arXiv:2304.03517v1 [math.NT] 7 Apr 2023

关于调和ζ函数的斯蒂尔切斯常数

Levent Kargın、Ayhan Dil、Mehmet Cenkci 和 M¨um¨un Can土耳其安塔利亚 Akdeniz大学数学系，邮编 TR-07058

April 10, 2023

摘要

本文旨在研究函数 Laurent展开中出现的调和斯蒂尔切斯常数

$$\zeta_H(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+a},\quad \mathrm{Re}(s)>1,$$

我们将其称为 *harmonic Hurwitz zeta function*。特别地，本文给出了调和斯蒂尔切斯常数 $\gamma_H(m,1/2)$ 和 $\gamma_H(m,1)$ 的求值公式。

关键词：斯蒂尔切斯常数、欧拉和、ζ值、调和数、Laurent展开。

数学主题分类 11Y60、11M41、11B83、41A58、33B15。

1 引言

由级数定义的赫尔维茨ζ函数 $\zeta(s,a)$

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

当Re $(s)>1$ 且 $a\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ 在整个复 s 平面上除简单极点 $s=1$ 处外都有解析延拓，留数为 1。在 $s=1$附近， $\zeta(s,a)$具有Laurent展开

$$\zeta(s,a)=\frac{1}{s-1}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma(m,a)}{m!}(s-1)^m, \tag{1}$$

其中，系数 $\gamma(m,a)$ 称为广义斯蒂尔切斯常数。当 $a=1$, $\zeta(s,1)=\zeta(s)$ 是黎曼 ζ 函数时，系数 $\gamma(m,1)=\gamma(m)$ 就是斯蒂尔切斯常数（例如参见 [13, 25]）。常数 $\gamma(0)$ 是著名的欧拉-马歇罗尼常数： $\gamma=\gamma(0)$ =0.577 215 664 9.....。研究表明， $\gamma(m,a)$ 也可以用以下极限表示

$$\gamma(m,a)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\log^m(n+a)}{n+a}-\frac{\log^{m+1}(N+a)}{m+1}\right) \tag{2}$$

（参见 [6]）。关于推导斯蒂尔切斯常数及其扩展形式的级数和积分表示，已有大量文献（例如参见[7, 8, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 30]）。这些表示通常有助于更准确地估算上述常数（更多详情请参见 [1, 6, 8] ）。

与调和数 $H_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ 相关的狄利克雷级数，称为调和 ζ 函数，定义为

$$\zeta_H(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

并且受到了许多研究。Euler [22, pp. 217–264]给出了关于 $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$的 $\zeta_H(s)$ 的闭式公式，该公式用黎曼ζ值表示。Apostol和Vu[5]，以及Matsuoka [26] 已证明，函数 ζ_H 可以延拓为一个亚纯函数，在 $s = 1$处有一个二阶极点，并在 $s = 0$和 $s = 1 - 2j$、 $j \in \mathbb{N}$处有一阶极点。在 [10], ，Boyadzhiev 等人考虑了如下形式的Laurent展开

$$\zeta_H(s) = \frac{a_{-1}}{s-b} + a_0 + O(s-b), \tag{3}$$

其中 $b = 0$ 和 $b = 1-2j$、 $j \in \mathbb{N}$，并对系数a_0给出了明确描述。采用拉马努金求和法，Candelpergher和 Coppo[16] 记录了调和斯蒂尔切斯常数 $\gamma_H(m)$，它们出现在 Laurent展开中

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\gamma_H(m)}{m!} (s-1)^m, \ 0 < |s-1| < 1,$$

可以表示为

$$\gamma_H(m) = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\le x} \frac{H_n \ln^m n}{n} - \frac{\ln^{m+2} x}{m+2} - \gamma \frac{\ln^{m+1} x}{m+1} \right)$$

(另请参见 [14, 定理 2， $r = 1$]）。此外，在 [16], 常数 $\gamma_H(0)$ 得到了显式表达，系数 a_0 在（3）中也被重新发现。值得一提的是，在 [2], 某些实数和对数正弦积分已被表示为调和ζ函数与黎曼ζ函数特殊值的组合，从而为它们提供了有力的逼近。

最近，Alzer 和 Choi [3] 引入了四类参数化欧拉和，即

$$S_{z,s}^{++}(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_n^{(z)}(a)}{(n+b)^s}, \ S_{z,s}^{+-}(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathcal{H}_n^{(z)}(a)}{(n+b)^s},$$
$$S_{z,s}^{-+}(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n^{(z)}(a)}{(n+b)^s}, \ S_{z,s}^{--}(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathcal{A}_n^{(z)}(a)}{(n+b)^s},$$

其中

$$\mathcal{H}_n^{(z)}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a)^z} \text{ and } \mathcal{A}_n^{(z)}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+a)^z},$$

a, $b \in \mathbb{C}\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\}$ 以及 s, $z \in \mathbb{C}$ 经过调整，使相关定义级数收敛。他们通过欧拉-麦克劳林求和公式和欧拉-布尔求和公式研究了解析延拓，并给出了混洗关系。我们注意到$S_{1\,s}^{++}$, (0, 0) 是调和ζ函数 $\zeta_H(s)$，并请参阅 [9, 21, 24, 27, 28] 关于几类带参数的欧拉和的研究。特别是，Boyadzhiev 等人在 [11] 中研究了 S_1^{+-}, s (0, 0)、$S_{1\,s}^{--}$, (0, 0) 和 $S_{1\,s}^{-+}$, (0, 0) 的解析延拓。

