arXiv:2304.03519v2 [eess.SY] 9 May 2023

# 利用 Koopman 算子实现非线性系统的鲁棒数据驱动控制 ⋆

Robin Str¨asser, Julian Berberich, Frank Allg¨ower

德国斯图加特大学系统理论与自动控制研究所（电子邮件：{straesser,berberich,allgower}@ist.uni-stuttgart.de）。

摘要：近年来，动力系统的数据驱动分析与控制受到了广泛关注。尽管线性系统已得到深入研究，但针对非线性系统的理论成果仍然少见。本文提出一种适用于离散时间控制仿射非线性系统的数据驱动控制器设计方法。该方法基于 Koopman 算子；这是一种线性但无限维的算子，可将非线性系统提升到更高维空间。具体而言，我们基于测量数据推导出提升后的双线性系统表示的线性分式表示。此外，我们将提升限制在有限维空间内，同时利用有限增益论证来考虑截断误差。我们推导出一种基于线性矩阵不等式的设计过程，以保证所得双线性系统在满足有限增益界的所有误差项下具有鲁棒局部稳定性，从而也保证底层非线性系统具有鲁棒局部稳定性。最后，我们将所提出的设计方法应用于非线性范德波尔振荡器。

*Key*词语：Koopman算子、数据驱动控制、鲁棒控制、学习、非线性系统

## 1. 引言

为非线性系统设计稳定控制器通常是工程与控制理论中的一项具有挑战性的任务。为了应用成熟的非线性控制器设计技术，通常需要一个精确的非线性系统模型（Khalil，2002）。然而，通过第一性原理或系统辨识获得此类模型往往耗时，并且需要专业知识。因此，在过去十年中，另一种策略逐渐受到越来越多的关注，即将数据驱动方法应用于控制器设计（Hou and Wang，2013）。

Willems 等人（2005）通过测量数据给出的线性时不变（LTI）系统的基本刻画，为线性数据驱动控制器设计提供了一个有前景的框架。在这一框架内，De Persis 和Tesi（2019）基于无噪声数据设计了状态反馈和输出反馈控制器。Berberich 等人（2020）；vanWaarde等人（2020）的研究成果通过基于含噪数据设计鲁棒控制器，扩展了这些研究；此外，Berberich 等人（2022）提出了一个在数据驱动控制器设计中进一步纳入先验知识的框架。然而，文献中的大多数方法都聚焦于 LTI 系统，因此这些成果并不容易应用于非线性系统。针对 Hammerstein系统和 Wiener系统（Berberich 和Allg¨ower，2020）、双线性系统（Bisoffi 等人，2020）、多项式系统（Guo 等人，2021；Dai 和Sznaier，2021）以及有理动力-等系统，已经提出了可能的扩展。

⋆ F. Allg¨ower感谢德国研究联合会（德国研究基金会）依据德国卓越战略——EXC2075——390740016及资助项目 AL 316/15-1——468094890资助本项工作。R.Str¨asser感谢SC SimTech研究生院的支持。
© 2023 作者。本文已获国际自动控制联合会接收，将依据知识共享许可协议 CC-BY-NC-ND发表。

ics（Str¨asser 等，2021）。后者还提出了一种用于非线性系统的控制器设计方法，该方法可将系统线性分解为非多项式基函数。不过，对于更一般类别的非线性系统而言，闭环稳定性仍是一个悬而未决的问题。

一种颇具前景的非线性系统分析与控制方法依赖于Koopman算子（Koopman，1931）：首先将非线性动力学提升为一个（可能是）无限维线性系统，然后基于有限维近似的线性设计方法获得控制器。1931年Koopman的开创性工作发表近75年后，Mezi´c（2005）重新发掘了Koopman算子，并提出将其用于预测与控制。在随后的十年中，相关研究成果不断涌现，包括对全局稳定性性质的分析（Mauroy和Mezi´c，2016）、估计（Netto和Mili，2018），以及基于数据近似Koopman作用的数值方法，例如扩展动态模态分解（EDMD）（Williams等，2015）及其分析（Korda和Mezi´c，2018b；Haseli和Cort´es，2022）。尽管Koopman理论最初是为自治系统发展起来的，相关文献也包含了对受控系统的扩展，例如模型预测控制（Korda和Mezi´c，2018a）、线性二次调节（Brunton等，2016）；Lian等（2021）则从Koopman视角阐释了Willems等（2005）的工作。尽管已有研究表明Koopman控制在众多应用中表现良好（Budiˇsi´c等，2012），例如机器人学（Bruder等，2019）或电网（Korda等，2018），但误差界的推导仍是一个活跃的研究领域（N¨uske等，2021）。因此，基于Koopman的控制方法通常缺乏闭环稳定性保证。

本文提出一种具有稳定性保证的数据驱动控制器设计方法，适用于离散时间控制仿射非线性系统。受 Koopman 算子

理论的启发，我们基于测量数据，采用系统的提升双线性表示。此外，我们考虑有限维近似，并利用有限增益论证处理截断误差。随后，我们得到一种基于线性矩阵不等式（LMI）的设计过程，可保证所得双线性系统在所有符合有限增益界的误差下具有鲁棒局部稳定性。因此，所提出的控制器也能稳定底层非线性系统。该方法受 Sinha 等人（2022）和 Mamakoukas 等人（2022）的工作启发。第一篇文献的作者推导出一个 LMI，用于为标称双线性系统求取局部稳定化控制器；该系统表示 Koopman 提升的有限维近似。由于他们忽略了截断误差，所得控制器无法保证稳定真实非线性系统的闭环。此外，Mamakoukas 等人（2022）推导出受控非线性系统的线性 Koopman 表示，并通过 Lipschitz 连续性刻画截断误差，以便在模型预测控制框架中界定预测误差。然而，与线性表示相比，双线性表示更为准确，因此能够实现保守性更低的控制器设计。

