IEEE Open Journal of Vehicular Technology

; 已修订 .

数字对象唯一标识符 10.1109/10.1109/OJVT.2024.3437470

低复杂度保留分集的通用比特翻转增强硬判决译码器，适用于任意线性码

Praveen Sai Bere *, ***IEEE***学生会员, **Mohammed Zafar AliKhan** †, ***IEEE*** 高级会员 **和 Lajos Hanzo** ‡, ***IEEE*** 终身会士

*电气工程系，印度理工学院海得拉巴分校，海得拉巴，印度，ee19resch01001@iith.ac.in

†印度理工学院海得拉巴分校电气工程系，印度海得拉巴，zafar@iith.ac.in

‡南安普顿大学电子与计算机科学学院，英国南安普顿，lh@ecs.soton.ac.uk

摘要 车对万物（V2X）通信依赖短消息通过衰落无线信道进行短距离传输，同时又要求高可靠性和低时延。

硬判决译码会牺牲分集阶数的保持能力，导致衰落信道中的性能显著下降。相比之下，软判决译码能够保留分集阶数，但代价是计算复杂度增加。

我们提出一种新型增强硬判决译码器，称为分集翻转译码器（DFD），旨在保持分集阶数。此外，该译码器对所有线性分组码均具有“通用”适用性。对于最小距离为 $d_{\min}$ 的 $\mathscr{C}(n,\ k)$ 码，所提出的译码器最坏情况复杂度阶数为 $2^{(d_{\min}-1)}-1$。值得注意的是，对于 $d_{\min}$ 较低的码，与常用的软判决和硬判决译码算法相比，该复杂度有显著降低。凭借以较低复杂度保持分集的能力，该译码器非常适用于车对万物（V2X）、物联网（IoT）、大规模机器类通信（mMTC）、超可靠低时延通信（URLLC）和无线体域网（WBAN）等应用，可实现高效译码并具备良好的性能特性。针对多种已知码和译码算法给出的仿真结果，验证了所提出译码器在性能与复杂度方面的优势。

索引词 分集方法；前向纠错（前向纠错）；分组码。

I. THE

采用车联网（V2X）技术，包括 V2V（车对车）、V2N（车对网络通信）、V2I（车对基础设施）和 V2P（车对行人），可显著提升道路安全、交通流效率，以及娱乐和信息服务的可用性。通过实施车联网通信，可以推进智能交通系统（ITS）的发展，并促进协同运行 [1]–[4]。

两个用户设备（UE）之间交换的周期性广播消息有效载荷长度的变化趋势。itating 车联网应用通常在50至 300 字节范围内。对于事件触发消息，消息大小最多可扩展至 1200字节。V2V/V2P应用的严格时延要求规定，无论UE之间是直接通信还是通过路侧单元（RSU）通信，两个 UE之间的端到端最大时延均不得超过100 毫秒。同样，对于 V2I 应用，UE与RSU 之间可接受的最大时延为 100 毫秒 [5]–[7]。

3GPP 标准化机构为第五代移动通信技术网络制定了三种主要服务类别 [8]。其中一种是增强型移动宽带（eMBB）模式，

本作品采用知识共享署名 4.0 许可协议授权。更多信息请参见 https://creativecommons.org/licenses/by/4 .0/

其面向带宽密集型应用，例如高分辨率视频流、增强现实和虚拟现实。另一类是大规模机器类通信（mMTC），旨在容纳数量庞大的机器类型设备，同时确保最佳的功耗效率，以延长电池充电周期。第三类服务，即超可靠低时延通信（URLLC），专注于支持时间敏感型应用和服务，这些应用和服务要求将延迟降至最低。

值得注意的是，mMTC 和超可靠低时延通信应用服务采用较短的块长，代表了这些服务类别中的不同细分领域。

第五代移动通信技术新空口技术的出现为机器类通信（MTC）服务开辟了新的可能性。预计这些服务将在物联网 [9],，尤其是工业物联网（IIoT） [10]中发挥关键作用。MTC 服务可分为两大类：大规模机器类通信（mMTC） [11] 和超可靠低时延通信（URLLC） [12]。这些类别体现了 MTC 应用的多样性：大规模机器类通信适用于高容量连接，而超可靠低时延通信则要求严格的可靠性和低时延 [12]–[14]。短块长是大规模机器类通信和超可靠低时延通信服务的共同特征。

大规模机器类通信应用采用短码长运行，需要降低功耗以延长电池充电间隔，因为这类设备中的大多数将使用电池供电。依赖短码长的大规模机器类通信应用需要高效的解码器。相比之下，超可靠低时延通信必须同时实现超低时延和超高可靠性，这两者往往相互冲突。尽管如此，为了逼近香农容量，传统系统主要依赖将信息比特编码为较长码字的编码方案，短控制消息除外。但使用较长码字会增加时延，危及超可靠低时延通信的要求 [15]。

最大最小距离码，例如 BCH 码和里德-所罗门码，早在 20 世纪 60 年代便已发展起来，如今在超可靠低时延通信（URLLC）应用中重新受到重视[16]–[20]。这些码能够为信息字分配较短的码字，但要生成不同码率，理论上需要缩短母码。另一方面，随机线性码（RLC）在码率方面具有灵活性，但也带来了计算方面的挑战 [21], [22]。然而，在涉及衰落信道的实际场景中，由于无法维持完整的分集阶数[1] of d_{min}，这些短码的传统硬判决译码器或代数译码器性能不足。软判决最大似然译码（MLD）有望在衰落信道中保持分集。然而，其计算复杂度较高，因此不适用于轻量级实际应用。此外，由于软输出检测器的计算复杂度较高，软信息的提供也可能受到限制。此外，检测器与解码器之间迭代交换软信息往往会增加处理时延。因此，亟需设计一种高效的硬判决译码器，能够以较低的复杂度和低时延，在衰落信道中保证分集保持。

文献中已提出了众多译码技术，如参考文献 [25]–[42]所示。在此背景下，信息集译码（ISD）是一个值得关注的主题，参考文献 [43]–[49]对此已有体现。Bossert等.[50] 具体探讨了将ISD应用于BCH码、以通过二元对称信道（BSC）进行传输。然而，必须强调的是，许多此类译码技术具有很高的计算复杂度，并且无法保证在衰落信道中保持分集。另一方面，Conway和Sloane的软最大似然译码（MLD） [51] 能够保持分集，但其计算复杂度很高，并且会随着消息长度 k呈指数增长。

作为进一步的进展，Chase 提出了一类能够保持分集的算法 [52]。然而，这些算法依赖代数解码器，无法作为独立的通用解码器运行。

Duffy 和 Medard 最近提出的硬判决 GRAND（Guessing Random Additive Noise Decoding，猜测随机加性噪声解码）方案 [53], [54]可对线性码进行通用解码。对于码率较高、码长较短的码 [53]，GRAND 技术尤为高效。然而，作为一种硬判决解码器，GRAND 方法无法在衰落信道中保持分集。文献中已提出多种 GRAND 软判决变体，详见 [55]–[59]。Abbas 等人针对衰落信道提出了 Fading-GRAND [60] 。针对相同场景，研究人员提出了采用伪软信息 [61] 的 GRAND 方法。Chatzigeorgiou 等人在 [22], [62]，中提出了符号级 GRAND，而[63] 建议在大规模多输入多输出（mMIMO）系统中，采用随机线性码（RLC）配合 GRAND 实现超可靠低时延通信（URLLC）。鉴于 GRAND 技术本身复杂度较高 [64], ，研究人员提出了基于混合度量的 GRAND（HMGRAND），作为循环冗余校验（CRC）码的一种可行替代方案；这类码常用于物联网应用 [64]。该方法采用专为 CRC

[1]分集阶数 [23]定义为

$$\text{Diversity order} = \lim_{SNR\to\infty} \frac{-\log[P_e(SNR)]}{\log[SNR]}$$

在衰落信道中，对最小距离为 d_{min} 的码 $\mathcal{C}(n,\ k)$ 进行软判决译码所能获得的最大分集阶数为d_{min} [24]。

码设计的代数解码器，因此适用于物联网应用。不过，值得注意的是，这些解码器无法提供有关如何保持分集的任何见解。

Patel 等。 [24], [65] 提出了翻转译码（FD），这是一种适用于奇偶校验（PC）码（也称为单奇偶校验码（SPC））的强大技术 [66]。已有研究表明，翻转译码能够为奇偶校验码实现二阶分集，这类似于软判决译码所获得的分集。值得注意的是，翻转译码的译码复杂度随码块长度 n呈线性增长。这一突破使得传统上用于纠错检测的PC码能够在瑞利衰落信道中有效地用于纠- 错。Ahmed在 [67], 中探讨了利用PC码实现双无线电分集的翻转译码潜力，其中PC码应用于MAC层之上，译码也在MAC层之上进行，从而同时获得卸载和复制的优势。在MAC层使用PC码，为多无线电设备 [68]–[81] （双无线电）解决卸载与复制难以结合这一挑战提供了一种方案。请注意，在MAC层之上进行软译码较为繁琐 [82] ，因此，对于超过两个无线电设备，在MAC层之上扩展编码和译码需要满足以下要求：

1) 低复杂度编码：这一要求将码的使用限制为循环码（包括CRC码），这些码可利用移位寄存器实现高效的低复杂度实现。2)低复杂度解码将解码限制为硬判决技术，因为实际上不可能将软值传递给 MAC 层或 MAC 层以上的层。3) RSSI 的可用性：由于所有标准都会将RSSI 值传递给 MAC 层，因此可以利用这些值来增强硬判决解码。

此外，翻转译码的应用进一步扩展到 [83] 中的汉明码以及[84]中的CRC码。这些扩展显著增强了汉明码和CRC码相较于传统硬判决译码方法的纠错能力，同时保持了分集阶数不变。值得注意的是，这两类码的译码复杂度仍保持关于 n的线性关系。

受这些优势的启发，我们将翻转译码扩展到广泛的线性码族，使其成为可用于任意线性分组码的“通用”解码器。我们将所提出的解码器更名为分集翻转译码器（DFD），以突出其保持分集的特性。尽管复杂度较低，它仍能达到与软判决解码相同的分集阶数（$d_{\min}$）。因此，所提出的分集翻转译码器尤其适用于衰落信道中的解码，因为分集在减轻衰落影响方面发挥着关键作用。

尤其针对无线体域网（WBAN）中的应用，IEEE 802.15.6标准旨在促进短距离无线通信[85]。为确保通信可靠性，该标准采用了$(63，51)$ BCH码和$(31，19)$ 缩短BCH码，专为无线体域网应用设计。因此，研究人员致力于为无线体域网应用开发高效的BCH码解码器，相关研究见 [86]–[88]。然而，现有解码器主要依赖BCH译码算法，尤其是Peterson算法[89]。相比之下，所提出的 DFD技术虽然复杂度显著更低，但性能优于这些解码器。

A. 我们的主要贡献

我们的创新贡献在表 I 中与现有文献进行了鲜明对比，进一步详述如下：

- **普遍适用性**：我们提出了一种通用的 DFD 技术，旨在为所有线性分组码在衰落信道中保留分集。
- **增强纠错：**我们证明，所提出的 DFD 显著提升了线性分组码的纠错能力。具体而言，它可以纠正最多 $(d_{\text{最小}}-1)$ 个错误，但无法纠正所有 $(d_{\text{最小}}-1)$个错误。
- **保持的分集阶数：**我们证明，我们提出的解码器实现了等于“$d_{\text{最小值}}$”的分集阶数，使其与软判决译码技术的分集阶数保持一致；这对于提高衰落信道中的可靠性至关重要。
- **低复杂度：**与成熟的软判决译码器和硬判决译码器相比，所提出的DFD技术的固有优势在于其较低的计算复杂度。这为其实际实现铺平了道路。
- **理论与实证验证：** 我们提供全面的理论分析，并辅以仿真，以确认其分集阶数。
- **在 MAC 及以上层实现编码/解码：**所提出的增强硬判决译码器尤其适合多无线电设备，可同时实现卸载和复制的优势。
- **应用多样性：**上述优势使所提出的 DFD技术成为车联网、无线体域网、物联网、大规模机器类通信和超可靠低时延通信场景中短码长应用的理想解决方案，在这些场景中，低复杂度和高性能至关重要。

在表 I 中，Chase译码器、OSD、ISD 和 ORBGRAND 的纠错能力高于 $t\ (=\lfloor\frac{d_{min}-1}{2}\rfloor)$,因为它们利用了软信息。相比之下，GRAND 最多能够纠正 t 个错误。OSD 、 ISD 、 GRAND 和 ORBGRAND 解码器被认为具有通用性，因为它们适用于所有类型的码。然而，Chase译码器不具备通用性，因为它们依赖特定的硬判决译码器，因此不适用于奇偶校验码或 CRC码等码。因此，Chase译码器无法作为

独立解码器，与 OSD、ISD、GRAND 和ORBGRAND 解码器不同。Chase译码器在衰落信道中保持分集，而 GRAND 在衰落条件下不会保持分集阶数。对于 OSD、ISD 和 ORBGRAND，始终无法保证分集阶数的保持。

B. 论文结构

在第二节中，我们首先概述系统设置，随后介绍相关概念。现有技术在C节中进行了简要总结。第三节介绍了我们保持分集的DFD技术，而第四节则推导DFD的错误概率上界和分集阶数。第五节给出了我们的仿真结果。在小节A中，展示了DFD达到分集阶数 d_{min} 的性能。在小节B中，介绍了DFD在不同码字长度和码率下的性能，而小节C则对我们的性能与复杂度进行了分析。第六节介绍了扩展多样性翻转译码器（EDFD），其代表了性能上的进一步提升。随后，在下一节，即第七节中，详细介绍了EDFD的仿真结果。最后，我们在第八节中得出结论。

II. 预备知识

A. 系统设置

考虑一个二进制线性分组码 $\mathscr{C}(n,k)$，其具有一个校验矩阵（PCM）$\mathbf{H}^{(\mathbf{n-k})\times\mathbf{n}}$ 和一个生成矩阵（GM）$\mathbf{G}_{\mathbf{k}\times\mathbf{n}}$。此处，$n$ 表示码字长度，k 表示码 $\mathscr{C}(n,k)$的维数，其最小距离为 $d_{\min}$。

我们采用以下记号：矩阵表示为$\mathbf{X}$，而向量表示为$\mathbf{y}$；长度为 n 的行向量表示为$\mathbf{y^n}$；$\mathbf{0^n}$ 表示长度为 n的全零行向量，y 表示标量；$w_H(\mathbf{y})$ 表示二进制向量$\mathbf{y}$ 的汉明重量；$\mathbf{q}\oplus\mathbf{p}$表示二进制向量对 $\mathbf{q}$,$\mathbf{p}$ 的对应元素进行二进制异或运算，其中：

$$\mathbf{q}\oplus\mathbf{p}=[q_1\oplus p_1 \quad q_2\oplus p_2 \quad q_3\oplus p_3 \quad \cdots \quad q_n\oplus p_n]_{1\times n}$$

与 $q_j,p_j\in\{0,1\}$.