令 $H_n(a)$ 表示总和

$$H_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+a}.$$

显然， $\mathcal{H}_n^{(1)}(a-1) = H_{n-1}(a)$ 且 $H_{n-1}(1) = H_n$。在整个研究中，空和被视为零。

在本研究中，我们考虑函数

$$\zeta_H(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(a)}{(n+a)^s}, \tag{4}$$

其中 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ 且 Re(s) > 1. 显然， $\zeta_H(s,a)$ 是函数 $S_{1\,s}^{++}$, $(a-1, a-1)$。由于级数 (4) 是赫尔维茨型狄利克雷级数，且 $\zeta_H(s,1) = \zeta_H(s)$ 是调和 ζ 函数，因此将 $\zeta_H(s,a)$ 称为调和赫尔维茨 ζ 函数是合乎逻辑的。已知调和赫尔维茨ζ函数在 $s = 1$ 处有二阶极点，并在 $s = 0$ 和 $s = 1-2n$ 处有简单极点， $n \in \mathbb{N}$ （参见 [3, 注 2.1]）。我们首先证明 rel that

$$\gamma_H(m,a) = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{\log^m(n+a)}{n+a}H_n(a) - \frac{\log^{m+2}(x+a)}{m+2} - \gamma(0,a)\frac{\log^{m+1}(x+a)}{m+1}\right),$$

通过修改 Briggs 和 Buschman 的方法 [12]。这里的常数$\gamma_H(m,a)$（广义调和斯蒂尔切斯常数）定义为

$$\zeta_H(s,a) = \frac{a_{-2}}{(s-1)^2} + \frac{a_{-1}}{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma_H(m,a)}{m!}(s-1)^m, \ 0 < |s-1| < 1.$$

其次，我们给出 $\zeta_H(s,a)$的围道积分表示。利用这一表示，我们求得 $\zeta_H(s,a)$ 在简单极点$s = k$处的Laurent展开，其中 $k = 0$或 $k = 1-2n$， $n \in \mathbb{N}$。最后，我们给出公式 (21)，用 $\gamma(m)$、$\Gamma^{(m)}(1)$、ζ值以及某些积分表示 $\gamma_H(m) = \gamma_H(m,1)$ 的计算公式。作为这一公式的示例，我们列出$\gamma_H(m)$的前几个值如下。

$$\begin{aligned}
\gamma_H(0) &= 0.98905599532797\ldots & \gamma_H(6) &= 359.53098575125632\ldots\\
\gamma_H(1) &= 0.40076122995742\ldots & \gamma_H(7) &= 2518.3592429515589\ldots\\
\gamma_H(2) &= 0.97130466096680\ldots & \gamma_H(8) &= 20153.438413223697\ldots\\
\gamma_H(3) &= 2.97258466333065\ldots & \gamma_H(9) &= 181410.47173964166\ldots\\
\gamma_H(4) &= 11.9405013905470\ldots & \gamma_H(10) &= 1814252.3513222240\ldots\\
\gamma_H(5) &= 59.8445659187868\ldots & \gamma_H(11) &= 19957587.910759595\ldots
\end{aligned}$$

我们想强调的是，在 $\gamma_H(m)$中关于 m ≥1的求值公式，既未在 [14] 中给出，[16] 据我们所知，也未见于任何研究中。此外，公式（21）为求得 [14, 定理 5] 中给出的超调和斯蒂尔切斯常数提供了新的结果。

2 在 $s=1$ 的邻域中的 Laurent展开

本节证明以下定理，这是本文的主要结果之一。

定理 1 设 $0<a\leq 1$。调和赫尔维茨ζ函数在环域 $0<|s-1|<1$ 中具有以下 Laurent展开

$$\zeta_H(s,a)=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{\gamma(0,a)}{s-1}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma_H(m,a)}{m!}(s-1)^m, \tag{5}$$

其中系数 $\gamma_H(m,a)$ 由

$$\gamma_H(m,a)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{H_n(a)\log^m(n+a)}{n+a}-\frac{\log^{m+2}(x+a)}{m+2}-\gamma(0,a)\frac{\log^{m+1}(x+a)}{m+1}\right).$$

注 2 定义（4）中 $\zeta_H(s,a)$ 显然表明 $\zeta_H(s,a+1)=\zeta_H(s,a)-\frac{1}{a}\zeta(s,a)$，由此可知常数 $\gamma_H(m,a)$ 满足递推关系

$$\gamma_H(m,a+1)=\gamma_H(m,a)-\frac{1}{a}\gamma(m,a),\ a\neq 0,-1,-2,\ldots,\ m=0,1,2,\ldots$$

此外，对于正整数 n，我们可以 w $rite$

$$\gamma_H(m,n+1)=\gamma_H(m)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma(m,k)}{k}.$$

我们的方法基于以下方程

$$\zeta_H(s,a)=\frac{\zeta(s,a)}{s-1}+\frac{1}{2}\zeta(s+1,a)+\sum_{j=1}^{q}\frac{B_{2j}\zeta(s+2j,a)}{(2j)!}s(s+1)\cdots(s+2j-2)$$
$$-\frac{s(s+1)\cdots(s+2q)}{(2q+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+a}\int_k^{\infty}\frac{\overline{B}_{2q+1}(t)}{(t+a)^{s+2q+1}}dt, \tag{6}$$

这就是 [3] 的公式（2.16），其中 $p=1$。这里，$\overline{B}_n(x)=B_n(x-\lfloor x\rfloor)$，$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，而 $B_n(x)$ 是由生成函数定义的伯努利多项式