概述：本文的组织结构如下。第2节介绍Koopman算子及其对自治系统和受控系统的作用。第3节给出将非线性系统重新表述为具有有限增益有界截断误差的双线性系统的方法。基于此，第4节给出主要理论结果：一种基于鲁棒控制论证且能够保证稳定性的控制器设计方法。在第5节中，通过仿真将所提出的方法应用于范德波尔振荡器。最后，我们在第6节总结全文。

记号：我们用 $I_p$ 表示 $p \times p$ 单位矩阵，用$0_{p\times q}$表示 $p \times q$ 零矩阵；如果维数可由上下文明确，则省略指标。如果 $A$ 是对称矩阵，当 $A$ 分别为正定或半正定时，我们分别记作 $A \succ 0$ 或 $A \succeq 0$ 。负定性（半负定性）的定义类似。对于可由对称性推断出的矩阵块，我们用 $\star$ 表示，并通过写作 $[\star]^\top AB$来简写 $B^\top AB$ 。最后， $\otimes$ 表示克罗内克积。

## 2. Koopman算子

在本节中，我们简要介绍自治系统的Koopman算子理论及其向受控系统的扩展。

自治系统：考虑一个由 $x_{k+1} = f(x_k)$ 定义的非线性动力系统，其状态空间为 $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$，非线性状态转移映射为 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，离散时间索引为 $k \geq 0$。在 Koopman理论中，通过研究 Koopman算子 $\mathcal{K} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $\mathcal{K}\phi = \phi \circ f$ 对每个观测函数 $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, $\phi \in \mathcal{F}$ 的作用，使用标量函数来刻画系统的演化，这些函数通常称为观测量。此处， $\mathcal{F}$ 是一个在Koopman算子作用下保持不变的函数空间， $\circ$ 表示函数复合。对于任意状态 $x_k$，Koopman作用等价于 $\mathcal{K}\phi(x_k) = \phi \circ f(x_k) = \phi(x_{k+1})$。尽管底层动力系统是非线性且有限维的，Koopman算子却是线性的，但通常是无限维的。与基于一阶泰勒展开的线性化不同， the 线性Koopman算子在全局范围内描述非线性系统。

特别值得关注的是，无限维Koopman算子与通过限制到有限维观测函数空间 $\mathcal{F}_\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$而得到的近似之间的截断误差。在此， $\mathcal{D} = \{\phi_j\}_{j=1}^N$ 被称为字典。如果 $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ 在Koopman算子的作用下保持不变，并且足够丰富，能够描述底层系统的所有非线性，则该近似是精确的，不会产生误差。否则，字典 $\mathcal{D}$ 的选择会影响最终截断误差的大小。此外，有限维提升的Koopman系统可写为 $z_{k+1} = Az_k$，其中 $z = \Phi(x) \in \mathbb{C}^N$ 且$\Phi(x) = [\phi_1(x) \ \cdots \ \phi_N(x)]^\top$。

受控系统：现在，我们考虑一个具有如下形式的控制仿射动力学的非线性离散时间系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u_k \tag{1}$$

其状态空间为 $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$，标量输入为 $u \in \mathbb{R}$，连续可微非线性映射为 $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$。早期研究假设受控系统的 Koopman 提升具有线性表示（Korda and Mezi´c，2018a），而将 Koopman 框架推广到双线性表示，可获得更精确的提升。基于切换系统的方法可在连续时间下得到精确的双线性形式（例如，参见 Surana，2016；Mauroy 等，2020，第 4、12 章），并使用 Koopman 算子。基于这一观察，我们采用受控系统的有限维提升双线性表示。

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \Phi(x_{k+1}) = \Phi(f(x_k) + g(x_k)u_k) \\ &= \Phi(f(x_k)) + u_k \left( B_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x_k) \right) + \tilde{\varepsilon}(z_k, u_k), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\tilde{\varepsilon}$ 表示忽略高阶项所导致的误差。此外，我们记 $\Phi(f(x_k)) = Az_k + \varepsilon_f(z_k, u_k)$和 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x_k) = B_1 z_k + \varepsilon_g(z_k, u_k)$，其中 $A$, $B_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$。现有文献中的一个常见假设是，$z = \Phi(x)$的选择满足 $\varepsilon_f = \varepsilon_g = 0$。然而，对于一般的提升函数 $\Phi$，误差并非为零。因此，我们将 (2) 表示为受误差影响的双线性控制系统

$$z_{k+1} = Az_k + u_k(B_0 + B_1 z_k) + \varepsilon(z_k, u_k), \tag{3}$$

其中， $\varepsilon(z_k, u_k) = \tilde{\varepsilon}(z_k, u_k) + \varepsilon_f(z_k, u_k) + u_k\varepsilon_g(z_k, u_k)$ 表示截断误差。为简便起见，我们省略 $\varepsilon(z_k, u_k)$ 的自变量，并将其记为 $\varepsilon_k$。

## 3. 非线性系统的双线性表示

在本文的其余部分中，我们以双线性表示 (3)为基础，为非线性系统(1) 设计稳定控制器$u = k^\top z$, $k \in \mathbb{R}^N$。为此，我们首先在第 3.1节中推导有限维双线性表示。随后，在第3.2节中，我们使用扩展动态模态分解从数据中获得未知的系统矩阵，并根据第 2 节处理 Koopman算子有限维近似的截断误差。

