arXiv:2304.03554v3 [cond-mat.stat-mech] 7 Jan 2024

微观截断对随机序参量动力学界面传播中熵力的依赖性

Yutaro Kado 和Shin-ichiSasa*Department of Physics,*
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan(日期：2024年1月9日)

通过分析受热噪声影响的、具有两个局部极小值的介观非守恒序参量动力学，研究了 d维空间中$(d-1)$维平面界面的稳态传播。在该分析中，利用微扰方法构建了产生界面传播的熵力。研究发现，当 $d \geq 2$时，熵力奇异地依赖于紫外截断。通过 $d = 2$的数值模拟证实了理论计算。该结果意味着，对熵力的实验测量可以估算介观描述的微观截断。

引言。—自然界中的宏观动力学通常由确定性方程描述。如果发现某一类现象可以用一个含有少数参数的简单确定性方程来描述，那么就可以通过分析这个普适方程来研究这些现象。流体动力学是这种方法成功应用的典型例子 [1]。然而，在某些情况下，无法找到简单的确定性方程。例如，一维或二维中局域守恒量的宏观运动无法用具有有限输运系数的流体动力学方程描述 [2]。另一个例子是临界点附近的动力学行为，此时输运系数呈现奇异行为 [3, 4]。

即使在这种情况下，含有热噪声的介观模型也能描述宏观动力学行为。例如，涨落流体力学可以正确描述低维流体力学的奇异行为 [2]。临界点附近的动力学行为也可以用含有热噪声的金兹堡-朗道模型来描述 [5]。在这里，涨落会改变介观自由能所给出的平均场性质，其中包括相变类型 [6] 以及临界指数 [5, 7]。这些例子表明，介观尺度上的涨落效应会导致模型参数发生重整化，而缺乏简单宏观方程这一现象与重整化参数的红外发散有关。在这种情况下，宏观尺度上观察到的现象无法与介观尺度上的现象分离。

本文旨在报告尺度分离的另一种违背情形，其定性上不同于此前已知的情形。我们通过分析具有弱热噪声的介观非守恒序参量动力学，研究 d 维空间中分隔两个相的 $(d-1)$ 维平面界面的稳态传播。一个显著发现是，传播速度取决于噪声强度，这一点已在情形 $d = 1$ [8] 中有所报道。这意味着噪声会改变平均动力学行为。尽管这是一个有趣的现象，其背后的机制却很简单。界面运动的驱动力是两个相之间的自由能差，其中除介观模型给出的介观自由能外，还包含熵贡献。这里，熵贡献由噪声引起的涨落性质来表征。因此，如果两个相之间不存在某种特殊对称性，传播速度就取决于噪声强度。在介观自由能在两个相中取值相同的特殊情形下，传播仅由熵力引起。这种行为可以通过介观自由能的重整化来理解。本文的主要结论是，对于 $d \geq 2$，当紫外截止趋于无穷大时，熵力会发散。

这一结果意味着，熵力驱动的传播速度取决于微观截断。换言之，介观描述无法与更微观的系统分离。我们通过对熵力进行理论计算，展示了这一结果。此外，我们通过对含噪声的序参量动力学进行数值模拟，证实了这一论断。我们预计，在自旋交叉配合物中的界面运动等实验中也能观察到这种奇异行为 [9]。令人惊讶的是，对熵力的实验测量可以估算出介观描述的微观截断。

设定。—为简单起见，我们以二维系统为例。推广到其他维度也很直接。令 $\boldsymbol{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 表示二维区域 $D \equiv [-L, L] \times [0, L_y]$中的一个位置。 L和L_y 足够大，并且在理论论证中假设 L 为无穷大。我们在区域 D 中定义一个实标量序参量场 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$。 ϕ 的自由能泛函为

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_D d^2\boldsymbol{r} \left\{ f(\phi) + \frac{\kappa}{2}[(\partial_x\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2] \right\}, \qquad (1)$$

其中， $f(\phi)$ 是介观自由能密度， κ 是表征界面能的常数。遵循昂萨格原理，我们假设动力学的

$\phi(\boldsymbol{r},t)$由.....描述

$$\partial_t\phi = -\Gamma\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi} + \eta, \tag{2}$$

其中 Γ 是表示迁移率的常数，而 η是满足 $\langle\eta(\boldsymbol{r},t)\rangle = 0$ 以及涨落耗散关系的高斯白噪声

$$\langle\eta(\boldsymbol{r},t)\eta(\boldsymbol{r'},t')\rangle = 2\Gamma T\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})\delta(t-t'). \tag{3}$$

该模型被称为“模型 A” [5]，用于描述非守恒序参量动力学。更准确地说，由于该模型描述的是介观动力学，我们引入一个微观截断长度 $2\pi/k_c$，将具有 $|\boldsymbol{k}| > k_c$ 的傅里叶模的振幅设为零。

具体而言，我们研究一个介观自由能密度 $f(\phi)$ 在 ϕ_1 和ϕ_2 处有两个局部极小值的系统。我们不失一般性地假设 $\phi_1 < \phi_2$ 。我们在 y 方向施加周期性边界条件，并在 $x = -L$ 处施加 $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_1$ ，在 $x = L$ 处施加 $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_2$ 。初始时，在 $x = 0$ 处放置一个一维平面界面。随后，我们观察界面的运动。本文的目标是确定界面稳态传播速度的期望值。

我们首先考虑 $f(\phi)$ 固定的情形。由 (2) 给出的模型变为一个确定性方程。满足 $z = x - c_0t$ 的稳态传播解 $\phi_0(z)$ 满足

$$-c_0\partial_z\phi_0(z) = -\Gamma[f'(\phi_0) - \kappa\partial_z^2\phi_0], \tag{4}$$

其中 c_0 是界面的稳态传播速度。从数学上看，(4) 是关于解 ϕ_0 的非线性特征值问题，其对应的特征值为特殊值 c_0。因此， $\phi_0(z)$ 和 c_0 是同时确定的。通常不会写出该解的显式形式，但我们可以很容易地确认其在极限 $L\to\infty$ [10] 下满足以下关系：

$$c_0 = \Gamma_{\rm int}(f(\phi_2) - f(\phi_1)) \tag{5}$$

with

$$\Gamma_{\rm int} = \frac{\Gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} dz(\partial_z\phi_0(z))^2}. \tag{6}$$

关系式 (5) 表明，两个局部极小值之间的自由能密度差会驱动界面运动，从而降低总自由能。界面的迁移率由 (S43) 给出。

当 $T > 0$时，噪声会改变传播速度。为了清楚地提取这一效应，我们研究case$c_0 = 0$，这在 $f(\phi_2) = f(\phi_1)$ 时成立。随后我们考虑弱噪声极限 $T\to 0$ ，忽略体相中的成核事件。设 $\theta(y,t)$为 x-坐标的 t时的界面。涨落量 $\theta(y,t)$ 的期望趋近于表示为

$$\langle\theta(y,t)\rangle_{\rm ss} = ct + \text{const.} \tag{7}$$

据报道，在情形 $d = 1$ [8] 下 c 为有限值，其中发现驱动力的本质是熵。也就是说，当 $\phi = \phi_1$ 附近的涨落强度大于 $\phi = \phi_2$ 附近的涨落强度时， $\phi = \phi_1$ 区域的熵密度较大，因此 $\phi = \phi_1$ 区域会扩大，从而导致 $c > 0$。 c 的公式表示为 [8]

$$c = \Gamma_{\rm int}\frac{T}{2}\left(\frac{1}{\xi_2} - \frac{1}{\xi_1}\right) + O(T^{\frac{3}{2}}), \tag{8}$$

其中，$\xi_i \equiv \sqrt{\kappa/f''(\phi_i)}$是具有 $\phi = \phi_i$ 的体相区域中涨落的关联长度。值得注意的是，() 已通过数值模拟得到证实 [8]。