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n. \tag{7}$$

当 $x=0$ 时，它们称为伯努利数，记作 $B_n=B_n\left(0\right)$，其中$B_0=1$，$B_1=-1/2$，$B_{2j+1}=0$ 对于 $j\geq 1$。现在，（6）显然表明，调和赫尔维茨ζ函数的洛朗级数可以写成

$$\zeta_H\left(s,a\right)=\frac{1}{\left(s-1\right)^2}+\frac{\gamma\left(0,a\right)}{s-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m\left(s-1\right)^m,\ 0<\left|s-1\right|<1.$$

因此，只要我们证明1，定理的证明便告完成

$$a_m=\frac{\left(-1\right)^m}{m!}\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{H_n\left(a\right)\log^m\left(n+a\right)}{n+a}-\frac{\log^{m+2}\left(x+a\right)}{m+2}-\gamma\left(0,a\right)\frac{\log^{m+1}\left(x+a\right)}{m+1}\right).$$

我们通过利用一些辅助性论述得到了这一结果。

引理 3（阿贝尔求和公式）（参见 *[4, 定理 4。2]*）如果 $\{b_1,b_2,b_3,\dots\}$ 是一列复数，且 $v(x)$ 是在 $x>\alpha$ 上具有连续导数的函数，那么

$$\sum_{n\leq x}b_nv\left(n\right)=\left(\sum_{n\leq x}b_n\right)v\left(x\right)-\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n\leq t}b_n\right)v'\left(t\right)dt.$$

令 $b_n=H_n\left(a\right)$ 和 $v(x)=(x+a)^{-s}$ 代入引理 3 可得以下结果。

引理 4 当 $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ 时，有

$$\zeta_H\left(s,a\right)=s\int_{1-a}^{\infty}\left(t+a\right)^{-s-1}\left(\sum_{n\leq t}H_n\left(a\right)\right)dt.$$

现在，由于 $k\to\infty$，我们有如下众所周知的恒等式

$$H_k\left(a\right)=\log\left(k+a\right)+\gamma\left(0,a\right)+O\left(\frac{1}{k+a}\right),$$

因此，表达式

$$\sum_{n=0}^{k}H_n\left(a\right)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j+a}\sum_{n=j}^{k}1=\left(k+1+a\right)H_k\left(a\right)-\left(k+1\right)$$

可化为

$$\sum_{n=0}^{k}H_n\left(a\right)=\left(k+a\right)\log\left(k+a\right)+\left(k+a\right)\left(\gamma\left(0,a\right)-1\right)+O\left(\log\left(k+a\right)\right).$$

Let

$$\begin{aligned}E\left(x,a\right)&=\sum_{n\leq x}H_n\left(a\right)-\left(x+a\right)\log\left(x+a\right)-\left(x+a\right)\left(\gamma\left(0,a\right)-1\right)\\&=O\left(\log\left(x+a\right)\right).\end{aligned}\tag{8}$$

引理 5 当 Re $(s) > 0$ 时，我们有

$$f(s,a) := s\int_{1-a}^{\infty}(t+a)^{-s-1}E(t,a)\,dt = 1-\gamma(0,a)+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-1)^n.$$

证明。 当 Re$(s) > 0$ 时，积分是一个解析函数。此外，当 Re $(s) > 1$时，由（8）和引理 4 可得

$$\begin{aligned}
&s\int_{1-a}^{\infty}(x+a)^{-s-1}E(x,a)\,dx\\
&=\zeta_H(s,a)-s\int_{1-a}^{\infty}(x+a)^{-s}\log(x+a)\,dx-s(\gamma(0,a)-1)\int_{1-a}^{\infty}(x+a)^{-s}\,dx\\
&=1-\gamma(0,a)+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-1)^n,
\end{aligned}$$

这就是所要证明的结论。 ■

下一个结果在证明定理 1。

定理 6 令 m 为非负整数，并令 $u<0$。则，

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{H_n(a)\log^m(n+a)}{(n+a)^{-u}} &= \int_{1-a}^{x}\frac{\log^{m+1}(t+a)+\gamma(0,a)\log^m(t+a)}{(t+a)^{-u}}dt\\
&\quad+(-1)^m f^{(m)}(-u,a)+o(1)+\begin{cases}\gamma(0,a)-1, & m=0,\\ 0, & m=1,\end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $f(s,\ a)$ 是引理 5中引入的函数。

证明。令 $v(x) = (x+a)^u$ 对数$^m(x+a)$，并令引理 $b_n = H_n(a)$ 中的 3。则

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{H_n(a)\log^m(n+a)}{(n+a)^{-u}} &= (x+a)^u\log^m(x+a)\sum_{n\le x}H_n(a)\\
&\quad-\int_{1-a}^{x}\sum_{n\le t}H_n(a)\frac{d}{dt}\left((t+a)^u\log^m(t+a)\right)dt. \qquad (9)
\end{aligned}$$

利用等式

$$\frac{d}{dt}\left((t+a)^u\log^m(t+a)\right) = \frac{d^m}{du^m}\left(u(t+a)^{u-1}\right)$$

使我们能够将（9）的右侧写成

$$L_1+(\gamma(0,a)-1)L_2-\frac{d^m}{du^m}u\int_{1-a}^{x}E(t,a)(t+a)^{u-1}\,dt+O\left(x^u\log^{m+1}x\right),$$

