更准确地说，

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A_\lambda)^2=2a_\lambda-\frac{1}{3}a_\lambda^2+\frac{3}{2}\frac{b_\lambda^2}{a_\lambda}+O(\mathrm{itself}^3).$$

证明。我们可以假设 $A_\lambda=W(p_\lambda,p_\lambda\sin\ t_\lambda)$。由 $W(p,p\sin\ t)$ 的公式可以看出，$\mathrm{CD}(W(p,p\sin\ t))$ 是 $x=p\cos\ t, y=p\sin\ t$ 的整函数。实际上可以得到，中心是

$$\begin{aligned}(1+\hat a(x,y),\hat b(x,y))=\Bigg(&1+\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{24}\\&+\frac{(x^4-10x^2y^2+5y^4)(x^2+y^2)}{720}+O(x,y)^8,\\&\frac{y(x^2+y^2)}{3}+\frac{y(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{30}+O(x,y)^7\Bigg).\end{aligned}$$

（可以验证，在展开式 $\hat a(x,y)$ 中，每一项都能被（x^2+y^2）整除；在展开式 $\hat b(x,y)$ 中，每一项都能被 $y(x^2+y^2)$ 整除。）最终得到

$$p^2=x^2+y^2=2\hat a(x,y)+O(x,y)^4$$

and

$$p^2=x^2+y^2=2\hat a(x,y)-\frac{1}{3}\hat a(x,y)^2+\frac{3}{2}\frac{\hat b(x,y)^2}{\hat a(x,y)}+O(x,y)^6.$$ □

双曲发展 $p\mapsto W(p,p\sin t)$ 是匀速运动，即增量 $W((p+\varepsilon),(p+\varepsilon)\sin t)W(p,p\sin t)^{-1}$ 彼此之差仅在于随着 p 变化而通过正交矩阵进行共轭。事实上，它们在局部上由速度 $\sin t$ 和一个相位来刻画，即通过旋转进行共轭。

引理13.8。假设 $0<p_1,p_2$; $p_1+p_2<\pi$; $t_1,t_2\in[-\pi/2,\pi/2]$; $\varepsilon\in(-\pi/2,\pi/2]$。在区间 $[-p_1,p_2]$ 上，考虑测度 ϕ 给出

$$\phi(\theta)=\eta(\theta)\,\mathrm{d}\theta|_{[-p_1,p_2]},$$

其中

$$\eta(\theta)=\begin{cases}\begin{bmatrix}-\sin 2(\theta\sin t_2) & \cos 2(\theta\sin t_2)\\ \cos 2(\theta\sin t_2) & \sin 2(\theta\sin t_2)\end{bmatrix} & \text{if } \theta\geq 0\\ \begin{bmatrix}\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin 2(\theta\sin t_1) & \cos 2(\theta\sin t_1)\\ \cos 2(\theta\sin t_1) & \sin 2(\theta\sin t_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix} & \text{if } \theta\leq 0.\end{cases}$$

Then

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi))<p_1+p_2$$

除非 $\varepsilon = 0$ 和 $t_1 = t_2$。

证明。只需证明这一结论在 0 附近的一个小子区间上成立。因此，我们取 $p_1 = p_2 = p/2$, $p \searrow 0$。于是

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]}) = W\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\sin t_2\right)\begin{bmatrix}\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix} W\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}\sin t_1\right)^{-1}\begin{bmatrix}\cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix}.$$

Let

$$\mathrm{D}((a_p, b_p), r_p) = \mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]})).$$

(i) 如果 $\varepsilon \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$，那么

$$2\arctan\frac{r_p \pm b_p}{a_p + 1} - r_p = \mp\frac{1}{4}\sin(2\varepsilon)p^2 + O(p^3).$$

这表明 $\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]})$ 变为 Magnus椭圆型。然而，

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]})) = 2\arctan\frac{r_p \pm b_r}{a_p + 1} = p\cos(\varepsilon) + O(p^2)$$

这表明 Magnus非极小性。

(ii) 如果 $\varepsilon = \pi/2, \sin t_1 + \sin t_2 \neq 0$，那么

$$2\arctan\frac{r_p \pm b_r}{a_p + 1} - r_p = \mp\frac{1}{12}(\sin t_1 + \sin t_2)p^3 + O(p^4).$$

这也表明了Magnus椭圆型性，并且

$$2\arctan\frac{r_p \pm b_r}{a_p + 1} = \frac{1}{4}|\sin t_1 + \sin t_2|p^2 + O(p^3)$$