在本文中，我们研究二维系统中的 c 。由于界面运动的驱动力是熵性的，我们预期，宏观自由能中的熵性贡献 $s(\phi)$在确定 c方面发挥着至关重要的作用。随后我们猜想

$$c = \Gamma_{\rm int}[-T(s(\phi_2) - s(\phi_1))] + O(T^{\frac{3}{2}}), \tag{9}$$

这意味着，每个体区域中的熵贡献之差产生了驱动力。现在的问题是， c 是否可以表示成这种形式。即使式（9）的形式是正确的，也无法直接从模型（2）得到 $s(\phi)$的函数形式。因此，我们需要推导二维体系中的 c 。然而，由于文献 [8], 中的推导方法遵循文献 [11–13], 提出的方法，而该方法仅适用于一维情形，因此我们必须建立一种推导 c的一般方法。

主要结果。——我们从随机模型 (2) 推导出随机界面动力学。对于确定性系统，人们已采用许多方法推导界面运动方程[14–20]。这些方法的核心是将界面运动提取为最慢的动力学过程，同时分离其他快速变量。我们将上述方法推广到一维和高维随机系统的分析中。随后，我们得到公式 (9)，其中

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{2}\int_{|p|\le k_c}\frac{dp}{2\pi}\frac{\xi_i^{-2} - p^2}{p^2 + \xi_i^{-2}} \tag{10}$$

在一维中且

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{2}\int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c}\frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2}\frac{\xi_i^{-2}}{|\boldsymbol{p}|^2 + \xi_i^{-2}} \tag{11}$$

在二维中。(10) 式的右侧计算如下：

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{\xi_i}\tan^{-1}(\xi_i k_c) - k_c\right]. \tag{12}$$

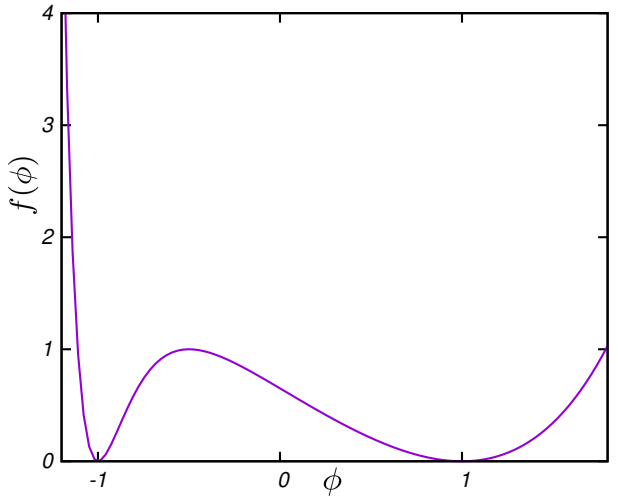


图1.含有$b_1 = 0.5$、 $b_2 = 5.0$和 $\phi_0 = -0.5$的介观自由能密度（14）的形状。

将此结果代入 (9) 并取极限$k_c \to \infty$，可得 ()。接下来，对于二维情形，(11) 式的右侧计算如下：

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{8\pi\xi_i^2}\ln(\xi_i^2 k_c^2 + 1), \tag{13}$$

其中，截止波数 k_c 应保持有限。这意味着，具有 $d = 2$ 的模型的稳态传播速度奇异地依赖于超紫外截止 k_c。换句话说，我们需要指定截止值 k_c ，以研究传播速度的测量结果。

数值模拟——由于公式 (13) 的截止依赖性相当显著，我们现在使用数值模拟来确认这一结果。我们注意到，当 $f''(\phi_1) = f''(\phi_2)$ 时， $s(\phi_1) = s(\phi_2)$。因此， $f(\phi)$ 的不对称景观是熵驱动力出现的必要条件。基于这一事实，我们假设局域自由能密度 $f(\phi)$ 由下式给出

$$f(\phi) = \left(\frac{1-\exp[b_1(\phi-1)]}{1-\exp[b_1(\phi_0-1)]}\frac{1-\exp[-b_2(\phi+1)]}{1-\exp[-b_2(\phi_0+1)]}\right)^2, \tag{14}$$

与文献 [8] 中一样。这里， f 满足条件： $\phi_1 = -1$、 $\phi_2 = 1$和 $f(\phi_1) = f(\phi_2)$。图1展示了局域自由能密度 f 的形式。可以看出，该势高度不对称，即 $f''(\phi_1) \gg f''(\phi_2)$。不对称自由能密度 f 的示例见文献 [21, 22]。

我们在正方形格点阵上定义一个离散模型，空间网格间距为 Δx，并要求 Δx 小于 ξ_1 和 ξ_2。该离散模型通过对式 (2) 进行离散化得到，其中 $\partial_x^2 + \partial_y^2$由有限差分拉普拉斯算子代替。对于初始条件

$$\phi(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\tanh\left(\frac{x}{40}\right) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \tag{15}$$

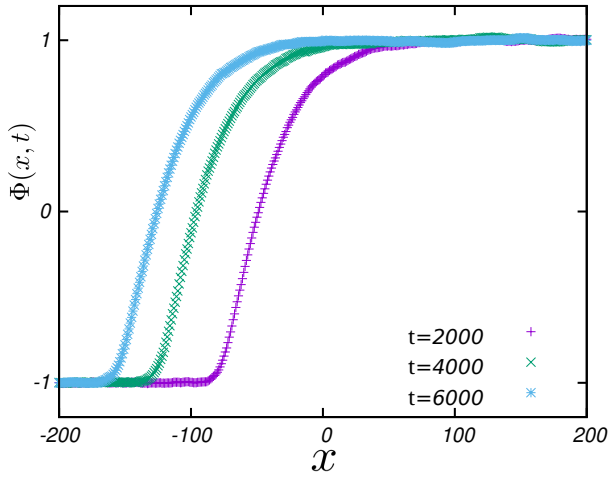


图2. 沿 y-方向进行平均的图样的时间演化。自由能密度 $f(\phi)$与图1中的相同。其他参数值为 $\kappa = 1600$、 $\Gamma = 0.1$、 $T = 0.5$ $L = 400$ $L_y = 100$ $\xi_1 = 4.33$ 和。注意到对于这些参数，且 $\xi_2 = 27.3$，我们选择 $\Delta x = 1.0$ 和 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ [24]。

随机时间演化采用 Heun 方法进行。随后我们测量

$$\Phi(x,t) \equiv \frac{1}{L_y}\int_0^{L_y} dy\phi(x,y,t), \tag{16}$$

它描述沿 y 方向取平均后的 x 轮廓。在图2中，我们展示了若干个 t 取值下的 $\Phi(x,t)$ 示例。对于由 $\Phi(X(t)\ t) = 0$ 定义的界面位置 $X(t)$，我们将时间平均速度定义为

$$V(t) \equiv \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0}, \tag{17}$$

其中， t_0 的取值远大于弛豫至稳态传播状态所需的时间。在图3中，我们绘出了 $V(t)$ 的期望值，由此得到 c 的数值估计。随后我们确认，对于 $T \le 1$ [24]， c 与 T 成正比。

现在，我们对 Δx 取值不同的系统进行相同的计算。结果如图4所示。可以观察到，在满足 $\Delta x < \xi_1 \ll \xi_2$ 的条件下，随着 Δx 变小， c 并不会趋于某个确定值，这与一维情形形成对比。为了将数值数据与理论结果进行比较，我们在图4中叠加绘出了式（9）和式（13）的曲线，其中我们取

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\Delta x}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\Delta x}, \tag{18}$$