其中

$$L_1 = (x+a)^{u+1}\log^{m+1}(x+a) - \frac{d^m}{du^m}u\int_{1-a}^{x}(t+a)^u\log(t+a)\,dt,$$

$$L_2 = (x+a)^{u+1}\log^{m}(x+a) - \frac{d^m}{du^m}u\int_{1-a}^{x}(t+a)^u\,dt.$$

显然可得

$$L_2 = \frac{d^m}{du^m}\int_{1-a}^{x}(t+a)^u\,dt + \frac{d^m}{du^m}1 = \int_{1-a}^{x}(t+a)^u\log^m(t+a)\,dt + \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m=1 \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{d^m}{du^m}\left(\int_{1-a}^{x}(t+a)^u\log(t+a)\,dt + \int_{1-a}^{x}(t+a)^u\,dt\right) \\ &= \int_{1-a}^{x}(t+a)^u\log^{m+1}(t+a)\,dt + \int_{1-a}^{x}(t+a)^u\log^m(t+a)\,dt. \end{aligned}$$

将这些结果合并，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{n\le x}\frac{H_n(a)\log^m(n+a)}{(n+a)^{-u}} \\ &= \int_{1-a}^{x}\frac{\log^{m+1}(t+a)+\gamma(0,a)\log^m(t+a)}{(t+a)^{-u}}dt \\ &+ (-1)^m f^{(m)}(-u,a) + O\left(x^u\log^{m+1}x\right) + \begin{cases} \gamma(0,a)-1, & m=0, \\ 0, & m=1, \end{cases} \end{aligned}$$

证毕。 ■

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 1的证明。 由引理 5 可得

$$f(1,a) = 1-\gamma(0,a)+a_0 \text{ and } a_m = \frac{f^{(m)}(1,a)}{m!} \text{ for } m>0. \tag{10}$$

将 $u=-1$ 代入定理 6 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n\le x}\frac{H_n(a)}{n+a}\log^m(n+a) = &\int_{1-a}^{x}\frac{\log^{m+1}(t+a)+\gamma(0,a)\log^m(t+a)}{t+a}dt \\ &+ (-1)^m f^{(m)}(1,a) + o(1) + \begin{cases} \gamma(0,a)-1, & m=0, \\ 0, & m=1. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

因此，式（10）和式（11）可得

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m!} \times \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{H_n(a)\log^m(n+a)}{n+a} - \frac{\log^{m+2}(x+a)}{m+2} - \gamma(0,a)\frac{\log^{m+1}(x+a)}{m+1}\right),$$

这就是我们的论断。■

3 通过围道积分的 Laurent 展开

Boyadzhiev 等人的论文主要结果 [10] 是公式

$$\zeta_H(s) = \Gamma(1-s)\,I(s) + \zeta(s+1) - \psi(s)\,\zeta(s) - \zeta'(s), \tag{12}$$

其中 $\Gamma(s)$ 是欧拉伽马函数，且

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}e^z}{e^z-1}\log\left(\frac{e^z-1}{z}\right)dz.$$

这里， C 表示汉克尔轮廓线：它从 $-\infty$ 出发，沿负实轴的下侧延伸，逆时针绕原点一周，然后沿负实轴的上侧返回 $-\infty$。环路 C 由各部分 $C = C_- \cup C_+ \cup C_\varepsilon$组成，其中 C_ε 是以原点为圆心、半径为 ε 的正向圆， C_- 和 C_+ 分别是复 z平面中沿负实轴切割线的下边缘和上边缘。

本节首先给出 $\zeta_H(s,a)$ 的围道积分表示。这受到 [10] 的启发。接下来，我们借助这一积分表示，研究 $\zeta_H(-2k,a)$ 在正整数 k 处的特殊值，以及在简单极点处的洛朗级数展开。

在下文中，我们用 $C = C_- \cup C_+ \cup C_\varepsilon$ 表示汉克尔轮廓线，并在 C_- 上使用参数化 $z = xe^{-\pi i}$，在 C_+ 上使用 $z = xe^{\pi i}$，以及在 C_ε 上使用 $z = \varepsilon e^{i\theta}$。

在给出积分表示之前，我们想指出，$H_n(a)$具有如下生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a)\,x^n = \frac{\Phi(x,1;a)}{1-x}, \quad |x|<1,$$

其中

$$\Phi(x,s;a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+a)^s}$$

是 Lerch 超越函数（例如参见 [29, 第 2 节5]）。

定理 7 令 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$。当 $\mathrm{Re}(s) > 1$时，有

$$\zeta_H(s,a) = \Gamma(1-s)\,I(s,a) + \zeta_H(s), \tag{13}$$

其中

$$I(s,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{1-e^z}\left\{e^{za}\Phi\left(e^z,1;a\right)+\log\left(1-e^z\right)\right\}dz$$

且 C 是上述汉克尔轮廓线。

证明。考虑

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

我们可以将调和赫尔维茨ζ函数写作

$$\begin{aligned}\zeta_H(s,a)&=\sum_{n=0}^\infty\frac{H_n(a)}{(n+a)^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-ax}\sum_{n=0}^\infty H_n(a)e^{-nx}dx\\&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-xa}}{1-e^{-x}}\Phi\left(e^{-x},1;a\right)dx\end{aligned}\tag{14}$$

当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时。

我们现在关注积分 $I(s,a)$。由于 $z=xe^{-\pi i}$ 在 C_-，$z=xe^{\pi i}$ 在 C_+ 以及 $z=\varepsilon e^{i\theta}$ 在 C_ε，我们得到

$$\begin{aligned}I(s,a)&=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_-}+\int_{C_+}+\int_{C_\varepsilon}\right)\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\left\{e^{za}\Phi\left(e^z,1;a\right)+\log\left(1-e^z\right)\right\}dz\\&=\frac{\sin(s\pi)}{\pi}\int_\varepsilon^\infty\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-xa}\Phi\left(e^{-x},1;a\right)+\log\left(1-e^{-x}\right)\right)dx\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\left\{e^{za}\Phi\left(e^z,1;a\right)+\log\left(1-e^z\right)\right\}dz.\end{aligned}$$