令$\mathbf{c}=[c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \cdots \quad c_n]_{1\times n}\in\mathscr{C}(n,k)$ 为一个合法的传输码字。在涉及瑞利衰落信道的实际场景中，为简单起见，假设采用二进制相移键控调制。在二进制相移键控调制下，$\mathbf{c}$ 被映射为符号序列 $\mathbf{s}=[s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \cdots \quad s_n]_{1\times n}$，其中有 $s_j=(-1)^{c_j}$。因此，$s_j\in\{-1,1\},\forall j$。然后，接收信号可以表示为：

$$y_j=h_j s_j+w_j,\ 1\le j\le n,\ h_j\ge 0, \tag{1}$$

其中，w_j 表示统计独立、均值为零、方差为N_0的复高斯随机变量。系数 h_j 表示服从相同分布且相互独立的瑞利衰落系数，这表明采用了快衰落信道假设。在慢衰落信道中，假设码字已理想交织。令$\mathbf{h}=[h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n]_{1\times n}$表示信道状态信息（CSI）向量。此外，假设接收机已准确掌握CSI。

接收向量表示为 $\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]_{1\times n}$。对$\mathbf{y}$进行硬判决后，接收向量表示为$\mathbf{r}=[r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]_{1\times n}$。

B. 分集的已知结果

线性分组码 $\mathscr{C}(n,k)$ 的最小距离为 d_{min}，纠错能力为 t，在硬判决译码下表现出分集阶数 $(t+1)=\overline{\lfloor\frac{d_{min}-1}{2}\rfloor+1}$，而软判决译码实现的分集阶数为 d_{min} [24]。

尽管对 $\mathscr{C}(n,k)$ 进行硬判决译码的复杂度低于软判决译码，但它牺牲了分集阶数，导致衰落信道中的性能下降显著。另一方面，软判决最大似然译码能够提供出色的性能，但需要比较 2^k 个合法码字，从而导致较高的复杂度。随着 k 的增加，软判决 ML 译码的复杂度呈指数增长。

C. 相关前期工作

本小节全面概述 Chase、OSD、ISD（信息集译码），以及近期与 GRAND（随机加性噪声猜测译码）解码器相关的研究。我们将它们分为“猜测”噪声类型和码字类型。

定义 1:
码字猜测解码器是指搜索码字的解码器。

定义 2:
噪声猜测解码器是指搜索不同噪声模式的解码器。

在表 II 中，各种解码器分为两组：“噪声猜测类型”和“码字猜测类型”。

1) 奇偶校验码的翻转译码

PC码的翻转译码理念最早出现在 [65]中。当接收机处出现奇偶校验不匹配时，该方法会翻转与最小信道状态信息（信道状态信息）值关联的比特。通过这种翻转译码器（翻转译码器）技术，PC码在衰落信道中展现出了显著的分集阶数2。

表 I：区分我们的新贡献与现有最先进方法

属性	解码器类型						
	Chase [52]	OSD [35], [46]	ISD [18], [43], [44]	GRAND [53]	ORBGRAND [58], [60], [61]	所提出的 DFD	拟议的 EDFD
增强型纠错 ($> t$)	✓	✓	✓		✓	✓	✓
通用解码器		✓	✓	✓	✓	✓	✓
独立解码器		✓	✓	✓	✓	✓	✓
分集的保持	✓					✓	✓
低复杂度						✓	✓
适用于 MAC 层解码以及更高层的 MAC 层				✓		✓	✓

表 II：解码器分类

解码器	Type
Chase	猜测码字类型
OSD	猜测码字类型
ISD	猜测码字类型
GRAND	噪声猜测类型
ORBGRAND	噪声猜测类型
所提出的 DFD	噪声猜测类型
所提出的 EDFD	噪声猜测类型

2) Chase译码器

1972年，Chase 提出了一类利用信道测量信息 [52] 的译码算法。下面简要介绍 Chase 译码算法：从接收序列 $\mathbf{y}$ 开始。引入一个测试模式，记为 $\mathbf{T}$，将其加到 $\mathbf{y}$ 上，得到一个新序列，$\underline{\mathbf{y}}'$。对于每个 $\mathbf{y}'$，使用硬判决二进制译码器推导出一个新序列 $\mathbf{y}''$。令 $\mathbf{z}'$ 表示相应的错误模式。然后，有效错误模式由以下方式确定。

$$\underline{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}} \oplus \underline{\mathbf{z}}'.$$

最终，有效错误模式 ($\mathbf{z_T}$) 中模拟权重最低的错误模式被选为最终错误模式，其关联的码字被指定为译码码字。

Chase 提出了三种算法，其特点是指定错误模式集合中的错误模式数量逐渐减少($\mathbf{T}$) 。

算法*1*：该算法涵盖所有二进制汉明重量为 $\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor$ 的错误模式。因此，该方法共包含 $\binom{n}{\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor}$ 错误模式，其规模可能相当庞大。

算法*-2*：此方法涉及错误模式($\mathbf{T}$)，其中所有1的组合均位于$\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor$ 最低的信道测量信息值中。

因此，$2^{\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor}$ 测试错误模式会在此方法中予以考虑。

算法*-3*：在这种方法中，复杂度进一步降低。它涉及考虑汉明重量为 i的测试模式，其中，i 表示位于对应于 i 个最低信道测量值的时隙中的1 的数量。i 的取值包括：

$$i = 0, 1, 3, \ldots d_{min} - 1, \quad \text{when } d_{min} \text{ is even.}$$
$$i = 0, 2, 4, \ldots d_{min} - 1, \quad \text{when } d_{min} \text{ is odd.}$$

因此，所考虑的错误模式总数将为 $\lfloor \binom{d_{min}}{2} + 1 \rfloor$，从而显著减少错误模式的数量。

备注 1:
值得注意的是，Chase译码器并非普遍适用，因为其译码依赖于该码特定的硬判决译码算法。

3) OSD

令 $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots\cdots \quad \alpha_n]$ 为可靠向量，其中包含接收码字 $\mathbf{r}$ 的所有 n 位的可靠度。在 OSD 中，可靠度按降序排列，以得到 $\alpha_{\mathbf{sort}} = [\alpha_{(1)} \quad \alpha_{(2)} \quad \cdots\cdots \quad \alpha_{(n)}]$。对应的置换函数为 λ_1。然后，将 λ_1 应用于 $\mathbf{r}$，得到 $\mathbf{r}'$。将相同的 λ_1 应用于生成矩阵 G 的列，得到 G'。然后，识别并选取 G' 的前 k 个线性无关列，作为 G'' 的前 k 列。G' 的其余列将成为 G'' 接下来的 $(n-k)$ 列。令此置换函数为 λ_2。将矩阵 G'' 转换为系统形式，得到 G_{OSD}。然后，将 λ_2 应用于 $\mathbf{r}'$，以得到 $\mathbf{r}''$。$\mathbf{r}''$ 中的前 k 位记为 $\mathbf{r}''_{\mathbf{M}}$，其余位记为 $\mathbf{r}''_{\mathbf{L}}$。在 OSD 中，采用长度为 k 位的测试错误模式（TEP）进行重处理。对于 i 阶重处理，考虑汉明重量不超过 i 的测试错误模式（$\mathbf{e}$）。码字按如下方式进行重处理。

$$\underline{\tilde{\mathbf{c}}}_{\mathbf{e}} = (\underline{\mathbf{r}}''_{\mathbf{M}} \oplus \underline{\mathbf{e}}) \cdot G_{OSD}.$$

令 $\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}_2 \quad \dots \quad \tilde{\alpha}_n] = \lambda_2[\lambda_1(\alpha)]$。加权汉明距离定义如下：

$$d^{(W)}(\underline{\mathbf{r}}'', \tilde{\underline{\mathbf{c}}}_{\mathbf{e}}) \triangleq \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ r_i'' \neq \tilde{c}_{e_i}}} \tilde{\alpha}_i.$$

在OSD 中，与最小加权汉明距离对应的特定码字被选作最优码字（$\tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{opt}}$）。然后，将相应的逆置换应用于 $\tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{opt}}$，以获得最终的译码码字（$\hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{opt}}$）

$$\hat{\underline{\mathbf{c}}}_{\mathbf{opt}} = \lambda_1^{-1}[\lambda_2^{-1}(\hat{\underline{\mathbf{c}}}_{\mathbf{opt}})].$$

4) ISD

ISD [18], [43] 使用特定位位置$(i_0, i_1, i_2, ..., i_{k-1})$计算系统基[2] [18] $(B = 0, 1, 2, ..., k-1)$；如果这些位置包含线性相关列，则会扩展搜索，直到找到系统基。使用这个系统基，ISD 随后将收到的位$r_0, r_1, r_2 ..., r_{k-1}$ 作为信息进行编码，从而避免译码失败。ISD 也可以成为列表译码器，通过翻转信息位并选择汉明距离最小的码字。

5) GRAND 和 GRANDAB

GRAND [53]技术利用了这样一个观察结果：随着信道条件改善，能够改变合法传输码字的潜在错误模式集合会变小。这一洞见使关注点从在码本中搜索最有可能传输的码字，转向估计最可能的错误模式。

为了确定错误模式是否对应一个有效码字，需要进行码本成员资格测试。GRAND 按可能性的降序排列候选错误模式，并依次对每个错误模式应用成员资格测试。算法在成功通过成员资格测试后终止，并返回第一个错误模式。

与 GRAND 相比，GRANDAB [59] 不仅在首次收到肯定响应时停止，还会在码本查询次数超过某个称为放弃比特 (ABB) 的阈值时终止并指示擦除。

[2]系统基是线性无关的 k 列。例如，考虑一个系统码 $\mathcal{C}(n,k)$及其生成矩阵 $G_{k\times n}$。令集合 $P \subset \{0, 1, 2, ...n-1\}$ 表示一组 k 不同的位置。若由列 $j \in S$组成的子矩阵 G_P 达到满秩 k，则 P被称为信息集。这些位置唯一确定任何码字中的其余 $n-k$位置。

6) ORBGRAND

考虑通过二进制输入加性高斯白噪声信道传输$\mathbf{c}$，其中 $\mathbf{r}$ 为接收向量。根据$\mathbf{r}$，可按可靠性升序排列码字比特，并用向量$\mathbf{s}$ 记录每个比特的可靠性顺序。对于错误模式向量$\mathbf{z}$，逻辑权重 w_l 定义为 $w_l = \sum_{i=0}^{n-1} (s_i \times z_i)$。由此可得 $w_l(z^{k_1}) < w_l(z^{k_2})$，其中 $k_1 < k_2$。 $w_l(z^k)$ 的值越小，对应错误模式的可能性越高。

7) fading-GRAND

[60] 的 fading-GRAND 利用信道状态信息识别一组比特索引，记为 $\mathcal{I}$。该集合根据给定的阈值 (Δ) 构建。 Δ 的表达式定义为 $\Delta = m\left(\frac{E_b}{N_0}\right) + b$，其中 m 和 b 表示针对不同码可获得更优性能的最优值，如 [60]中所述。接下来，通过确保测试错误模式（TEP）中 1 的位置不包含集合 $\mathcal{I}$中指定的位置，来生成测试错误模式。

8) 使用伪软信息的 GRAND

[61] 中介绍了一种方法：按照伪软信息对接收比特进行排列。伪软信息综合了信道状态信息（CSI）和有色加性噪声（CAN）的统计特性，而非采用传统软信息。随后，GRAND 技术的其余步骤均不作任何修改。

III. 提出的通用分集翻转译码器

本节介绍了为所有线性分组码设计的所提出的分集翻转译码器（DFD）。所提出的 DFD 的核心在于其运行原理。在衰落信道中，与加性高斯白噪声（AWGN）相比，衰落包络对错误的影响更为显著。因此，DFD 利用信道状态信息（CSI），有选择地翻转与最低 CSI值相关的比特来纠正错误。这些比特最有可能出错，因此可以在受损码字中对其进行针对性翻转，从而恢复所传输码字的完整性。

A. 分集翻转译码器

考虑一个记作 $\mathscr{C}$（n, k）、最小距离为 $d_{\min}$ 的线性分组码。令 $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]_{1\times n} \in \mathscr{C}$表示与信息字 $\mathbf{m} = [m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_k]_{1\times k}$对应的已发送码字。接收机进行硬判决后，接收字记为$\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]_{1\times n}$。此外，向量 $\mathbf{h} = [h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n]_{1\times n}$ 定义为表征信道状态信息（CSI）的绝对值的集合，

的绝对值。

在翻转译码过程中，我们将$\mathbf{h}$ 的元素按升序排列（类似于OSD [90]），得到排序后的向量，记为$\mathbf{h}_{\mathbf{sort}} = [h_{(1)} \quad h_{(2)} - \cdots \quad h_{(n)}]_{1\times n}$。令‘$\pi$’表示相应的置换函数。将相同的置换函数‘$\pi$’应用于向量$\mathbf{r}$，得到向量$\mathbf{r}_{\mathbf{sort}} = [r_{(1)} \quad r_{(2)} \quad \cdots \quad r_{(n)}]_{1\times n}$。因此，我们可以将其表示为：

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{sort}} &= \pi(\underline{\mathbf{h}}),\\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}} &= \pi(\underline{\mathbf{r}}),\\ \Rightarrow \underline{\mathbf{r}} &= \pi^{-1}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}}).\end{aligned}$$

定义

$$d = d_{\min} - 1. \tag{2}$$

那么，$\mathbf{r}_{\mathbf{sort}}$ 中最初的 d 位代表最不可靠比特（LRB），其余比特则称为最可靠比特（MRB）。这可以表示如下：

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{lrb}} &= [r_{(1)} \quad r_{(2)} \quad r_{(3)} \quad \cdots \quad r_{(d)}]_{1\times d},\\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{mrb}} &= [r_{(d+1)} \quad r_{(d+2)} \quad r_{(d+3)} \quad \cdots \quad r_{(n)}]_{1\times(n-d)}.\end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}} = [\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{lrb}} \quad \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{mrb}}].$$

随后，我们开始探索所有翻转最不可靠比特（LRB）的可能模式。每个翻转向量（$\mathbf{f}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}}$）都表示为一个与码字$\mathbf{c}^{\mathbf{n}}$大小相同的行向量。我们将翻转向量集合正式定义为 Φ，记为：

$$\Phi = \left\{ \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}} \;\middle|\; \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}} = \left[\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{d}^{(i)}} \quad \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{n-d}} \right] \right\} \quad (1 \le i \le 2^d - 1).$$

对于给定的十进制数 i，翻转模式向量（表示为$\mathbf{fp}^{\mathbf{d}^{(i)}}$）的构造方式是：将十进制数 i 转换为长度为 d的二进制向量时，最低有效位（LSB）位于第一位。此外，$\mathbf{f}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}}$被称为“翻转向量”。为说明这一点，考虑 BCH(15,7,5)码，其中 $i = 3$、$d = 4$和 $n = 15$。我们有：

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{d}^{(3)}} &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\\ \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}} &= [\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{4}^{(3)}} \quad \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{11}}]\\ &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].\end{aligned}$$

请注意，对于给定的“$d = d_{min} - 1$”，只要最小距离“d_{min}”保持不变，翻转图样集合就固定不变，不会随码的类型而变化。最终翻转向量集合的构成方式，是根据码字长度“$\mathbf{n}$”附加相应的零向量。因此，翻转向量集合的创建十分简单，复杂度较低，而且无需针对所用的每种码类型重复生成翻转向量。

