arXiv:2304.03574v1 [math.PR] 7 Apr 2023

复连续随机能量模型的相图：弱相关区域。

MAXIMILIAN FELS、LISA HARTUNG 和 ANTON KLIMOVSKY

摘要。我们确定了所谓弱相关区域内，伽尔顿–沃森树上的连续随机能量模型的配分函数涨落。具体而言，当描述时间非齐次方差的“速度函数”严格位于其凹包之下，并满足某种弱正则性条件时，我们证明其相图与随机能量模型的相图一致。然而，涨落有所不同，取决于协方差函数在 0 处的斜率以及终止时刻 t。

1. 引言

1.1. 变速分枝布朗运动作为伽尔顿–沃森树上的 CREM。 连续随机能量模型（CREM）在 [7] 中被引入，作为 Derrida 的广义随机能量模型（GREM） [8]的一种推广。设 $\mathbb{T} = (V, E)$为一棵深度（或时间范围）为 t 、赋有（超度量）树距离 d的树。树上的 CREM $\mathbb{T}$ 是定义在 V 上的均值为零的高斯过程h，其协方差为

$$\mathbb{E}\left(h(v)h(w)\right) = tA(d(v,w)/t), \quad \forall v, w \in V, \tag{1.1}$$

其中， $d(v, w)$表示 v 和 w 的最近公共祖先的时间，而$A\colon\ [0,1] \to [0,1]$ 是一个非递减函数，满足 $A(0) = 0$ 且 $A(1) = 1.$。我们选择$\mathbb{T}$ 为一个连续时间超临界伽尔顿–沃森树，其后代分布为$(p_k)_{k\geq 0}$，其中 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$、 $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = 2$，并令 $K := \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k < \infty$。

给定时刻 $t \geq 0$，我们将 GW过程中的粒子标记为 $i_1(t) \ldots, i_{n(t)}(t)$，其中 $n(t)$ 表示时刻 t的粒子总数。注意，在上述假设下，我们有 $\mathbb{E}\left[n(t)\right] = \mathrm{e}^t$。对于 $s \leq t$和 $1 \leq k \leq n(t)$，我们用 $i_k(s, t)$ 表示粒子 $i_k(t)$ 在时刻 s的唯一祖先。一般而言，会存在若干指标 k, l ，使得$i_k(s, t) = i_l(s, t)$。对于 $t \geq 0$，所有祖先的集合自然构成随机树

$$\mathbb{T}_t := \{i_k(s, t)\colon 0 \leq s \leq t, 1 \leq k \leq n(t)\} \tag{1.2}$$

日期：2023年4月10日。2010 年数学主题分类。60J80、60G70、60F05、60K35、82B44。关键词和短语。高斯过程、分枝布朗运动、对数相关、随机能量模型、相图、极值过程、簇过程、乘法混沌。MF 的工作得到了 Minerva Stiftung Gesellschaft fuer die Forschung mbH 提供的 Minerva Fellowship 资助，并部分由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过项目编号 211504053 - SFB 1060 资助。AK 和 LH 的工作部分由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过 SPP 2265 项目编号 443891315 以及项目编号 412848929 资助。LH 的工作部分由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过项目编号 390685813 和 GZ 2151 - 项目编号 390873048、项目编号 233630050 - TRR 146 以及项目编号 446173099 资助。本项目始于 2021 年疫情期间，当时 MF 和 LH 通过奥伯沃尔法赫数学研究所的“Research in Pairs”项目获得支持。我们感谢 MFO 全体团队提供优越的工作条件并热情接待。

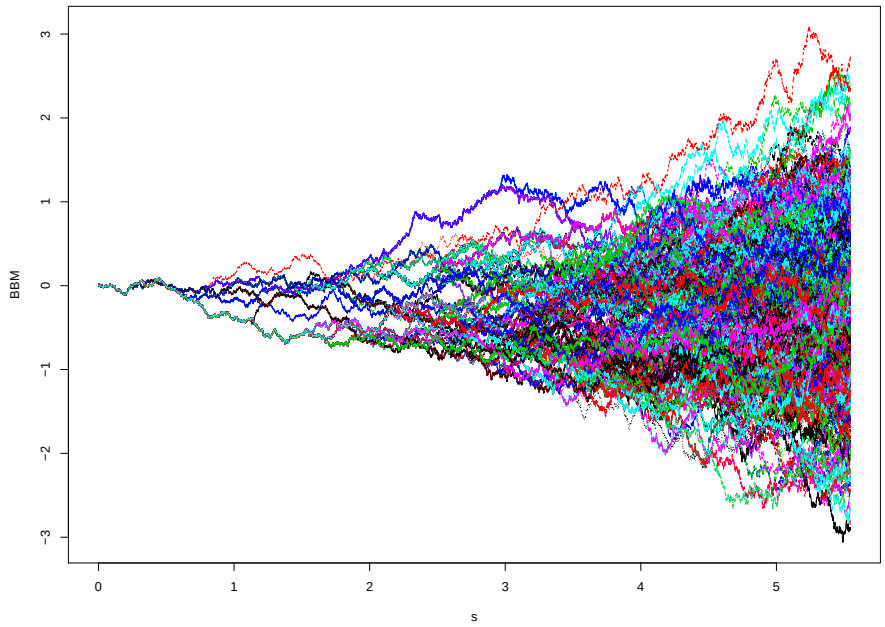

图 1. 对于 $A(x) := (e^{3x} - 1)/(e^3 - 1)$ 且 $t = \log 256 \approx 5.55$ 的 CREM 模拟实现。在此实现中，$n(t) = 510$。请注意，扩散速度随时间不断增加。

称为截至时刻 t的 GW树。我们用 $\mathcal{F}^{\mathbb{T}_t}$ 表示由截至时刻 t的 GW过程生成的 σ-代数。为简化记号，在提及粒子位置时，我们省略对 $i_k(s,t)$ 的显式依赖。我们将时刻 s的粒子位置简记为 $(x_k(s))_{k\le n(t)}$，并用 $x_k(s)$ 表示时刻 s 的粒子 k 在时刻 t的祖先的位置。

1.2. 复值随机能量模型。 令 $\rho \in [-1,1]$。对于任意 $t \in \mathbb{R}_+$，设 $X(t) := (x_k(t))_{k\le n(t)}$ 和 $Y(t) := (y_k(t))_{k\le n(t)}$ 是定义在同一底层 GW树上的两个 CREM，使得对于 $k \le n(t)$，

$$\mathrm{Cov}(x_k(t), y_k(t)) = \rho t. \tag{1.3}$$

下文中，为简化记号，我们有时省略所关注量对 ρ的依赖。

我们定义相关性为 ρ、逆温度为 β 的复值BBM能量模型的配分函数 $= \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ 为

$$\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} e^{\sigma x_k(t) + i\tau y_k(t)}. \tag{1.4}$$

参数 ρ 表示能量实部和虚部之间的相关强度。特别地，取 $\rho = 1$ （= 实部和虚部几乎处处相同）时，将得到复温度 β下实值 CREM 的配分函数。

对于 $A(x) = \mathbb{1}_1(x)$，该模型以随机能量模型 （REM）之名为人所知，而（1.4）的行为已在 [16] 中得到详细分析。A 为阶梯函数的情形已在 [18] 中得到分析。标准分枝布朗运动（对应于