为了证明

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\left\{e^{za}\Phi\left(e^z,1;a\right)+\log\left(1-e^z\right)\right\}dz\right|\longrightarrow 0\text{ as }\varepsilon\to 0$$

我们利用该表达式（例如参见 [29, 第 2 节。5]）

$$\Phi\left(e^z,1;a\right)=e^{-za}\left\{\sum_{n=1}^\infty\frac{\zeta(1-n,a)}{n!}z^n+\psi(1)-\psi(a)-\log(-z)\right\},\tag{15}$$

其中 $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 是双伽马函数。于是有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\left\{e^{za}\Phi\left(e^z,1;a\right)+\log\left(1-e^z\right)\right\}dz\\&=\sum_{n=1}^\infty\frac{\zeta(1-n,a)}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}z^n dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\log\left(\frac{-z}{1-e^z}\right)dz\\&+(\psi(1)-\psi(a))\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{1-e^z}dz.\end{aligned}$$

当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，函数 $\frac{z^{s-1}}{1-e^z}z^n$ 和 $\frac{z^{s-1}}{1-e^z}\log\left(\frac{-z}{1-e^z}\right)$ 在零点的某个邻域内全纯。因此，前两个积分为零。此外，已知

第三个积分趋于零，当 $\varepsilon \to 0$ （参见 [29, 第 2]章）。因此，我们得到

$$I(s,a) = \frac{\sin(s\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}} \left(e^{-xa} \Phi\left(e^{-x}, 1; a\right) + \log\left(1-e^{-x}\right) \right) dx. \quad (16)$$

该证明现由 (14) 并结合 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}$ $e^{-x}\Phi(e^{-x}, 1; 1) = -\log(1-e^{-x})$ 和 $\zeta_H(s,1) = \zeta_H(s)$ 得出。 ■

当我们考虑定理7 对于 s 的非正整数值时，需要系数 $A_n(x)$，它们由生成函数定义

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} \log\left(\frac{e^z-1}{z}\right) = \sum_{n=1}^\infty A_n(x) z^n. \quad (17)$$

这种情况 $x=1$ 不过是 [10]的方程 (6)。注意，由于（参见 [10]）

$$\log\left(\frac{e^z-1}{z}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{B_n(1)}{n!n} z^n,$$

$A_n(x)$ 可以写成

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k} B_{n-k}(x) B_k(1).$$

推论 8 对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\zeta_H(-2k,a) = -\frac{1}{2k+1} \sum_{n=0}^k \binom{2k+1}{2n+1} \zeta(-2n,a) B_{2k-2n} + \frac{1}{2}\zeta(1-2k,a) + \frac{B_{2k}}{2} - \frac{B_{2k}}{4k} - (2k)! A_{2k+1}(0).$$

证明。定理7 推出

$$\zeta_H(-2k,a) = \Gamma(2k+1) I(-2k,a) + \zeta_H(-2k) \quad (18)$$

对于 $k \in \mathbb{N}$. 众所周知，$\zeta_H(-2k) = \frac{B_{2k}}{2} - \frac{B_{2k}}{4k}$(参见 [26] 或 [10])。利用留数定理以及 (7)、(15) 和 (17)，可以将这些值 $I(-2k, a)$ 计算为

$$I(-2k,a) = -\sum_{\substack{m+n=2k+1 \\ n\geq 1, m\geq 0}} \frac{\zeta(1-n,a)}{n!} \frac{B_m}{m!} - (\psi(1) - \psi(a)) \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} - A_{2k+1}(0).$$

由于对于整数 $B_{2j+1} = 0$ $j \geq 1$，我们有

$$I(-2k,a) = -\sum_{n=0}^k \frac{\zeta(-2n,a)}{(2n+1)!} \frac{B_{2k-2n}}{(2k-2n)!} - \frac{\zeta(1-2k,a)}{(2k)!} B_1 - A_{2k+1}(0),$$

将其代入（18）即可得到推论的断言。 ■

现考虑以下情形 $s=0$和 $s=k=1-2j$, $j \in \mathbb{N}$, 在定理 7 中以如下形式得到调和赫尔维茨ζ函数的洛朗级数展开

$$\zeta_H(s,a) = \frac{a_{-1}}{s-k} + a_0 + O(s-k).$$

推论 9 在零的邻域内，我们有

$$\zeta_H(s,a)=\frac{1}{2s}+\gamma_{H,0}(0,a)+O(s),$$

其中

$$\gamma_{H,0}(0,a)=-\zeta(0,a)-\frac{1}{2}\psi(a)$$

证明。 根据定理 7 以及

$$\zeta_H(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1+\gamma(0)}{2}+O(s)$$

(见 [10, 推论 2]) 我们有

$$\zeta_H(s,a)=\frac{1}{2s}+\frac{1+\gamma(0)}{2}+I(0,a)+O(s).$$

利用留数定理结合（7）、（15）和（17）可计算得到 $I(0,a)$ 的值为

$$I(0,a)=-\zeta(0,a)-(\psi(1)-\psi(a))B_1-A_1(0).$$

至此，证明完成。 ■

推论 10 在 $s=-1$ 的一个邻域内，我们有

$$\zeta_H(s,a)=-\frac{1}{12(s+1)}+\gamma_{H,-1}(0,a)+O(s+1),$$

其中

$$\gamma_{H,-1}(0,a)=-\frac{1}{8}+\frac{\gamma(0)}{6}+\frac{\psi(a)}{12}+\frac{1}{2}(\zeta(0,a)-\zeta(-1,a))-A_2(0).$$