令 $\Phi(l)$ 表示集合 Φ的 l^{th} 元素。Φ 的基数为 $2^d - 1$。翻转译码技术运行如下：从集合 Φ 中依次选取每个翻转向量，并将其添加（进行异或）到排序后的接收向量 $\mathbf{r}_{\mathbf{sort}}$，得到 $\mathbf{r}_{\mathbf{t}}$。然后，对 $\mathbf{r}_{\mathbf{t}}$ 应用逆置换函数，以获得结果向量 $\mathbf{r}_{\mathbf{o}}$。这可以表示为：

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}} &= \underline{\mathbf{r}}_{\text{sort}} \oplus \underline{\mathbf{f}}_{\text{pv}},\\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}} &= \pi^{-1}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}}).\end{aligned}$$

随后，使用矩阵 $\mathbf{H}$ 计算$\mathbf{r}_{\mathbf{o}}$ 的伴随式向量 ($\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}$)，即 $\mathbf{S}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{r}_{\mathbf{o}}\mathbf{H}^T$。如果所得伴随式($\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}$) 非零，则从集合 Φ 中选取下一个翻转向量，并将其加到向量$\mathbf{r}_{\text{sort}}$上。该迭代过程持续进行，直至得到零伴随式。得到零伴随式后，所得向量($\mathbf{r}_{\mathbf{o}}$) 即为译码码字($\mathbf{c}_{\mathbf{o}}^{\text{opt}}$)，至此过程结束。然而，如果集合 Φ 中的翻转向量$\mathbf{f}_{\mathbf{pv}}^{\mathbf{n}}$ 均未能得到有效码字，算法1将接收字($\mathbf{r}$) 作为译码码字$\mathbf{c}_{\mathbf{o}}^{\text{opt}}$返回。随后，利用码本 $\mathscr{C}$ 得到进一步译码的信息字 $\mathbf{m}_{\mathbf{o}}^{\text{opt}}$。

算法1提供了适用于所有线性分组码的翻转译码器的伪代码。在该算法中，‘$\sim$’运算符表示逻辑非运算。函数‘$sum(\mathbf{S}_{\mathbf{Y}})$’计算并返回向量$\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}$中各元素的总和。此外，函数‘$sort(\mathbf{h})$’生成向量$\mathbf{h}_{\mathbf{sort}}$，其中$\mathbf{h}$ 的元素按升序排列。它还提供了一个向量，$\mathbf{Ix}$ 该向量充当置换函数，其中包含与$\mathbf{h}$中各元素对应的置换后索引。通过以下示例可以更好地理解‘$sort(\mathbf{h})$’的功能。

If $\underline{\mathbf{h}} = [0.82 \quad 1.3 \quad 1.08 \quad 0.09 \quad 0.43 \quad 1.8 \quad 0.32]$; $[\underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{sort}}, \underline{\mathbf{Ix}}] = sort(\underline{\mathbf{h}})$；然后，

$\underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{sort}} = [0.09 \quad 0.32 \quad 0.43 \quad 0.82 \quad 1.08 \quad 1.3 \quad 1.8]$; *and*

$\underline{\mathbf{Ix}} = [4 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 6]$;

$\underline{\mathbf{Ix}}(1) = 4; \quad \underline{\mathbf{Ix}}(3) = 5.$

示例 1：

The Flip decoding process is elucidated through the examination of the following illustrative example involving a BCH(15,7,5) code. Let the transmitted codeword be $\underline{\mathbf{c}} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]_{1\times n}$. 考虑硬判决后的接收码字，以及接收机处与之关联的信道状态信息（CSI）向量，记为

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]_{1\times 15},\\ \underline{\mathbf{h}} &= [1.0869 \quad 0.7561 \quad 2.496 \quad 1.8351 \quad 0.416\\ &\quad 0.1256 \quad 0.9395 \quad 1.6002 \quad 0.4133 \quad 1.6239\\ &\quad 0.0854 \quad 1.1069 \quad 0.817 \quad 0.9698 \quad 1.5772]_{1\times 15}.\end{aligned}$$

当$\mathbf{h}$ 的元素按升序排列，得到$\mathbf{h}_{\mathbf{sort}}$，以及相应的排列

函数 π 表示为向量 $\mathbf{Ix}$，应用此置换函数 π 于 $\mathbf{r}$ 可得 $\mathbf{r_{sort}}$。

$$
\begin{aligned}
&[\underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{sort}}, \underline{\mathbf{Ix}}] = sort(\underline{\mathbf{h}}); \quad \text{then,}\\
&\quad \underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{sort}} = [0.0854 \quad 0.1256 \quad 0.4133 \quad 0.416 \quad 0.7561\\
&\qquad\qquad 0.817 \quad 0.9395 \quad 0.9698 \quad 1.0869 \quad 1.1069\\
&\qquad\qquad 1.5772 \quad 1.6002 \quad 1.6239 \quad 1.8351 \quad 2.496],\\
&\pi: \quad \underline{\mathbf{Ix}} = [11 \quad 6 \quad 9 \quad 5 \quad 2 \quad 13 \quad 7 \quad 14\\
&\qquad\qquad 1 \quad 12 \quad 15 \quad 8 \quad 10 \quad 4 \quad 3],\\
&\quad \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\\
&\qquad\qquad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0].
\end{aligned}
$$

对于 BCH(15,7,5)码，最小距离为 $d_{\min}$ =5。因此，$d = d_{\min} - 1 = 4$。所以，翻转向量的集合记作 Φ，表示如下：

$$
\begin{aligned}
\Phi = \{ &\\
&[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
&[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\\
\}&
\end{aligned}
$$

现在让我们计算接收到的码字 $\mathbf{r}$，得到$\mathbf{S}_{\mathbf{y}} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$。由于伴随式非零（$\mathbf{S}_{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$），我们从集合 Φ 中选择第一个翻转向量，并将其加到 $\mathbf{r_{sort}}$上。随后，我们计算所得向量的伴随式，作为有效码字检查的一部分。因此，我们有：

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}} &= \Phi(1);\\
\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}} &= \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}} \oplus \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}};\\
&= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \oplus\\
&\quad\ [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\\
&= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0].\\
\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}} &= \pi^{-1}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}});\\
&= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].\\
\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{y}} &= \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}}\mathbf{H}^{\mathbf{T}};\\
&= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1].
\end{aligned}
$$

由于伴随式非零，我们通过从集合中选择下一个翻转向量 Φ 并重复相同步骤来继续：

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}} &= \Phi(2);\\
\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}} &= \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{sort}} \oplus \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{pv}};\\
&= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \oplus\\
&\quad\ [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\\
&= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0].\\
\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}} &= \pi^{-1}(\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{t}});\\
&= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].\\
\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{y}} &= \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}}\mathbf{H}^{\mathbf{T}};\\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].
\end{aligned}
$$

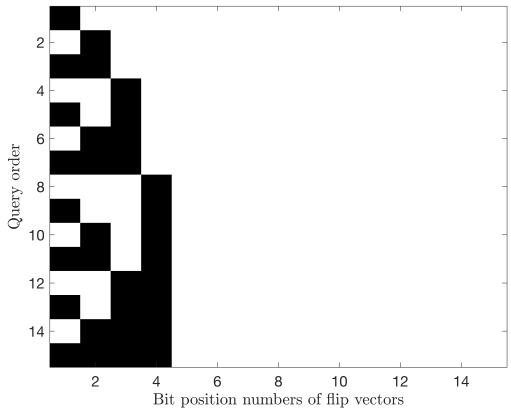
第二次迭代得到零伴随式，表明$\mathbf{r_o}$ 是一个码字，过程至此结束。译码码字（$\mathbf{c^{opt}}$）确定为$\mathbf{r_o}$，并通过从$\mathbf{c^{opt}}$中选取前 k 位来提取相关消息比特，因为我们采用的是系统的BCH(15,7,5)码。

通过系统地探索和操纵最不可靠比特，翻转译码器在保持分集的同时提升了解码性能。

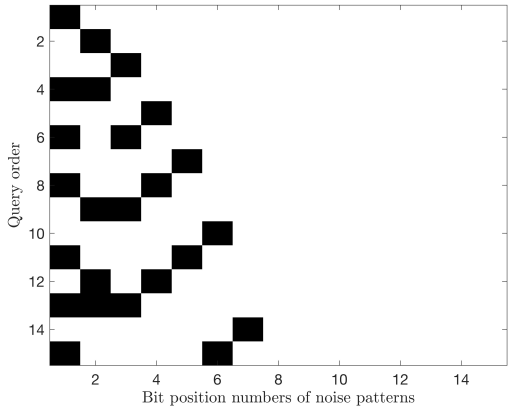
所提出的 DFD 能够实现分集，因此以极低的复杂度在衰落信道上表现出色。相比之下，原始的硬判决 GRAND[53] 由于其硬判决特性，无法保持分集阶数，导致性能低于 DFD。其他软判决 GRAND 变体（例如 ORBGRAND [58],）的性能优于 DFD，但复杂度显著更高。此外，所有 GRAND 变体都在两个方面引入复杂度：生成下一个暂定噪声序列的复杂度，以及通过伴随式计算验证所得码字有效性的复杂度。

对于 DFD 而言，对于给定的最小距离（d_{min}），无论采用何种码，翻转模式集合都是固定的。根据码字长度（n），通过在该集合中的翻转向量后面补零即可生成相应的翻转向量。因此，无需每次都重新生成一个需要添加到原始接收字中的翻转向量，也不会产生相关复杂度。由此，DFD 的复杂度显著低于 GRAND 及其变体。

为区分所提出的DFD 与 ORB-GRAND 方法，图1a和图 1b 分别展示了 (15,7,5)BCH码情况下与DFD 和 ORBGRAND 对应的错误模式。图 1a 显示了与 DFD相关的翻转向量模式，而图 1b 展示了截至 15th 查询阶数的ORBGRAND错误模式。在这些表示中，黑色表示翻转操作，而白色表示不进行任何翻转。



(a) 所提出的 DFD 翻转向量模式序列。



(b) ORBGRAND 错误模式序列

图 1：DFD 和 ORBGRAND 的错误模式：BCH(15，7)。

算法1： 通用分集翻转译码器

输入：

- Φ：翻转向量列表。
- $\underline{\mathbf{r}}$：接收码字。
- $\mathbf{h}$：信道状态信息向量。
- $\overline{\mathbf{H}}$
- $d_{\text{最小值}}$
- n_Φ：集合 Φ的基数。

输出：

- $\underline{\mathbf{c}}_o^{\text{opt}}$: The decoded codeword.

$\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y} = \underline{\mathbf{r}}\mathbf{H}^\mathbf{T}$;
if $(sum(\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y}) > 0)$ **then**
  $d = d_{\min} - 1$;
  $[\underline{\mathbf{h}}_{\text{sort}}, \pi] = \text{sort}(\underline{\mathbf{h}})$;
  $\underline{\mathbf{r}}_{\text{sort}} = \pi(\underline{\mathbf{r}})$;
  $\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y} = \underline{\mathbf{r}}\mathbf{H}^\mathbf{T}$;
  $lc = 1$; `// loop counter initialization`
  while $(sum(\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y}) > 0)$ & $(lc \leq n_\Phi)$ **do**
    $\underline{\mathbf{f}}_\mathbf{pv} = \Phi(l)$;
    $\underline{\mathbf{r}}_\mathbf{t} = \underline{\mathbf{r}}_{\text{sort}} \oplus \underline{\mathbf{f}}_\mathbf{pv}$;
    $\underline{\mathbf{r}}_\mathbf{o} = \pi^{-1}(\underline{\mathbf{r}}_\mathbf{t})$;
    $\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y} = \underline{\mathbf{r}}_\mathbf{o}\mathbf{H}^\mathbf{T}$;
    $lc = lc + 1$;
  end
else
  $\underline{\mathbf{r}}_\mathbf{o} = \underline{\mathbf{r}}$
end
if $(sum(\underline{\mathbf{S}}_\mathbf{y}) == 0)$ **then**
  $\underline{\mathbf{c}}_\mathbf{o}{}^{\text{opt}} = \underline{\mathbf{r}}_\mathbf{o}$;
else
  $\underline{\mathbf{c}}_\mathbf{o}{}^{\text{opt}} = \underline{\mathbf{r}}$;
end

IV. 翻转译码器的错误概率与分集分析

我们首先为表示为 $P_{FD}(\mathscr{C})$ 的错误概率建立上界。随后，我们推导 DFD 的分集阶数。

考虑接收字$\mathbf{r}$，其中总共有 $_n_e$ 个错误。此外，我们将 $\rho_i = h_i^2\bar{\rho}_c$ 定义为 $1 \leq i \leq n$ 的瞬时信噪比（SNR），单位为每个编码比特；其中 $\bar{\rho}_c$ 是每个编码比特的平均信噪比。

在接下来的情形中，所提出的解码器无法纠正接收字中的错误。

- **情况一：** 在此情形下，接收字中存在 $n_e = v$ 个错误，且 $1 \leq v \leq d$，可以确定这些错误中至少有一个位于最可靠比特（MRB）中。因此，解码器无法在此情形下纠正所有错误。我们用 P_{e_v} 表示此情形发生的概率。

- **情况二：** 在这种特定情况下，接收向量 $\mathbf{r}$ 中有 $d+1$ 个或更多错误位。为表示这种情况，我们用 $P_{e_{d+1}}$ 表示其概率。

所提出的 DFD 的总错误概率通过对这些单独的概率求和得到。因此，我们有

$$P_{FD}(\mathscr{C}) = \left(\sum_{v=1}^{d} P_{e_v}\right) + P_{e_{d+1}}. \tag{3}$$

现在，我们继续推导情况一的错误概率，其中考虑发生 v $(1 \leq v \leq d)$ 个错误的情况。

A. 求 $\mathbf{P_{e_v}, 1 \leq v \leq d}$：
为了计算 P_{e_v}，我们将 ρ_i 值按升序排列，即 $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \cdots \leq \rho_n$。我们引入如下记号：$q_i$。

$$q_i = Prob\{n_i \geq \rho_i | \rho_i\} = Q\left(\sqrt{2\rho_i}\right) \leq e^{-\rho_i},$$

其中最后一个不等式是参考 Chernoff界 [91] 推导得出的。令 $\bar{q}_i = \mathbf{E}_{\rho_i}[q_i]$。这意味着

$$\bar{q}_1 \geq \bar{q}_2 \geq \cdots \geq \bar{q}_n, \tag{4}$$
$$(1-\bar{q}_1) \leq (1-\bar{q}_2) \leq \cdots \leq (1-\bar{q}_n). \tag{5}$$

首先，我们推导单错误和双错误情形下的错误概率表达式。随后，我们将这些表达式推广至涵盖所有 v 错误的情形，其中$1 \leq v \leq d$。

1）**P_{e_1}推导**

在此情景中，我们考虑仅发生在**r**的最可靠比特部分中的单个错误，即最不可靠比特部分中不存在任何错误。第 i 个位置发生单个错误的概率表示为 $\bar{q}_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(1-\bar{q}_j)$。当我们对最可靠比特中的所有潜在位置求和时，可得:

$$P_{e_1} = \sum_{i=(d+1)}^{n} \bar{q}_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(1-\bar{q}_j).$$

那么， P_{e_1} 可被上界为

$$\begin{aligned} P_{e_1} &\leq \sum_{i=(d+1)}^{n} \bar{q}_i (1-\bar{q}_n)^{n-1}, (using\ (5)) \\ &\leq (n-d)\bar{q}_{d+1}(1-\bar{q}_n)^{n-1}.(using\ (4)). \end{aligned} \tag{6}$$