显示 Magnus非极小性。

(iii) 如果 $\varepsilon = \pi/2$，$\sin t_1 + \sin t_2 = 0$，则 $\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]}) = \mathrm{Id}_2$。因此，发生了完全抵消，这不是 Magnus 极小的。

(iv) 如果 $\varepsilon = 0$，$\sin t_1 \neq \sin t_2$，那么 $\sin t_1 + \sin t_2 < 2$，且

$$2\arctan\frac{r_p \pm b_p}{a_p + 1} - r_p = \frac{1}{6}(\pm(\sin t_1 + \sin t_2) - 2)p^3 + O(p^4).$$

这表明 $\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]})$ 变为 Magnus 双曲型。然后，假设 Magnus极小性并使用前一个引理，我们便得到矛盾，因为

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[-p/2,p/2]}))^2 = p^2 - \frac{1}{48}p^4(\sin t_2 - \sin t_1)^2 + O(\mathrm{itself}^3) < p^2.$$

这就证明了该结论。 □

引理 13.9。假设 $0 < p_1$、p_2； $p_1 + p_2 < \pi$； $t_1 \in [-\pi/2, \pi/2)$ 。在区间 $[-p_1, p_2]$ 上，考虑由 ϕ 给出的测度

$$\phi(\theta) = \eta(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$\eta(\theta) = \begin{cases}\tilde{I} = \begin{bmatrix} & -1\\ 1 & \end{bmatrix} & \text{if } \theta \geq 0\\ \begin{bmatrix}-\sin 2(\theta\sin t) & \cos 2(\theta\sin t)\\ \cos 2(\theta\sin t) & \sin 2(\theta\sin t)\end{bmatrix} & \text{if } \theta \leq 0.\end{cases}$$

Then

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi)) < p_1 + p_2.$$

证明。同样，只需证明它在 0 附近的一个较小子区间上成立。

(i) 假设 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$。当 $p \searrow 0$ 时，限制到区间

$$\mathcal{I}_p = \left[-p, \frac{\sinh p \cos t}{\cos t} - p\right].$$

Then

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_p}) = \exp\left(\tilde{I}\left(\sin\frac{\sinh p\cos t}{\cos t} - p\right)\right) W(-p, -p\sin t)^{-1}.$$

Let

$$\mathrm{D}((a_p, b_p), r_p) = \mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_p})).$$

如果我们假设Magnus极小性，那么

$$\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_p})) = \frac{\sinh p\cos t}{\cos t} = r_p.$$

因此，$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_p})$ 是 Magnus 抛物型。通过直接计算，我们得到

$$2\arctan\frac{r_p + |b_p|}{a_p + 1} = p + \frac{1}{3}p^3\max(\cos^2 t + \sin t - 1, -1 - \sin t) + O(p^4),$$

与.....矛盾的是

$$\frac{\sinh p\cos t}{\cos t} = p + \frac{1}{6}p^3(\cos^2 t) + O(p^4),$$

这是从密度表达$\mathcal{M}_{2\times 2\ \text{实部}}$(指数$_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_p})$) 的另一种方式。（对于 $t \in (-\pi/2, \pi/2)$， p^3 的系数不同。）

(ii) 现在考虑 $t = -\pi/2$ 的情形。

$$2\arctan\frac{r_p \pm b_p}{a_p + 1} = \pm\frac{1}{2}p + O(p^2)$$

表明其为 Magnus椭圆型，且

$$2\arctan\frac{r_p + |b_p|}{a_p + 1} = p - \frac{1}{12}p^3 + O(p^4)$$

表明其不具极小性。 □

现在我们讨论作为左指数函数的标准形的唯一性。在定理 13.3 的背景下˜，我们称 $\mathrm{ell}(A) := p_1(\cos t + I\sin t)$ 为 A 的椭圆型分量，并称 $\mathrm{hyp}(A) := p_2$ 为 A 的双曲型长度。

°定理 13.10。设 $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，使得 $\mathrm{CD}(A) \subset \exp \mathrm{D}(0, \pi)$，且 ϕ 是一个极小 Magnus 表示，其支集为 $[a, b]$。

那么，限制在任意子区间 $\mathcal{I}$ 上，$\mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}}))$ 的值都是 $\mathrm{ell}(A)$ 乘以一个非负实数。此外，区间函数

$$\mathcal{I} \mapsto \mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}})) = \int \|\phi|_{\mathcal{I}}\|_2,$$

$$\mathcal{I} \mapsto \mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}})),$$

$$\mathcal{I} \mapsto \mathrm{hyp}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}}))$$

具有可加性。特别是，如果 A 是 Magnus 双曲型或抛物型，那么 $\mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}}))$ 始终为 0。