$A(x) = x$) 已在 [13, 14] 中得到研究。本文聚焦于弱相关区域，即 $A(x) < x$ 的情形，其中 $x \in (0, 1)$。

研究动机与相关文献。 在物理学文献中，Derrida 开创了对随机能量模型（REM）的研究，将其作为平均场无序系统的玩具模型，尤其是复温度下的此类系统： [9, 10, 27]。参见 [23, 16, 17, 13, 14]，其中对复温度下的 REM、GREM 和分支布朗运动进行了严格分析。在对数相关高斯场的背景下，一个自然的对应概念是所谓的高斯乘法混沌。复温度的情形近期也得到了研究，例如见[21, 12, 25, 15, 20]。

考虑复配分函数的动机多种多样，例如经典的 Lee-Yang 相变理论 [22, 4], 、干涉建模 [11], 、量子物理 [26], ，以及与黎曼 ζ函数零点的联系（综述可参见 [3, 19] ）。这些领域的一个关键共同特征，是研究复随机指数和的某些泛函。在 Lee-Yang 理论中，相变由所谓配分函数（即随机指数的和）的复零点在实轴上的聚集点所解释。在量子物理和干涉领域，人们研究复指数的和或积分，这自然会导致幅度的相互抵消。量子自旋玻璃模型中也存在一些类似效应 [24, 1]。关于黎曼 ζ函数，其研究的一个关键方面是令人瞩目的联系 [3]，即随机能量模型的统计物理与黎曼 ζ函数及随机矩阵特征多项式的随机化版本之间的联系。

1.3.主要结果。在本文中，我们确定了复数CREM 的相图（见下文定理1.2），并研究了整个次临界区域内复数CREM的配分函数涨落。下一步自然是确定复数 CREM 在超临界区域内的相图。关于相图的一个猜想，参见 [17, 第 2 节。10]或许令人意外的是，对于严格凹函数 A，预计会出现七个相。当前工作是理解如何处理复温度下 CREM 的一步。

让我们以解析方式具体说明图2中描绘的三个区域:

$$B_1 := \mathbb{C} \setminus \overline{B_2 \cup B_3}, \quad B_2 := \{\sigma + i\tau \in \mathbb{C} \colon 2\sigma^2 > 1, |\sigma| + |\tau| > \sqrt{2}\}, \\ B_3 := \{\sigma + i\tau \in \mathbb{C} \colon 2\sigma^2 < 1, \sigma^2 + \tau^2 > 1\}. \tag{1.5}$$

注记 1. 我们的部分结果将在二叉分枝假设下陈述（即，$p_k = 0$ 对所有 $k > 2$）。后代分布的所有矩均存在也足以保证我们的所有结果成立，并且不需要对证明作实质性修改。

假设1.1。 （弱相关区域，另见 [6]）令 $A\colon \ [0,1] \to [0,1]$ 为满足以下三个条件的右连续非递减函数:

(A1) 对于所有 $x \in (0,1)$: $A(x) < x$, $A(0) = 0$ 且 $A(1) = 1$.(A2) 存在 $\delta_b > 0$ 和函数 $B(x)$, $B(x)\colon [0,1] \to [0,1]$，它们在 $[0, \delta_b]$ 上二阶可微且具有有界二阶导数，使得

$$\underline{B}(x) \le A(x) \le \overline{B}(x), \quad \forall x \in [0, \delta_b] \tag{1.6}$$

其中 $\overline{B}'(0) = \underline{B}'(0) \equiv A'(0) \equiv \sigma_b^2$。

(A3) 存在 $\delta_e > 0$ 和函数 C（x），$\overline{C}$（x）： $[0,1] \to [0,1]$ 在 $[1 - \delta_e, 1]$ 中二阶可微且具有有界二阶导数，使得

$$\underline{C}(x) \le A(x) \le \overline{C}(x), \quad \forall x \in [1 - \delta_e, 1] \tag{1.7}$$

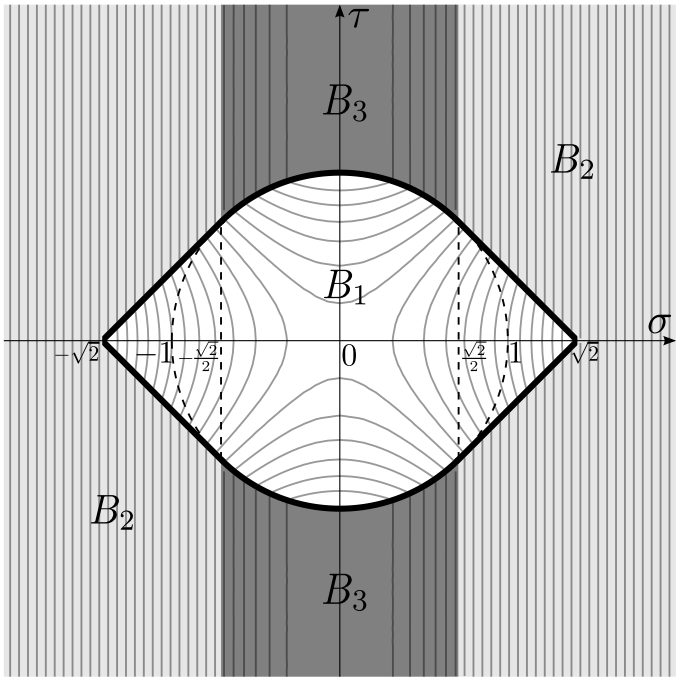

图2. 弱相关区域中 CREM 的相图。灰色曲线是极限对数配分函数的等值线，参见 (1.8)。

其中 $\overline{C}'(1) = \underline{C'}(1) \equiv A'(1) \equiv \sigma_e^2$。允许 $A'(1) = +\infty$ 的情形。这应理解为：对所有 $\rho < \infty$，存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有$x \in [1-\varepsilon, 1]$, $A(x) \le 1 - \rho(1-x)$</style}。

我们的第一个结果表明，复值BBM能量模型确实具有图2所示的相图。

定理 1.2（相图）。设 A 满足假设 *1.1*。对于任意 $\rho \in [-1,1]$ 和任意 $\beta \in \mathbb{C}$，处于弱相关区域且具有二叉分枝的复值 *CREM*，其对数配分函数和相图（参见图 2）与复数*REM*相同，即

$$\lim_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{X}_{\beta,\rho}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2), & \beta \in \overline{B_1}, \\ \sqrt{2}|\sigma|, & \beta \in \overline{B_2}, \\ \frac{1}{2} + \sigma^2, & \beta \in \overline{B_3}, \end{cases} \tag{1.8}$$

依概率收敛。

注 2。（1）对于确定性的规则加权树（树上的= 定向聚合物），在假设复随机能量的实部和虚部之间没有相关性的条件下（即情形 $\rho = 0$），公式 (1.8) 由 Derrida等人 [10]得到。我们对定理 1.2 的推导基于对配分函数 (1.4)涨落 的详细了解。 [10] 中的论证似乎关键依赖于假设$\rho = 0$。

(2) 自然可以预期，(1.8) 中的收敛在 L^1 中也成立，参见 [16，定理 2.15]，其中给出了 REM 的相关结果。

相 B_1。 我们定义以下鞅

$$\mathcal{M}_{\sigma,\tau}(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-t\left(1+2i\rho\sigma\tau+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)} \mathrm{e}^{\sigma\tilde{x}_k(t)+i\tau\tilde{y}_k(t)}, \tag{1.9}$$

其中 $\{\tilde{x}_k(t)\ k \le n(t)\}$，$\{\tilde{y}_k(t)\ k \le n(t)\}$ 是标准 BBM（$A(x) = x$），其相关常数为 ρ。