证明。 由定理 7 和

$$\zeta_H(s)=-\frac{1}{12(s+1)}-\frac{1}{8}+\frac{\gamma(0)}{12}+O(s+1)$$

([10, 推论 3]) 可见

$$\zeta_H(s,a)=-\frac{1}{12(s+1)}-\frac{1}{8}+\frac{\gamma(0)}{12}+I(-1,a)+O(s+1).$$

利用(7)、(15)和(17)，我们得到

$$I(-1,a)=-\sum_{\substack{m+n=2\\ n\geq 1,m\geq 0}}\frac{\zeta(1-n,a)}{n!}\frac{B_m}{m!}-(\psi(1)-\psi(a))\frac{B_2}{2!}-A_2(0),$$

从而得到所需的结果。 ■

最后，我们给出 $s=1-2k$ 邻域内针对整数 $k\geq 2$ 的展开式。

推论 11 设 $k \geq 2$ 为整数。在 $s = 1 - 2k$ 的邻域内，有

$$\zeta_H(s,a) = \frac{\zeta(1-2k)}{s+2k-1} + \gamma_{H,1-2k}(0,a) + O(s+2k-1),$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_{H,1-2k}(0,a) = {} & \frac{1}{2}\zeta(2-2k,a) - \psi(2k)\zeta(1-2k) \\ & - (\psi(1) - \psi(a))\frac{B_{2k}}{2k} - \frac{1}{2k}\sum_{n=1}^{k}\binom{2k}{2n}\zeta(1-2n,a)B_{2k-2n}.\end{aligned}$$

证明。 由定理 7 和

$$\zeta_H(s) = \frac{\zeta(1-2k)}{s+2k-1} + \Gamma(2k)A_{2k}(1) - \psi(2k)\zeta(1-2k) + O(s+2k-1),\ 2 \leq k \in \mathbb{N}$$

([10, 推论 3]) 我们有

$$\begin{aligned}\zeta_H(s,a) = {} & \frac{\zeta(1-2k)}{s+2k-1} + \Gamma(2k)A_{2k}(1) \\ & - \psi(2k)\zeta(1-2k) + \Gamma(2k)I(1-2k,a) + O(s+2k-1).\end{aligned}$$

再次由留数定理，（7）、（15）和（17）我们推导出

$$\begin{aligned}I(1-2k,a) = {} & -\sum_{n=1}^{k}\frac{\zeta(1-2n,a)}{2n!}\frac{B_{2k-2n}}{(2k-2n)!} \\ & - \frac{\zeta(2-2k,a)}{(2k-1)!}B_1 - (\psi(1) - \psi(a))\frac{B_{2k}}{(2k)!} - A_{2k}(0),\end{aligned}$$

由此即可得证。 ■

4 $\gamma_H(m,1/2)$ 和 $\gamma_H(m)$ 的求值公式

根据[11, 定理 1 和 3] 我们有以下泰勒/洛朗展开：

$$\begin{aligned}\zeta_{\widetilde{H}}(s) = S_{1,s}^{+-}(0,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma_{\widetilde{H}}(m)}{m!}(s-1)^m, \\ \zeta_{H^-}(s) = S_{1,s}^{-+}(0,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^-}{n^s} = \frac{\log 2}{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma_{H^-}(m)}{m!}(s-1)^m,\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $H_n^- = \mathcal{A}_n^{(1)}(0)$ 是第 n 个斜调和数。

本节中，我们首先用 $\gamma_H(m)$、$\gamma_{\widetilde{H}}(k)$ 和 $\gamma_{H^-}(k)$ 表示常数 $\gamma_H(m,1/2)$。然后，我们给出 $\gamma_H(m)$ 的求值公式，该公式用 $\gamma(m)$、$\Gamma^{(m)}(1)$、ζ值和某些积分表示。

命题 12 对于一个非负整数 m 我们有

$$\gamma_H\left(m,\frac{1}{2}\right) = \gamma_H(m) + 2(-1)^m\frac{\log^{m+1}2}{m+1} + 2\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-\log 2)^{m-k}\left(\gamma_{\widetilde{H}}(k) + \gamma_{H^-}(k)\right).$$

证明。 由定理 7 结合(16)可得

$$\begin{aligned}\zeta_H(s,1)+\zeta_H\left(s,\frac{1}{2}\right)&=2\zeta_H(s)+\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x/2}}\right)dx\\&=2\zeta_H(s)+\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}\log\left(1+e^{-x/2}\right)dx.\end{aligned}$$

利用部分分式

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$$

并考虑生成函数

$$\sum_{n=1}^\infty H_n^- t^n=\frac{\log(1+t)}{1-t}\text{ and }\sum_{n=1}^\infty(-1)^n H_n t^n=-\frac{\log(1+t)}{1+t},$$

我们发现

$$\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}\log\left(1+e^{-x/2}\right)dx=2^{s-1}\Gamma(s)\left(\zeta_{H^-}(s)+\zeta_{\widetilde{H}}(s)\right).$$

因此我们得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^2\zeta_H\left(s,\frac{k}{2}\right)=\zeta_H(s)+2^{s-1}\zeta_{H^-}(s)+2^{s-1}\zeta_{\widetilde{H}}(s).\tag{20}$$