证明。将 ϕ 的支撑区间划分为更小的区间 $\mathcal{I}_1,\dots,\mathcal{I}_s$。在这些区间上，我们将 $\phi|_{\mathcal{I}_k}$ 替换为左复正规形。由此得到

$$\phi' = \Phi^{(1)}_{\mathcal{K}_1}.(\cos t_1 + \tilde{I}\sin t_1)\mathbf{1}_{\mathcal{J}_1}.\dots.\Phi^{(s)}_{\mathcal{K}_s}.(\cos t_s + \tilde{I}\sin t_s)\mathbf{1}_{\mathcal{J}_s},$$

其中 $\mathcal{J}_j$ 是一些区间， $\mathcal{K}_j$ 是一些区间，而 $\Phi^{(j)}_{\mathcal{K}_j}$ 是双曲发展（相差一个共轭）。（它们也可以是抛物型，但为简单起见，我们称其为双曲型。）此外，将其重新排列为

$$\phi'' = \Phi'^{(1)}_{\mathcal{K}_1}.\dots.\Phi'^{(s)}_{\mathcal{K}_s}.(\cos t_1 + \tilde{I}\sin t_1)\mathbf{1}_{\mathcal{J}_1}.\dots.(\cos t_s + \tilde{I}\sin t_s)\mathbf{1}_{\mathcal{J}_s},$$

其中双曲发展经过某种特殊的正交共轭，但仍然是双曲发展。现在，椭圆部分

$$\mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_j})) = |\mathcal{J}_j|(\cos t_j + \tilde{I}\sin t_j)$$

必须彼此非负成比例；否则，椭圆部分收缩时就会发生抵消，这与该表示的极小性相矛盾。由此，我们证明了在极小表示中，不相交区间的椭圆部分彼此非负成比例。

假设在某个分割 $|\mathcal{J}_j|$中出现 $\cos\, t_j \neq 0$。将 ϕ'' 中的椭圆部分收缩，但立即将它们分成两个相等的部分:

$$\phi''' = \Phi'^{(1)}_{\mathcal{K}_1}.\dots.\Phi'^{(s)}_{\mathcal{K}_s}.(\cos t_j + \tilde{I}\sin t_j)\mathbf{1}_{\mathcal{J}}.(\cos t_j + \tilde{I}\sin t_j)\mathbf{1}_{\mathcal{J}}.$$

现在将除最后一项之外的所有内容替换为标准形

$$\phi'''' = \Phi'^{(0)}_{\mathcal{K}_0}.(\cos t_0 + \tilde{I}\sin t_0)\mathbf{1}_{\mathcal{J}_0}.(\cos t_j + \tilde{I}\sin t_j)\mathbf{1}_{\mathcal{J}}.$$

对各个左指数项取行列式，我们得到

$$\mathrm{e}^{|\mathcal{J}_0|\cos t_0 + |\mathcal{J}|\cos t_j} = \mathrm{e}^{2|\mathcal{J}|\cos t_j}.$$

因此 $|\mathcal{J}_0|\cos\, t_0 \neq 0$，故由极小性可得 $t_j = t_0 \bmod 2\pi$，此外 $|\mathcal{J}_0| = |\mathcal{J}|$。然而， ϕ''' 构成一种标准形（在椭圆型部分延拓），且该形式唯一，因此最终

$$\mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi)) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{ell}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{\mathcal{I}_j})) \tag{112}$$

必须成立。

现在假设$\sin\, t_k = 1$ 或 $\sin t_k = -1$ 与 $|\mathcal{J}_k| \neq 0$一起出现。考虑 ϕ''。根据Magnus极小性和引理 13.8，该双曲型发展必须适配到单个双曲型发展 $\Psi_{\mathcal{K}}$ 中（没有相位或速度变化）。此外，根据引理13.9， $\Psi_{\mathcal{K}}$ 必须是恰当地拟合椭圆部分的抛物型。因此 ϕ''实际上给出一个标准形 $\Psi_{\mathcal{K}}.(\sin t_k)\,\mathbf{1}_{\mathcal{J}}$。于是（112）成立。

在 ϕ'' 中，第三种可能是所有区间 $\mathcal{J}_j$ 的长度均为零。这样，双曲发展便归结为单个发展 $\Psi_{\mathcal{K}}$, 但式 (112) 也成立。

因此，（112）得证。它意味着相对于总的指数$_{\mathrm{L}}(\phi)$，ell具有非负齐次性。现在，最小表示的子区间也会产生最小表示，因此可加性在完全一般的情形下成立。关于区间函数， $\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}$ 的可加性是显然的，ell 的可加性刚刚已经证明，而hyp 正是 $\mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}$ 减去 ell 的绝对值（范数）。□