文献 [14]证明了极限

$$\lim_{t\uparrow\infty} \mathcal{M}_{\sigma,\tau}(t) =: \mathcal{M}_{\sigma,\tau} \tag{1.10}$$

几乎处处存在于 L^1中，且是非退化的。

注3。可以将 $(x_k(r))_{k\le n(r)}$ 的一个实现与 $(\sigma_b\tilde{x}_k(r))_{k\le n(r)}$ 的一个实现耦合起来，二者均定义在同一棵底层超临界 Galton–Watson 树上：为树中的每条边关联一个独立的均值为零、方差等于该边长度的高斯随机变量。将每个高斯随机变量乘以σ_b，即可得到 $(\sigma_b\tilde{x}_k(r))_{k\le n(r)}$ 的一个版本。若要使用相同的高斯随机变量得到 $(x_k(r))_{k\le n(r)}$，则将每个高斯随机变量乘以协方差函数中对应增量的平方根。

定理 1.3. 设 A 满足假设 *1.1*。设 $\beta = \sigma + i\tau$ 满足 $\beta \in B_1$，且 $\rho \in \widehat{[-1,1]}$，并令 $\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\ \sigma_b\tau}$ 为 $\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\ \sigma_b\tau}$ 的耦合实现。那么，

$$\mathrm{e}^{-t\left(1+2i\rho\sigma\tau+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)} \mathcal{X}_{\beta,\rho}(t) \to \widehat{\mathcal{M}}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}, \qquad \text{as } t\uparrow\infty, \tag{1.11}$$

在概率方面。

相 B_2。 在相 B_2中，配分函数的行为受到 X的极值的影响。在弱相关区域内，极值过程已有充分的了解 [5, 6]。也就是说，对于 $m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\log t$，并且当 t 趋于无穷大时，

$$\sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t)-m(t)} \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} \delta_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}} \quad \text{in law}, \tag{1.12}$$

其中 η_k 是具有强度 $C(\sigma_e)Y_{\sigma_b}e^{-\sqrt{2}x}$的 Cox 过程的原子，其中 Y_{σ_b} 是一个仅取决于 $\sigma_b = A'(0)$的随机变量，而 $C(\sigma_e)$是一个仅取决于 $\sigma_e = A'(1)$的常数。$(\Delta_l^{(k)})_{l\in\mathbb{N}}$ 是点过程 $\sigma_e\Delta$的独立副本的原子，其中 Δ 被定义为以下对象的极限（按分布）

$$\sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{\bar{x}_k(t)-\max_{k\le n(t)}\bar{x}_k(t)}, \text{ conditioned on } \max_{k\le n(t)} \bar{x}_k(t) \ge \sqrt{2}\sigma_e t, \tag{1.13}$$

作为 $t\to\infty$。这里，$(\bar{x}_k(t))_{k\le n(t)}$ 表示标准 BBM 的粒子位置。

在相 B_2中，极限配分函数可描述如下。

定理 1.4. 设 A 满足假设 *1.1*。对于满足 $\beta \in B_2$ 和 $|\rho| = 1$ 的 $\beta = \sigma + i\tau$，重标度后的配分函数$e^{-\beta m(t)}\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)$ 依分布收敛于随机变量

$$\mathcal{X}_{\beta,1} := \sum_{k,l\ge1} e^{\beta\eta_k+\Delta_l^{(k)}}, \qquad \text{as } t\uparrow\infty, \tag{1.14}$$

其中 η_k 和 $\Delta_l^{(k)}$ 如(1.12)所示。

定理 1.5。 设 A 满足假设 ***1.1***。对于满足 $\beta \in B_2$ 和 $|\rho| \in(-1、1)$的 $\beta = \sigma + i\tau$，重新缩放后的配分函数 $e^{-\sigma m(t)}\mathcal{X}_{\beta,\ \rho}(t)$ 在 $t \uparrow \infty$ 趋于(某个随机变量)的分布收敛，该随机变量为

$$\mathcal{X}_{\beta,\rho} = \sum_{k,l\geq 1} e^{\sigma(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}U^{(k)}\tilde{W}_l^{(k)}, \tag{1.15}$$

其中 $(U^{(k)})_{k\geq 1}$ 是独立同分布的，且在单位圆上均匀分布；$(\tilde{W}_{(k)\,l})_{l\geq 1}$，对于 $k \geq 1$，是定义在单位圆上的独立点过程的原子；而 η_k 和 $\Delta_l^{(k)}$ 如(1.12)中所述。此外，$\mathcal{X}_{\beta,\ \rho}$ 的分布是复各向同性 $\sqrt{2}/\sigma$–稳定分布。

相 B_3。 为了陈述下一个结果，我们需要引入一些额外的记号。我们用 $\mathcal{L}[\cdot]$, $\mathcal{L}[\cdot \mid \cdot]$、$\Longrightarrow$分别表示分布、条件分布和弱收敛。用 $\mathcal{N}(0, s^2)$,$s^2 > 0$表示密度为下式的中心复各向同性高斯分布

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-|z/s|^2}}{\pi s^2} \in \mathbb{R}_+ \tag{1.16}$$

相对于 $\mathbb{C}$上的勒贝格测度。

定理 1.6 (随机方差中心极限定理，适用于 B_3)。 设 A 满足假设 ***1.1***。对于 $\beta \in B_3$、$\rho \in [-1, 1]$ 及二叉分枝，例如，当 $k = 2$ 时为 $p_k = 1$，否则为 $p_k = 0$。那么，当 $t \uparrow \infty$时，

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)}{\mathrm{e}^{t(1/2+\sigma^2)}} \,\middle|\, \mathcal{M}_{2\sigma\sigma_b,0}\right] \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, C_2\mathcal{M}_{2\sigma\sigma_b,0}\right), \tag{1.17}$$

其中 $C_2 > 0$ 是某个常数，且收敛是依分布的。

注记 4。 与 (1.17) 中类似的中心极限定理应该在 B_1 成立，只要 $|\sigma| < 1/\sqrt{2}$成立。标准 BBM在 [14]中的证明检验了林德伯格–费勒条件。或者，也可以像定理 1.6的证明中所做的那样使用矩方法。我们选择不将其纳入本文文章，因为这不会带来更多有意义的见解。

文章大纲。在第 2 节中，我们证明了 CREM 中粒子路径的一般上包络。在第 3 节中，我们研究 Phase B_1 中的配分函数，并证明定理 1.3。第 4 节讨论 Phase B_2，第 5 节讨论 Phase B_3。最后，我们在第 6 节证明定理 1.2。

2. 上包络

在本小节中，我们为截至固定时间 $t > 0$的粒子提供一个足够紧的上包络。令

$$m_A(s) = \sqrt{2stA(s/t)} - \frac{\sqrt{tA(s/t)}}{2\sqrt{2s}}\log(s). \tag{2.1}$$

Note m_A 对 t 的隐式依赖关系。由于 A(1) $= 1$，我们得到对于 (2.1) 中的 $s = t$，有

$$m_A(t) \equiv m(t) = \sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(t). \tag{2.2}$$

固定参数 $\gamma > 0$，并令 $C > 0$ 为一个常数（稍后选取足够大的值）。我们引入如下确定性的上包络

$$U_{A,\gamma}(s) := m_A(s) + \left(((tA(s/t) \wedge (t - A(s/t)t)) \vee C\right)^\gamma, \quad s \in [0, t], \tag{2.3}$$

and 考虑一组遵循上包络线的粒子路径子集 e:

$$\mathcal{U}_{t,\gamma} := \{x(\cdot) \in C\left([0, t], \mathbb{R}\right) : x(s) \leq U_{A,\gamma}(s), \forall s \in [0, t]\}. \tag{2.4}$$