### 3.1 问题设定

在全文中，我们考虑如式(1) 所示的非线性系统，其在 $(x, u) = 0$ 处具有一个平衡点，即 $f(0) = 0$。将系统动力学提升到更高维状态$z = \Phi(x)$会得到双线性表示 (3)，其中 $A$,

$B_0$、 $B_1$和 $\varepsilon_k$ 未知。由于我们还考虑截断误差 $\varepsilon_k$，因此双线性表示等价地描述了非线性动力学（1）。因此，我们设计控制律 $u = k^\top z$，使其对稍后定义的椭球区域 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$ 内所有$z$ 都能局部鲁棒稳定（3），并证明该控制器也能局部稳定非线性系统。此外，我们定义集合

$$\mathcal{Z} = \left\{ z \in \mathbb{R}^N \middle| \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} Q_z & S_z \\ S_z^\top & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

其中包含 $Q_z \prec 0$ 和 $R_z \succ 0$。例如，这包括针对 $Q_z = -I$、$S_z = 0$ 和 $R_z = c$ 的界限$z^\top z \leq c \quad c > 0$。此外，我们假设 the inverse

$$\begin{bmatrix} Q_z & S_z \\ S_z^\top & R_z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_z & \tilde{S}_z \\ \tilde{S}_z^\top & \tilde{R}_z \end{bmatrix}$$

存在。对于理论分析，我们利用提升后的状态 $z$ 在所有时刻都位于 $\mathcal{Z}$ 内这一条件，而这可通过适当的李雅普诺夫函数子水平集 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$来保证。

假设 1. 提升函数 $\Phi$ 满足 $\Phi(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

该假设确保双线性系统在 $(z, u) = 0$处存在一个平衡点。如第 2 节所述，选择合适的提升函数 $\Phi$ 对于减小截断误差、从而获得准确的双线性表示至关重要。如何为一般非线性系统选择这一函数仍是一个开放的研究问题（Iacob 等，2022）；相关研究提出使用依赖于输入的提升函数 $\Psi(x, u)$，而非仅依赖于状态的提升函数 $\Phi(x)$。

时滞坐标：一种常见的提升方式是采用所谓的时滞坐标（参见 Mamakoukas 等，2022；Mauroy 等，2020，第 8 章），即 $z_k = \Psi(x_{k-d_x:\,k}, u_{k-d_u:\,k}) = \begin{bmatrix} x_k^\top & h_k^\top \end{bmatrix}^\top$ 其中 $z \in \mathbb{R}^N$，以及状态和输入的历史 $h_k = \begin{bmatrix} h_{x,k}^\top & h_{u,k} & h_{xu,k}^\top \end{bmatrix}^\top$。除了状态的历史 $h_{x,\,k} = \begin{bmatrix} x_{k-1}^\top & \cdots & x_{k-d_x}^\top \end{bmatrix}^\top$ 和输入的历史 $h_{u,\,k} = \begin{bmatrix} u_{k-1} & \cdots & u_{k-d_u} \end{bmatrix}^\top$之外，我们还在所提出的提升中存储其乘积的历史 $h_{xu,\,k} = \begin{bmatrix} x_{k-1}^\top u_{k-1} & \cdots & x_{k-d_u}^\top u_{k-d_u} \end{bmatrix}^\top$，以获得双线性系统 (3) 的恰当时滞结构。时滞状态和时滞控制输入的数量分别记为 $d_x$ 和 $d_u$，其中 $d_x \geq d_u$，因此，提升维数为 $N = n(1 + d_x + d_u) + d_u$。此外，真实状态 $x$ 可以通过线性方程 $x_k = [I \;\; 0]\, z_k$精确恢复。基于该提升的动力学

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{u}} \\ A_{\mathrm{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ h_k \end{bmatrix} + u_k \left( \begin{bmatrix} B_{0,\mathrm{u}} \\ B_{0,\mathrm{k}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,\mathrm{u}} \\ B_{1,\mathrm{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ h_k \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

with *known* matrices

$$A_{\mathrm{k}} = \mathrm{diag}\left( [I_{nd_x} \;\; 0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{d_u - 1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n(d_u - 1)} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$B_{0,\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} 0_{nd_x \times 1} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{d_u - 1 \times 1} \end{bmatrix} \\ 0_{nd_u \times 1} \end{bmatrix}, \; B_{1,\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} 0_{nd_x \times n} & 0_{nd_x \times N - n} \\ 0_{d_u \times n} & 0_{d_u \times N - n} \\ \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n(d_u - 1) \times n} \end{bmatrix} & 0_{nd_u \times N - n} \end{bmatrix}$$

根据历史中的延迟结构，以及取决于系统动力学的未知矩阵 $A_{\mathrm{u}}, B_{0,\mathrm{u}}, B_{1,\mathrm{u}}$。特别地，所得误差由状态中的截断误差 $x$ 明确定义，即。

$$\varepsilon_{x,k} = f(x_k) + g(x_k) u_k - A_{\mathrm{u}} z_k - u_k (B_{0,\mathrm{u}} + B_{1,\mathrm{u}} z_k).$$

由于 $\varepsilon_{x,k}$ 与非线性函数 $f, g$直接相关，因此可以对误差$\varepsilon_{x,k}$ 进行界定，进而推导出 $\varepsilon_k$，例如，当 $f$ 和 $g$ 满足利普希茨连续性时，即可通过利普希茨连续性得出。