备注13.11。假设 $\phi:\ \mathcal{I}\to\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ 是一个测度。假设 $\mathcal{I}_1\subset\mathcal{I}$是一个子区间，使得 $\int\|\phi|_{\mathcal{I}_1}\|_2<\pi$。为了得到另一个测度 ϕ_1，我们用指数$\mathrm{L}(\phi|_{\mathcal{I}_1})$的 Magnus极小表示替换 $\phi|_{\mathcal{I}_1}$。然后我们称 ϕ_1 为 ϕ的半局部收缩。

我们称 ϕ 为半局部 Magnus 极小的，如果有限次应用半局部收缩不会使 $\int\|\phi\|_2$减量。（在这种情况下，半局部收缩实际上不会是真正的收缩，因为它们是可逆的。）我们称 ϕ 为局部Magnus 极小的，如果应用任何一次半局部收缩都不会使 $\int\|\phi\|_2$ 减量。很容易看出

（最小 Magnus）$\Rightarrow$（半局部最小 Magnus）$\Rightarrow$（局部最小 Magnus）。

˜这些箭头在其他方向上并不成立。例如，$I\mathbf{1}_{[0,2\pi]}$ 是半局部极小的，但不是 Magnus 极小的。此外，$(-\mathbf{1}_{[0,1]}).\Psi_0.\mathbf{1}_{[0,1]}$ 是局部Magnus 极小的，但不是半局部 Magnus极小的：利用半局部收缩，我们可以将 $(-\mathbf{1}_{[0,1]})$ 和 $\mathbf{1}_{[0,1]}$ 移到彼此相邻的位置，随后便可进行一次真正的消去。

Magnus极小性的适当局部推广是半局部 Magnus 极小性。如果 ϕ 是局部 Magnus 极小的，那么我们可以将 $\{\mathcal{I}_j\}$ 的 $\mathcal{I}$ 有限划分为变化小于 π的区间，并简单地相加 ell(ϕ_j) 和 hyp(ϕ_j)，从而定义 ell(ϕ) 和 hyp(ϕ)。半局部性所需发挥的作用，是证明 ell($\phi_{\mathcal{I}}$) 与 ell(ϕ) 成非负比例关系，并适当地定义 ϕ的 Magnus 方向。

有了这一点，经过半局部收缩后，半局部 Magnus 最小表示的行为就如同 Magnus 最小表示。它们也可以分类为 Magnus 椭圆型、抛物型、双曲型或双曲旋转型。（但它们不再是 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的元素，而是表示。）事实上，经过半局部收缩后，半局部 Magnus 最小表示具有非常几何化的解释，参见注 13.15。（将其解释为 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的⁀元素。）△

正如定理 13.3 所示，双曲型和抛物型的发展相当刚性，而在其他情况下，椭圆部分则有一定的变化空间。

定理 13.12. 假设 $A\neq\mathrm{Id}_2$, $p=\mathcal{M}_{2\times2\ \mathrm{real}}(A)<\pi$, 且 ϕ 是 A 在区间 $[a,b]$上的一个极小表示。

(a) 假设 A 是 Magnus 双曲或抛物型。那么存在唯一的元素 ˜ $t\in[-\pi/2,\pi/2]$ 和 $F\in\mathbb{K}$，使得

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]})=\mathrm{N}\left(0,\int\|\phi|_{[a,x]}\|_2,t,\tilde{F}\right).$$

因此，Magnus 双曲型和抛物型矩阵的极小表示是唯一的，除测度的重新参数化外。

(b) 假设 CD(A) 是一个点圆盘。那么存在唯一的元素 $t\in[0,2\pi)$，使得

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]})=\exp\left((\mathrm{Id}_2\cos t+\tilde{I}\sin t)\int\|\phi|_{[a,x]}\|_2\right).$$

因此，准复矩阵的极小表示是唯一的，除测度的重新参数化外。

(c) 假设 A 不属于上述情况。那么存在唯一的元素 $t\in$ ˜ $[0,2\pi)$、p_1、$p_2>0$、$F\in\mathbb{K}$，以及一个满射单调递增函数 $\varpi_i\colon[a,b]\to[0,p_i]$，使得

$$\varpi_1(x)+\varpi_2(x)=x-a$$

and

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]}) = \mathrm{N}\left(\varpi_1\left(\int \|\phi|_{[a,x]}\|_2\right), \varpi_2\left(\int \|\phi|_{[a,x]}\|_2\right), t, \tilde{F}\right).$$