现在我们使用（19）、（20）和定理1 得出结论:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\sum_{k=1}^2\frac{1}{2}\gamma_H\left(m,\frac{k}{2}\right)\frac{(s-1)^m}{m!}=\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\gamma_H(m)\frac{(s-1)^m}{m!}\\&+\sum_{m=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}(-1)^k\left(\gamma_{\widetilde{H}}(k)+\gamma_{H^-}(k)\right)\log^{m-k}2+\frac{\log^{m+1}2}{m+1}\right)\frac{(s-1)^m}{m!}.\end{aligned}$$

比较 $(s-1)^m/m!$ 的系数，我们便得出所需结果。 ■

下一个命题给出了斯蒂尔切斯常数的一个计算公式$\gamma_H(n)$。该公式有助于计算 $\gamma_H(n,\ 1/2)$以及 [14, 定理 5]中给出的超调和斯蒂尔切斯常数。

命题 13 对于非负整数 n，我们有

$$\begin{aligned}\gamma_H(n)&=(-1)^n\zeta^{(n)}(2)+\gamma(n+1)-(-1)^n\frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n+1}\\&\quad-(-1)^n\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(b_k i_{n-k}+(-1)^{n-k}\gamma(n-k)\psi^{(k)}(1)\right),\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$b_k=\frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\bigg|_{s=1}\ and\ i_k=\int_0^\infty\frac{e^{-x}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\log^k x}{1-e^{-x}}dx.\tag{22}$$

证明。我们关注（12）右侧。众所周知，函数 ψ（s）ζ（s）和 $-\zeta'$（s）在 $s=1$的邻域内为

$$\psi(s)\zeta(s)=\frac{\psi(1)}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n+1}\frac{(s-1)^n}{n!}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\gamma(n-k)\psi^{(k)}(1)\frac{(s-1)^n}{n!}$$

and

$$\zeta'(s)=-\frac{1}{(s-1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma(n+1)\frac{(s-1)^n}{n!}.$$

为将 $\Gamma(1-s)I(s)$ 展开为级数，我们先将 $I(s)$ 写成

$$I(s)=-\frac{\sin(\pi s)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx, \tag{23}$$

并将 $\Gamma(1-s)I(s)$ 写成

$$\Gamma(1-s)I(s)=-\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx.$$

由于 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ 且右侧的积分在 $s=1$ 附近解析，因此我们可以写成

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}(s-1)^k \text{ and } \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_k}{k!}(s-1)^k.$$

因此

$$\Gamma(1-s)I(s)=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k i_{n-k}\frac{(s-1)^n}{n!}.$$

因此，由式（5）和（12）可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_H(n)\frac{(s-1)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\zeta^{(n)}(2)+(-1)^n\gamma(n+1)-\frac{\psi^{(n+1)}(1)}{n+1}\right)\frac{(s-1)^n}{n!}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(b_k i_{n-k}+(-1)^{n-k}\gamma(n-k)\psi^{(k)}(1)\right)\frac{(s-1)^n}{n!},$$

由此得到式（21）。■

命题14 对于非负整数 n，有

$$\gamma_{\widetilde{H}}(n)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k c_{n-k},$$

其中 b_k 由（22）给出，且

$$c_k=\int_0^{\infty}\frac{\log(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\log^k x dx.$$

证明。类似于（14）可以看出

$$\zeta_{\widetilde{H}}(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1+e^{-x}}\log\left(1+e^{-x}\right)dx.$$

由于$\mathrm{r}\frac{1}{s()}$且右侧的积分在 $s=1$ 附近是解析的，我们可以写成

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\sum_{k=0}^\infty\frac{b_k}{k!}(s-1)^k\ \text{ and }\ \int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1+e^{-x}}\log\left(1+e^{-x}\right)dx=\sum_{k=0}^\infty\frac{c_k}{k!}(s-1)^k.$$

因此，

$$\zeta_{\widetilde{H}}(s)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}b_kc_{n-k}\frac{(s-1)^n}{n!}.$$

将此与（19）结合，即完成证明。 ■

注15 $\gamma_{\widetilde{H}}(n)$ 的前几个值如下列出。

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\widetilde{H}}(0)=0.58224052646501\ldots && \gamma_{\widetilde{H}}(5)=0.03566856790329\ldots\\
&\gamma_{\widetilde{H}}(1)=-0.203469139835\ldots && \gamma_{\widetilde{H}}(6)=0.01570725581174\ldots\\
&\gamma_{\widetilde{H}}(2)=-0.069650561786\ldots && \gamma_{\widetilde{H}}(7)=-0.012735756486\ldots\\
&\gamma_{\widetilde{H}}(3)=0.00491231177924\ldots && \gamma_{\widetilde{H}}(8)=-0.037846238315\ldots\\
&\gamma_{\widetilde{H}}(4)=0.03583962465759\ldots && \gamma_{\widetilde{H}}(9)=-0.047740308386\ldots
\end{aligned}$$

我们通过表示该积分来结束本文。

$$J(v)=\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^\infty\frac{x^{v-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx$$

用已知常数表示。

命题 16 我们有

$$J(1)=\gamma(1)+\frac{\gamma^2(0)-\zeta(2)}{2}$$

以及对于整数 $v\geq 2$,

$$J(v)=-\frac{v}{2}\zeta(v+1)-\psi(v)\zeta(v)-\zeta'(v)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v-2}\zeta(v-j)\zeta(j+1).$$

证明。由（21）和（22）可得

$$\gamma_H(0)=\gamma(1)+\gamma^2(0)-\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\log\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx.$$