下一个引理表明，对于分枝粒子系统 $\{x_k\colon\ [0,t]\to\mathbb{R}\}_{k\le n(t)}$，在 $[0,t]$ 上超过上包络是不太可能的。

引理2.1。 设 $\gamma<1/2$。那么，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $C>0$，使得对所有充分大的 $t>0$，

$$\mathbb{P}\left(\exists k\le n(t)\colon \exists s\in[0,t]: x_k(s)>U_{A,\gamma}(s)\right)<\epsilon. \tag{2.5}$$

我们借鉴了通常分支布朗运动情形下的证明（参见 [2, 定理 2.2]）。我们首先证明，过程的最大值在整数时刻越过上包络 $U_{A,\ \gamma}$ 的可能性极小。第二步，我们利用高斯随机变量估计将这一结论推广到所有时刻。

引理2.2。 设 $\gamma<1/2$。那么，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $C>0$，使得对所有充分大的 t，

$$\mathbb{P}\left(\exists k\le n(t)\ \textit{s.t.}\ \exists s\in[0,t]: x_k(\lceil s\rceil)>U_{A,\gamma}(\lceil s\rceil)\right)<\epsilon. \tag{2.6}$$

证明。 设

$$r=r(C)=\min\left\{\begin{matrix}\sup\{s\in[0,t]: U_{A,\gamma}(t-s)=m_A(t-s)+C^\gamma\},\\ \sup\{s\in[0,t]: U_{A,\gamma}(s)=m_A(s)+C^\gamma\}\end{matrix}\right\}. \tag{2.7}$$

事件

$$\{\exists k\le n(t): \exists s\in[0,t]: x_k(\lceil s\rceil)>U_{A,\gamma}(\lceil s\rceil)\} \tag{2.8}$$

是关于 $j\in[t]$ 的事件并集

$$\{\exists k\le n(t): x_k(j)>U_{A,\gamma}(j)\}. \tag{2.9}$$

通过并集界和马尔可夫不等式，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\lfloor t\rfloor}\exists k\le n(t): x_k(j)>U_{A,\gamma}(j)\right)\le\sum_{j=1}^{\lfloor t\rfloor}\mathrm{e}^j\mathbb{P}\left(x(j)>U_{A,\gamma}(j)\right), \tag{2.10}$$

其中， $x(j)$ 是一个均值为零、方差为 $tA(j/t)$的高斯随机变量。这里，不失一般性，我们可以假设 $A(x)>0$ 对于 $x>0$，否则从 $j=\lfloor\sup\{s\in[0,t]\text{ 开始: }\ A(x)=0\}\rfloor+1$。我们利用高斯尾部估计来界定 (2.10)。我们区分 $tA(j/t)\le t-A(j/t)t$ 和 $tA(j/t)>t-A(j/t)t$ 的情形。令 $j_1=\arg\max_{1\le j\le t}tA(j/t)\le t-A(j/t)t$。(2.10) 的上界为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\lfloor(\Sigma^2)^{-1}(r)\rfloor}\frac{\mathrm{e}^j\sqrt{tA(j/t)}}{(m_A(j)+C^\gamma)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_A(j)+C^\gamma)^2}{2tA(j/t)}\right]\\
&+\sum_{j=\lfloor(\Sigma^2)^{-1}(r)\rfloor}^{\lfloor j_1\rfloor}\frac{\mathrm{e}^j\sqrt{tA(j/t)}}{(m_A(j)+(tA(j/t))^\gamma)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_A(j)+(tA(j/t))^\gamma)^2}{2tA(j/t)}\right]\\
&+\sum_{j=\lfloor j_1\rfloor+1}^{\lceil(\Sigma^2)^{-1}(t-r)\rceil}\frac{\mathrm{e}^j\sqrt{tA(j/t)}}{(m_A(j)+(t-tA(j/t))^\gamma)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_A(j)+(t-tA(j/t))^\gamma)^2}{2tA(j/t)}\right]\\
&+\sum_{j=\lceil(\Sigma^2)^{-1}(t-r)\rceil+1}^{t}\frac{\mathrm{e}^j\sqrt{tA(j/t)}}{(m_A(j)+C^\gamma)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_A(j)+C^\gamma)^2}{2tA(j/t)}\right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

我们注意到，由于 $A(x) < x$， $r(C) \le C$。此外，由于 $m_A(j)$是 e^j 个独立同分布的中心化高斯随机变量（其方差为 $tA(j/t)$）的最大值的数量级，因此可以很容易地验证，(2.10) 的右端被某个常数乘以从上方界定

$$2C\exp\left[-\sqrt{2}C^{\gamma}\right] + \sum_{j=\lfloor(\Sigma^2)^{-1}(r)\rfloor}^{\lfloor j_1\rfloor} \exp\left[-\sqrt{2}(tA(j/t))^{\gamma}\right] + \sum_{j=\lfloor j_1\rfloor+1}^{\lceil(\Sigma^2)^{-1}(t-r)\rceil} \exp\left[-\sqrt{2}\left(t - tA(j/t)\right)^{\gamma}\right]. \tag{2.12}$$

(2.12) 中最后两个求和项均有限，并且随着 $t \to \infty$ 趋于极限而趋于零，因此依次取 $t \to \infty$ 和 $C \to \infty$ 的极限时，(2.6) 中的概率可以任意小，这就证明了所述结论。□

引理2.2 可以用来推出引理2.1，后者将其推广到连续时间。证明利用了这样一个事实：如果在时刻 s 确实发生了超过上包络的事件，那么在时刻 $\lceil s\rceil$ 的最大值很可能仍然很高，即大于 $U_{A,\,\gamma/2}(\lceil s\rceil)$。根据引理2.2，通过充分增大 $C>0$，可以使后一事件的概率任意小。

引理*2.1*的证明：考虑分支布朗运动在时刻 j 的最大值小于、等于或大于 $U_{A,\,\gamma}(s)$ 的情形，我们对该事件的概率进行估计：

$$\{\exists k \le n(t)\colon \exists s \in [0,t] : x_k(s) > U_{A,\gamma}(s)\} \tag{2.13}$$

由上方

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\exists k \le n(t)\colon\ \exists s \in [0,t]\colon\ x_k(s) > U_{A,\,\gamma}(s)\ \wedge x_k(\lceil s\rceil) > U_{A,\,\gamma/2}(\lceil s\rceil)\right)\\ &\quad + \mathbb{P}\left(\exists k \le n(t)\colon\ \exists s \in [0,t]\colon\ x_k(s) > U_{A,\,\gamma}(s)\ \wedge x_k(\lceil s\rceil) < U_{A,\,\gamma/2}(\lceil s\rceil)\right).\end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.14) 中的第一个概率的上界为

$$\mathbb{P}\left(\exists k \le n(t)\colon \exists s \in [0,t] : x_k(\lceil s\rceil) > U_{A,\gamma/2}(\lceil s\rceil)\right). \tag{2.15}$$

根据引理2.2，当 $C>0$ 较大时，该量的上界为 $\epsilon/2$。接下来只需对第二个概率进行上界估计。令 $\mathcal{T}$ 表示停时

$$\mathcal{T} \equiv \inf\left\{s \in [0,t] : \exists k \le n(t) : x_k(s) > U_{A,\gamma}(s)\right\}. \tag{2.16}$$