因此，一般情况下的最小表示是唯一的，至多相差椭圆部分的位移。

证明。将 $[a,b]$ 除以 $[a,x]$ 和 $[x,b]$，并将极小表示替换为标准形式。根据极小性，它们必须相符。□

备注。该结论可以很容易地推广到半局部 Magnus 极小表示。

定理 13.12 表明，某些极小 Magnus 表示本质上是唯一的。定理 13.13 和 13.14 将对以下事实作出一些解释：在临界情形 $\int \|\phi\|_2 = \pi$ 下，很难给出 Magnus展开发散的例子。

定理 13.13。假设 $A \neq \mathrm{Id}_2$，$p = \mathcal{M}_{2\times 2\ \mathrm{real}}(A) < \pi$，并且 ϕ 是在区间 $[a,b]$上受支持的 A 的极小表示。如果 ϕ 具有以下形式

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]}) = \exp\left(S\int \|\phi|_{[a,x]}\|_2\right)$$

对于某个矩阵 S （即本质上是一个指数），那么 S 是一个范数为 $\|S\|_2 = 1$的正规矩阵。

证明。由齐次性可知，$\mathrm{ell}(\Phi|_{\mathcal{I}})$ 和 $\mathrm{hyp}(\Phi|_{\mathcal{I}})$ 必须与 $\mathcal{M}_{2\times 2\,\text{实部}}(\Phi|_{\mathcal{I}})$ 成正比。但容易看出，除参数化外，只有齐次正规密度 (109) 具有这一性质；且它们仅当 Magnus 非椭圆分量随 $p_2 = 0$ 消失，或属于满足 $\sin t = 0$ 的特殊双曲型时，才是局部常数。□

（这重新推导了实数情形下的定理 5.1。）

定理 13.14。假设 ϕ 是一个测度，

$$\int \|\phi\|_2 = \pi,$$

但 $\log \exp_{\mathrm{L}}(\phi)$ 不存在。那么存在唯一确定的元素 $t \in \{-\pi,\pi\}^{\sim}$ $^{\sim}$和 $F \in \mathbb{K}$，一个非负分解 $\pi = p_1 + p_2$，满足 $p_2 > 0$，以及满射单调递增函数 $\varpi_i\colon [a,b] \to [0,p_i]$，使得

$$\varpi_1(x) + \varpi_2(x) = x - a$$

and

$$\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]}) = \mathrm{N}\left(\varpi_1\left(\int \|\phi|_{[a,x]}\|_2\right), \varpi_2\left(\int \|\phi|_{[a,x]}\|_2\right), t, \tilde{F}\right).$$

因此，临界情形中对数发散的情形包括 Magnus椭圆型和抛物型展开（但不包括拟复型），并且允许对椭圆部分进行重参数化和重新排列。

证明。该表示必须是 Magnus 极小的，否则对数就会是 OK。将 $[a,b]$ 分成 $[a,x]$ 和 $[x,b]$，并用标准部分替换极小表示。它们必须符合极小性。很容易看出，在 Magnus 双曲型 / 似双曲型情形下，$\mathrm{CD}(\exp_{\mathrm{L}}(\phi|_{[a,x]}))$ 不可能到达 $(-\infty,0]$。在 Magnus 双曲型情形下，圆盘最大，而 Magnus 严格双曲发展所对应的手性圆盘 $\mathrm{CD}(W(\pi,\pi\sin\ t))$ 不会到达负实轴。因此只剩下 Magnus 椭圆型和抛物型情形，但准复情形已被排除。□

因此，临界情形中连满足 $\int \|\phi\|_2 = \pi$ 的情况也很少。

注 13.15。我们在本节开篇研究了具有 CD(A) $\subset \mathring{\mathrm{D}}(0,\pi)$ 的矩阵 A。一个自然的问题是，这种处理是否可以推广到具有例如 CD(A) $\cap (\infty, 0] = \emptyset$ 的矩阵 A。答案是肯定的。不过，如果我们要考虑这个问题，那么最好再大胆一些：

我们可以推广 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的万能覆盖。这当然意味着我们必须使用覆盖指数映射 $\widetilde{\exp} : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})\widetilde{}$，而 $\exp_{\mathrm{L}}$ 也应替换为 $\widetilde{\exp}_{\mathrm{L}}$。现在，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})\widetilde{}$ 中元素的手性圆盘位于 $\mathbb{C}$，即 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的万能覆盖中。