将此与结合

$$\gamma_H(0)=\frac{\gamma^2(0)+\zeta(2)}{2}$$

（参见[16, 方程 (6)] 或 [14, 注 2]）可得

$$J(1)=\gamma(1)+\frac{\gamma^2(0)-\zeta(2)}{2},$$

第一个等式。

由于 $\zeta_H(v)$ 对整数 $v \geq 2$ 收敛，因此我们可以将 (12) 写成如下形式

$$\lim_{s\to v} \frac{\pi I(s)}{\Gamma(s)\sin(\pi s)} = \zeta_H(v) - \zeta(v+1) + \psi(v)\zeta(v) + \zeta'(v).$$

利用（23），左端变为

$$\lim_{s\to v} \frac{\pi I(s)}{\Gamma(s)\sin(\pi s)} = -J(v).$$

鉴于众所周知的欧拉公式

$$\zeta_H(v) = \frac{v+2}{2}\zeta(v+1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v-2}\zeta(v-j)\zeta(j+1),$$

证明如下。 ■

参考文献

[1] J. A. Adell. 斯蒂尔切斯常数的渐近估计：一种概率论方法。《英国皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》，467(2128):954–963, 2011.[2] E. Alkan, 《调和ζ函数特殊值与对数正弦积分的逼近》。《数论与物理通讯》，7(3): 515–550, 2013.[3] H. Alzer 和 J. Choi, 四参数线性欧拉和。《数学分析与应用杂志》，484(1): 123661, 2020.[4] T. M. Apostol。《解析数论导论》。Springer Science & Business Media，1976.[5] T. M. Apostol 和 T. H. Vu. 与黎曼ζ函数相关的狄利克雷级数。《数论杂志》，19(1): 85–102, 1984.[6] B. C. Berndt. 关于赫尔维茨ζ函数。《落基山数学杂志》，2(1): 151–157, 1972.[7] I. V. Blagouchine. 一个用于求有理参数处第一个广义斯蒂尔切斯常数闭式的定理及一些相关求和。《数论杂志》，148: 537–592, 2015.[8] I. V. Blagouchine. 广义欧拉常数展开为 π^{-2} 中的多项式级数以及仅含有理系数的形式包络级数。《数论杂志》，158: 365–396, 2016.[9] D. Borwein, J.M. Borwein, D.M. Bradley，带参数的欧拉和恒等式，《数学分析与应用杂志》，316(1): 328–338, 2006.

[10] K. N. Boyadzhiev, H. G. Gadiyar 和 R. Padma. 欧拉和在负整数处的取值及其与伯努利数某种卷积的关系。韩国数学会通报，45(2): 277–283, 2008. [11] K.N. Boyadzhiev, H.G. Gadiyar, R. Padma，负整数处的交错欧拉和。Hardy-Ramanujan J. 32: 24–37, 2009.[12] W. E. Briggs 和 R. G. Buschman. 由狄利克雷级数定义的函数的幂级数系数。《伊利诺伊数学杂志》，5(1): 43–44, 1961.[13] W. E. Briggs 和 S. Chowla. $\zeta(s)$的幂级数系数。《美国数学月刊》，62: 323–325, 1955.[14] M. Can, A. Dil, L. Kargın，超调和ζ函数Laurent展开中的斯蒂尔切斯常数。《拉马努金杂志》，https://doi.org/10.1007/s11139-022-00676-z.[15]M. Can, A. Dil, L. Kargın, M. Cenkci 和 M. G¨ulo˘glu. 与超调和数相关的欧拉-马歇罗尼常数的推广。《拉马努金数学学会杂志》，（即将出版），https://arxiv.org/abs/2109.01515.[16] B. Candelpergher 和 M.-A. Coppo. 调和ζ函数的 Laurent展开。《数学分析与应用杂志》，491: 124309, 2020.[17] J. Choi. 斯蒂尔切斯常数 γ_n的某些积分表示。《不等式与应用杂志》，2013(1): 1–10, 2013.[18] M. W. Coffey. 斯蒂尔切斯常数的超几何求和表示。《分析》33(2): 121–142, 2013.[19] M. W. Coffey. 斯蒂尔切斯常数的级数表示。《落基山数学杂志》，44(2): 443–477, 2014.[20] H. Cohen. 数论：第二卷：解析与现代工具。第240卷。Springer Science & Business Media，2008. [21] M. Eie 和 W-C. Liaw. 赫尔维茨ζ函数上的双重欧拉和。《落基山数学杂志》1869-1883, 2009.[22] L. Euler. Opera omnia，第15卷。Teubner，柏林，1917.[23] J. Fredrik 和 I. V. Blagouchine. 使用复积分计算斯蒂尔切斯常数。《计算数学》，88(318): 1829–1850, 2019.[24] A. Li, H. Qin，带参数的欧拉和的表示，《积分变换与特殊函数》30(1): 55–82, 2019.[25] J. J. Y. Liang 和 J. Todd. 斯蒂尔切斯常数。J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 76: 161–178, 1972.[26] Y. Matsuoka. 关于某个狄利克雷级数在有理整数处的取值。《东京数学杂志》，5(2): 399–403, 1982.

[27] H. Qin、N. Shang、A. Li，关于赫尔维茨ζ函数和扩展欧拉和的一些恒等式，《特殊函数积分变换》24(7): 561–581，2013。[28] A. Sofo、J. Choi，关于带参数线性化的四个欧拉和的扩展及涉及ζ函数的级数。《数学分析与应用杂志》，515：126370，2022。[29] H. M. Srivastava 和 J. Choi。《与ζ函数及相关函数有关的级数》。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特-波士顿-伦敦，2001。[30] H. Su 和 M.-S. Kim。关于交错赫尔维茨ζ函数对应的斯蒂尔切斯常数和伽马函数。《数学分析与应用杂志》，125930，2021。