对 $\mathcal{T}$ 进行条件化后，我们可以将（2.14）中的第二个概率改写为

$$\int_0^t \mathbb{P}\left(\exists k \le n(t) : x_k(s') < U_{A,\gamma/2}(s') \mid \mathcal{T} = s'\right)\mathbb{P}\left(\mathcal{T} \in \mathrm{d}s'\right). \tag{2.17}$$

我们假设 $A(x) > 0$ 对于 $x > 0$ 有上界。

$$\sum_{j=0}^{t-1}\int_j^{j+1} \mathbb{P}\left(\exists k \le n(t) : x_k(\lceil s'\rceil) < U_{A,\gamma/2}(\lceil s'\rceil)\middle|\mathcal{T} = s'\right)\mathbb{P}\left(\mathcal{T} \in \mathrm{d}s'\right). \tag{2.18}$$

还需证明

$$\mathbb{P}\left(\exists k \le n(t) : x_k(\lceil s'\rceil) < U_{A,\gamma/2}(\lceil s'\rceil)\middle|\mathcal{T} = s'\right) \tag{2.19}$$

关于 s'一致趋于 0，当 $C \to \infty$时。根据 $\mathcal{T}$ 的定义，该概率不超过以下概率：在时间 $\lceil s' \rceil$，时间 s' 的最大值的前驱发生幅度小于.....的向下跳跃。

$$U_{A,\gamma}(\lceil s' \rceil) - U_{A,\gamma/2}(s') < \sqrt{2}t\left(A(\lceil s' \rceil/t) - A(s'/t)\right) \tag{2.20}$$
$$+ \left((tA(\lceil s' \rceil/t) \wedge (t - A(\lceil s' \rceil/t)t)) \vee C\right)^{\gamma} - \left((tA(\lceil s' \rceil/t) \wedge (t - A(\lceil s' \rceil/t)t)) \vee C\right)^{\gamma/2},$$

其概率根据分支布朗运动的马尔可夫性质和马尔可夫不等式，可被上界估计为

$$\mathrm{e}^{\lceil s' \rceil - s'}\mathbb{P}\left(x_1(\lceil s' \rceil) - x_1(s') < U_{A,\gamma}(\lceil s' \rceil) - U_{A,\gamma/2}(s')\right). \tag{2.21}$$

现在，$\mathrm{e}^{\lceil s' \rceil - s'} < e$ 并且我们还有 $A(s'/t) > 0$。进一步注意到 $x_1(\lceil s' \rceil) - x_1(s') \sim \mathcal{N}(0, t\left[A\left(\lceil s' \rceil/t\right) - A\left(s'/t\right)\right])$，并且，对于 s' 从而 $0 < tA(s'/t) \le t/2$,

$$\begin{aligned} &U_{A,\gamma}(\lceil s' \rceil) - m_A(s') - U_{A,\gamma/2}(s') + m_A(\lceil s' \rceil) \\ &\quad = -\left((tA(\lceil s' \rceil/t)) \vee C\right)^{\gamma}\left[1 - \frac{\left((tA(\lceil s' \rceil/t)) \vee C\right)^{\gamma/2}}{\left((tA(s'/t)) \vee C\right)^{2}}\right] \le -\frac{1}{2}C^{\gamma}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中，我们选择足够大的 $C > 0$，以得到因子 $1/2$。类似地，对于满足 $t/2 < tA(s'/t)$ 的 s'，有 $\le t$,

$$\begin{aligned} &U_{A,\gamma}(\lceil s' \rceil) - m_A(s') - U_{A,\gamma/2}(s') + m_A(\lceil s' \rceil) = -\left((t - tA(s'/t)) \vee C\right)^{\gamma} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\left((t - tA(\lceil s' \rceil/t)) \vee C\right)^{\gamma/2}}{\left((t - tA(s'/t)) \vee C\right)^{\gamma}}\right) \le -\frac{1}{2}C^{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

因此，(2.21) 的上界为

$$\mathrm{e}^{\lceil s' \rceil - s'}\mathbb{P}\left(X \le \sqrt{2t}\left(\sqrt{\lceil s' \rceil A(\lceil s' \rceil/t)} - \sqrt{s'A(s'/t)} - \frac{1}{2}C^{\gamma}\right)\right), \tag{2.24}$$

其中 $X \sim \mathcal{N}(0,\ t(A(\lceil s' \rceil/t) - A(s'/t)))$。因此，当 $C \to \infty$ 时，该量趋于 0，且对 s' 一致，这就完成了证明。□

3. B1 相：配分函数的涨落

本节分析 B1 相中配分函数的行为。该相的主要结果是定理 1.3。

3.1. 定理 1.3 的证明。证明定理 1.3 的第一步是以下命题。

命题3.1。对于任意 $\delta > 0$ 和 $\epsilon > 0$，存在 r_0，使得对所有 $r \ge r_0$ 以及所有充分大的 t

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t) - \mathbb{E}\left(\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)|\mathcal{F}_r\right)\right| \ge \delta \mathrm{e}^{t\left(1+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)}\right) \le \epsilon. \tag{3.1}$$

我们将命题3.1的证明推迟到本节末尾。

备注 5. 这成立。

$$Y(t) \overset{\mathrm{D}}{=} \rho X(t) + \sqrt{1-\rho^2}Z(t), \tag{3.2}$$

其中“$\overset{\mathrm{D}}{=}$”表示分布相等，而 $Z(t) := (z_i(t))_{i \le n(t)}$ 是一个独立于 $X(t)$ 的 CREM，并且基于同一个 GW过程定义。本文反复使用这一点来处理 X 与 Y 之间的相关性。

接下来，我们证明，给定 $\mathcal{F}_r$ 时，$\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)$ 的条件期望接近于

$$\mathrm{e}^{t\left(1+2i\rho\sigma\tau+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)}\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}(r). \tag{3.3}$$

引理3.2。 令$(\sigma_b\tilde{x}_k(r))_{k\le n(r)}$ 和$(x_k(r))_{k\le n(r)}$ 按照注 3 中的描述进行耦合，并令$\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}(r)$ 为$\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}(r)$ 所对应的耦合实现。对于任意$\delta>0$ 和 $\epsilon>0$，存在 r_0，使得对于所有 $r\ge r_0$ 以及所有充分大的 t，

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{e}^{-t\left(1+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)}\mathbb{E}\left(\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)\mid\mathcal{F}_r\right)-\widehat{\mathcal{M}}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}(r)\right|>\delta\right)<\epsilon. \tag{3.4}$$

现在，在完成命题3.1和引理3.2的证明后，我们就可以证明定理 1.3。

定理*1.3*的证明。 这立即由命题3.1和引理3.2得出。□

若只需证明依分布收敛，可以用下面的引理代替引理 3.2。

引理3.3. 令 $\beta=\sigma+i\tau\in B_1$。那么 $\mathrm{e}^{-r-tA(r/t)(\sigma^2-\tau^2)/2}\mathbb{E}(\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)\mid\mathcal{F}_r)$ 依分布收敛至 $\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau}(r)$，当 $t\to\infty$ 时。

证明。 注意，$(x_k(r))_{k\le n(r)}$ 的协方差函数在 $t\uparrow\infty$ 时收敛于$(\sigma_b\tilde{x}_k(r))_{k\le n(r)}$的协方差函数，其中$(\tilde{x}_k(r))_{k\le n(r)}$ 服从标准分枝布朗运动的粒子分布。该结论随后由连续映射定理得到。□