单项式提升：尽管上一段中所考虑的时滞提升产生了结构化动力学，但非结构化提升函数 $\Phi$ 也是可能的，从而得到完全未知的矩阵 $A = A_{\mathrm{u}}$、 $B_0 = B_{0,\,\mathrm{u}}$、 $B_1 = B_{1,\,\mathrm{u}}$，以及一个未知的逆提升 $x_k = \Phi^{-1}(z_k)$，这可能会引入额外误差。广泛使用的一种提升由单项式组成（参见 Carleman，1932），其中通过 $x_k = [I \;\; 0]\, z_k$可以精确恢复真实状态。在此， $z_k$ 的每个坐标都会受到截断误差 $\varepsilon_k$ 的影响，因此更难以推导出非保守的误差界。

其他常用的提升方法例如依赖于径向基函数，或依赖于对时滞坐标进行额外的非线性变换。

### 3.2 扩展动态模态分解

在下文中，我们使用扩展动态模态分解从数据中估计(3)中的未知系统矩阵 $A$、 $B_0$和 $B_1$ 。为此，我们收集数据 $\{\{x_k^{\mathrm{d}}\}_{k=-d_x}^{L}, \{u_k^{\mathrm{d}}\}_{k=-d_x}^{L-1}\}$ ，并将样本排列成数据矩阵 $U = \begin{bmatrix} u_0^{\mathrm{d}} & \cdots & x_{L-1}^{\mathrm{d}} \end{bmatrix}$、 $Z = \begin{bmatrix} \Phi(x_0^{\mathrm{d}}) & \cdots & \Phi(x_{L-1}^{\mathrm{d}}) \end{bmatrix}$，以及 $Z_+ = \begin{bmatrix} \Phi(x_1^{\mathrm{d}}) & \cdots & \Phi(x_L^{\mathrm{d}}) \end{bmatrix}$。此外，我们定义 $Y = \begin{bmatrix} Z^\top & U^\top (Z \,\mathrm{diag}(U))^\top \end{bmatrix}^\top$。然后，通过最小二乘问题 $\min_{A, B_0, B_1} \| Z_+ - [A \;\; B_0 \;\; B_1] Y \|$ 获得未知矩阵，其 $\ell_2$-最优解为 $[A \;\; B_0 \;\; B_1] = Z_+ Y^\dagger$，其中 $Y^\dagger$ 是$Y$的伪逆。该过程得到满足动态方程 (3) 的最优系统矩阵，使得误差 $\varepsilon_k$ 最小化。

优化可根据提升结构进行简化。例如，时滞提升仅导致系统矩阵 $A_{\mathrm{u}}, B_{0,\mathrm{u}}$以及$B_{1,\mathrm{u}}$ 在（4）中部分未知。因此，我们定义 $X_+ = \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{d}} & \cdots & x_L^{\mathrm{d}} \end{bmatrix}$ 并求解简化的优化问题 $\min_{A_{\mathrm{u}}, B_{0,\mathrm{u}}, B_{1,\mathrm{u}}} \| X_+ - [A_{\mathrm{u}} \;\; B_{0,\mathrm{u}} \;\; B_{1,\mathrm{u}}] Y \|$，其中 $Y$的定义与之前相同，但使用 $Z = \begin{bmatrix} \Psi(x_{-d_x:0}^{\mathrm{d}}, u_{-d_u:0}^{\mathrm{d}}) & \cdots & \Psi(x_{L-1-d_x:L-1}^{\mathrm{d}}, u_{L-1-d_u:L-1}^{\mathrm{d}}) \end{bmatrix}$。

此外，在特定假设下，EDMD 会收敛到 $N \to \infty$ 和 $L \to \infty$ 对应的 Koopman算子（Korda 和 Mezi´c，2018b）；Chen 和 Vaidya（2019）以及 N¨uske 等人（2021）给出了概率误差分析。

现在应用线性反馈律 $u = k^\top z$，双线性系统（3）的闭环动力学为

$$z_{k+1} = (A + B_0 k^\top) z_k + B_1 z_k (k^\top z_k) + \varepsilon_k,$$

其中， $\varepsilon_k = \varepsilon(z_k, k^\top z_k)$ 是 $z_k$ 的函数。

假设 2。截断误差 $\varepsilon_k$ 在所有时刻 $k \geq 0$ 满足有限- ain 界

$$\varepsilon_k \in \mathcal{E} := \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^N \middle| \|\varepsilon\| \leq L_\varepsilon \|z\| \text{ for all } z \in \mathcal{Z} \right\}.$$

选择合适的提升函数 $\Phi$ 对于获得较小的常数 $L_\varepsilon$ 以及准确的双线性表示至关重要。在本文余下部分，我们假设截断误差的有限增益界（或至少一个上界）是已知的。显然，双线性系统相对于真实非线性系统的近似精度，以及因此产生的常数 $L_\varepsilon$，取决于所选择的提升函数。关于如何获得这一界限的更严格研究，例如采用 Wood 和 Zhang（1996）提出的方法，将留待未来开展。

此外，误差表征的推广 $\mathcal{E}$也是未来研究中一个值得探讨的问题，例如，考虑相对于每个测量数据样本的局部利普希茨连续性，

而非仅考虑原点。尤其是，结合多个数据点上的利普希茨连续性知识，可得到由增量二次约束描述的不确定性包络（参见 Calliess，2014）。

注3. 我们也可以不通过扩展动态模态分解（EDMD）从数据中显式识别未知矩阵，而是遵循 van Waarde等人（2020）和 Berberich 等人（2022）的思路，推导出所有可能的系统矩阵选取的参数化形式，使所得系统与数据以及所假设的截断误差包络相一致。对这种直接的数据驱动系统参数化的研究是未来一项有意义的工作。