作相应修改后，定理13.1、13.2、13.3可以直接推广。值得注意的是，定理 1.1 和 1.2 在此情形下也有相应版本（作用于 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$的万能覆盖的群），不过我们实际上并不太需要它们，因为可以直接追踪手性圆盘，以证明定理13.4 的一个变体。$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的元素也具有极小 Magnus 表示。用我们之前的术语来说，它们是半局部Magnus最小表示。事实上，半局部Magnus 最小表示在半局部收缩下对应于$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$的元素。它们按 Magnus 双曲型、椭圆型、抛物型、双曲螺旋型、拟复型元素进行的分类可以推广到 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$。$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的这一图景有助于理解 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$。事实上，我们看到，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的每个元素在半局部收缩下都有可数多个半局部 Magnus 最小表示，其中有一个或两个（共轭的）是极小表示。$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$中一个元素的 Magnus指数，是其提升到 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的最小 Magnus 指数。

△

例 13.16. 设 $z = 4.493\ldots$ 是 $\tan z = z$ 在区间 $[\pi, 2\pi]$上的解。考虑

$$Z = \begin{bmatrix} -\sqrt{1+z^2} - z & \\ & -\sqrt{1+z^2} + z \end{bmatrix}.$$

该矩阵的行列式为 1，我们要计算它的实 Magnus 指数。一个乐观的猜想是 $\mathcal{M}_{2\times 2\,\text{复数}}(Z) = \sqrt{\pi^2 + \log(z+\sqrt{1+z^2})^2} = 3.839\ldots$。事实上，在复数情形或倍增实数情形中，这可以由下式实现

$$Z = \exp \begin{bmatrix} \log(z+\sqrt{1+z^2}) + \pi\mathrm{i} & \\ & -\log(z+\sqrt{1+z^2}) + \pi\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

然而，在实数情形中，“没有足够的空间”来实现这一点。一个悲观的猜想是 $\pi + |\log(z+\sqrt{1+z^2})| = 5.349\ldots$。事实上，我们可以通过椭圆指数映射改变符号，然后再通过双曲指数映射继续。我们知道，这不可能是最优的。实际上，答案是 $\mathcal{M}_{2\times 2\,\text{实数}}(Z) = z = 4.493\ldots$。事实上，$Z$ 是 Magnus 抛物型，可以验证 $Z \sim W(z,z)$。从手性圆盘很容易看出这一点。

在这种情况下，存在两个 Magnus 极小表示，因为共轭-对称性。 ♢

14. Optimal asymptotical norm estimate for $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

如果 ψ 是一个有序的 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 值测度，其累积范数为 $p = \int \|\psi\|_2$，且满足$0 < p < \pi$，那么根据前几节的内容，其 Magnus展开 $\mu_{\mathrm{L}}(\psi)$ 的最大可能范数可通过极大圆盘，经由规范的 Magnus 抛物型或双曲发展实现。因此，该最大范数的形式为 $\|W(p, p\sin t)\|_2$

其中 $0 \le \sin t \le 1$。因此我们需要对$\sin t = s(p)$进行优化，尽管此时尚不清楚 $s(p)$ 是否唯一，这取决于 p。

然而，利用隐函数定理，很容易看出，对于 $p \searrow 0$，最优脊线由 $\sin t = s(p)$ 定义，其中

$$s(p) = 1 - \frac{1}{6}p^2 + \frac{47}{360}p^4 + O(p^6).$$

Then

$$\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi_{s(p)}|_{[0,p]})\|_2 = p + \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{72}p^5 + \frac{31}{3024}p^7 + O\left(p^9\right). \tag{113}$$

我们看到，这处于中间位置，低于上界估计（7）并高于抛物型情形（104）；但所有偏差均为 $O(p^7)$。

通过适当的重新参数化和隐函数定理，可以看出，对于 $p \nearrow \pi$，最优脊线由 $\sin t = s(p)$ 定义，其中

$$s(p) = \underbrace{1 - \frac{1}{\pi}(\pi - p)^1}_{p/\pi} + \frac{2^{3/2}}{\pi^{3/2}}(\pi - p)^{3/2} - \frac{4}{3}(\pi - p)^2 + O\left((\pi - p)^{5/2}\right).$$

Then

$$\begin{aligned}\|\mu_{\mathrm{L}}(\Phi_{s(p)}|_{[0,p]})\|_2 &= \sqrt{2}\pi^{3/2}(\pi - p)^{-1/2} - 2\pi + \frac{\sqrt{2\pi}(4\pi^2 - 3)}{12}(\pi - p)^{1/2} \\ &\quad - \frac{4\pi^2 - 3}{3}(\pi - p)^1 + \frac{\sqrt{2}(368\pi^2 - 120\pi^2 - 45)}{1440\sqrt{\pi}}(\pi - p)^{3/2} + O((\pi - p)^2).\end{aligned} \tag{114}$$