命题3.1和引理3.3的一个直接推论如下。

推论3.4。 令 $\beta=\sigma+i\tau$，其中 $\beta\in B_1$，且 $\rho\in[-1,1]$。那么，

$$\mathrm{e}^{-t\left(1+2i\rho\sigma\tau+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)}\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)\Rightarrow\mathcal{M}_{\sigma_b\sigma,\sigma_b\tau},\qquad \textit{as } t\uparrow\infty, \tag{3.5}$$

其中收敛于分布。

3.2. **命题3.1和引理3.2的证明**。 我们首先证明引理3.2。

引理*3.2*的证明。 式（3.4）中的概率可由以下量从上方界定

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{-2r}\sum_{k,k'\le n(r)}\Big(&\mathrm{e}^{-(\sigma^2-\tau^2)tA(r/t)}e^{\sigma x_k(r)+i\tau y_k(r)+\sigma x_{k'}(r)+i\tau y_{k'}(r)}\\&-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}(tA(r/t)+\sigma_b^2r)}\mathrm{e}^{\sigma\sigma_b\tilde{x}_k(r)+i\tau\sigma_b\tilde{y}_k(r)+\sigma x_{k'}(r)-i\tau y_{k'}(r)}\\&-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}(tA(r/t)+\sigma_b^2r)}\mathrm{e}^{\sigma\sigma_b\tilde{x}_{k'}(r)-i\tau\sigma_b\tilde{y}_{k'}(r)+\sigma x_k(r)+i\tau y_k(r)}\\&+\mathrm{e}^{-(\sigma^2-\tau^2)\sigma_b^2r}\mathrm{e}^{\sigma\sigma_b\tilde{x}_k(r)+\tau\sigma_b\tilde{y}_k(r)+\sigma\sigma_b\tilde{x}_{k'}(r)-i\tau\sigma\sigma_b\tilde{y}_{k'}(r)}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

首先注意，带负号的两个加数互为复共轭，因此它们的和为实数，其他各项也都是实数。因此，以下无需担心虚部，因为它们会相互抵消。我们证明这四个加数的期望相等。其次注意，由于 A 在零点的某邻域内二阶可微，根据一阶泰勒展开

$$A(s/t)=\sigma_b^2s+O(s^2/t). \tag{3.7}$$

这意味着四个被加项的乘法前因子全部

$$\mathrm{e}^{-(\sigma^2-\tau^2)\sigma_b^2r+O(r^2/t)}\to\mathrm{e}^{-(\sigma^2-\tau^2)\sigma_b^2r},\quad \text{as } t\to\infty. \tag{3.8}$$

接下来，我们计算

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k,k'\le n(r)} \mathrm{e}^{\sigma\sigma_b\tilde{x}_k(r)+i\tau\sigma_b\tilde{y}_k(r)+\sigma x_{k'}(r)-i\tau y_{k'}(r)}\Big). \tag{3.9}$$

由于实部与虚部的相关系数为 ρ，利用表示式 (3.2)，(3.9) 中的期望等于

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k,k'\le n(r)} \mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)\sigma_b\tilde{x}_k(r)+i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sigma_b\tilde{z}_k(r)+(\sigma-i\rho\tau)x_{k'}(r)-i\sqrt{1-\rho^2}\tau z_{k'}(r)}\Big). \tag{3.10}$$

令 $d\equiv d(x_k.x_{k'})$。那么，在给定底层 Galton-Watson树的条件下，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sigma_b\tilde{z}_k(r))-i\sqrt{1-\rho^2}\tau z_{k'}(r)}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{i\sqrt{1-\rho^2}\tau(\sqrt{tA(d/t)}-\sigma_b\sqrt{d})z_1}\right)\\ &\times\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sqrt{tA(r/t)-tA(d/t)}z_2}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sigma_b\sqrt{r-d}z_3}\right),\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 z_1, z_2, z_3 为标准高斯变量。(3.11) 等于

$$\mathrm{e}^{-(1-\rho^2)\frac{\tau^2}{2}(\sqrt{tA(d/t)}-\sigma_b\sqrt{d})^2}\mathrm{e}^{-(1-\rho^2)\frac{\tau^2}{2}(tA(r/t)-tA(d/t)+\sigma_b^2(r-d))}. \tag{3.12}$$

根据 (3.7)，这与下式（绝对值意义下）相同:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sigma_b\tilde{z}_k(r))-i\sqrt{1-\rho^2}\tau\sigma_b\tilde{z}_{k'}(r)}\right). \tag{3.13}$$

Nex $\tilde{\ }$t，我们计算关于 X 和 X的期望，同样是在给定底层树的条件下 e.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)\sigma_b\tilde{x}_k(r)+(\sigma-i\rho\tau)x_{k'}(r)}\Big) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{((\sigma+i\rho\tau)\sqrt{tA(d/t)}+(\sigma-i\rho\tau)\sigma_b\sqrt{d})x_1}\right)\\ &\times\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)\sqrt{tA(r/t)-tA(d/t)}x_2}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{(\sigma-i\rho\tau)\sigma_b\sqrt{r-d}x_3}\right),\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 x_1， x_2， x_3 是标准高斯变量。该式等于

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left((\sigma+i\rho\tau)\sqrt{tA(d/t)}+(\sigma-i\rho\tau)\sigma_b\sqrt{d}\right)^2}\mathrm{e}^{\frac{(\sigma+i\rho\tau)^2}{2}(tA(r/t)-tA(d/r))}\mathrm{e}^{\frac{(\sigma-i\rho\tau)^2}{2}\sigma_b^2(r-d)}. \tag{3.15}$$

再次由 (3.7) 可知，该式的绝对值与下式相同

$$\mathrm{e}^{O(r^2/t)}\mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)\sigma_b\tilde{x}_k(r)+(\sigma-i\rho\tau)\sigma_b\tilde{x}_{k'}(r)}\Big). \tag{3.16}$$

(3.13) 和 (3.16) 现在结合上文的观察即可推出所需结果：我们不必处理虚部，因为当 t趋于无穷时，$\mathrm{e}^{O(r^2/t)}$ 收敛于 1。

□

命题*3.1*的证明。 注意，只需对下式进行界定

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)}\mathbb{1}_{x_k\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}-\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)}\mathbb{1}_{x_k\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\mid\mathcal{F}_r\right)\right|\ge\delta\mathrm{e}^{t\left(1+\frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\right)}\right), \tag{3.17}$$

由引理2.1和

引理 3.5。 设 $\epsilon > 0$ 和 $r, t \in \mathbb{R}_+$ 满足 $r \ll t$。那么，存在 $C(r,\epsilon) > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-t\left(1+\frac{\sigma^2-2i\tau\sigma+\tau^2}{2}\right)}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)}\mathbb{1}_{x_k\in\mathcal{U}_{t,\gamma}} \mid \mathcal{F}_r\right) \\ &\geq (1-\epsilon)\mathrm{e}^{-t\left(1+\frac{\sigma^2-2i\tau\sigma+\tau^2}{2}\right)}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)} \mid \mathcal{F}_r\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

以概率 $> 1-\epsilon$。

引理 *3.5* 的证明。首先，注意到

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-t\left(1+\frac{\sigma^2+2i\sigma\tau-\tau^2}{2}\right)}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)} \mid \mathcal{F}_r\right) \\ &= \mathrm{e}^{-tA(r/t)\left(1+\frac{\sigma^2+2i\sigma\tau-\tau^2}{2}\right)}\sum_{k=1}^{n(r)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(tA(r/t))+i\tau y_k(tA(r/t))}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