## 4. 非线性系统的稳定控制器设计

接下来，我们希望设计一个控制器 $u = k^\top z$，在考虑截断误差的情况下稳定所研究的双线性系统 (3)，从而也稳定其背后的真实非线性系统 (1)。在第 4.1 节中，我们首先推导基于线性矩阵不等式的标称双线性系统控制器设计过程，随后在第 4.2 节将其扩展至真实非线性系统的闭环稳定性。

### 4.1 标称双线性系统的控制器

本节给出一种求解标称双线性系统的局部稳定化控制器的步骤

$$z_{k+1} = Az_k + u_k(B_0 + B_1 z_k) \tag{5}$$

对所有 $z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$。为应用线性控制器设计方法，我们首先将式 (5) 重写为线性分式表示（LFR），这是一种常见的不确定系统描述方式（Zhou 等，1996）。具体而言，闭环系统为 $\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_0 k^\top & B_1 \\ k^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ w_k \end{bmatrix}, \quad w_k = z_k u_k,$ (6)

其中，状态 $z_k \in \mathcal{Z}$ 被解释为一种不确定性。以下定理基于式 (6) 建立了式 (5) 的局部闭环稳定性。

定理 4. 假设假设 1 成立。若存在一个$N \times N$矩阵 $P = P^\top \succ 0$ 和一个向量$\in \mathbb{R}^N$，使得

$$\begin{bmatrix} P + B_1 \tilde{Q}_z B_1^\top & -B_1 \tilde{S}_z & AP + B_0 y^\top \\ -\tilde{S}_z^\top B_1^\top & \tilde{R}_z & y^\top \\ PA^\top + yB_0^\top & y & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{7}$$

则控制器 $u = y^\top P^{-1} z$ 使系统 ( $\mathcal{E}_{5}(P, c) = \{z \mid z^\top P^{-1} z \le c\}$ $c > 0$ $z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} = \{z \in \mathbb{R}^N \mid \mathcal{E}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}\}$ ) 对所有初始条件渐近稳定，其中满足 。

证明。我们定义 $k = P^{-1} y$。然后通过使用舒尔补，(7) 等价于

$$\begin{bmatrix} P + B_1 \tilde{Q}_z B_1^\top & -B_1 \tilde{S}_z \\ -\tilde{S}_z^\top B_1^\top & \tilde{R}_z \end{bmatrix} - [\star] \, P \begin{bmatrix} (A + B_0 k^\top) \\ k^\top \end{bmatrix}^\top \succ 0.$$

Note that

$$\begin{bmatrix} B_1 \tilde{Q}_z B_1^\top & -B_1 \tilde{S}_z \\ -\tilde{S}_z^\top B_1^\top & \tilde{R}_z \end{bmatrix} = [\star]^\top \begin{bmatrix} \tilde{Q}_z & \tilde{S}_z \\ \tilde{S}_z^\top & \tilde{R}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^\top & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - [\star] \, P \begin{bmatrix} (A + B_0 k^\top) \\ k^\top \end{bmatrix}^\top = [\star]^\top \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B_0 k^\top)^\top & k \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

leading to

$$[\star]^\top \left[\begin{array}{cc|cc} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{Q}_z & \tilde{S}_z \\ 0 & 0 & \tilde{S}_z^\top & \tilde{R}_z \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} (A + B_0 k^\top)^\top & k \\ -I & 0 \\ \hline B_1^\top & 0 \\ 0 & -I \end{array}\right] \succ 0.$$

利用对偶化引理（Scherer 和 Weiland，2000，引理 4.9），我们得到的是】)【。

$$[\star]^\top \left[\begin{array}{cc|cc} -P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_z & S_z \\ 0 & 0 & S_z^\top & R_z \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ A + B_0 k^\top & B_1 \\ \hline 0 & I \\ k^\top & 0 \end{array}\right] \prec 0.$$

此外，我们分别从左侧和右侧乘以 $\begin{bmatrix} z_k^\top & w_k^\top \end{bmatrix}^\top \neq 0$及其转置，并定义李雅普诺夫函数 $V(z) = z^\top P^{-1} z$。根据 (Scherer, 2000, Thm. 10.2)，我们得出，对于所有 $z_k \in \mathcal{Z}$， $V(z_{k+1}) - V(z_k) < 0$。由于 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$ 是 $V$的次水平集，即对于所有$k \geq 0$，若 $z_k \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$，则 $z_{k+1} \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$，因此可保证 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$的正向不变性。至此，证明完成。□

备注 5. Sinha 等人（2022）通过基于 Petersen 引理（参见 Petersen，1987）为系统 (5) 推导局部稳定化控制器，提出了一种替代方法。然而，他们的设计仅在系统矩阵 $A$ 已经稳定时才能推导出闭环稳定性，而定理 4 也适用于开环不稳定系统。此外，在 Scherer（2000）的鲁棒控制框架中表述定理 4，有利于今后推广设计过程。

我们的目标是确保最大区域 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$ 内的闭环稳定性。为此，我们首先最大化 tr($P$)，使得（7）成立；其次，对于定理 4 中设计所得的给定解，我们最大化 $c > 0$，使得 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$。此外，如果没有预先给定的区域 $\mathcal{Z}$，我们还可以在设计中优化一个较大的 $\mathcal{Z}$，例如在选择 $S_z = 0$、 $R_z = 1$时最小化 ˜ ˜tr($Q_z$)，$Q_z \prec 0$。

### 4.2 非线性系统的控制器

现在，我们将上一节的结果扩展到非线性系统（1）。为此，我们希望基于双线性表示（3）构造一个控制器，同时通过有限增益界考虑截断误差 $\varepsilon_k \in \mathcal{E}$。因此，如果我们找到一个控制器，能够针对所有 $z \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 对系统（3）实现鲁棒稳定，那么该控制器也能使非线性系统（1）在局部稳定。