这对应于数值模拟中波矢的最大模。我们发现，理论计算与数值结果一致

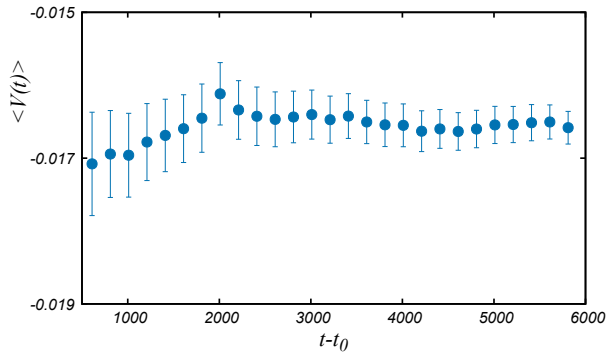


图3。 $\langle V(t)\rangle$ 作为 $t-t_0$的函数。参数值与图2中的相同。$t_0=50$。使用八十个样本来估计 $\langle V(t)\rangle$，并带有误差条。

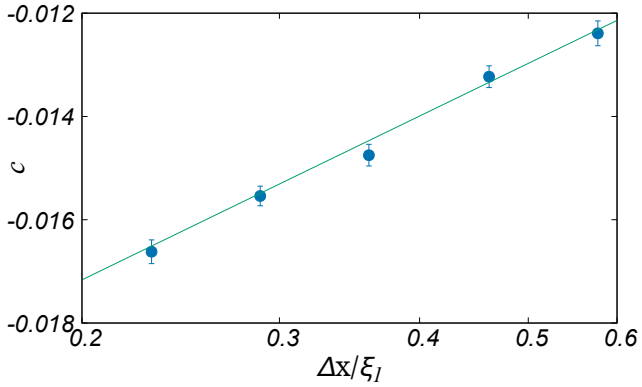


图4. Δx对二维系统中传播速度 c 的依赖关系。参数值与图2中的相同。蓝色圆圈表示由 $\langle V(t=6000)\rangle$给出的数值结果。绿色曲线表示结合(13)的(9)。我们检查了数值参数 Δx 和 Δt [24]的有效性。

模拟。因此，我们猜想 $|c|$ 在 $\Delta x\to 0$ 极限下发散，即使在数值模拟中也是如此。

推导概述。— 我们首先取极限$L\to\infty$。令 T 足够小，使得噪声效应可以作为确定性系统的扰动来研究。为表达这种小量关系，我们将 T 替换为$\epsilon^2 T$，其中 ϵ 是一个小的无量纲参数。当对平稳解 $\phi_0(x)$施加扰动时，响应分为界面运动 $\theta(y,t)$和其余部分。也就是说，我们将扰动解表示为

$$\phi(x,y,t)=\phi_0(z)+\epsilon\rho_1(z,y,t)+O(\epsilon^2) \tag{19}$$

使用共动坐标 $z=x-\theta(y,t)$。假设 $\partial_y\theta$ 很小且与 ϵ成正比，我们引入一个大的缩放坐标 Y，定义为 $Y=\epsilon y$，并定义 $\Theta(Y,t)=\theta(y,t)$。 $\Theta(Y,t)$ 的时间演化由

$$\partial_t\Theta=\epsilon\Omega_1([\Theta])+\epsilon^2\Omega_2([\Theta])+O(\epsilon^3), \tag{20}$$

其中， $[\Theta]$ 表示 $\partial_Y\Theta$ 和 $\partial_Y^2\Theta$的依赖关系。将（19）和（20）代入（2），即可确定 ρ_1、Ω_1, 和Ω_2的统计性质。这种计算方法可视为参考文献 [14] 中方法向随机系统的推广。

稳态传播速度 c 由$c=\epsilon\langle\Omega_1\rangle_{\rm ss}+\epsilon^2\langle\Omega_2\rangle_{\rm ss}+O(\epsilon^3)$给出。我们计算 $\langle\Omega_1\rangle_{\rm ss}=0$和

$$\langle\Omega_2\rangle_{\rm ss}=\frac{\Gamma}{2}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dz(\partial_z\phi_0)f^{(3)}(\phi_0)\langle\rho_1^2\rangle_{\rm ss}}{\int_{-\infty}^{\infty}dz(\partial_z\phi_0)^2}. \tag{21}$$

该公式在参考文献 [23]中推导得出。现在，利用共动坐标系中稳态的时间反演对称性，我们发现，（21）中分子的积分可表示为 $\lim_{\Lambda\to\infty}[\Psi(z=\Lambda)-\Psi(z=-\Lambda)]$, 其中使用的函数 $\Psi(z)$定义如下

$$\begin{aligned}\Psi(z)=&f^{(2)}(\phi_0(z))\langle\rho_1(z,y)^2\rangle_{\rm ss}\\&-\kappa\left[\langle(\partial_z\rho_1(z,y))^2\rangle_{\rm ss}-\langle(\partial_y\rho_1(z,y))^2\rangle_{\rm ss}\right].\end{aligned} \tag{22}$$

因此，（21）可写成形式（9），其中

$$Ts(\phi_i)=-\frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\infty}\Psi(\mu_i\Lambda), \tag{23}$$

其中 $\mu_1=-1$ 和 $\mu_2=1$。最后，通过计算 $\Psi(z)$，我们得到（11）。计算结果可立即推广到 d 维系统 [24]。特别地，对于 $d=1$ 的情况，我们得到（10）。

结论说明.— 我们推导出了介观模型(2)中熵驱动力的公式(9)和(11)。尽管我们研究了$c_0=0$的情形，但很容易推导出 $c_0\neq 0$ 的传播速度为 c_0+c，记作 c_*。我们发现，在二维中，熵力奇异地依赖于介观模型 (2) 的微观截断。这一发现表明有必要开展进一步研究。

最重要的挑战是在二维或三维中通过实验观测到熵力。作为实验系统，我们建议研究一种自旋交叉配合物，其中高自旋态和低自旋态可以与界面共存 [9]。由于这些态处的自由能曲率不同，我们预计熵力会对产生界面传播的力有所贡献。在此，通过测量序参量涨落的时空关联， Γ 并评估关联长度。通过在足够低的温度下直接测量 c_* T_1 和 T_2，我们可以在假设低温区域内 $f(\phi)$不依赖于 T的前提下，使用$c_*(T_2)-c_*(T_1)\simeq-\Gamma_{\rm int}(T_2-T_1)(s(\phi_2)-s(\phi_1))$估算 k_c 的值。

从理论角度来看，将我们的公式（9）推广到研究各种系统具有重要意义，例如守恒系统 [28] 和非平衡系统 [29–31]。更根本地说，为了从微观层面理解截断，可以尝试考虑从晶格模型 [32]或哈密顿系统 [33]等更微观的系统推导出介观描述。尽管自文献 [34], 以来已有许多相关研究，但正如文献 [35]所述，明确确定介观模型的系数并非易事。建立一种基于微观描述解释截断依赖性的理论，应是非平衡统计力学的另一项目标。另一个研究方向是通过研究界面运动的涨落特性，探索随机界面运动的普适类。关于这一问题，我们指出，在 Kardar-Parisi-Zhang 方程 [26, 27] 中观察到的微观截断依赖性源于一个在我们的问题中并不重要的非线性项 [24]。因此，迄今为止从未研究过本论文中报道的微观截断依赖性。

作者感谢 K. Kanazawa 和 K. Saito 提供的有益意见。本研究得到 JSPS KAKENHI（课题编号 JP19H05795、JP20K20425 和 JP22H01144）的资助。