接下来，我们计算 $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)}\mathbb{1}_{x_k\in\mathcal{U}_{t,\ \gamma}} \mid \mathcal{F}_r\right)$。由分枝性质和多对一引理可知，期望等于

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n(r)} e^{t-r}\mathrm{e}^{\sigma x_k(tA(r/t))+i\tau y_k(tA(r/t))}\mathbb{1}_{\left\{x_k(r')\leq\sqrt{2r'tA(r'/t)}+\left(C\vee(tA(r'/t)\wedge(t-tA(r'/t)))\right)^\gamma,\forall r'\leq r\right\}} \\ \times\ &\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\sigma x(t-r)+i\tau y(t-r)}\mathbb{1}_{\left\{x(s-r)+x_k(r)\leq\sqrt{2stA(s/t)}+\left(C\vee(tA(s/t)\wedge(t-tA(s/t)))\right)^\gamma,\forall s>r\right\}}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中，$(x(s-r))_{r<s<t}$ 和 $(y(s-r))_{r<s<t}$ 是从 0 出发、方差为 $\hat{}s \equiv tA(s/t) - tA(r/t)$、相关系数为 ρ 的非齐次布朗运动。成立关系 $(x(s-r))_{r<s<t} \overset{d}{=} (B(\hat{}s))_{0\leq\hat{s}\leq t-tA(r/t)}$，其中 B 是标准布朗运动。因此，

$$\xi(\hat{s}) = B(\hat{s}) - \frac{\hat{s}}{t-tA(r/t)}B(t-tA(r/t)), \tag{3.21}$$

是一个在时间 $t - tA(r/t)$ 内从 0 到 0 的布朗桥，并且独立于 $B(t - tA(r/t))$。我们改写

$$x(s-r)+x_k(r) = \xi(\hat{s}) + \frac{t-tA(s/t)}{t-tA(r/t)}x_k(r) + \frac{\hat{s}}{t-tA(r/t)}(B(t-tA(r/t))+x_k(r)). \tag{3.22}$$

集合 $f_\gamma(C,s) := \left(C\vee(tA(s/t)\wedge(t-tA(s/t))\right)^\gamma$ 要求 $x_k \in \mathcal{U}_{t,\gamma}$ 意味着，当 $\{x(r) + x(t-r) \leq \sqrt{2t}\}$ 足够大时成立。用我们的新记号，这可以改写为 $\{B(t-tA(r/t)) + x_k(r) \leq \sqrt{2t}\}$。因此，该事件

$$\left\{\xi(\hat{s}) + \frac{t-tA(s/t)}{t-tA(r/t)}x_k(r) + \frac{\sqrt{2}t\hat{s}}{t-tA(r/t)} \leq \sqrt{2stA(s/t)} + f_\gamma(C,s)\ \forall s > r\right\} \tag{3.23}$$

是式 (3.20) 中第二个示性函数对应事件的子集。由于 $x_k \in \mathcal{U}_{t,\gamma}$ 蕴含$x_k(r) \le \sqrt{2trA}$ $(r/t) + \overline{(C \vee rA(r/t))^\gamma}$，式 (3.23) 中的事件包含

$$\Big\{\xi(\hat{s}) \le \sqrt{2tsA(s/t)} - \frac{\sqrt{2}\hat{s}}{1-A(r/t)} + f_\gamma(C,s) \\ -\sqrt{2rtA(r/t)} - (C \vee rA(r/t))^\gamma, \forall s > r\Big\}, \tag{3.24}$$

as a 子集。由于 $tA(s/t) \le s$ 和 $\sqrt{2stA(s/t)} - \sqrt{2\frac{s}{1-A(r/t)}} \le O(tA(r/t))$，因此 th at

$$\mathcal{L}_r = \left\{\xi(\hat{s}) \le f_\gamma(C,s) + O\left(\sqrt{rtA(r/t)}\right) \forall s > r\right\} \tag{3.25}$$

是 (3.24) 的一个子集。(3.22) 中的期望（在事件 $\mathcal{L}_r$ 上）下界为

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\sigma x(t-r)+i\tau y(t-r)}\right)\mathbb{P}\left(\xi(\hat{s}) \le f_\gamma(C,s) + O\left(\sqrt{rtA(r/t)}\right) \forall s > r\right). \tag{3.26}$$

如果我们将 $C = C\,(r)$ 取足够大，则可以对 (3.26) 中的概率给出如下上界ನನಡ

$$\mathbb{P}\left(\xi(\hat{s}) \le \left(C \vee (\hat{s} \wedge (t - A(r/t) - \hat{s}))\right)^\gamma, \forall 0 \le \hat{s} \le t - tA(r/t)\right) \ge 1 - \epsilon. \tag{3.27}$$

注意，根据引理2.1，该事件的概率

$$\left\{x_k(r') \le \sqrt{2r'tA(r'/t)} + \left(C \vee (tA(r'/t) \wedge (t - tA(r'/t)))\right)^\gamma, \forall r' \le r, k \le n(r)\right\} \tag{3.28}$$

至少为 $1-\epsilon$，当 C足够大时。在此事件上，(3.20) 的下界为$(1-\epsilon)$乘以(3.19) 中的表达式。这就证明了引理 3.5 的断言。□

我们继续证明命题3.1。根据切比雪夫不等式，(3.17) 中的概率上界为 $\delta^{-2}\mathrm{e}^{-t}$ $(2+\sigma^2-\tau^2)$ 乘以

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)} \mathbb{1}_{x_k \in \mathcal{U}_{t,\gamma}} - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)} \mathbb{1}_{x_k \in \mathcal{U}_{t,\gamma}} \mid \mathcal{F}_r\right)\right|^2\right). \tag{3.29}$$

为了继续估计 (3.29)，我们需要这些示性函数

$$I_{k,j} := \mathbb{1}\{x_k\,(r) + x_j^k\,(s-r) \le U_{A,\gamma}(s), \forall s \in [r,t]\}, \tag{3.30}$$

对于 $k \le n(r)$ 和 $j \le n^k(t-r)$，其中 $n^k(t-r)$ 表示在时刻 t 存活的粒子 $x_k(r)$ 的后代数量，而 $x_j^k(s)$ 是在时刻 $r+s$ 存活的粒子 $x_k(r)$ 的 j^{th} 个后代的位置。根据分枝性质，对于 $k \le n(r)$，不同 k 对应的粒子 $x_k(r)$ 在时刻 $r+s$ 存活的后代总数相互独立，其中 $n^k(s)$。注意到对任意 $x \in \mathbb{C}$， $|x|^2 = xx$，并利用表示式 (3.2)，我们将

(3.29) 中的期望改写为

$$\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k,k'=1}^{n(r)} \mathrm{e}^{(\sigma+i\tau\rho)x_k(r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(r)+(\sigma-i\tau\rho)x_{k'}(r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{k'}(r)} \times\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)}\sum_{j'=1}^{n^{k'}(t-r)} \mathrm{e}^{(\sigma+i\tau\rho)x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_j^k(t-r)} I_{k,j} \times\mathrm{e}^{(\sigma-i\tau\rho)x_{j'}^{k'}(t-r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{j'}^{k'}(t-r)-2t-(\sigma^2-\tau^2)t} I_{k',j'}\Bigg) - \left|\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)} \mathrm{e}^{(\sigma+i\tau\rho)x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(t-r)-t-(\sigma^2-\tau^2)t/2} I_{k,j}\right)\right|^2\Bigg)\Bigg). \quad (3.31)$$