这比上界估计(8)低 $O(1)$，比抛物型情形 (105) 高$O((\pi - p)^{1/2})$，并比下界估计 (107) 高 $O((\pi - p)^{3/2})$。

自然会想到，是否可以将一般上界改进为，例如

$$\pi\sqrt{\frac{\pi + p}{\pi - p}} - 2\pi + o(1),$$

作为 $p \nearrow \pi$。

备注 14.1. 可以证明，对于 $0 < p < \pi$， $s(p)$ 给出了一个定义良好的解析函数。然而，这相当复杂，因为它需要全局估计。△

15. A counterexample for 2×2 complex matrices

根据定理 13.4， $A \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$、 $0 \le p < \pi$ 和 $\mathsf{CR}(A) \subset$ 指数 $\mathrm{D}(0, p)$ 意味着 $A =$ 指数$_{\mathrm{L}}\,\phi$，其中存在某个适当的 ϕ，使得 $\|\phi\|_2 \le p$。这里我们证明，对于 2×2 复矩阵，相应的结论并不成立。

设 $0 < p < \pi$。在 CKB模型中，我们将考虑 Magnus 值域

$$S_p = \frac{\mathrm{CKB}}{\mathrm{PH}} \circ \exp((\mathbb{C}^+) \cap \mathrm{D}(0, p)).$$

那么很容易看出，其双曲边界

$$\partial S_p = \frac{\mathrm{CKB}}{\mathrm{PH}} \circ \exp((\mathbb{C}^+) \cap \partial\,\mathrm{D}(0, p))$$

由曲线参数化

$$t \in (0, \pi) \mapsto s_p(t) = \left(\frac{\cos(p \sin t)}{\cosh(p \cos t)}, \tanh(p \cos t)\right).$$

t 处的切线方程为

$$\begin{aligned}0 = &\underbrace{(\sin(t))}_{A_p(t):=} x\\ &+\underbrace{(\sin(t)\sinh(p\cos(t))\cos(p\sin(t)) - \cos(t)\cosh(p\cos(t))\sin(p\sin(t)))}_{B_p(t)):=} y\\ &+\underbrace{(-\sin(t)\cosh(p\cos(t))\cos(p\sin(t)) + \cos(t)\sinh(p\cos(t))\sin(p\sin(t)))}_{C_p(t):=}.\end{aligned}$$

（在本节中，x, y 被理解为 $x_{\mathrm{CKB}}, y_{\mathrm{CKB}}$。）注意，$A_p(\pi - t) = A_p(t)$,$B_p(\pi - t) = -B_p(t)$，$C_p(\pi - t) = -C_p(t)$。

不难看出，与s_p 相切且在三个参数点 $t < \frac{\pi}{2} < \pi - t$ 处的椭圆方程为

$$\begin{aligned}E_{p,t}(x,y) \equiv &(\cos(p\sin(t)) - \cosh(p\cos(t))\, x)^2 (A_p(t)\cos(p) + C_p(t))^2\\ &- (\cos(p\sin(t)) - \cosh(p\cos(t))\cos(p))^2 \left((A_p(t)x + C_p(t))^2 - (B_p(t)y)^2\right) = 0\end{aligned}$$

（ y^2 的系数非负）。

例（命题）15.1。对于如下选择

$$(p_0, t_0) = \left(\frac{14}{15}\pi, \frac{7}{15}\pi\right),$$

椭圆圆盘

$$E_{p_0,t_0}(x,y) \leq 0$$

可实现为CKB 中一个 2×2 复矩阵 X 的保形值域（即作为$\mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X)$）。关于这一点 X（在酉共轭下有 4 种不同情形），

$$\mathrm{CR}(X) \subset \exp \mathrm{D}(0, p_0)$$

but

$$\mathcal{M}_{2\,\times\,2\ \mathrm{complex}}(X) > p_0. \tag{115}$$

证明。可以检查，对于给定的选择，椭圆 $E_{p_0,t_0}(x, y) = 0$ 位于单位圆的内部，因此它可实现为某个（纯复）复矩阵 2×2 complex matrix X 的保形值域的边界。（参见 Davis [4],[5], Lins、Spitkovsky、Zhong [13], ，或更详细地参见 [12]。）较难看出的是，该椭圆位于 S_{p_0} 中，并在$s_{p_0}(t_0)\, s_{p_0}(\pi/2)\, s_{p_0}(\pi - t_0)$处与 ∂S_{p_0} 相交（相切）。（这需要检查临界点附近的二阶导数，而对于其余部分，数值分析已足够。）