2) **P_{e_2}推导**

此场景涉及存在两个错误。在这两个错误中，至少有一个位于最可靠比特部分，从而导致译码失败。因此，P_{e_2} 包含两个概率：一个表示单个错误发生在最可靠比特中的概率（$P_{e_{21}}$），另一个表示两个错误均位于最可靠比特中的概率（$P_{e_{22}}$），可得:

$$P_{e_2} = P_{e_{21}} + P_{e_{22}}. \tag{7}$$

为计算 $P_{e_{21}}$，我们注意到，在第 i个和第 j个位置发生两个错误的概率表示为$\bar{q}_i\bar{q}_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,\ j}}^{n}(1-\bar{q}_k)$。对 j 的 MRB 部分和 i的 LRB 部分中所有可行位置求和，可得:

$$P_{e_{21}} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=(d+1)}^{n} \bar{q}_i\bar{q}_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n}(1-\bar{q}_j).$$

现在，我们利用式（4）和式（5）为概率 $P_{e_{21}}$建立一个上界，如下:

$$\begin{aligned} P_{e_{21}} &\leq \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=(d+1)}^{n} \bar{q}_i\bar{q}_j(1-\bar{q}_n)^{n-2}, (\text{using}\ \ (5)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{d}\bar{q}_i\right)\left[\sum_{j=d+1}^{n}\bar{q}_j\right](1-\bar{q}_n)^{n-2}, \\ &\leq (d\bar{q}_1)\left[(n-d)\bar{q}_{d+1}\right](1-\bar{q}_n)^{n-2}, \quad (\text{using}\ \ (4)) \\ &\leq d(n-d)\bar{q}_1\bar{q}_{d+1}(1-\bar{q}_n)^{n-2}. \end{aligned} \tag{8}$$

类似地，我们表述 $P_{e_{22}}$ 如下:

$$\begin{aligned} P_{e_{22}} &= Prob\{2\ errors\ in\ MRB\}, \\ &= \sum_{j=d+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} \bar{q}_j\bar{q}_k \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j,k}}^{n}(1-\bar{q}_l), \\ &\leq \sum_{j=d+1}^{n-1}(n-j)\bar{q}_{d+1}^2(1-\bar{q}_n)^{n-2} \quad (\text{using}\ \ (4),(5)) \\ &\leq \left(\sum_{j=d+1}^{n-1} n - \sum_{j=d+1}^{n-1} j\bar{q}_{d+1}^2\right)(1-\bar{q}_n)^{n-2} \\ &\leq \binom{n-2}{2}\bar{q}_{d+1}^2(1-\bar{q}_n)^{n-2}. \end{aligned} \tag{9}$$

3) **$P_{e_v}(1 \leq v \leq d)$ 推导**

基于前两个小节所获得的见解，在前两个小节中我们计算了单错误和双错误情况下的错误概率，现将分析扩展至涉及 v 错误的情形，以推导其错误概率。在这 v 个错误中，我们将最可靠比特（MRB）部分中的错误数记为 v_m ，将最不可靠比特（LRB）部分中的错误数记为 v_n。因此，有:

$$v = v_m + v_n. \tag{10}$$

我们将 $P_{e_v}(v_m, v_n)$ 表示为与v_m 最可靠比特部分中的错误以及最不可靠比特部分中的 v_n 错误相关的概率。因此， P_{e_v} 可表示如下:

$$P_{e_v} = \sum_{v_m=1}^{v} P_{e_v}(v_m, v_n). \tag{11}$$

现在我们来推导 $P_{e_v}(v_m, v_n)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
P_{e_v}(v_m, v_n) = & \left(\sum_{j_1=d+1}^{n-v_m+1} \sum_{j_2=j_1+1}^{n-v_m} \cdots \sum_{j_{v_m}=j_{(v_m-1)}+1}^{n} \bar{q}_{j_1} \bar{q}_{j_2} \cdots \bar{q}_{j_{v_m}} \right) \\
& \left(\sum_{k_1=1}^{d} \sum_{k_2=k_1+1}^{d-1} \cdots \sum_{k_{v_n}=k_{(v_n-1)}+1}^{d-v_n+1} \bar{q}_{k_1} \bar{q}_{k_2} \cdots \bar{q}_{k_{v_n}} \right) \\
& \left(\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq j_1, j_2, \cdots j_{v_m}, \\ v \neq k_1, \cdots k_{v_n}}}^{n} (1-\bar{q}_v) \right), \\
\leq & \left(\binom{n-d}{v_m} \bar{q}_{d+1} \bar{q}_{d+2} \cdots \bar{q}_{d+v_m} \right) \\
& \left(\binom{d}{v_n} \bar{q}_1 \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_{v_n} \right) \left((1-\bar{q}_n)^{n-v} \right), \quad \text{（使用(5)）} \\
\leq & \left(\binom{n-d}{v_m} (\bar{q}_{d+1})^{v_m} \right) \\
& \left(\binom{d}{v_n} (\bar{q}_1)^{v_n} \right) \left((1-\bar{q}_n)^{n-v} \right), \quad \text{（使用 (4)）} \\
\leq & \binom{n-d}{v_m} \binom{d}{v_n} (\bar{q}_{d+1})^{v_m} (\bar{q}_1)^{v_n} (1-\bar{q}_n)^{n-v}.
\end{aligned}
$$

将（12）代入（11）后，我们得到：

$$
P_{e_v} \leq \sum_{v_m=1}^{v} \binom{n-d}{v_m} \binom{d}{v_n} (\bar{q}_{d+1})^{v_m} (\bar{q}_1)^{v_n} (1-\bar{q}_n)^{n-v}. \tag{13}
$$

4) 推导 $\bar{q}_1$, $\bar{q}_{d+1}$ 和 $\bar{q}_n$

请注意，(13) 中的上界取决于$\bar{q}_1$, $\bar{q}_{d+1}$和 $\bar{q}_n$ 的值。要推导这些值的表达式，我们必须深入研究相关的有序统计。

设连续随机变量 Y 的概率密度函数（概率密度函数）为 $f(Y)$，累积分布函数（累积分布函数）为 $F(Y)$。令 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 表示一个随机样本，并令 $(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)})$ 表示按升序排列的相应样本，使得 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \cdots < Y_{(n)}$。 r^{th} 次序统计量 $Y_{(r)}$ [92] 的概率密度函数可表示为：

$$
f_{Y_{(r)}} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(y)]^{r-1} [1-F(y)]^{n-r} f(y). \tag{14}
$$

现在定义 $a = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$，并令 Y_i 由 ρ_i表示，其中增益 $\rho_i = h_i^2 \bar{\rho}_c$ 表示瞬时信噪比，且服从指数分布。代入相应的累积分布函数 $F(Y)$ 和概率密度函数 $f(y)$ 代入 (14)，得到：

$$
\begin{aligned}
f_{Y_{(r)}} &= a \left(1 - e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}}\right)^{r-1} \left(e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}}\right)^{n-r} \left(\frac{1}{\bar{\rho}_c} e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}}\right), \\
&= \frac{a}{\bar{\rho}_c} \left(e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}}\right)^{n-r+1} \left(1 - e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}}\right)^{r-1}, \\
&= \frac{a}{\bar{\rho}_c} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (-1)^m e^{-\frac{my}{\bar{\rho}_c}} e^{-\frac{y(n-r+1)}{\bar{\rho}_c}}, \\
&= \frac{a}{\bar{\rho}_c} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (-1)^m e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}(n-r+1+m)}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

为确定 $\bar{q}_r$，我们使用 (15) 计算其期望。由此得到以下表达式：

$$
\begin{aligned}
\bar{q}_r &= \int_0^\infty \frac{a}{\bar{\rho}_c} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (-1)^m e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}(n-r+1+m)} e^{-y} dy, \\
&= \int_0^\infty \frac{a}{\bar{\rho}_c} \sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} (-1)^m e^{-\frac{y}{\bar{\rho}_c}(n-r+1+m+\bar{\rho}_c)}, \\
&= a \left(\sum_{m=0}^{r-1} \binom{r-1}{m} \left(\frac{-1^m}{n-r+1+m+\bar{\rho}_c} \right) \right), \\
&= \frac{a(r-1)!}{\prod_{k=0}^{r-1}(\bar{\rho}_c + n - k)}, \\
&= \frac{(n!/(n-r)!)}{\prod_{k=0}^{r-1}(\bar{\rho}_c + n - k)}, \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{r-1}(n-j)}{\prod_{k=0}^{r-1}(\bar{\rho}_c + n - k)}, \\
&= \frac{{}^nP_r}{\prod^{r}{}_{k=0}(\bar{\rho}_c + n - k)}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

将数值 $r = 1, r = (d+1)$ 和 $r = n$代入 (16)，得到

$$
\bar{q}_1 = \frac{n}{n + \bar{\rho}_c}. \tag{17}
$$

$$
\bar{q}_{d+1} = \frac{{}^nP_{d+1}}{\prod_{k=0}^{d}(\bar{\rho}_c + n - k)}. \tag{18}
$$

$$
\bar{q}_n = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(\bar{\rho}_c + n - k)}. \tag{19}
$$

5) 推导 $\mathbf{P_{e_v}(1 \leq v \leq d)}$

将方程 (17)、(18) 和 (19) 代入 (13)，即可得到：

$$
\begin{aligned}
P_{e_v} \leq & \sum_{v_m=1}^{l} \binom{n-d}{v_m} \binom{d}{v_n} \left(\frac{{}^nP_{d+1}}{\prod_{k=0}^{d}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{v_m} \\
& \left(\frac{n}{n + \bar{\rho}_c} \right)^{v_n} \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{n-v}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

B. $P_{e_{(d+1)}}$ **的推导：**

当接收字中的错误数超过 $d = (d_{\min} - 1)$ 的限制时，就会出现这种情况。The

所提出的解码器能够纠正最多 d 错误，因为在解码过程中最多允许发生 $d = (d_{\min} - 1)$ 次翻转。在此类情况下， ρ_i 值是无序的，遇到 $d_{\min}$ 个或更多错误的概率可以表述为

$$P_{e_{(d+1)}} = \sum_{m=d_{\min}}^{n} \binom{n}{m} \bar{q}^m (1-\bar{q})^{n-m}. \tag{21}$$

此处， $\bar{q}$ 表示与无序的 ρ_i 值相关的平均比特错误概率。用平均信噪比表示时， $\bar{q}$ 可写为:

$$\bar{q} = \mathbf{E}_\rho \left[Prob\left\{ n \geq \rho | \rho \right\} \right] = \mathbf{E}_\rho \left[Q\left(\sqrt{2\rho} \right) \right] \leq \frac{1}{1+\bar{\rho}_c}. \tag{22}$$

现在，我们通过应用切尔诺夫上界 [91], , 并对 ρ 的分布取平均，来表示 $\bar{q}$ 的上界。将（22）代入（21）后，可得:

$$P_{e_{(d+1)}} = \sum_{m=(d+1)}^{n} \binom{n}{m} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^m \left\{ \frac{\bar{\rho}_c}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n-m}. \tag{23}$$

现在，我们可以将（20）和（23）代入（3），从而得到（24），以此确定总平均错误概率的上界。公式（24）所示的上界较松，但给出了相同的分集阶数。

C. 分集翻转译码器的分集阶数

现在，我们来确定 DFD 的分集阶数。

定理 1:

DFD 达到分集阶数 $d_{\min}$ ，对于二进制线性分组码 $\mathscr{C}(n,k)$ 其最小汉明距离为 $d_{\min}$。

证明:

参考方程（24），令

$$\mathscr{A} = \sum_{v=1}^{d} \sum_{v_m=1}^{v} \binom{n-d}{v_m} \binom{d}{v_n} \left(\frac{{}^{n}P_{d+1}}{\prod_{k=0}^{d}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{v_m} \left(\frac{n}{n+\bar{\rho}_c} \right)^{v_n} \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{n-v} \tag{25}$$

$$\mathscr{B} = \sum_{m=(d+1)}^{n} \binom{n}{m} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^m \left\{ \frac{\bar{\rho}_c}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n-m}$$

$$\mathscr{B} = \left[\binom{n}{d+1} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{(d+1)} \left\{ \frac{\bar{\rho}_c}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n-(d+1)} \right] + \left[\binom{n}{d+2} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{(d+2} \left\{ \frac{\bar{\rho}_c}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n-(d+2)} \right] + \cdots \cdots \cdots + \left[\binom{n}{n} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n} \right]. \tag{26}$$

于是，方程（24）可写为

$$P_{FD}(\mathscr{C}) = \mathscr{A} + \mathscr{B}. \tag{27}$$

根据分集阶数的定义，如 [23]inthelimit(27) 所述，可表示为

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\bar{\rho}_c \to \infty} \frac{-\log[P_{FD}(\mathscr{C})]}{\log[\bar{\rho}_c]} \\ &= \lim_{\bar{\rho}_c \to \infty} \frac{-\log[\mathscr{A} + \mathscr{B}]}{\log[\bar{\rho}_c]}. \end{aligned}$$

但是，作为 $\bar{\rho}_c \to \infty$，术语 $\mathscr{A} \to 0$，因此:

$$D = \lim_{\bar{\rho}_c \to \infty} \frac{-\log[\mathscr{B}]}{\log[\bar{\rho}_c]}.$$

当 $\bar{\rho}_c \to \infty$ 时，指数项 $(d+1)$ 开始在项 B（方程（26））中占据主导地位。因此我们有

$$\begin{aligned} D &= d + 1 \\ &= d_{\min}. \end{aligned} \tag{28}$$

■

D. 计算复杂度分析

DFD 结合了低计算复杂度与分集保持的优势。它依赖于一个以 **fpv**表示的完整翻转向量列表，其中总共包含 $2^d - 1$ ($2^{d_{\min}-1} - 1$) 个翻转向量。DFD 的计算复杂度直接受码 $\mathscr{C}(n,k)$ 的最小距离（$d_{\min}$）影响。通过在列表 Φ中进行系统搜索，该算法旨在通过依次评估每个向量来识别合适的翻转向量。即使在最坏情况场景下，即算法1 检查 Φ 中的最后一个翻转向量时，DFD 仍能保持其效率，因为其最坏情况复杂度阶为 $2^{d_{\min}-1} - 1$。因此，该技术兼具低计算复杂度和保持分集的双重优势。

表 III 详细比较了各种解码器的最大复杂度。

V. 仿真结果 - DFD

为评估所提出的DFD 的性能，考虑了几个示例。仿真在单位方差的非相关瑞利衰落信道中进行，并始终采用二进制相移键控调制。

为说明DFD技术的有效性，已生成每个消息比特的误码率 (误码率) 与信噪比 (E_b/N_0) 曲线图。应注意， $\bar{\rho}_c$ 和

$$P_{FD}(\mathscr{C}) \leq \sum_{v=1}^{d} \sum_{v_m=1}^{v} \binom{n-d}{v_m} \binom{d}{v_n} \left(\frac{{}^{n}P_{d+1}}{\prod_{k=0}^{d}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{v_m} \left(\frac{n}{n+\bar{\rho}_c} \right)^{v_n} \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(\bar{\rho}_c + n - k)} \right)^{n-v} + \sum_{m=(d+1)}^{n} \binom{n}{m} \left\{ \frac{1}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{m} \left\{ \frac{\bar{\rho}_c}{1+\bar{\rho}_c} \right\}^{n-m} \tag{24}$$