首先，我们将受误差影响的双线性系统写成线性分式表示，即式 3 的闭环系统可写为 $u = (k^\top) z$

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_0 k^\top & B_1 & I \\ k^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ w_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}, \quad w_k = z_k u_k \tag{8}$$

其中 $z_k \in \mathcal{Z}$。现在我们可以陈述主要定理。

定理 6。假设假设 1 和 2 成立。若存在一个 $N \times N$矩阵 $P = P^\top \succ 0$、一个向量 $y \in \mathbb{R}^N$ 和一个标量 $\tau > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} P + B_1 \tilde{Q}_z B_1^\top - \tau I & -B_1 \tilde{S}_z & 0 & AP + B_0 y^\top \\ -\tilde{S}_z^\top B_1^\top & \tilde{R}_z & 0 & y^\top \\ 0 & 0 & \tau I & L_\varepsilon P \\ PA^\top + yB_0^\top & y & L_\varepsilon P & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{9}$$

那么，对于所有初始条件，控制器 $u \triangleq y \; P^{-} \; z$ 渐近稳定系统 ( $\mathcal{E}_{3}(P, c) = \{z \mid z^\top P^{-1} z \le c\}$ $c > 0$ $z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} = \{z \in \mathbb{R}^N \mid \mathcal{E}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}\}$ )，其中满足 。

$$\begin{bmatrix} (A+B_0y^\top P^{-1})^\top & P^{-1}y & L_\varepsilon I \\ -I & 0 & 0 \\ \hline B_1^\top & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{Q}_z & \tilde{S}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_z^\top & \tilde{R}_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tau I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau I \end{array}\right] \begin{bmatrix} (A+B_0y^\top P^{-1})^\top & P^{-1}y & L_\varepsilon I \\ -I & 0 & 0 \\ \hline B_1^\top & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A+B_0k^\top & B_1 & I \\ \hline 0 & I & 0 \\ k^\top & 0 & 0 \\ \hline L_\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^\top \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_z & S_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z^\top & R_z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau^{-1}I \end{array}\right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A+B_0k^\top & B_1 & I \\ \hline 0 & I & 0 \\ k^\top & 0 & 0 \\ \hline L_\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{11}$$

证明。下文将证明 (9) 蕴含 Lyapunov 稳定性。若 (9) 成立，则应用 Schur 补可得 (10)。此外，定义 $k = P^{-1}y$。然后，利用对偶化引理（Scherer 和 Weiland，2000，引理 4.9）可得 (11)。分别在左侧和右侧乘以$\begin{bmatrix} z^\top & w^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top = 0$ 及其转置，得到

$$[\star]^\top \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ (A+B_0k^\top)z_k + B_1w_k + \varepsilon_k \end{bmatrix} + [\star]^\top \begin{bmatrix} Q_z & S_z \\ S_z^\top & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ k^\top z_k \end{bmatrix} - \tau^{-1}[\star]^\top \begin{bmatrix} -L_\varepsilon^2 I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} < 0.$$

进一步，我们回顾 $u_k = k\ z_k^\top\ w_k = z_k u_k$。然后，应用 S-过程（参见 Boyd 和 Vandenberghe，2004）可得，对于所有 $z_k \in \mathcal{Z}$ 和所有 $\varepsilon_k \in \mathcal{E}$，$z_{k+1}^\top P^{-1} z_{k+1} - z_k^\top P^{-1} z_k < 0$。此外，由于与定理 4 证明中的论证类似，$\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$ 对于 $k \geq 0$ 具有正向不变性，而假设 2 保证 $\varepsilon_k \in \mathcal{E}$ 在所有时刻成立。因此，该控制器使线性分式表示 (8) 渐近稳定，并由此使系统 (3) 对所有 $z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$ 渐近稳定。□

注意，LMI (9) 的维数为 $(3N+1) \times (3N+1)$，包含 $(N^2+3N)/2+1$ 个决策变量。

注7.定理 6 的条件 (9)对于 $L_\varepsilon = \tau = 0$ 简化为定理 4 的标称稳定化条件，即不存在截断误差 $\varepsilon_k$。

对于标称情况，我们希望为一个较大的区域 $\mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}} \subseteq \mathcal{Z}$ 找到一个稳定控制器，并因此在成功设计后对 $c$ 求最大值。

推论8。设 $\Phi$ 是单射的，并选择为使假设1、2成立，且假设 $\Phi^{-1}$ 在局部存在且连续。则，由定理6 得到的控制器对满足 $\Phi(x_0) \in \mathcal{Z}_{\mathrm{RoA}}$ 的所有初始条件 $x_0$ 都能使非线性系统 (1) 渐近稳定。

若例如 $\Phi$ 的雅可比矩阵具有（一致的）满秩，则满足 $\Phi$ 的局部可逆性。推论 8 的证明遵循标准的李雅普诺夫论证，因此略去。

## 5. 数值示例

本节通过受迫非线性范德波尔振荡器说明我们的理论结果

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 + u.$$

该系统是非保守的，其非线性阻尼由 $\mu$ 和一个在非线性控制中被广泛研究的例子所决定。我们选择 $\mu = 1$ 进行仿真，仿真在 MATLAB 中使用 YALMIP 和半正定规划求解器 MOSEK 完成。