[1] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 《理论物理学教程》第 6 卷（Addision-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1959）。[2] D. Forster、D. R. Nelson 和 M. J. Stephen, 《随机搅拌流体的大尺度和长时间性质》，Phys. Rev. A 16, 732（1977）。[3] L. P. Kadanoff 和 J. Swift, 《液-气临界点附近的输运系数》，Phys. Bev, 166，89（1968）。[4] K. Kawasaki, 《临界涨落的动力学方程和时间关联函数》，Ann. Phys. (N. Y.) 61，1-56（1970）。[5] P. C. Hohenberg 和 B. I. Halperin, 《动态临界现象理论》，Rev. Mod. Phys. 49，435（1977）。[6] P. Bak、S. Krinsky 和 D. Mukamel，Phys. Rev. Lett. 36，52 1976( )。[7] K. G. Wilson 和 J. Kogut, 《重整化群与 ϵ 展开》，Phys. Rep. 12，75-199（1974）。[8] G. Costantini 和 F. Marchesoni, 《非对称 kink：熵力稳定作用》，Phys. Rev. Lett. 87, 114102（2001）。[9] K. Boukheddaden、M. Sy、M. Paez-Espejo、A. Slimani 和 F. Varret, 《热滞回环内自旋交叉单晶中自旋转变的动态控制》，Physica B 486，187-191（2016）。[10] Y. Pomeasu, 《流体力学中的前沿运动、亚稳态和亚临界分岔》，Physica D 23，3-11（1986）。[11] C. Cattuto、G. Costantini、T. Guidi 和 F. Marchesoni, 《固体中的弹性弦：离散 kink 扩散》，Phys. Rev. B 63，094308（2001）。[12] J. F. Currie、J. A. Krumhansl、A. R. Bishop 和 S. E. Trullinger, 《一维含孤立波标量场的统计力学：精确结果与理想气体现象学》，Phys. Rev. B 22, 477 (1980)。[13] R. M. DeLeonardis 和 S. E. Trullinger, 《低温下的精确扭结气体现象学》，Phys. Rev. B 22, 4558 1980( )。[14] Y. Kuramoto, 《反应-扩散系统中波前的不稳定性与湍流》，Prog. Theor. Phys. 63, 1885 1903 1980- ( )。[15] Y. Kuramoto, 《扩展系统中演化方程的约化》，Prog. Theor. Phys. Suppl. 99, 244- 262 (1989)。[16] E. Meron, 《可激发介质中的图案形成》，Phys. Rep. 218, 1-66 (1992)。[17] M. C. Cross 和 P. C. Hohenberg, 《非平衡态下的图案形成》，Rev. Mod. Phys. 65, 851 (1993)。[18] S.-i. Ei 和 T. Ohta, 《相互作用脉冲的运动方程》，Phys. Rev. E 50, 4672-4678 (1994)。[19] A. Karma 和 W.-J. Rappel, 《二维和三维枝晶生长的定量相场建模》，Phys. Rev 57, 4323 (1997)。[20] M. Hiraizumi 和 S.-i. Sasa, 《相场模型中传播界面的微扰解》，J. Stat. Mech. 103203 (2021)。[21] K. Boukheddaden、M. Nishino、S. Miyashita 和 F. Var- ret, 《具有磁相互作用的自旋交叉热力学性质的统一理论描述》，Phys. Rev. B 72, 014467 (2005)。[22] S. Miyashita、Y. Konishi、H. Tokoro、M. Nishino、K. Boukheddaden 和 F. Varret, 《具有高自旋-低自旋自由度的相变中亚稳态的结构》，Prog. Theor. Phys. 114, 719-734 (2005)。[23] M. Iwata 和 S.-i. Sasa, 《鞍结分岔附近弛豫轨迹临界涨落的理论分析》，Phys. Rev. E 82, 11127 (2010)。[24] 参见补充材料 [URL will be inserted by publisher]，其中给出了数值模拟、推导和一些说明的详细论证，并包含文献 [25– 27]。[25] K. Kawasaki 和 T. Ohta, 《界面的动力鼓膜模型。I》，Prog. Theor. Phys 67, 147-163 (1982)。[26] M. Kardar、G. Parisi 和 Y.-C. Zhang, 《生长界面的动态标度》，Phys. Rev. Lett. 56, 889 (1986)。[27] K. A. Takeuchi, 《Kardar–Parisi–Zhang 普适类现代发展的入门介绍》，Physica A 504, 77 (2018)。[28] J. W. Cahn 和 J. E. Hilliard, 《非均匀系统的自由能。III. 二元不可压缩流体中的成核》，J. Chem. Phys. 31, 688 (1959)。[29] P. Panja, 《涨落对传播前沿的影响》，Phys. Rep. 393, 87-174 (2004)。[30] A. Rocco 、 L. Ram´ırez-Piscina 和 J. Casademunt, 《具有乘性噪声的反应-扩散前沿的运动学约化：随机尖锐界面方程的推导》，Phys. Rev. E 65, 056116 (2002)。[31] A. Lemarchand 和 B. Nowakowski, 《内部涨落会模糊还是增强轴向分节？》，EPL 94, 48004 2011( )。[32] H. Spohn, 《非平衡稳态随机晶格气体的长程关联》，J. Phys. A: Math. Gen. 16, 4275 (1983)。[33] M. Kobayashi、N. Nakagawa 和 S.-i. Sasa, 《哈密顿量 Potts 模型中通过热流控制亚稳态》，Phys. Rev. Lett. 130, 247102 (2023)。

[34] R. Zwanzig, 《不可逆热力学中的记忆效应》, Phys. Rev. 124, 983–992, （1961）。[35] K. Saito、M.Hongo、A.Dhar 和 S.-i. Sasa, 《非线性晶格中的涨落流体力学微观理论》, Phys. Rev. Lett. 127, 010601（2021）。

补充材料：随机序参量动力学界面传播中熵力对微观截断的依赖性

Yutaro Kado 和 Shin-ichi Sasa

在补充材料（SM）的第一部分，我们按照正文中的推导概要，推导式（11）。在SM的第二部分，我们介绍数值模拟的细节。

I. 主要结果的推导

在第I节A部分，我们简要说明微扰理论的设定。在第I节B部分，我们引入一些有助于分析的量。在第I节C部分，我们回顾式（21）的推导。据我们所知，迄今为止的论述都是众所周知的。第I节D部分是技术上的亮点，据我们所知，此前文献中尚未报道。我们利用时间反演对称性推导式（22）。在第I节E部分，我们通过计算涨落得到式（11）。在第I节F部分，我们对理论计算作一些说明。在补充材料的第一部分中，我们不失一般性地设定 $\Gamma = 1$ 。

A. Setup

我们将正文中的式（2）改写为

$$\partial_t \phi = -f'(\phi_0(x)) + \kappa(\partial_x^2 + \partial_y^2)\phi + \eta. \tag{S1}$$

由于我们取极限 $L \to \infty$， x方向上的边界条件变为：当 $x \to -\infty$时， $\phi(\boldsymbol{r}) \to \phi_1$ ；当 $x \to \infty$时，$\phi(\boldsymbol{r}) \to \phi_2$ 。我们研究正文中式（4）的情形 $c_0 = 0$ 。也就是说，我们假设存在满足以下条件的 $\phi_0(x)$

$$0 = -f'(\phi_0) + \kappa\partial_x^2\phi_0. \tag{S2}$$

为表示噪声强度较小，我们用 $\epsilon^2 T$替换 T，其中 ϵ 是一个无量纲小参数。因此， η满足

$$\langle \eta(x,y,t)\eta(x',y',t')\rangle = 2T\epsilon^2\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(t-t'). \tag{S3}$$

如正文中的式（19）所示，我们将 ϕ_0 的摄动解表示为

$$\phi(x,y,t) = \phi_0(z) + \epsilon\rho_1(z,y,t) + \epsilon^2\rho_2(z,y,t) + O(\epsilon^3) \tag{S4}$$