表 III：解码器复杂度：比较研究

解码器	最大复杂度
Chase-1	$\binom{n}{\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor}$×二进制解码器复杂度
Chase-2	$2^{\lfloor \frac{d_{min}}{2} \rfloor}$×二进制解码器复杂度
Chase-3	$\lfloor (\frac{d_{min}}{2}) + 1 \rfloor$× 二进制解码器复杂度
OSD	$\mathcal{O}(k^l)$
ISD	$\mathcal{O}(k^l)$
GRAND	b （阈值）
ORBGRAND	b （阈值）
所提出的 DFD	$2^{d_{min}-1} - 1$

E_b/N_0 与 $E_b/N_0 = \bar{\rho}_c \times code\ rate$相关。为了达到数量级为 10^{-a}($a \in \mathbb{Z}^+$)的目标误码率，误码率仿真图执行了 $10^{(a+2)}$ 比特的传输。

接下来的章节将展示所提出的分集翻转译码器（ DFD）在各种码类型中以较低复杂度实现分集的多样能力，从而确立其普适性。此外，在下一小节中，我们将对分集翻转译码器在性能与复杂度方面的表现，与现有译码方法进行全面比较。

A. 仿真：*DFD* 保持分集

为了展示所提出的 DFD 的性能和分集保持能力，针对四种特定的码给出了仿真结果：奇偶校验码、汉明码、BCH码和 Polar码。然而，需要强调的是，DFD 适用于所有类型的线性码。

- **示例-1：-奇偶校验码：**我们的初步评估集中于奇偶校验（PC）码，其最小距离为2。当接收机出现奇偶校验不匹配时，DFD技术通过翻转与最低信道状态信息（信道状态信息）相关联的最不可靠比特来发挥作用。表 IV提供了仿真中所采用的PC码的详细参数。

  图2给出了PC码(4,3) 和PC码(12,11) 的误码率曲线作为代表性示例，并将其与硬判决译码（HDD）和软判决译码（SDD）进行了基准比较。在高信噪比水平下，DFD曲线的斜率与SDD曲线相一致，表明其具备与软判决译码等效的分集能力。该观察结果清楚地表明，如图2所示，DFD技术为PC码实现了 2 的分集阶数

在瑞利衰落信道中运行。此外，图 3 扩展了我们对 DFD 的性能评估，并将其与 PC(64,63)、(128,127) 和 (256,255) 码的硬判决译码进行比较。这些结果表明，DFD 对 PC码实现了二阶分集。

值得注意的是，PC码的最小距离为 $d_{min} = 2$，因此不具备纠错能力（t = 0）。因此，PC码主要用于错误检测。然而，尽管具有 $d_{min} = 2$，所提出的 DFD技术在衰落环境中仍能够以较高概率纠正单个错误。

- **示例2：汉明码：**接下来，我们考察DFD技术在汉明码中的性能。汉明码的最小距离为3。在这种情况下，根据算法1，选取接收字中与两个最低CSI值对应的两个比特进行翻转。翻转这两个比特共有三种可能的方式，直至得到有效码字。仿真所用汉明码的参数见表 V。

  图4对比了DFD、HDD和SDD在(7，4) 和(15，11) 汉明码中的性能。在高信噪比（SNR）下，对于(7，4) 和(15，11) 汉明码，DFD曲线和SDD曲线的斜率相同，表明其分集阶数为3，与软判决译码的分集阶数相同。此外，图中还展示了(127，120) 和(255，247) 汉明码的硬判决译码曲线和DFD曲线，进一步证实了DFD技术在汉明码中可实现3阶分集。

- **示例-3：BCH码：**现在我们将注意力转向BCH码。相应BCH码的仿真参数如表VI所示。

  图5展示了应用于BCH码的DFD技术的性能。该图对应用于(15,7) BCH码的DFD技术、HDD和SDD进行了比较分析。在高信噪比值下，DFD呈现出与SDD曲线相同的斜率，表明其分集阶数等于 $d_{\min}$（最小距离）。此外，该图还进一步给出了DFD以及硬判决辅助(255,239)、(63,51)和(31,21) BCH码的曲线，从而 conclusively confirms that 所提出的 DFD achieves a diversity order of $d_{\min}$。

  值得强调的是，无线体域网（WBAN）的IEEE 802.15.6标准 [93] 具有

表 IV：PC码的参数

(n, k)	$\mathbf{d}_{\min}$	纠正能力,t	最大值 of 可纠正的翻转译码器错误 No.
(4,3)	2	0	1
(12,11)	2	0	1
(64,63)	2	0	1
(128,127)	2	0	1
(256,255)	2	0	1

表V：汉明码的参数

(n, k)	$\mathbf{d}_{\min}$	纠错能力，t	最大 of 可纠正使用翻转译码器时的错误 No.
(7,4)	3	1	2
(15,11)	3	1	2
(127,120)	3	1	2
(255,247)	3	1	2

选用短BCH码，具体而言，其码长分别为 $n = 63$ 和 $n = 31$。所提出的 DFD 在瑞利衰落信道中的性能优于经典的 Peterson算法，同时保持分集。此外，需要强调的是，与 Peterson算法相比，DFD 技术展现出更低的计算复杂- 度，这一点将在下文讨论中进一步阐述。Peterson算法和 Berlekamp-Massey算法（BM）通常用于 BCH码的译码。Peterson算法的最坏情况复杂度为 $2t(n-1)^2 + \Theta(t^3)$，而 Berlekamp-Massey算法（BM）的最坏情况复杂度为 $2t(n-1)^2 + \Theta(t^2)$ [94]。相比之下，所提出的 DFD 的最坏情况复杂度表示为 $2^{(d_{min}-1)} - 1$，显著更低。

• **示例4：Polar码：**最后，对 Polar码 系列进行了研究，以评估 DFD 的性能。选取了多种 Polar码 进行仿真，仿真参数见表VII。Polar码 的最小距离($d_{最小}$)使用 MATLAB 中的 $gfweight()$ 函数确定。所提出的 DFD 的误码率性能如图 6 所示。有趣的是，Polar 码 $(128, 113)$、$(128, 106)$和(128,99) 具有相同的最小距离 $d_{最小} = 4$。此外，这些码的误码率曲线斜率相同，表明它们具有相同的 $d_{最小} = 4$ 分集。

值得注意的是，原始 GRAND技术 [53] 的性能与硬判决译码相当。相-比之下，所提出的 DFD 优于原始 GRAND

表VI：BCH码的参数

(n, k)	$\mathbf{d}_{\min}$	正在更正能力,t	最大值 of 可纠正的翻转译码器错误 No.
(15,7)	5	2	4
(31,21)	5	2	4
(63,51)	5	2	4
(255,239)	5	2	4

表VII：Polar码的参数

(n, k)	$\mathbf{d}_{\min}$	翻转译码器可纠正错误的最大数量
(128,120)	2	1
(128,113)	4	3
(128,106)	4	3
(128,99)	4	3

表 VIII：在非相关瑞利衰落信道中汉明码情况下 DFD 提供的编码增益

n	k	Code Rate (R)	E_b/N_0 时的误码率为		编码增益在误码率为	
			10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}
7	4	0.57	19dB	22.2分贝	24.9分贝	31.8分贝
15	11	0.73	20.2分贝	23.6分贝	23.7分贝	30.4分贝
31	26	0.83	21.7分贝	25.2分贝	22.2分贝	28.8分贝
63	57	0.9	23.4分贝	26.8分贝	20.5分贝	27.2分贝
127	120	0.94	25dB	28.6分贝	18.9分贝	25.4分贝

在高信噪比下，同时保持极低的计算复杂度，如稍后在图 9 中所示。

B. 仿真：***DFD***性能分析

为评估所提出的 DFD 的性能，针对汉明码和 BCH 码，在不同码长和码率下，误码率为 10^{-6} 时所获得的编码增益分别列于表VIII和表IX中。图7展示了 BCH 码和汉明码在不同码长和码率下编码增益与码率的关系曲线。

C.基于仿真的比较分析：所提出的 ***DFD*** 与现有技术的性能与复杂度对比

为了评估所提出的分集翻转译码器相较于现有技术的性能与复杂度，本文选取 BCH (127,113) 码作为案例研究。图 8 展示了误码率性能。

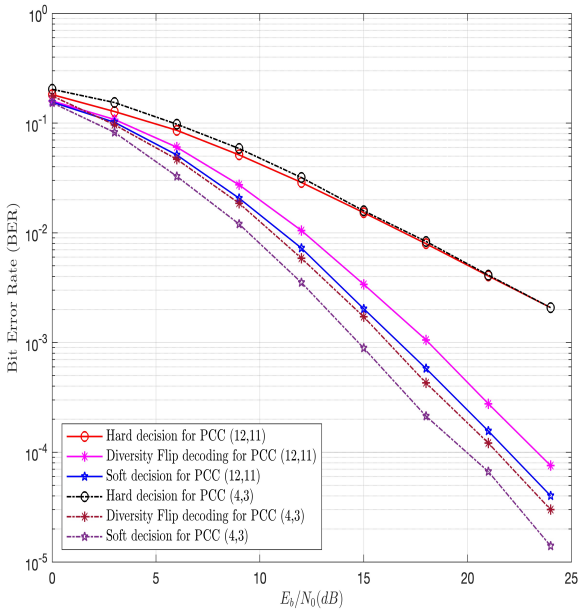


图 2：使用所提出的 DFD 对各种短分组码的误码率。

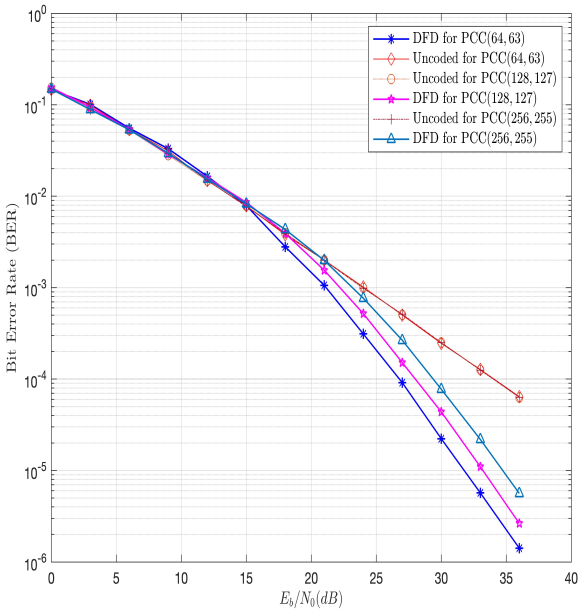


图 3：使用所提出的 DFD 对各种长分组码的误码率。

DFD解码器与几种现有方法之间的比较，例如硬判决GRAND [54],软判决ORBGRAND [57]，带伪软信息的ORBGRAND [61],以及fading-GRAND [60]。在所有涉及GRAND 及其变体的仿真中，放弃比特值（ABB）被设置为 10^6。在fading-GRAND的背景下，阈值 Δ 通过指定 $m = -0.02165$ 和 $b = 0.7924$来确定，正如 [60]中所述。观察图8可知，对于 $E_b/N_o > 20$ 分贝，所提出的 DFD 的性能优于原始硬判决 GRAND。

GRAND 及其变体，例如ORBGRAND [58], fading-GRAND [60], 以及与伪软信息相关联的ORBGRAND [61] ，具有以下两个主要的复杂度贡献。首先，生成后续试探噪声序列会增加总体复杂度。其次，验证所获得的码字或计算伴随式方程所需的码本访问次数也会增加复杂度。相比之下，对于给定的最小距离 d_{min} 和码字长度 n，DFD 不需要生成下一个翻转向量，因为翻转向量集合已在接收机处可用。DFD 只涉及伴随式计算或码本查询，因此复杂度较低。因此，为便于比较DFD 与其他方法，本文在整个复杂度比较过程中均将码本查询次数纳入考虑。然而，GRAND 及其变体的实际总体复杂度高于本文结果中所展示的复杂度。

译码算法的复杂度取决于接收码字中错误的数量和位置。因此，译码器的总体复杂度会随信噪比值而变化。由于最坏情况复杂度决定了系统设计中的最大硬件规模和功耗，我们在图 9 中展示了最坏情况复杂度。结果清楚地表明，所提出的 DFD 的最坏情况复杂度显著低于其他方法。

图 10 展示了 DFD、GRAND 及其变体在误码率 (BER) 为 10^{-6} 时的编码增益与最坏情况复杂度之间的关系。可以看出，与原始硬判决 GRAND 相比，DFD 在复杂度低 4 个数量级的情况下，编码增益约高2 分贝。

为凸显 DFD 相较于其他方案的低复杂度，表 X 列出了各种解码器的复杂度百分比。这些复杂度是相对于 GRAND [53] 在误码率为 10^{-5} 时的复杂度计算得出的。无论考察最大（最坏情况）复杂度还是平均复杂度，DFD 的复杂度都显著低于其他解码器。

以硬判决译码方式著称的GRAND译码器，其性能不及所提出的 DFD；后者以适中的计算复杂度展现出更优的性能。尽管ORBGRAND（软判决译码器）、fading-GRAND以及依赖伪软信息的ORBGRAND相比于该

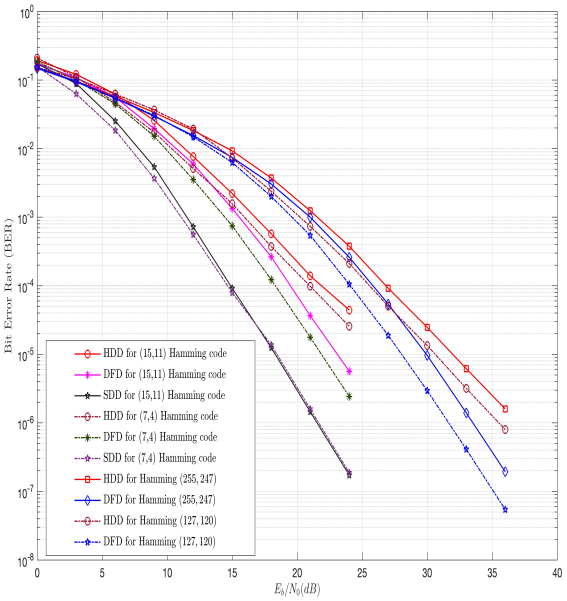


图4：使用所提出的 DFD 时各种汉明码的误码率。

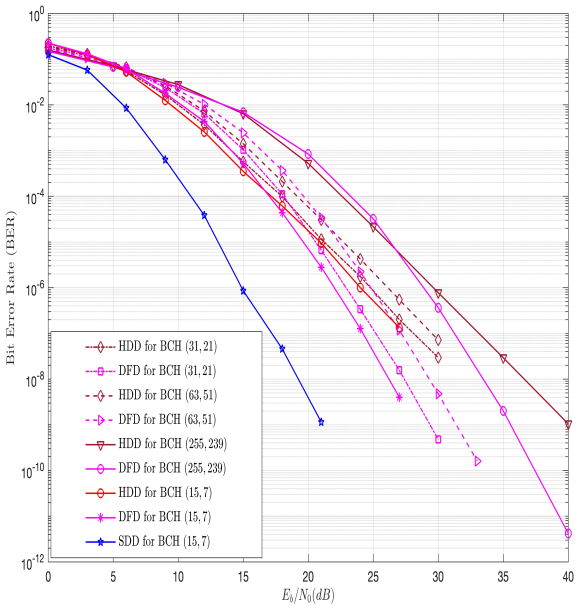


图5：使用所提出的 DFD 时各种 BCH 码的误码率。

DFD技术在低复杂度方面具有优势。因此，DFD 是轻量级实际应用的理想选择。

VI. 扩展多样性翻转译码器

第三节提出的分集翻转译码器在不同配置中仅翻转最不可靠的 $d_{min}-1$ 个比特，从而在衰落信道中保持分集阶数。本节介绍一种扩展多样性翻转译码器（EDFD），该译码器扩展了待翻转最不可靠比特的窗口。此外，在 EDFD 中，将与具有最小汉明重量的有效码字相对应的翻转向量选作最终错误向量，以获得译码码字。