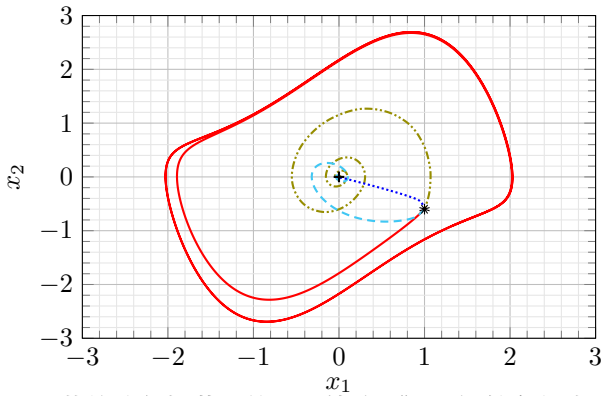



图 1. 范德波尔振荡器的开环轨迹（），初始条件为（），原点（），以及使用控制器 $u_\Psi$（）、$u_\Phi$（），并以 Sinha 等人（2022）设计的控制器（）作为对比。

我们的目标是基于数据设计控制输入 $u$，以稳定原点。为此，我们采用步长为$\tau = 0.01$s的前向欧拉法对动力学进行离散化，并测量一条持续 20 s 的轨迹。按照第 3 节中的方法，我们针对两个提升函数 $\Psi$ 和 $\Phi$ 推导出两种不同的数据驱动双线性系统表示：$\Psi$是一个由时滞坐标构成的 $N_\Psi = 32$维提升，其中 $d_x = 15$、$d_u = 0$；$\Phi$ 包含所有最高次数为 5 的单项式，因此维数为 $N_\Phi$ =20。生成数据时，我们使用初始条件$x_0^{\mathrm{d}} = [-0.128\ -0.948]$ 和一个均匀分布的输入序列 $u_k^{\mathrm{d}} \in [-1, 1]$。通过对无控制系统进行前$d_x$ 步仿真来构造时滞坐标。随后，我们分别基于定理 4，为每种提升设计控制律$u_\Psi$ 和 $u_\Phi$。

相应的 LMI 问题均在不到一秒内求解。此外，$\Psi$ 得到的 LMI 维数为$97 \times 97$，包含 561 个决策变量；而 $\Phi$ 得到的 LMI 维数为 $61 \times 61$，包含 231 个决策变量。图 1 展示了初始条件为 $x_0 = [1\ -0.6]^\top$时系统的开环轨迹和相应的闭环轨迹。两个控制器都能稳定非线性系统的原点；如图所示，基于单项式提升的控制器 $u_\Phi$ 表现更好。此外，我们将所得控制器与 Sinha 等人（2022）设计的控制器进行了比较，后者使用了相同的提升函数 $\Phi$。文献中的控制器在原点附近振荡，而我们设计的控制器 $u_\Phi$ 则使轨迹直接趋向原点。

为便于概览，我们省略了基于定理 6 的控制器的闭环轨迹。使用提升函数 $\Phi$时，定理 6 中的条件 (9) 对常数为 $L_\varepsilon$ 至 $1 \times 10^{-5}$的有限增益界均可行。增大 $L_\varepsilon$会产生与之前相似的闭环行为，但控制器会更加保守，因此轨迹振荡更多，且收敛至原点的速度更慢。

## 6. 结论

本文提出了一种适用于离散时间控制仿射非线性系统且具有稳定性保证的数据驱动控制器设计方法。我们展示了如何利用测量数据，基于 Koopman 算子理论推导出底层系统的线性分式表示。随后，我们通过有限增益界刻画了有限维近似所产生的截断误差。接着，我们利用线性分式表示构建了基于线性矩阵不等式的设计过程，从而保证双线性系统的鲁棒局部稳定性。尽管我们提出的数据驱动控制器设计方法对于双线性系统本身具有重要意义，但它也能实现非线性系统的闭环稳定性。最后，我们通过 Van der Pol 振荡器验证了所提出的控制器设计方法。

## 参考文献


Berberich, J. 和 Allg¨ower, F.（2020）。基于轨迹的数据驱动系统分析与控制框架。载于 *European Control Conference (ECC)* 1365 1370 *Proc.* ，–。

Berberich, J.、Koch, A.、Scherer, C.W. 和 Allg¨ower, F.（2020）。鲁棒数据驱动状态反馈设计。载于 *Proc. IEEE American Control Conference (ACC)* 1532 1538 ，–。

Berberich, J.、Scherer, C.W. 和 Allg¨ower, F.（2022）。结合先验知识与数据进行鲁棒控制器设计。*IEEE Transactions on Automatic Control* 。Bisoffi, A.、De Persis, C. 和 Tesi, P.（2020）。具有吸引域保证的未知双线性系统数据驱动稳定化。*Systems & Control Letters*，145，104788。Boyd, S.P. 和 Vandenberghe, L.（2004）。*Convex Optimization*。剑桥大学出版社。

Bruder, D.、Remy, C.D. 和 Vasudevan, R.（2019）。使用 Koopman 算子理论进行软体机器人动力学的非线性系统辨识，载于 *Proc. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation (ICRA)* 6244 6250 ，–。

Brunton, S.L.、Brunton, B.W.、Proctor, J.L. 和 Kutz, J.N.（2016）。用于控制的非线性动力系统 Koopman 不变子空间与有限线性表示。*PloS one*，11(2)，e0150171。Budi˘si´c, M.、Mohr, R. 和 Mezi´c, I.（2012）。应用 Koopman 理论。*Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science*，22(4)，047510。