其中，共动坐标为 $z \equiv x - \theta(y,t) \in [-\infty,\infty]$， $\theta(y,t)$ 表示每个 y在时刻 t的界面位置。假设 $\partial_y\theta$ 很小且与 ϵ成正比，我们引入一个大的缩放坐标 $Y = \epsilon y$ ，并定义$\Theta(Y,t) \equiv \theta(y,t)$。 $\Theta(Y,t)$ 的时间演化由下式描述

$$\partial_t\Theta(Y,t) = \epsilon\Omega_1([\Theta]) + \epsilon^2\Omega_2([\Theta]) + O(\epsilon^3), \tag{S5}$$

其中， $[\Theta]$ 表示 $\partial_Y\Theta$ 和 $\partial_Y^2\Theta$的依赖关系。我们将（S4）和（S5）代入（S1）。在此计算中，我们注意到

$$\partial_t\phi = -\partial_t\Theta(\partial_z\phi_0 + \partial_z\rho) + \partial_t\rho, \tag{S6}$$

其中含有 $\rho = \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + O$（$\epsilon^3$）。然后，我们收集与 ϵ成正比的项。由此，可以确定 ρ_1 和 Ω_1。接下来，收集与 ϵ^2成正比的项，我们推导出 Ω_2。传播速度 c 由下式给出

$$c = \epsilon\langle\Omega_1\rangle_{\rm ss} + \epsilon^2\langle\Omega_2\rangle_{\rm ss} + O(\epsilon^3). \tag{S7}$$

下面我们将解释这些计算。

B. 预备知识

^^^为便于后续使用，我们引入一些有用的量、一个线性算子 L_z、投影算子 P 和 Q、噪声 $\tilde{\eta}(z,y,t)$、 $P\tilde{\eta}(z,t)$以及 $Q\tilde{\eta}(z,y,t)$。

1. Operators

我们首先定义线性算子

$$\hat{L}_z \equiv -f''(\phi_0(z)) + \kappa\partial_z^2, \tag{S8}$$

其描述了 li $\phi_0(z)$附近的扰动动力学。设定 $u_0(z) \equiv \partial_z\phi_0(z)$，我们可以确认

$$\hat{L}_z u_0 = 0 \tag{S9}$$

源于系统的空间平移对称性。形式上， u_0 对应于由解 ϕ_0引起的平移对称性破缺所关联的戈德斯通模。在物理上， u_0 描述界面模。

接下来，我们将投影定义到模态 u_0 上，方式如下

$$\hat{P}g \equiv \frac{(u_0,g)}{(u_0,u_0)}u_0 \tag{S10}$$

对于 $g(z,y)$，其中 (g_1,g_2) 表示由.....给出的内积。

$$(g_1,g_2) \equiv \frac{1}{L_y}\int_0^{L_y} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz g_1(z,y)g_2(z,y) \tag{S11}$$

对于定义在 $D \equiv [-\infty,\infty]\times[0,L_y]$ 上的函数 $g_1(z,y)$和 $g_2(z,y)$。我们还定义 ˆ $Q \equiv 1 - \hat{}P$。

2. Noises

对于给定的噪声 $\eta(x,y,t)$，我们定义

$$\tilde{\eta}(z,y,t) \equiv \epsilon^{-1}\eta(z+\theta(y,t),y,t). \tag{S12}$$

统计性质 $\tilde{\eta}$ 由 $\langle\tilde{\eta}\rangle$=0 和

$$\langle\tilde{\eta}(z,y,t)\tilde{\eta}(z',y',t')\rangle = 2T\delta(z-z')\delta(y-y')\delta(t-t'). \tag{S13}$$

对于此噪声 $\tilde{\eta}$，我们考虑投影噪声 ˆ $P\tilde{\eta}(z,t)$。ˆ $P\tilde{\eta}$ 的噪声强度计算如下

$$\left\langle \hat{P}\tilde{\eta}(z,t)\hat{P}\tilde{\eta}(z',t')\right\rangle = \left\langle \tilde{\eta}(z,y,t)\hat{P}\tilde{\eta}(z',t')\right\rangle = 2T\frac{u_0(z)u_0(z')}{(u_0,u_0)L_y}\delta(t-t'). \tag{S14}$$

由此结果可立即得到

$$\left\langle \hat{Q}\tilde{\eta}(z,y,t)\hat{Q}\tilde{\eta}(z',y',t')\right\rangle = \left\langle \tilde{\eta}(z,y,t)\hat{Q}\tilde{\eta}(z',y',t')\right\rangle = 2T\left[\delta(z-z')\delta(y-y') - \frac{u_0(z)u_0(z')}{(u_0,u_0)L_y}\right]\delta(t-t'). \tag{S15}$$

C. 式（21）的推导

在本节中，我们推导正文中的（21）。如第I节C部分所述，我们将（S4）和（S5）代入（S1）。然后，收集与 ϵ 成正比的项，得到

$$(\partial_t - \hat{L}_z - \kappa\partial_y^2)\rho_1 = B_1 \tag{S16}$$

with

$$B_1(z,y,t) = \Omega_1([\Theta])u_0(z) + \tilde{\eta}(z,y,t). \tag{S17}$$

由于 $(\partial_t - \hat{L}_z - \kappa\partial_y^2)u_0 = 0$，仅当 $(u_0, B_1) = 0$ 时，线性方程 (S16) 才存在解 ρ_1。为了获得一致的微扰解，我们施加这一条件，称为可解性条件。可解性条件导出的是

$$\Omega_1([\Theta]) = -\frac{(u_0,\tilde{\eta})}{(u_0,u_0)}. \tag{S18}$$

由此得到 $\langle\Omega_1\rangle_{\rm ss} = 0$。于是，(S16) 变为

$$(\partial_t - \hat{L}_z - \kappa\partial_y^2)\rho_1 = \hat{Q}\tilde{\eta}. \tag{S19}$$

为使 ρ_1 有唯一解，我们进一步施加条件 $(u_0, \rho_1) = 0$。

接下来，收集与 ϵ^2 成正比的项，得到

$$(\partial_t - \hat{L}_z - \kappa\partial_y^2)\rho_2 = B_2 \tag{S20}$$

with

$$B_2 = \Omega_2([\Theta])u_0 + \Omega_1([\Theta])\partial_z\rho_1 - \frac{1}{2}f^{(3)}(\phi_0)\rho_1^2 - \kappa(\partial_Y^2\Theta)u_0(z) + \kappa(\partial_Y\Theta)^2\partial_z u_0 - 2\kappa(\partial_Y\Theta)\partial_z\partial_y\rho_1. \tag{S21}$$

然后施加可解性条件 $(u_0, B_2) = 0$，其表达式为

$$\Omega_2([\Theta]) = \kappa\partial_Y^2\Theta + \frac{1}{(u_0,u_0)}\left[\left(u_0, \frac{1}{2}f^{(3)}(\phi_0)\rho_1^2\right) - \Omega_1(u_0, \partial_z\rho_1)\right], \tag{S22}$$

其中我们用到了 $(u_0, \partial_z u_0) = 0$ 和 $(u_0, \partial_z\partial_y\rho_1) = 0$。

现在，我们计算 $\langle\Omega_2\rangle_{\rm ss}$。首先注意到以下关系

$$\left\langle (\hat{P}\tilde{\eta}, \partial_z\rho_1)\right\rangle = 0. \tag{S23}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&(u_0,u_0)L_y\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{L_y}dy\left\langle\hat{P}\tilde{\eta}(z,t)\partial_z\rho_1(z,y,t)\right\rangle\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{L_y}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{L_y}dy' u_0(z')u_0(z)\left\langle\tilde{\eta}(z',y',t)\partial_z\rho_1(z,y,t)\right\rangle\\
=&T\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{L_y}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{L_y}dy' u_0(z')u_0(z)\partial_z\left[\delta(z-z')\delta(y-y') - \frac{u_0(z)u_0(z')}{(u_0,u_0)L_y}\right]\\
=&0.
\end{aligned} \tag{S24}$$