设 ϵ 为 EDFD 的扩展窗口长度，并将翻转向量表示为 $\mathbf{fe^n_{pv}}$。此外，设翻转向量集合表示为 Φ_e，其定义如下：

$$\Phi_e = \left\{ \underline{\mathbf{fe}}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{pv}} \;\middle|\; \underline{\mathbf{fe}}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{pv}} = \left[\underline{\mathbf{fep}}^{\mathbf{d}+\epsilon}_{\mathbf{i}} \quad \underline{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}-\epsilon} \right] \right\} \quad (1 \le i \le d).$$

在此背景下，$\underline{\mathbf{fep}}^{\mathbf{d}+\epsilon}{}_{\mathbf{i}}$ 表示 EDFD 的翻转模式，其长度为 $d+\epsilon$，汉明重量为 i。例如，对于一个(7，4，3)汉明码，有 $d_{min}=3$，因此 $d=d_{min}-1=2$。随后，与 $\epsilon=1$ 相关联的翻转向量集合（记为 Φ_e）为说明如下：

$$\Phi = \{ \\ [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0], \\ \}$$

DFD 和 EDFD 的区别在于各自的翻转向量列表。EDFD 的译码过程与 DFD 相似，具体如下。首先，对信道状态信息（CSI）（记为 $\mathbf{h}$ ）进行排序，得到 $\mathbf{h_{sort}}$，以及其对应的置换函数 π_1。随后，将 π_1 应用于接收码字 $\mathbf{r}$ ，得到 $\mathbf{r_{sort}}$。$\mathbf{r_{sort}}$ 中的前 $(d+\epsilon)$ 位表示最不可靠比特（LRB），其余比特构成最可靠比特（MRB）。接着，从集合 Ψ_e 中选取初始翻转向量，并将其加到 $\mathbf{r_{sort}}$ 上，得到 $\mathbf{r_t}$。然后，将 π_1 的逆（记为 π_1^{-1}）应用于 $\underline{\mathbf{r_t}}$ ，以恢复 $\mathbf{r_o}$。随后，计算 $\mathbf{r_o}$ 的伴随式，以确定码字是否有效。如果得到非零伴随式，则通过从 Ψ_e 列表中选取下一个翻转向量来迭代该过程。持续迭代，直到得到零伴随式。得到零伴随式后，该过程终止，

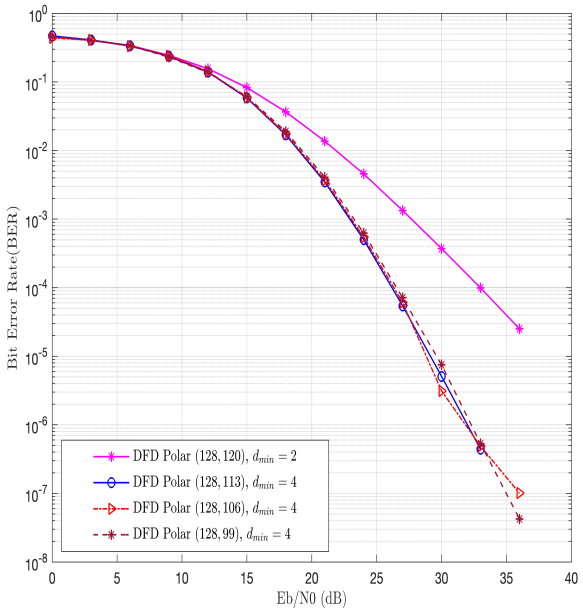


图 6：使用所提出的 DFD 的各种 Polar码的误码率。

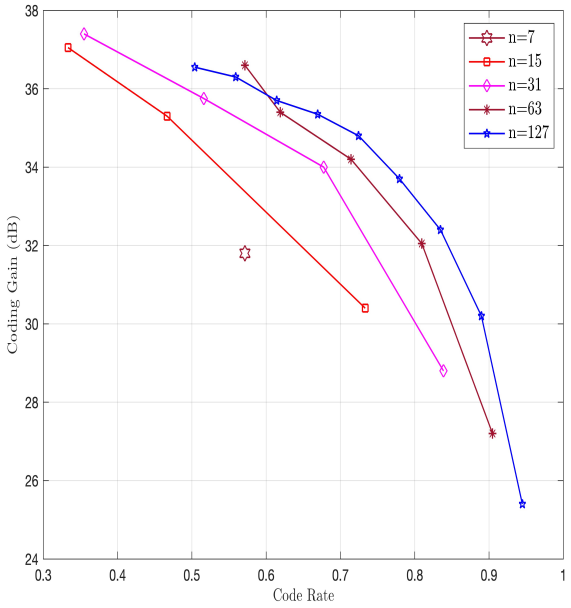


图7：在非相关瑞利衰落信道中，对于汉明码和 BCH 码，不同码长和码率下 DFD 在误码率为 10^{-6} 时的编码增益。

其中$\mathbf{r_o}$ 表示译码码字。EDFD技术在算法 2 中进行了形式化总结。

当 $\epsilon = 0$，1，2，3 时，(15,7,5)BCH码的EDFD翻转向量模式分别如图11、12、13和14所示。

VII. 仿真结果：EDFD

本节介绍了在与分集翻转译码器（DFD）相同的实验设置下，对扩展多样性翻转译码器（EDFD）进行的仿真结果。仿真在单位方差的瑞利衰落信道中进行，采用二进制相移键控（BPSK）调制。图15展示了在不同扩展窗口长度 ϵ下，将EDFD应用于BCH (15,7) 码时的误码率（BER）仿真结果。可以观察到，随着 ϵ值的增加，误码率性能得到提升。对于BCH(15,7)，EDFD在不同 ϵ 值下所提供的编码增益列于表XI中。图16展示了在 10^{-5} 的 E_b/N_0 处、不同 ϵ 值下EDFD编码增益的散点图。图17展示了不同 ϵ 值下EDFD的误码率性能与最坏情况复杂度之间的关系。根据所选 ϵ的不同，EDFD在不同复杂度下提供不同水平的误码率性能。

VIII. 结论与讨论

在误码率为 10^{-}和 10^{-6}时的编码增益（如表XII所详述）凸显了所提出的 DFD

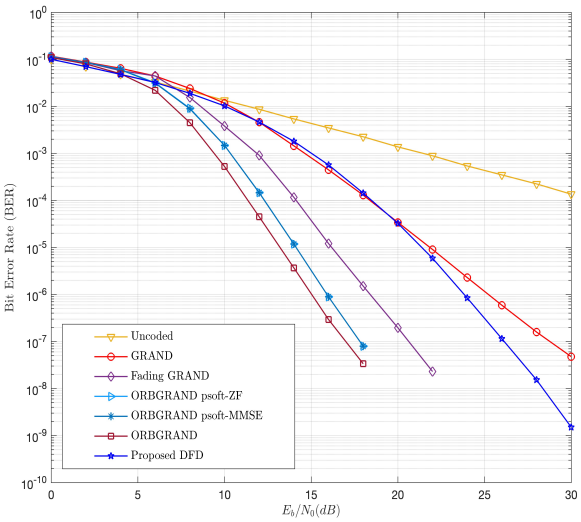


图 8：所提出的 DFD 与现有解码器的误码率比较：BCH (127，113)。

以及其他 BCH（127，113）码的解码器。具体而言，尽管其复杂度显著更低，所提出的 DFD 在GRAND [53] 的误码率 10^{-5} 和 10^{-6}下，分别展现出 0。6分贝和 1。4分贝的编码增益优势。

为了提升误码率性能，我们引入扩展分集翻转译码器（EDFD）。表XI de-

表IX：非相关瑞利衰落信道中 BCH码情况下 DFD 提供的编码增益

n	k	Code Rate (R)	E_b/N_0 在误码率为		编码增益 在误码率为	
			10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}
15	7	0.46	16.1分贝	18.7分贝	27.8分贝	35.3分贝
	5	0.33	15.2分贝	16.95分贝	28.7分贝	37.05分贝
31	21	0.67	17.8分贝	20dB	26.1分贝	34dB
	16	0.51	16.4分贝	18.25分贝	27.5分贝	35.75分贝
	11	0.35	14.9分贝	16.6分贝	29dB	37.4分贝
63	51	0.83	19.3分贝	21.95分贝	24.6分贝	32.05分贝
	45	0.9	17.6分贝	19.8分贝	26.3分贝	34.2分贝
	39	0.9	16.7分贝	18.6分贝	27.2分贝	35.4分贝
	36	0.9	15.7分贝	17.4分贝	28.2分贝	36.6分贝
127	113	0.89	21.4分贝	23.8分贝	22.5分贝	30.2分贝
	106	0.83	19.4分贝	21.6分贝	24.5分贝	32.4分贝
	99	0.78	18.2分贝	20.3分贝	25.7分贝	33.7分贝
	92	0.72	17.4分贝	19.2分贝	26.5分贝	34.8分贝
	85	0.67	17.05分贝	18.65分贝	26.85分贝	35.35分贝
	78	0.61	16.8分贝	18.3分贝	27.1分贝	35.7分贝
	71	0.56	16.15分贝	17.7分贝	27.75分贝	36.3分贝
	64	0.5	16.1分贝	17.45分贝	27.8分贝	36.55分贝

表 X：比较分析：BCH(127, 113)

解码器	当误码率为 10^{-5}		
	E_b/N_0	百分比 of 最大值 复杂性 恕我直言 到 GRAND	百分比 平均值 复杂性 谨致敬意 至 GRAND
GRAND [53]	22 分贝	100%	100%
衰落 GRAND [60]	16.2 分贝	969。9321%	272.3312%
ORBGRAND psoft-ZF [61]	14.1 分贝	47.895%	32.1709%
ORBGRAND 软输入软输出最小均方误差 [61]	14.1 分贝	59.7907%	32.1709%
ORBGRAND [58]	13.2 分贝	47.895%	44.4365%
所提出的 DFD	**21.4** 分贝	**0.0146**%	**3.6619**%

描绘了 EDFD 所带来的编码增益。值得注意的是，

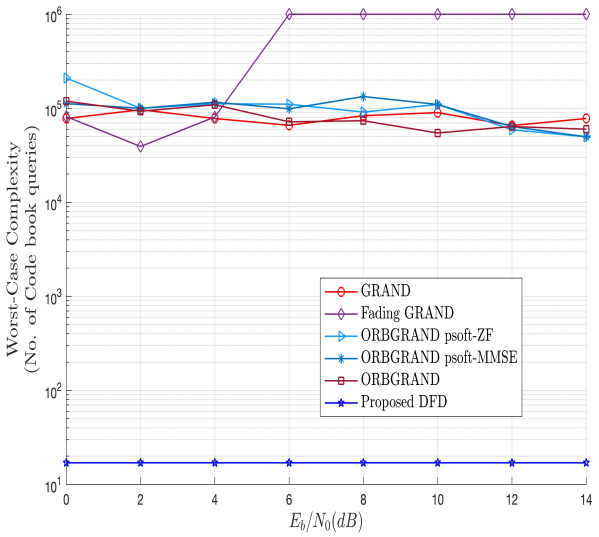


图 9：所提出的 DFD 与现有解码器在码本查询次数方面的最坏情况复杂度比较： $BCH(127,113)$。

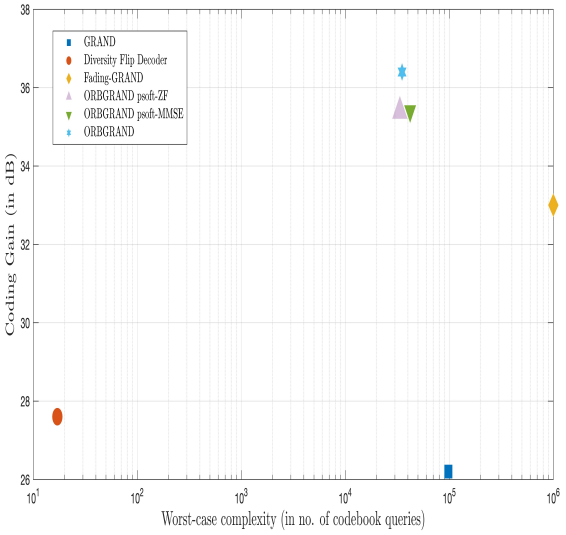


图10：误码率为 10^{-6} 时的编码增益与最坏情况复杂度散点图：BCH(127,113)

请注意，随着 ϵ 值的增加，EDFD 提供的误码率性能会有所改善。

总之，所提出的 DFD 展现出若干关键特性，使其成为一种极具吸引力的译码解决方案：

- **通用性：**适用于各种线性码。

算法 2：扩展多样性翻转译码器

输入：

- Φ_e：EDFD 的翻转向量列表。
- $\underline{\mathbf{r}}$：接收码字。
- $\mathbf{h}$：信道状态信息向量。
- $\overline{\mathbf{H}}$
- ϵ：扩展窗口长度。
- $d_{\text{分钟}}$
- n_{Φ_e}：EDFD 的翻转向量总数。

输出：

- $\underline{\mathbf{copt}}_o$ ：译码码字。 1 Sy =rHT；2 if (sum(Sy) > 0) then3 [hsort π_1] = sort(h)；4 rsort = π_1(r)；5 Sy =rHT；6 $le = 1$；// 循环计数器初始化 7 while (sum(Sy) > 0) & ($le \leq n_{\Phi_e}$) do 8 fepv = $\Phi_e(le)$；9 rt = rsort ⊕fepv；10 ro = π_1^{-1}(rt)；11 Sy = roHT；12 $le = le + 1$；13 end 14 else 15 ro =r 16 end 17 if (sum(Sy) == 0) then 18 coopt =ro；19 else 20 coopt =r；21 end

表XI：EDFD 在非相关瑞利衰落信道中相较于 BCH(15,7) 的编码增益

ϵ	E_b/N_0 在误码率为		编码增益 误码率为	
	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}
0	11.2分贝	16.6分贝	12.8分贝	27.4分贝
1	10.15分贝	15dB	13.85分贝	29dB
2	9.3分贝	14.2分贝	14.75分贝	29.8分贝
3	8.8分贝	13.8分贝	15.2分贝	30.2分贝