假设现在 $X =$ 指数$_{\mathrm{L}}\,\phi$ 满足 $\|\phi\|_2 = p_0$。那么 ϕ 允许作初始限制 $\phi|_I$，使得 $\|\phi_I\|_2 = p_0/2$。令 $X_{1/2} =$指数$_{\mathrm{L}}(\phi_I)$。然而，$s_{p_0}(t_0)\, s_{p_0}(\pi/2)\, s_{p_0}(\pi - t_0) \in \mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X)$ 意味着 $s_{p_0/2}(t_0)\, s_{p_0/2}(\pi/2)\, s_{p_0/2}(\pi - t_0) \in \mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X_{1/2})$。在这种情况下，$\mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X_{1/2})$ 应为边界为 $E_{p_0/2,\ t_0}(x, y) = 0$ 的椭圆。另一方面，可以验证该椭圆不在单位圆内，这就产生了矛盾。

事实上，如果我们允许 $X =$ 指数$_{\mathrm{L}}\,\phi$ 满足 $\|\phi\|_2 = p_0 + \varepsilon$（ ε较小），那么这仍意味着 $\mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X_{1/2})$ 的边界应经过 $s_{p_0/2}(t_0)$ 、 $s_{p_0/2}(\pi/2)\, s_{p_0/2}(\pi - t_0)$ 附近的某些点，但这些点包含在 $S_{p_0/2}$ 中（这也使得给定点处的切线彼此接近）。这仍会使 $\mathrm{DW}_{\mathrm{CKB}}(X_{1/2})$ 的边界接近 $E_{p_0/2,t_0}(x, y) = 0$，从而导致矛盾。（因此，（ 115 ）还可以进一步量化。） □

References

[1] Berger, Marcel: *Geometry I*, 《Universitext》。Springer-Verlag，柏林，1987年。[2] Bonfiglioli,Andrea；Fulci,Roberta: *Topics in noncommutative algebra. The theorem of Campbell, Baker* 2034 2012 》, *Hausdorff and Dynkin.*《数学讲义》，。Springer，海德堡，。[3] Casas,Fernando：马格努斯展开收敛的充分条件。 *J. Phys. A* **40** 2007 15001 15017 （），–。[4] Davis, Chandler：希尔伯特空间算子的壳。 *Acta Sci. Math. (Szeged)* **29**（1968），69–86。[5] Davis, Chandler：希尔伯特空间算子的壳。II。 *Acta Sci. Math. (Szeged)* **31**（1970）301–318。[6] Gans, David：双曲平面的一种新模型。 *American Math. Monthly* **73**（1966），291–295。[7] Goldberg,Karl：对数 $e^x e^y$的形式幂级数。 *Duke Math. J.* **23**（1956），13–21。[8] Kreĭın, M. G.：希尔伯特空间中乘法积分的谱的角定位（俄文）。 *Funkcional. Anal. i Priložen.* **3**（1969），89–90。[9] Lakos,Gyula: *Some proofs of the Poincaré–Birkhoff–Witt theorem and related matters.* arXiv:1812.04896[10] Lakos,Gyula: *Convergence estimates for the Magnus expansion I. Banach algebras.* arXiv:1709.01791

[11] 1910 03328

[12] *On the elliptical range theorems for the Davis–Wielandt shell the numerical range*

Lakos,Gyula: *Convergence estimates for the Magnus expansion II. C^*-algebras.* arXiv：。Lakos, Gyula：，，*and the conformal range.* 2211 13145 arXiv：。

[13] Lins,Brian；Spitkovsky, Ilya M.；Zhong, Siyu：归一化数值值域与Davis–Wielandt壳。 *Linear Algebra Appl.* **546**（2018），187–209。[14] Magnus, Wilhelm：线性算子微分方程的指数解。*Comm. Pure Appl. Math.* **7**（1954），649–673。[15] Michel, Jean：李代数的基与Hausdorff级数。`，27n.1（1973-1974），exp. n.6，1–9（1974）。[16] Mityagin, B. S.：未发表的笔记，1990年。[17] Moan,PerChristian；Niesen, Jitse：马格努斯级数的收敛性。 *Found. Comput. Math.* **8**（2008），291–301。[18] Sch¨affer,JuanJorge：关于希尔伯特空间中的Floquet定理。 *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**（1964），243–245。[19] Wielandt, H.：关于特征值的包含定理，载于: *Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues* 75 78 ，第–页。

美国国家标准局应用数学丛书，第29号。美国政府印刷局，华盛顿特区，1953年。

Department of Geometry Institute of Mathematics Eötvös University Pázmány Péter , , , , „ s. 1/C Budapest H–1117 Hungary
Email address: lakos@cs.elte.hu