这里，为了得到第三行，我们使用了（S15），并注意到乘法的 Stratonovich 规则；为了得到最后一行，我们使用了 $\int_{-\infty}^{\infty}dz u_0(z)\partial_z u_0(z) = 0$。

接下来，我们在稳态下对（S22）取期望。注意到关系式（S23），我们有

$$\langle\Omega_1([\Theta])(u_0,\partial_z\rho_1)\rangle = 0. \tag{S25}$$

利用这一结果，我们得到

$$\langle\Omega_2\rangle_{\rm ss} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}dz u_0(z)f^{(3)}(\phi_0(z))\langle\rho_1(z,y)^2\rangle_{\rm ss}}{2\int_{-\infty}^{\infty}dz u_0(z)^2}, \tag{S26}$$

其中我们有 我们利用了这样一个事实：$\langle\rho_1(z,y)^2\rangle_{\rm ss}$ 不依赖于 y。这就是正文中的（21）。

D.（22）的推导

在本节中，我们推导正文中的（22）式。首先，注意到显然的关系

$$u_0(z)f^{(3)}(\phi_0(z)) = \frac{d\phi_0}{dz}\frac{df^{(2)}(\phi_0)}{d\phi_0} = \frac{df^{(2)}(\phi_0(z))}{dz}, \tag{S27}$$

我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{2} u_0 f^{(3)}(\phi_0)\rho_1^2 = \frac{1}{2}\left[f^{(2)}(\phi_0)\rho_1^2 - \kappa(\partial_z\rho_1)^2\right]\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z\rho_1 \hat{L}_z\rho_1. \tag{S28}$$

此处，从时间　　稳态在共动参考系中的 e-反演对称性，一个非平凡关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \langle \partial_z\rho_1(z,y)\hat{L}_z\rho_1(z,y)\rangle_{\rm ss} = \frac{\kappa}{2}\langle(\partial_y\rho_1(z,y))^2\rangle_{\rm ss}\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} \tag{S29}$$

成立。证明将在下一段给出。然后，将 (S29) 代入 (S28)，得到

$$\langle\Omega_2\rangle = \frac{\Psi(z=\infty) - \Psi(z=-\infty)}{2\int_{-\infty}^{\infty} dz u_0(z)^2} \tag{S30}$$

with

$$\Psi(z) \equiv f^{(2)}(\phi_0(z))\langle\rho_1(z,y)^2\rangle_{\rm ss} - \kappa[\langle(\partial_z\rho_1(z,y))^2\rangle_{\rm ss} - \langle(\partial_y\rho_1(z,y))^2\rangle_{\rm ss}]. \tag{S31}$$

这是正文中的（22）。回顾（S7），我们将（S30）与正文中的（9）进行比较。令

$$Ts(\phi_2) = -\frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\infty}\Psi(z=\Lambda), \tag{S32}$$

$$Ts(\phi_1) = -\frac{1}{2}\lim_{\Lambda\to\infty}\Psi(z=-\Lambda), \tag{S33}$$

我们确认了式（9）中表达式的有效性。

我们给出关键关系式 (S29) 的证明。首先，根据 $\rho(z,y,t)$ 涨落的时间反演对称性，我们有

$$\langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\rho_1(z,y,t+t')\rangle_{\rm ss} = \langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\rho_1(z,y,t-t')\rangle_{\rm ss} \tag{S34}$$

对于任意 t 和 t'。取极限 $t'\to 0$，我们得到

$$\langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\partial_t\rho_1(z,y,t)\rangle_{\rm ss} = 0. \tag{S35}$$

通过对（S23）重复计算，我们可以推导出

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\hat{Q}\tilde{\eta}(z,y,t)\rangle_{\rm ss} = 0. \tag{S36}$$

现在，我们将(S19)乘以 $\partial_z\rho(z,t)$，并对 $[-\infty,\infty]$ 按照 z 进行积分。利用 (S35) 和 (S36)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dz\langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\hat{L}_z\rho_1(z,y,t)\rangle_{\rm ss} &= -\kappa\int_{-\infty}^{\infty} dz\langle\partial_z\rho_1(z,y,t)\partial_y^2\rho_1(z,y,t)\rangle_{\rm ss}\\ &= \kappa\int_{-\infty}^{\infty} dz\langle\partial_z\partial_y\rho_1(z,y,t)\partial_y\rho_1(z,y,t)\rangle_{\rm ss}\\ &= \frac{\kappa}{2}\langle(\partial_y\rho_1(z,y,t))^2\rangle_{\rm ss}\Big|_{z=-\infty}^{z=\infty},\end{aligned} \tag{S37}$$

即为（S29）。

E. 式 (11) 的推导

我们令 $\mu_1 = -1$ 和 $\mu_2 = 1$。在本节中，我们计算 $\lim_{\Lambda\to\infty} \Psi(z = \mu_i\Lambda)$，它通过 (S33)和 (S32)与 $s(\phi_i)$相联系。我们固定一个足够大的 Λ。合理的假设是，点 (z, y) 处的涨落 $= (\mu_i\Lambda, y_0)$与均匀系统中某一点处的涨落等价，该均匀系统具有 $\langle\phi\rangle = \phi_i$ 且不含任何界面，因为点 $(\mu_i\Lambda, y_0)$远离界面。在此假设下，分析 (S19) 很容易。我们得到以下估算：

$$\langle\rho_1(\mu_i\Lambda, y_0)^2\rangle_{\rm ss} = \int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c} \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \frac{T}{f^{(2)}(\phi_i) + \kappa|\boldsymbol{p}|^2}, \tag{S38}$$

$$\langle(\partial_z\rho_1(\mu_i\Lambda, y_0)^2\rangle_{\rm ss} = \int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c} \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \frac{Tp_x^2}{f^{(2)}(\phi_i) + \kappa|\boldsymbol{p}|^2}, \tag{S39}$$

$$\langle(\partial_y\rho_1(\mu_i\Lambda, y_0))^2\rangle_{\rm ss} = \int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c} \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \frac{Tp_y^2}{f^{(2)}(\phi_i) + \kappa|\boldsymbol{p}|^2}, \tag{S40}$$

其中 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$。需要注意的是，结果与 Λ 无关。这里，将 $f^{(2)}(\phi_i) = \kappa/\xi_i^2$代入这些方程，并将它们合并为 (S31) 的形式，可得

$$\begin{aligned}\Psi(z = \mu_i\Lambda) &= T\int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c} \frac{d^2\boldsymbol{p}}{(2\pi)^2} \frac{\xi_i^{-2} - p_x^2 + p_y^2}{|\boldsymbol{p}|^2 + \xi_i^{-2}},\\ &= \frac{T}{4\pi\xi_i^2}\ln(\xi_i^2k_c^2 + 1).\end{aligned} \tag{S41}$$

将它们代入 (S33) 和 (S32)，可得正文中的 (11) 和 (12)。

F. 说明

1. Mobility

为了数值计算正文中 (9) 的右侧，我们必须估算 (6) 右侧的值。利用 (S2)，首先可得

$$\frac{\kappa}{2}(\partial_z\phi_0)^2 - f(\phi_0) = 0, \tag{S42}$$

其中我们使用了 $f(\phi_1) = 0$、 $f(\phi_2) = 0$ 和 $\partial_z\phi_0(\pm\infty) = 0$。由此可得

$$\int dz(\partial_z\phi_0)^2 = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi\sqrt{f(\phi)}. \tag{S43}$$