- **在衰落信道中保持分集：**DFD 能够在严苛的衰落信道条件下保持分集阶数。
- **与现有方法相比复杂度显著降低：** 所提出的 DFD 带来了显著-

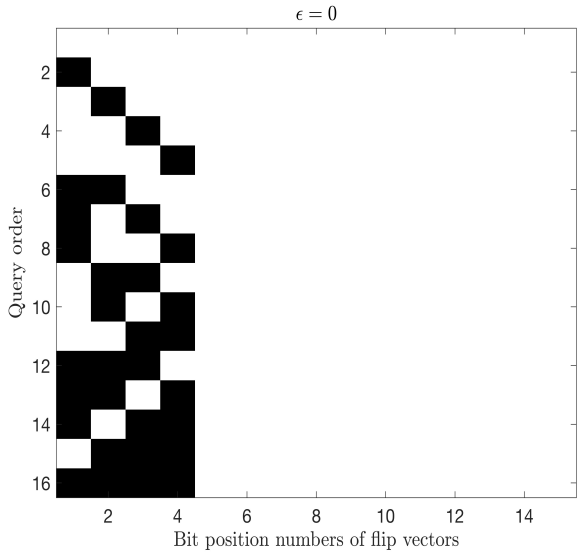


图 11：带有 $\epsilon = 0$的 EDFD 的翻转向量模式：BCH（15, 7）

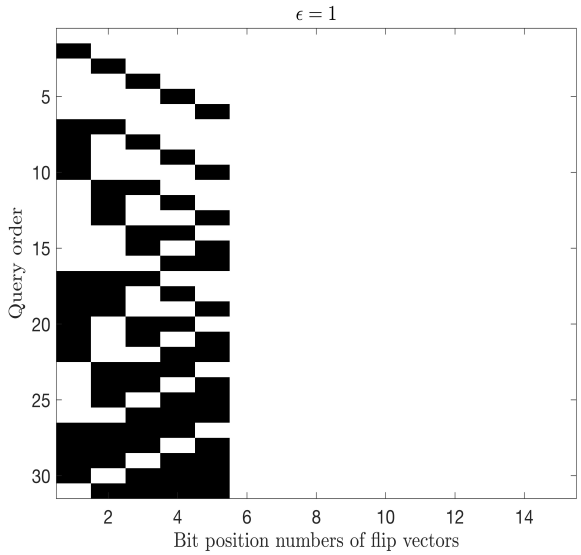


图 12：带有 $\epsilon = 1$的 EDFD 的翻转向量模式：BCH（15, 7）

复杂度显著低于现有方法，使其非常适合低复杂度应用。

在未来的研究中，我们将把 DFD 应用于经典编码场景和量子编码场景中的各种色散高多普勒系统场景。

致谢

作者感谢M. Medard 教授和 K. Duffy 教授就本文进行的宝贵讨论。

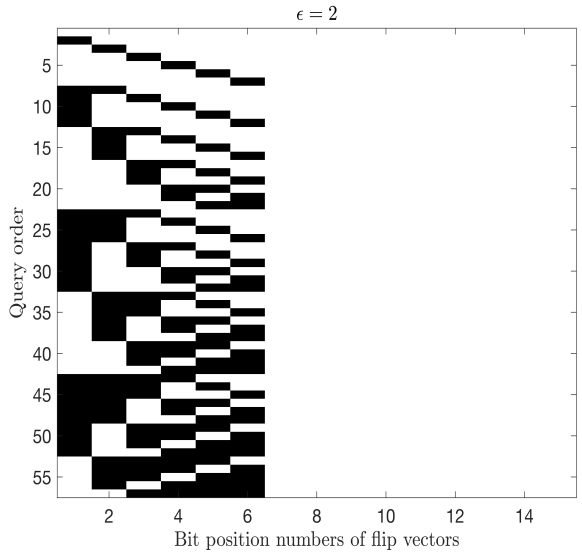


图13：EDFD 的翻转向量模式，$\epsilon = 2$：BCH(15, 7)

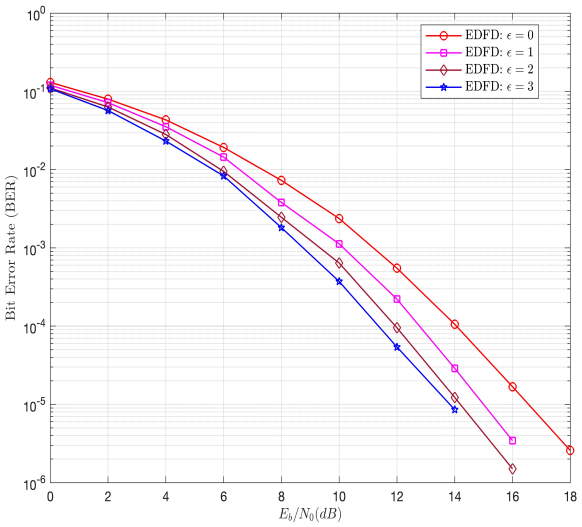


图15：使用 EDFD 进行误码率仿真：BCH(15,7)

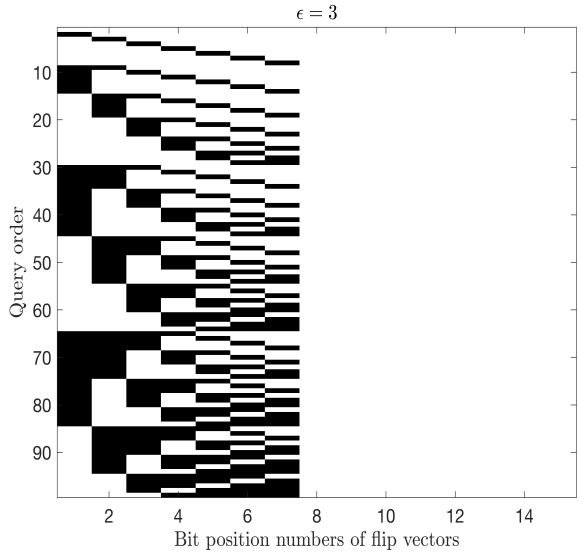


图14：EDFD 的翻转向量模式，$\epsilon = 3$：BCH(15, 7)

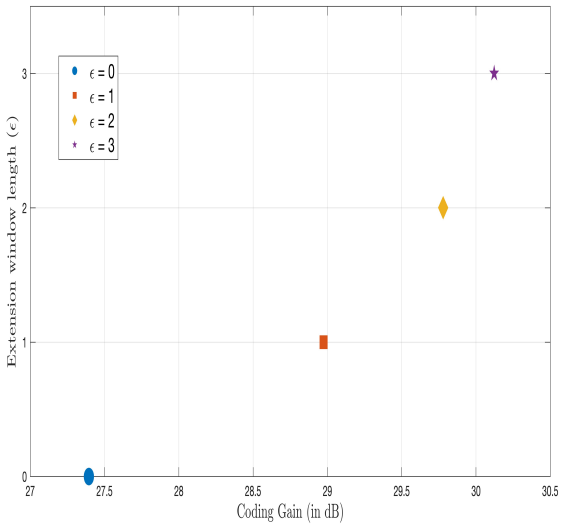


图16：不同扩展窗口长度 (ϵ) 下，EDFD 在误码率为10^{-5} 时编码增益的散点图：BCH(15,7)

L. Hanzo谨此感谢工程与物理科学研究委员会项目EP/W016605/1、EP/X01228X/1、EP/Y026721/1、EP/W032635/1和EP/X04047X/1，以及欧洲研究委员会QuantCom高级研究员资助（资助编号789028）提供的资助。

参考文献

[1] J. Huang、D. Fang、Y. Qian 和 R. Q. Hu，《车联网通信安全与隐私的最新进展和挑战》，*IEEE*《开放式车辆技术期刊》，第1卷，第244–266页，2020年。[2] A. Hajisami、J. Lansford、A.Dingankar和J. Misener，“关于LTE-V2X直连通信的教程”，*IEEE*《开放式车辆技术期刊》，第3卷，第388–398页，2022年。[3] A. Molina-Galan、L. Lusvarghi、B. Coll-Perales、J. Gozalvez和M. L.Merani，“重新评估对第五代移动通信技术 NR 车联网模式2的影响”，《*IEEE*车辆技术汇刊》，第1–15页，2023年。[4] S. Chen、J. Hu、Y. Shi、Y. Peng、J. Fang、R.Zhao和L.Zhao，“LTE系统和第五代移动通信技术支持的车联万物（V2X）服务”，《*IEEE*通信标准杂志》，第1卷，第2期，第70–76页，2017年。[5] Z.Li、T. Yu、R. Fukatsu、G. K. Tran和K. Sakaguchi，“迈向安全自动驾驶：软件定义动态毫米波车联网的设计与概念验证实现”，*IEEE*《开放式车辆技术期刊》

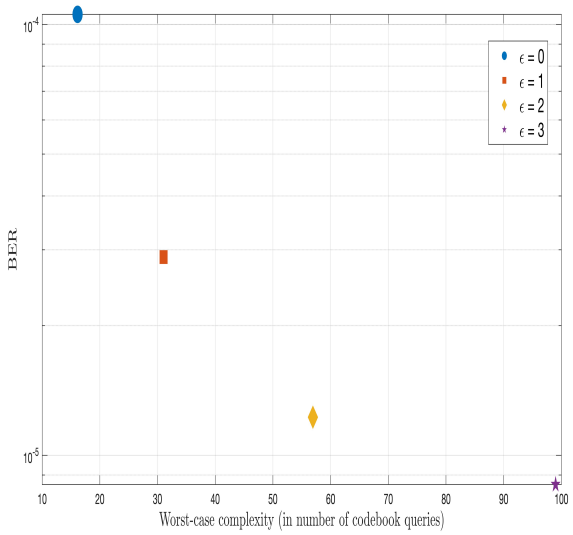


图 17：不同扩展窗口长度（ϵ）下，EDFD 的误码率（在 E_b/N_0 的 14分贝处）与最坏情况复杂度（以码本查询次数计）的散点图：BCH(15,7)

表XII：BCH(127,113)在不相关瑞利衰落信道上的不同解码器的编码增益

解码器	E_b/N_0 在误码率为		编码增益 在误码率为	
	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}
未编码	41.4分贝	51.4分贝	0dB	0dB
GRAND [53]	22dB	25.2分贝	19.4分贝	26.2分贝
衰落 GRAND [60]	16.2分贝	18.4分贝	25.2分贝	33dB
ORBGRAND-psoft [61]	14.1分贝	16dB	27.3分贝	35.4分贝
ORBGRAND [58]	13.2分贝	15dB	28.2分贝	36.4分贝
所提出的 DFD	21.4分贝	23.8分贝	20dB	27.6分贝

车载技术，第2卷，第78–93页，2021年。[6] S.-Y.Lien和H.-L.Tsai，“免许可频谱上的3GPP V2X：性能分析与最优信道接入策略”，《*IEEE*车辆技术汇刊》，第70卷，9243，2021年9月，9230无。第–页。[7] 3 GPP TR 22.185，v.14.2.1，“V2X 服务的服务要求”，https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2989，2016年11月。[8] 3 GPP，“第三代合作伙伴计划”，https://www.3gpp.org/。[9] Z.Ma，M.Xiao，Y. Xiao，Z.Pang，H. V.Poor和B.Vucetic，“物联网的高可靠低时延无线通信：挑战、基础与赋能技术”，*IEEE*物联网期刊，第6卷，第5期，第7946–7970页，2019年。[10] O. A. Amodu和M. Othman，“机器间通信：机遇概述”，计算机网络，第145卷，第255–276页，2018年。[11] C. Bockelmann，N. Pratas，H. Nikopour，K.Au，T. Svensson，C. Ste- fanovic，P. Popovski和A. Dekorsy，“大规模机器类型通-

IEEE通信杂志，第54卷，第9期，第59–65页，2016年。[12] G. Durisi、T. Koch和P. Popovski，“利用短数据包实现大规模、超可靠和低时延无线通信”，IEEE会议录，第104卷，第9期，第1711–1726页，2016年。[13] P.Nouri、H. Alves、M.A.Uusitalo、O. AlcarazL´opez和M. Latva- aho，“面向超越第五代移动通信技术的机器型无线通信赋能技术：通过分集在严格时限下实现超可靠低时延通信”，计算机网络，第174卷，第107227页，2020年。[14] Monteiro，Francisco A.、L´opez,OnelL.A.和Alves,Hirley，“具有统计信道状态信息波束成形的大规模无线能量传输”，IEEE信号处理精选主题期刊，第15卷，第5期，第1169–1184页，2021年。[15] M. Shirvanimoghaddam、M.S. Mohammadi、R.Abbas、A. Minja、C. Yue、B. Matuz、G. Han、Z. Lin、W. Liu、Y.Li、S.Johnson和B. Vucetic，“超可靠低时延通信的短分组长度码”，IEEE通信杂志，第57卷，第2期，第130–137页，2019年。[16] R.C.Bose和D. K. Ray-Chaudhuri，“关于一类纠错二元群码”，信息与控制，第3卷，第1期，第68–79页，1960年。[17] P. Pfeifer和H.T. Vierhaus，“工业应用无线通信系统中的前向纠错”，载于2017年信号处理：算法、架构、安排与应用（SPA），2017年，第14–14页。[18] M. Bossert、R.Schulz和S.Bitzer，“BCH码的硬判决与软判决译码”，IEEE信息论汇刊，第68卷，第11期，第7107–7124页，2022年。[19] M.Baldi、F.Chiaraluce等，“多媒体传输中BCH码和RS码置信传播译码的简单方案”，国际数字多媒体广播杂志，第2008年卷，2008年。[20] G. Liva、L.Gaudio、T. Ninacs和T. Jerkovits，“短分组的码设计：综述”，arXiv预印本 arXiv:1610.00873，2016年。[21] A. Becker、A.Joux、A.May和A. Meurer，“在 $2^{n/20}$中译码随机二元线性码： $1+1=0$ 如何改进信息集译码”，载于密码学进展——EUROCRYPT 2012，D.Pointcheval和T. Johansson编。柏林、海德堡：Springer BerlinHeidelberg，2012年，第520–536页。[22] Chatzigeorgiou，Ioannis和Monteiro，FranciscoA.，“块衰落信道上高阶调制的符号级GRAND”，IEEE通信快报，第27卷，第2期，第447–451页，2023年。[23] L. Zheng和D.Tse，“分集与复用：多天线信道中的基本权衡”，IEEE信息论汇刊，第49卷，第5期，第1073–1096页，2003年。[24] A.A. Patel、A. M.Ahmed、B.P.Sai和M. Z.A. Khan，“二阶分集的奇偶校验码”，IETE技术评论，第0卷，第0期，第1–9页，2023年。[25] J. Wolf，“利用网格对线性分组码进行高效最大似然译码”，IEEE 信息论汇刊，第24卷，第1期，第76–80页，1978年。[26] H. Tanaka和K. Kakigahara，“通过利用擦除信息选择可能的码字来简化相关译码（通信）”，IEEE信息论汇刊，第29卷，748，1983 5，743第。页–。[27] G. Forney，“广义最小距离译码”，IEEE信息论汇刊，第12卷，第2期，第125–131页，1966年。[28] J.Snyders和Y. Be'ery，“二元分组码的最大似然软译码及戈莱码的解码器”，IEEE信息论汇刊，第35卷，第5期，第963–975页，1989年。[29] N. Lous、P. Bours和H. van Tilborg，“关于二元线性码的最大似然软判决译码”，IEEE信息论汇刊，第39卷，第1期，第197–203页，1993年。[30] J. Snyders，“最大似然软译码的缩减错误模式列表”，IEEE信息论汇刊，第37卷，第4期，第1194–1200页，1991年。[31] J.Snyders，“关于最大似然软译码中的幸存错误模式”，载于1991年IEEE国际信息论研讨会论文集，1991年，第192–192页。[32] G. Forney，“陪集码。II. 二元格及相关码”，IEEE信息论汇刊，第34卷，1187，19885，1152第。页–。[33] D.Muder，“分组码的最小网格”，IEEE信息论汇刊，第34卷，第5期，第1049–1053页，1988年。