Calliess, J.P.（2014 *Conservative decision-making and inference in uncertain dynamical systems*）。。博士论文，牛津大学。Carleman, T.（1932）。将线性积分方程理论应用于非线性微分方程组。*Acta Mathematica*，59，63–87。Chen, Y. 和 Vaidya, U.（2019）。非线性随机动力学的样本复杂度，载于 *Proc. IEEE American Control Conference (ACC)* 3526 3531 ，–。

Dai, T. 和 Sznaier, M.（2021）。一种用于连续时间非线性系统数据驱动控制的半代数优化方法。*IEEE Control Systems Letters*，5(2)，487–492。De Persis, C. 和 Tesi, P.（2019）。数据驱动控制公式：稳定化、最优性与鲁棒性。*IEEE Transactions on Automatic Control* 65 3 909 924 ，（），–。

Guo, M.、De Persis, C. 和 Tesi, P.（2021）。含噪数据下非线性多项式系统的数据驱动稳定化。*IEEE Transactions on Automatic Control* 。

Haseli, M. 和 Cort´es, J.（2022）。扩展动态模态分解的预测准确性由时间前向-后向一致性而非残差误差衡量。*IEEE Control Systems Letters* 。

Hou, Z.S. 和 Wang, Z.（2013）。从基于模型的控制到数据驱动控制：综述、分类与展望。*Information Sciences* 235 3 35 ，–。

Iacob, L.C.、T´oth, R. 和 Schoukens, M.（2022）。带输入非线性系统的 Koopman 形式。*arXiv:2207.12132*。Khalil, H.K.（2002）。*Nonlinear systems*。Prentice-Hall，Upper Saddle River，新泽西州，第 3 版。

Koopman, B.O.（1931）。希尔伯特空间中的哈密顿系统与变换。*Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America* 17 5 315 ，（），。

Korda, M. 和 Mezi´c, I.（2018a）。非线性动力系统的线性预测器：Koopman 算子结合模型预测控制。*Automatica*，93，149–160。Korda, M. 和 Mezi´c, I.（2018b）。扩展动态模态分解向 Koopman 算子的收敛性。*J. of Nonlinear Science* 28 2 687 710 ，（），–。

Korda, M.、Susuki, Y. 和 Mezi´c, I.（2018）。使用 Koopman 模型预测控制实现电网暂态稳定化。*IFAC-PapersOnLine* 51 28 297 302 ，（），–。

Lian, Y.、Wang, R. 和 Jones, C.N.（2021）。基于 Koopman 的数据驱动预测控制。*arXiv:2102.05122*。Mamakoukas, G.、Di Cairano, S. 和 Vinod, A.P.（2022）。采用数据驱动 Koopman 算子的鲁棒模型预测控制。载于 *Proc. American Control Conference (ACC)*。Mauroy, A. 和 Mezi´c, I.（2016）。利用 Koopman 算子的特征函数进行全局稳定性分析。*IEEE Transactions on Automatic Control* 61 11 3356 3369 ，（），–。

Mauroy, A.、Mezi´c, I. 和 Susuki, Y.（2020 *The Koopman operator in systems and control*）。。Springer。Mezi´c, I.（2005）。动力系统的谱性质、模型降阶与分解。*Nonlinear Dynamics*，41(1-3)，309–325。Netto, M. 和 Mili, L.（2018）。基于鲁棒 Koopman 算子的电力系统动态状态估计卡尔曼滤波器。载于 *IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)* 1 5 *Proc.* ，–。

N¨uske, F.、Peitz, S.、Philipp, F.、Schaller, M. 和 Worthmann, K.（2021）。基于 Koopman 的预测与控制的有限数据误差界。*arXiv:2108.07102*。Petersen, I.R.（1987）。一类不确定线性系统的稳定化算法。*Systems & Control Letters*，8(4)，351–357。Scherer, C.W.（2000）。具有全块缩放的鲁棒混合控制与线性参数时变控制。载于 *Advances in linear matrix inequality methods in control* 187 207 ，–。

SIAM。Scherer, C.W. 和 Weiland, S.（2000）。控制中的线性矩阵不等式。*Lecture Notes*、*Dutch Institute for Systems and Control*、*Delft The Netherlands* 3 2 ，–，（）。Sinha, S.、Nandanoori, S.P.、Drgona, J. 和 Vrabie, D.（2022）。离散时间控制仿射非线性系统的数据驱动稳定化：一种 Koopman 算子方法，载于 *Proc. IEEE European Control Conference (ECC)* 。Str¨asser, R.、Berberich, J. 和 Allg¨ower, F.（2021）。非线性系统的数据驱动控制：超越多项式动力学。载于 *Proc. 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* 4344 4351 ，–。美国得克萨斯州奥斯汀。Surana, A.（2016）。面向控制仿射非线性系统的基于 Koopman 算子的观测器综合。载于 *Proc. 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* 6492 6499 ，–。van Waarde, H.J.、Camlibel, M.K. 和 Mesbahi, M.（2020）。从噪声数据到反馈控制器：基于矩阵 S-引理的非保守设计。*IEEE Transactions on Automatic Control*。Willems, J.C.、Rapisarda, P.、Markovsky, I. 和 De Moor, B.L.（2005）。关于激励持久性的一则注记。*Systems & Control Letters*，54 4 325 329（），–。Williams, M.、Kevrekidis, I. 和 Rowley, C.（2015）。Koopman 算子的一个数据驱动近似：扩展动态模态分解。*J. of Nonlinear Science*，25(6)，1307–1346。Wood, G.R. 和 Zhang, B.P.（1996）。函数 Lipschitz 常数的估计。*J. of Global Optimization*，8(1)，91–103。Zhou, K.、Doyle, J.C.、Glover, K. 等（1996 *Robust and optimal control*）。，第 卷。Prentice Hall，新泽西州。