对于正文图1所示的局域自由能密度，(S43) 的右侧数值估计为 $1.80/\sqrt{\kappa}$

2. Generalization

将上述论证直接推广到 d 维系统是很容易的。我们可以计算

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{2}\int_{|\boldsymbol{p}|\le k_c} \frac{d^d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^d} \frac{\xi_i^{-2} - p_1^2 + \sum_{\ell=2}^d p_\ell^2}{|\boldsymbol{p}|^2 + \xi_i^{-2}}, \tag{S44}$$

其中 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_d)$。特别是，对于一维系统，我们有

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{2}\int_{|p|\le k_c} \frac{dp}{2\pi} \frac{\xi_i^{-2} - p^2}{p^2 + \xi_i^{-2}}, \tag{S45}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{\xi_j}\tan^{-1}(\xi_j k_c) - k_c\right]. \tag{S46}$$

这些是正文中的(10)和(12)。对于三维系统，我们有

$$s(\phi_i) = -\frac{1}{6\pi^2}\left[\frac{k_c}{\xi_i^2} - \frac{1}{\xi_i^3}\tan^{-1}(\xi_j k_c)\right] - \frac{1}{36\pi^2}k_c^3. \tag{S47}$$

3. Previous Studies

本文提出的计算方法被视为对用于分析确定性方程 [1]的方法的随机推广。该表述已在参考文献 [2]中报道。对于一维系统， c 的结果与先前研究 [3], 中得到的结果相同，尽管其计算方法与我们的方法不同。我们的方法的优势在于可以轻松分析 d维系统。我们还注意到，利用参考文献 [4]中报道的 c 的表达式，可以得到我们的结果 (S30)与 (S31)。然而，该表达式的推导并不正确。具体而言，要推导出该表达式，我们应当证明非平凡关系 (S29)，但参考文献 [4]中没有给出证明这一关系的论述。

4. Universality Class

二维空间（x， y）中的一维生长界面 $x = \theta(y,t)$通常由 Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）方程 [5, 6] 描述

$$\partial_t\theta(y,t) = v + \nu\partial_y^2\theta + \lambda(\partial_y\theta)^2 + \sqrt{2D}\eta(y,t) \tag{S48}$$

其中高斯白噪声 η 满足

$$\langle\eta(y,t)\eta(y',t')\rangle = \delta(y-y')\delta(t-t'). \tag{S49}$$

此时平均漂移速度为

$$c = v + \lambda\left\langle(\partial_y\theta)^2\right\rangle. \tag{S50}$$

从KPZ方程的涨落性质可以很容易看出， $\left\langle(\partial_y\theta)^2\right\rangle$ 呈现紫外发散。然而，在当前问题中， $\lambda = 0$ 处于微扰理论的较低阶，如第I节C部分所述。事实上，根据我们的微扰理论，我们有 $v = O(T)$、 $\lambda = O(T)$、 $\nu = \kappa = O(1)$和 $D = O(T)$。因此，我们确认 $\lambda\left\langle(\partial_y\theta)^2\right\rangle = O(T^2)$。因此，只要我们关注区域 $c = O(T)$，非线性项 $\lambda\left\langle(\partial_y\theta)^2\right\rangle$就无关紧要。我们的发现是， $v = O(T)$呈现出紫外发散，其定性特征不同于KPZ方程中观察到的发散。阐明我们模型的普适类是一个重要问题。

II. 数值模拟的细节

在正文的图4中，我们报告了二维系统中的传播速度 c 数值结果。本节将详细说明数值模拟。在第 II A 节，我们首先介绍所采用的数值格式。在第 II B 节，我们展示一维系统的数值结果，以说明正文中选取的参数值是合适的。在第 II C 节，我们展示正文所述结果的支持数据。

A. 数值格式

我们将 (x,y) 离散化为 $(i\Delta x, j\Delta x)$，其中 i和 j是满足 $-N_x \le i \le N_x$和 $0 \le j < N_y$的整数。我们注意到 $N_x\Delta x = L$和 $N_y\Delta x = L_y$，其中 Δx是空间间隔。令 $\phi(i,j)$ 定义为 $\phi(i\Delta x, j\Delta x)$。我们将离散拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_2\hat{\phi}(i,j) \equiv \frac{1}{(\Delta x)^2}[\hat{\phi}(i+1,j) + \hat{\phi}(i,j+1) - 4\hat{\phi}(i,j) + \hat{\phi}(i-1,j) + \hat{\phi}(i,j-1)], \tag{S51}$$

其中，我们在 y 方向施加周期性边界条件，在 x 方向施加狄利克雷边界条件。

接下来，我们将时间离散化为 t as $\phi(i,j,n)$ 的时间演化是如下整数的 Heun 方法给出：令

$$\hat{\phi}(i,j,n+1) \equiv \hat{\phi}(i,j,n) + \frac{1}{2}(h_1(i,j,n) + h_2(i,j,n)), \tag{S52}$$

其中， $h_1(i,j,n)$ 和 $h_2(i,j,n)$ 定义为

$$h_1(i,j,n) \equiv \Gamma[-f'(\hat{\phi}(i,j,n)) + \kappa\Delta_2\hat{\phi}(i,j,n)]\Delta t + \sqrt{2\Gamma T}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta x}\eta(i,j,n), \tag{S53}$$

and

$$h_2(i,j,n) \equiv \Gamma[-f'(\hat{\phi}'(i,j,n)) + \kappa\Delta_2\hat{\phi}'(i,j,n)]\Delta t + \sqrt{2\Gamma T}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta x}\eta(i,j,n) \tag{S54}$$

with

$$\hat{\phi}'(i,j,n) \equiv \hat{\phi}(i,j,n) + h_1(i,j,n). \tag{S55}$$

这里， $\eta(i,j,n)$ 服从均值为零、方差为一的高斯分布。

B. $d=1$ 的数值结果

正文中使用的数值参数为 $\Delta x = 1$、 $\cdots$、2.5、 $\Delta t = 0.0005$、 $L = 400$ 和 $L_y = 100$，对应的系统参数为 $\Gamma = 0.1$、 $T = 0.5$、 $\kappa = 1600$、 $b_1 = 0.5$、 $b_2 = 5.0$ 和 $\phi_0 = -0.5$。请注意，体相区域中涨落的关联长度为 $\xi_1 = 4.33$ 和 $\xi_2 = 27.3$。在本小节中，我们展示一维系统的数值结果，以说明这些数值参数是合适的。除 $L = 800$ 外，该系统的参数值与二维情形相同。一维系统的数值模拟方法基本上与二维情形相同。

首先，我们研究传播速度对时间间隔的依赖关系。我们定义一个无量纲时间间隔

$$\alpha \equiv 2\kappa\Gamma\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \tag{S56}$$

当 $\alpha \geq 1$ 时，扩散项会导致不稳定性。在图 S1 中，我们展示了在固定 $\Delta x/\xi_1 = 0.23$ 时，不同 α 值对应的传播速度 c。随后我们发现，较小 α 对应的数据趋近于正文中公式 (8) 的结果。鉴于正文中所示数值结果的 $\alpha \leq 0.16$，我们认为所选数值参数是合适的。

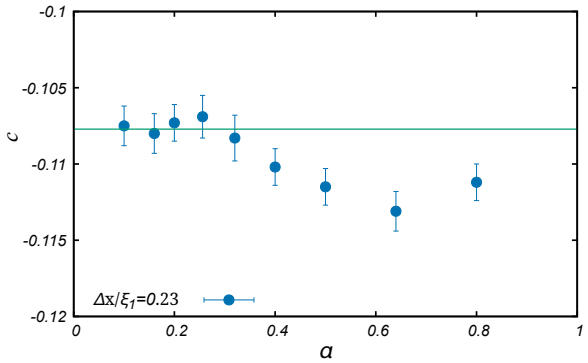


图 S1。一维系统中传播速度 c 对 α 的依赖关系。蓝色圆点表示数值结果。绿色曲线表示正文中的公式 (8)。使用五百个样本估算 c，并给出误差条。

接下来，我们研究传播速度的空间间隔依赖性。在图S2 中，我们展示了在固定 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ 时， $\Delta x/\xi_1$ 取各种数值时的传播速度 c。请注意， α 取小于 0.16 的值。