[34] T. Kasami、T. Takata、T. Fujiwara 和 S. Lin，《线性分组码格栅结构的复杂度》，IEEE 信息论汇刊，第39卷，第3期，第1057–1064页，1993年。[35] M. F. S. Lin，《基于有序统计的线性分组码软判决译码》，IEEE 信息论汇刊，第41卷，第5期，第1379–1396页，1995年。[36] Y. Wu 和 C. N. Hadjicostis，《利用预处理和多样化进行线性分组码软判决译码》，IEEE 信息论汇刊，第53卷，第1期，第378–393页，2007年。[37] W. Jin 和 M. Fossorier，《线性分组码基于可靠度的译码达到最优性的概率充分条件》，载于2006年IEEE国际信息论研讨会，2006年，第2235–2239页。[38] H. Tang、Y. Liu、M. Fossorier 和 S. Lin，《结合Chase-2与GMD译码算法用于非二元分组码》，IEEE通信快报，第5卷，第5期，第209–211页，2001年。[39] R. Koetter 和 A. Vardy，《Reed-Solomon码的代数软判决译码》，IEEE 信息论汇刊，第49卷，第11期，第2809–2825页，2003年。[40] J. Jiang 和 K. R. Narayanan，《利用比特级软信息进行Reed–Solomon码的代数软判决译码》，IEEE信息论汇刊，第54卷，3928，2008年9，3907第期。[41] A. Vardy 和 Y. Be'Ery，《Reed-Solomon码的比特级软判决译码》，IEEE通信汇刊，第39卷，第3期，第440–444页，1991年。[42] W. Jin 和 M. P. Fossorier，《二元线性码的迭代偏置可靠度译码》，= IEICE技术报告：，第105卷，第85期，第65–70页，2005年。[43] I. Dumer，《信息集软判决译码》，载于1998年信息论研讨会（目录号98EX131），1998年，第77–78页。[44] S. Bitzer 和 M. Bossert，《关于多基信息集译码》，载于 2022 年 IEEE国际信息论研讨会（ISIT），2022年，第2780–2784页。[45] M. Bossert 和 F. Hergert，《超越最小距离一半的硬判决和软判决译码——线性码算法（通信）》，IEEE 信息论汇刊，第32卷，第5期，第709–714页，1986年。[46] D. Wu、Y. Li、X. Guo 和 Y. Sun，《短极化码的有序统计译码》，IEEE通信快报，第20卷，第6期，第1064–1067页，2016年。[47] A. Kothiyal、O. Y. Takeshita、W. Jin 和 M. Fossorier，《结合自适应置信传播的线性分组码迭代可靠度译码》，IEEE通信快报，第9卷，第12期，第1067–1069页，2005年。[48] M. Bossert，《循环码的迭代硬判决和软判决译码算法》，载于SCC 2019；第12届ITG国际系统、通信与编码会议。VDE，2019年，第1–6页。[49] W. Jin 和 M. P. Fossorier，《具有多个偏置的基于可靠度的软判决译码》，IEEE信息论汇刊，第53卷，第1期，第105–120页，2006年。[50] M. Bossert、R. Schulz 和 S. Bitzer，《关于二元对称信道上BCH码的信息集译码》，载于IEEE数学编码国际研讨会论文集，2020年。[51] J. Conway 和 N. Sloane，《码与格的软译码技术，包括戈莱码和利奇格》，IEEE 信息论汇刊，第32卷，第1期，第41–50页，1986年。[52] D. Chase，《利用信道测量信息译码分组码的一类算法》，IEEE 信息论汇刊，第18卷，第1期，第170–182页，1972年。[53] K. R. Duffy、J. Li 和 M. M´edard，《猜测噪声，而非码字》，载于2018年IEEE国际信息论研讨会（ISIT），2018年，第671–675页。[54] K. R. Duffy、J. Li 和 M. Medard，《容量达成型随机加性噪声猜测译码》，IEEE 信息论汇刊，第65卷，第4023–4040页，2019年7月。[55] K. R. Duffy 和 M. M´edard，《结合软检测符号可靠度信息的随机加性噪声猜测译码——SGRAND》，载于2019年IEEE国际信息论研讨会（ISIT），2019年，第480–484页。[56] K. R. Duffy、A. Solomon、K. M. Konwar 和 M. M´edard，《通过GRAND对5G NR CA-Polar进行最大似然译码》，载于2020年第54届信息科学与系统年会（CISS），2020年，第1–5页。

[57] K. R. Duffy，《有序可靠性比特猜测随机加性噪声译码》，载于《ICASSP 2021——2021年 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）》，2021年，第8268–8272页。[58] K. R. Duffy、W. An 和 M. M´edard，《有序可靠性比特猜测随机加性噪声译码》，《IEEE 信号处理汇刊》，第70卷，第4528–4542页，2022年。[59] A. Solomon、K. R. Duffy 和 M. M´edard，《使用 GRAND 的软最大似然译码》，载于《ICC 2020——2020年 IEEE 国际通信会议（ICC）》，2020年，第1–6页。[60] S. M. Abbas、M. Jalaleddine 和 W. J. Gross，《瑞利衰落信道中的 GRAND》，载于《2022年 IEEE Globecom Workshops（GC Wkshps）》，2022年，第504–509页。[61] H. Sarieddeen、M. M´edard 和 K. R. Duffy，《利用伪软信息进行衰落信道中的 GRAND 译码》，载于《GLOBECOM 2022——2022年 IEEE 全球通信会议》，2022年，第3502–3507页。[62] Sahar Allahkaram、Francisco A. Monteiro 和 Ioannis Chatzigeor-giou，《面向超可靠低时延通信大规模 MIMO 的天线排序符号级噪声猜测译码》，2023年，arXiv:2305.13113 [cs.IT]。[63] Allahkaram、Sahar 和 Monteiro、Francisco A. 和 Chatzigeorgiou、Ioannis，《基于随机线性码和 GRAND 的编码大规模 MIMO 超可靠低时延通信》，载于《2022年 IEEE 第96届车载技术会议（VTC2022-Fall）》，2022年，第1–5页。[64] W. Liang 和 H. Liu，《循环冗余校验码的低复杂度纠错算法》，载于《2021年第7届国际计算机与通信会议（ICCC）》，2021年，第22–26页。[65] A. A. Patel、A. M. Ahmed 和 M. Z. A. Khan，《用于二阶分集的奇偶校验码》，2020年，arXiv:2012.09497 [cs.IT]。[66] L. Shu，《差错控制编码》。Pearson India，2011年。 [在线]。可访问：https://books.google.co.in/books?id=BG08Zylo 7gC [67] A. M. Ahmed，《面向下一代网络的多无线电网络分集》，博士学位论文，印度理工学院海得拉巴分校，2021年。[68] H.-J. Kwon、J. Jeon、A. Bhorkar、Q. Ye、H. Harada、Y. Jiang、L. Liu、S. Nagata、B. L. Ng、T. Novlan、J. Oh 和 W. Yi，《LTE Release 13 中对免许可频谱的许可辅助接入》，IEEE通信杂志，第55卷，第2期，第201–207页，2017年。[69] M. Labib、V. Marojevic、J. H. Reed 和 A. I. Zaghloul，《将 LTE 扩展至免许可频谱：拟议方案的技术分析》，《IEEE通信标准杂志》，第1卷，第4期，第31–39页，2017年。[70] Rojeena Bajracharya、Rakesh Shrestha、Yousaf Bin Zikria 和 Sung Won Kim，《免许可频谱中的 LTE：综述》，《IETE 技术评论》，第35卷，第1期，第78–90页，2018年。 [在线]。可访问：https://doi.org/
10 1080 02564602 2016 1251344 。/。。D. Kakadia、J. [71] Yang 和 A. Gilgur，《演进型通用陆地无线接入网（EUTRAN）》，2017年9月，第61–81页。[72] A. Garcia-Saavedra、P. Patras、V. Valls、X. Costa-Perez 和 D. J. Leith，《ORLA/OLAA：免许可频谱中 LAA 与 WiFi 的正交共存》，《IEEE/ACM 网络汇刊》，第26卷，第6期，第2665–2678页，2018年。[73] C. Cano、D. J. Leith、A. Garcia-Saavedra 和 P. Serrano，《调度式与随机接入无线网络的公平共存：免许可 LTE/WiFi》，《IEEE/ACM 网络汇刊》，第25卷，第6期，第3267–3281页，2017年。[74] X. Sun 和 L. Dai，《迈向免许可频段中 LTE 与 WiFi 之间公平且高效的频谱共享：公平性约束下的吞吐量最大化》，《IEEE无线通信汇刊》，第19卷，第4期，第2713–2727页，2020年。[75] Y. Gao 和 S. Roy，《实现免许可频谱中 LTE-LAA 与 Wi-Fi 共存的比例公平性》，《IEEE无线通信汇刊》，第19卷，第5期，第3390–3404页，2020年。[76] H. Cui、V. C. M. Leung、S. Li 和 X. Wang，《免许可频段中的 LTE：概述、挑战与机遇》，《IEEE无线通信》，第24卷，第4期，第99–105页，2017年。[77] LIU、RUI 和 CHEN、QIMEI 和 YU、GUANDING 和 LI、GE-OFFREY YE 和 DING、ZHI，《LTE-U 系统中的资源管理：过去、现在与未来》，《开放式车辆技术期刊》，第1卷，第1–17页，2020年。[78] G. Naik、J.-M. Park、J. Ashdown 和 W. Lehr，《6 GHz 频段中的下一代 Wi-Fi 与第五代移动通信技术 NR-U：机遇与挑战》，《IEEE Access》，第8卷，第153 027–153 056页，2020年。

[79] N. Patriciello、S. Lag´en、B. Bojovi´c 和 L. Giupponi，《未授权毫米波频谱中 NR-U 与 IEEE 802.11 技术的共存：模型与评估》，*IEEE Access*，第 8 卷，页码 71 271，2020年 71 254 页。[80] Y. Jiang、J. Guo 和 Z. Fei，《采用模式选择的第五代移动通信技术 NR-U 与 Wi-Fi 共存性能分析》，载于*2020*年 *IEEE/CIC* 中国国际通信会议（*ICCC*），2020年，第 953–958 页。[81] A. Aijaz，《双连接第五代移动通信技术无线网络中的分组复制：概述与挑战》，《*IEEE*通信标准杂志》，第 3 卷，第 3 期，第 20–28 页，2019年。[82] A. M. Ahmed、A. Patel 和 M. Z. A. Khan，《用于提升下一代网络可靠性的奇偶校验编码 Super-MAC》，载于*2024*年第*16*届国际通信系统网络会议（*COMSNETS*），2024年，第 1116–1121 页。[83] BERE PRAVEEN SAI 和 Mohammed Zafar Ali Khan，《面向物联网应用的循环汉明码位切换译码》，载于*2022*年 *IEEE* 世界人工智能物联网大会（*AIIoT*），2022年，第 743–748 页。[84] B. Praveen Sai 和 Mohammed Zafar Ali Khan，《面向物联网应用、低复杂度且保持分集的 CRC 码硬判决解码器》，载于*2022*年 *IEEE* 第*96*届车载技术会议（*VTC2022-Fall*），2022年，第 1–5 页。[85] 《ISO/IEC/IEEE 国际标准——信息技术——系统间电信和信息交换——局域网和城域网——特定要求——第15-6部分：无线体域网》，*ISO/IEC/IEEE 8802-15-6:2017(E)*，第 1–274 页，2018年。[86] C.-H. Yang、T.-Y. Huang、M.-R. Li 和 Y.-L. Ueng，《面向无线体域网的 5.4 μW 软判决 BCH 解码器》，*IEEE* 电路与系统汇刊 *I*：正规论文，第 61 卷，第 9 期，第 2721–2729 页，2014年。[87] T. K. Boseok Jung 和 H. Lee，《面向无线体域网的 5.4 μW 软判决 BCH 解码器》，《半导体技术与科学杂志》，第 16 卷，第 4 期，第 488–496 页，2016年。[88] P. K. Manchi、R. Paily 和 A. K. Gogoi，《用于 IEEE 802.15.6标准 UWB 物理层的低功耗数字基带收发器设计》，*IEEE* 工业信息学汇刊，第 13 卷，第 5 期，第 2474–2483 页，2017年。[89] W. Peterson，《Bose-Chaudhuri 码的编码与纠错过程》，*IRE* 信息论汇刊，第 6 卷，第 4 期，第 459–470 页，1960年。[90] Y. Wu 和 C. N. Hadjicostis，《使用预处理和多样化对线性分组码进行软判决译码》，*IEEE* 信息论汇刊，第 53 卷，第 1 期，第 378–393 页，2007 年。[91] P. Massoud Salehi 和 J. Proakis，数字通信。McGraw-Hill Education，2007年。[92] C. Rose 和 M. Smith，*Mathematica* 数理统计：*Mathematica* 数理统计，丛书：Mathematica 数理统计。Springer，2002年。[93] H.-C. Lee，《面向无线体域网应用的高效 BCH 解码器》，*IEEE*通信快报，第 25 卷，第 6 期，第 1766–1770 页，2021年。[94] T. K. Moon，纠错编码：数学方法与算法，第 1 版。John Wiley & Sons，2005年。



BEREPRAVEEN SAI（IEEE学生会员）于2013年获得印度特伦甘纳邦瓦朗加尔卡卡蒂亚科技学院电子与通信工程学士学位，并于2015年获得印度瓦朗加尔国立技术学院通信工程硕士学位。目前，他正在印度海得拉巴的印度理工学院海得拉巴分校攻读博士学位。他的研究兴趣包括无线通信中的编码理论和解码方案

适用于第五代移动通信技术和第六代移动通信技术应用的短码块长度。



MOHAMMED ZAFAR ALI KHAN（IEEE高级会员）于1996年获得印度海得拉巴奥斯马尼亚大学电子与通信工程学士学位，1998年获得德里印度理工学院电气工程硕士学位，并于2003年获得班加罗尔印度科学研究院电气通信工程博士学位。1999年，他在班加罗尔的Sasken 担任设计工程师；2003年至2005年，他在班加罗尔的Silica Semiconductors 担任高级设计工程师；随后在他于2005年在印度 Hellosoft 任职，并于2006年至2009年担任 IIIT 海得拉巴的助理教授。目前，他是 IIT 海得拉巴的教授。他在教学和研究方面拥有超过15年的经验。他在空时码方面做出了重要贡献。他设计的空时分组码已被 WiMAX 标准采用。他曾担任多个资助项目和咨询项目的首席研究员。他是许多国际和国内期刊及会议的审稿人。他著有《可单符号和双符号解码的空时分组码》一书，由德国 Lambert 学术出版社出版。他的研究兴趣包括编码调制、空时编码以及无线通信中的信号处理。他曾获 2006年 INAE 青年工程师奖。



LAJOS HANZO是英国皇家工程院院士、IEEE 会士、英国工程技术学会会士、欧洲信号处理协会会士及匈牙利科学院外籍院士。他合著了 2000+ 篇发表于 IEEE Xplore 的论文，并合著了 19 部 Wiley-IEEE Press 专著。他曾获颁 IEEE 埃里克·萨姆纳技术领域奖。