我们研究的 $\Delta x/\xi_1$ 范围。我们发现，数值结果与理论一致。这进一步证明了我们的数值模拟是可靠的。

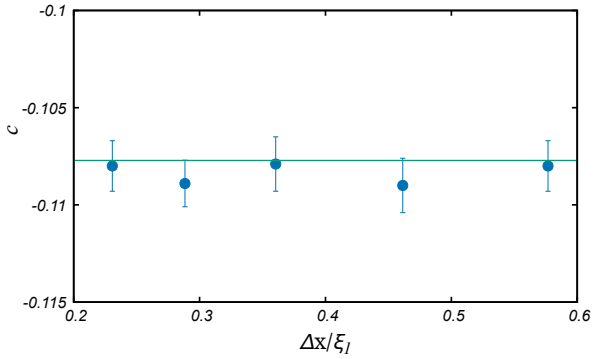


图 S2. 一维系统中传播速度 c 对 Δx 的依赖关系。蓝色圆圈表示数值结果。绿色曲线表示正文中的式 (8)。使用五百个样本估计 c，并显示误差条。

最后，在图 S3中，我们展示了 c的温度依赖性。我们观察到，当 T 小于 1.0 时， c 与 T 成正比。

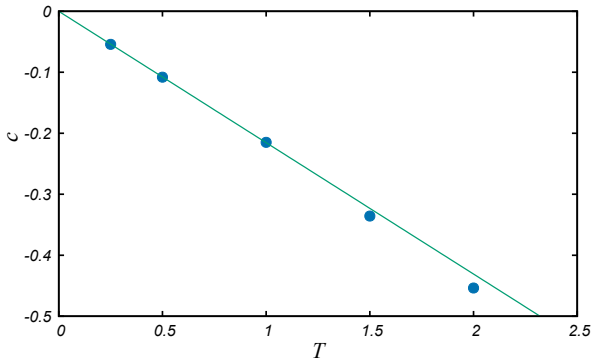
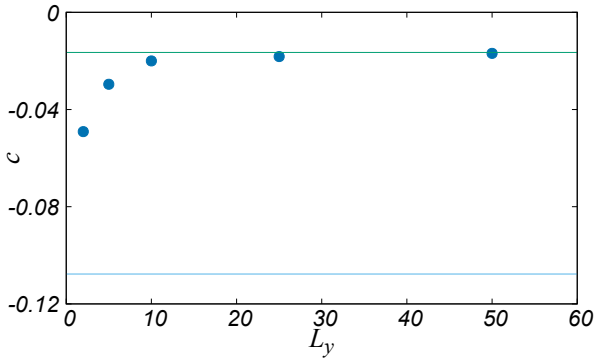


图 S3. 传播速度 c 的温度依赖性。蓝色圆圈表示具有 $\Delta x = 1.0$ 和 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ 的系统的数值结果。使用五百个样本估计 c，并以误差条表示。绿色线表示正文中的理论结果 (8)。

C. $d = 2$ 的补充数据

在本小节中，我们研究具有 $d = 2$ 的系统中传播速度对参数的依赖关系。首先，我们研究 c 对 L_y 的依赖关系，以检验图4中选取的 $L_y = 100$ 是否足够大。在图S4中，我们绘出了不同 L_y 取值下的 c。我们发现，随着 L_y 增大， c 也随之增大，并且 c 收敛至正文中二维系统公式（9）给出的数值。因此，我们判断 $L_y = 100$ 足够大。



图S4。二维系统中传播速度 c 对 L_y 的依赖关系。蓝色圆圈表示数值结果。绿色线表示正文中二维系统的公式(9)，而浅蓝色线表示正文中一维系统的公式(8)。使用五十个样本来估计带有误差条的 c。数值参数取为 $\Delta x = 1.0$、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ 和 $L = 400$。

接下来，我们研究 ξ_1 和 ξ_2 取另一数值时的传播速度，以检验截止依赖关系的普适性。除 (i) $\kappa = 3600$ 或 (ii) $b_1 = b_2 = 0.5$，以及 $\phi_0 = 0$ 外，数值参数均与正文图4中的相同。请注意，对于情形 (i)，体区中涨落的关联长度为 $\xi_1 = 6.49$ 和 $\xi_2 = 40.95$；对于情形 (ii)，则为 $\xi_1 = \xi_2 = 13.85$。在图S5和图S6中，我们展示了固定 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ 时，不同 $\Delta x/\xi_1$ 取值对应的传播速度c。请注意，情形 (i) 中的 α 小于 0.23，情形 (ii) 中则小于 0.07。我们发现，数值结果与理论计算一致。

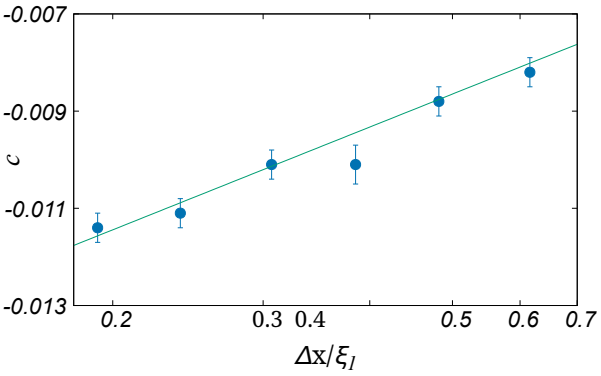
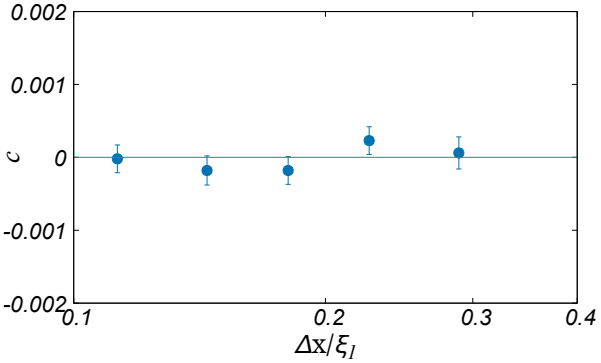


图 S5. 与正文图4类似的图，其中 $\kappa = 3600$，而其他参数值与图4相同。使用八十个样本估算 c，并给出误差条。



图S6. 与正文中的图4类似的图，其中使用对称势，其他参数值与图4相同。使用一百个样本估计 c，并给出误差条。

[1] Y. Kuramoto, 《反应-扩散系统中波前的不稳定性与湍流》, Prog. Theor. Phys. 63, 1885-1903 (1980)。[2] M. Iwata 和 S.-i. Sasa, 《鞍结分岔附近弛豫轨迹临界涨落的理论分析》, Phys. Rev. E 82, 11127 (2010)。[3] G. Costantini 和 F. Marchesoni, 《非对称 kink：熵力稳定作用》, Phys. Rev. Lett. 87, 114102 (2001)。[4] K. Kawasaki 和 T. Ohta, 《界面的动力学鼓面模型 I》, Prog. Theor. Phys 67, 147-163 (1982)。[5] M. Kardar、G. Parisi 和 Y.-C. Zhang, 《生长界面的动态标度》, Phys. Rev. Lett. 56, 889 (1986)。[6] K. A. Takeuchi, 《卡达尔-帕里西-张普适类现代进展入门》, Physica A 504, 77 (2018)。