我们设定 $\lambda=(\sigma+i\tau\rho)$，并注意到，对于满足 $d(x_k,x'_k)$的粒子，$\leq r$、x^k 以及 $x^{k'}$ 连同 z^k 和 $z^{k'}$ 彼此独立，因此，对于这样的粒子，

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)}\sum_{j'=1}^{n^{k'}(t-r)} \mathrm{e}^{\lambda x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_j^k(t-r)+(\sigma-i\tau\rho)} I_{k,j} \times\mathrm{e}^{\overline{\lambda}x_{j'}^{k'}(t-r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{j'}^{k'}(t-r)-2t-(\sigma^2-\tau^2)t} I_{k',j'}\right) = \left|\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)} \mathrm{e}^{\lambda x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(t-r)-t-(\sigma^2-\tau^2)t/2} I_{k,j}\right)\right|^2. \quad (3.32)$$

由此观察可知，(3.31) 等于

$$\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{n(r)} \mathrm{e}^{2\sigma x_k(r)}\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)}\sum_{j'=1}^{n^{k'}(t-r)} \mathrm{e}^{\lambda x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_j^k(t-r)} I_{k,j} \times\mathrm{e}^{(\sigma-i\tau\rho)x_{j'}^{k'}(t-r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{j'}^{k'}(t-r)-2t-(\sigma^2-\tau^2)t} I_{k',j'}\Bigg) - \left|\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n^k(t-r)} \mathrm{e}^{\lambda x_j^k(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(t-r)-t-(\sigma^2-\tau^2)t/2} I_{k,j}\right)\right|^2\Bigg)\Bigg). \quad (3.33)$$

显然，它从上方有界于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(r)} \mathrm{e}^{\lambda x_k(r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(r)+\lambda x_{k'}(r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{k'}(r)} \mathbb{E}\left(\sum_{j,j'=1}^{n^k(t-r)} e^{\lambda x_j(t-r)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_j(t-r)} \times\mathrm{e}^{\overline{\lambda}x_{j'}^k(t-r)-i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_{j'}^k(t-r)-2t-(\sigma^2-\tau^2)t} I_{k,j}I_{k,j'}\right)\right). \quad (3.34)$$

我们注意到，(3.34) 可以改写为一个带有额外示性函数的二阶矩，该示性函数表示粒子在时间 r 之后发生了分支。也就是说，(3.34) 等于$\mathrm{e}^{-2t-(\sigma^2-\tau^2)t}$

次数

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}(z_k(t)-z_{k'}(t))}\mathbb{1}_{x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})\geq r}\right). \tag{3.35}$$

仅在 $d(x_k,\ x_{k'})$ 处保留对粒子高度的约束，我们将 (3.35) 从上方估计为

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}(z_k(t)-z_{k'}(t))}\mathbb{1}_{x_k(d(x_k,x_{k'}))\leq U_{A,\gamma}(d(x_k,x_{k'}))}\mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})\geq r}\right). \tag{3.36}$$

由于 Z 独立于 X，(3.36) 等于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)}\mathbb{1}_{x_k(d(x_k,x_{k'}))\leq U_{A,\gamma}(d(x_k,x_{k'}))}\mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})\geq r}\right). \tag{3.37}$$

根据多到二引理和 (3.37)，(3.34) 从上方估计为

$$\begin{aligned}&\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{2t-s-2t-(\sigma^2-\tau^2)t-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s(/t))}\int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)}\frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}\\&\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y'\mathrm{e}^{\bar{\lambda}y'-\frac{(y')^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

利用关于 $y,\ y'$ 的积分是高斯随机变量的傅里叶变换这一事实，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y'\mathrm{e}^{\bar{\lambda}y'-\frac{(y')^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}=\mathrm{e}^{\left(\sigma^2-\rho^2\tau^2\right)t(1-A(s/t))}. \tag{3.39}$$

因此，(3.38) 等于

$$\begin{aligned}&\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s-(\sigma^2-\tau^2)tA(s/t)}\int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)}\frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}\\=&\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s-(\sigma^2-\tau^2)tA(s/t)+2\sigma^2tA(s/t)}\int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)}\frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-2\sigma tA(s/t))^2}{2tA(s/t)}}\\=&\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)}\frac{\mathtt{d}z}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2tA(s/t)}}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

接下来，我们区分两种情况。如果 $U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\geq 0$，则将关于 z 的积分上界取为 1。否则，我们使用高斯尾界，将 (3.40) 的上界估计为

$$\begin{aligned}&\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\geq 0}\\&+\int_r^t \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)<0}\mathrm{e}^{-\frac{\left(U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\right)^2}{2tA(s/t)}}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

我们先对 (3.41) 中的第一项求上界。我们区分两种情况。对于 $\tau^2+\sigma^2 \le 1$，第一项的上界为

$$\int_r^t \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-\epsilon s} \le \frac{1}{\epsilon}\mathrm{e}^{-\epsilon r}, \tag{3.42}$$

对于某个 $\epsilon > 0$，这里使用了假设1.1。否则，注意到第一项指标函数中的事件蕴含 $s \ge 2\sigma^2 tA(s/t) + O((tA(s/t))^\gamma)$。因此，在此事件上

$$-s + (\sigma^2+\tau^2)tA(s/t) \le (\tau^2-\sigma^2)tA(s/t). \tag{3.43}$$

现在，对于 $\beta \in B_1$ 和 $\sigma^2+\tau^2 > 1$，我们有 $\sigma > \tau$，在这种情况下，(3.41) 中的第一项有如下上界。

$$\int_r^t \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-\epsilon tA(s/t)} \le C\mathrm{e}^{-\epsilon tA(r/t)}, \tag{3.44}$$

对某个 $\epsilon > 0$。利用 (3.43)，存在 $\epsilon > 0$，使得 (3.41) 中的第一项不超过 (3.42)。(3.41) 中的第二项不超过

$$\begin{aligned}&\int_r^t \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-2s-(\sigma^2-\tau^2)tA(s/t)+2\sigma\sqrt{2stA(s/t)}+O\left(\sqrt{s}\vee(tA(s/t))^\gamma\right)}\\ &= \int_r^t \mathrm{d}s e^{\tau^2 tA(s/t)}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{2s}-\sigma\sqrt{tA(s/t)}\right)^2+O\left(\sqrt{s}\vee(tA(s/t))^\gamma\right)}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

由于 $\sigma+\tau < \sqrt{2}$ 且 $\sqrt{tA(s/t)} < \sqrt{s}$，(3.45)中的指数由上界$-\epsilon' s + O(\sqrt{s})$界定，其中某个 $\epsilon' > 0$ 取决于 σ。因此，(3.45)由上界界定为

$$\int_r^t \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-\epsilon' s} \le \frac{1}{\epsilon'}\mathrm{e}^{-\epsilon' r}. \tag{3.46}$$

结合 (3.42)、(3.42) 和 (3.46)，即可得到该引理的结论。 □

4. Phase B2

在相位 B_2 中，正如引言中所提到的，配分函数的行为由 X 的极值决定。命题4.1对此作出了精确表述。随后利用连续映射定理证明定理 1.5 和 1.4。

命题4.1。若 $\rho \in [-1,1]$ 且 $\beta \in B_2$，则对所有 δ，$\epsilon > 0$，存在 B_0，使得对所有 $B \ge B_0$ 以及所有足够大的 t，

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\sigma m(t)}\mathbb{1}_{x_k(t)<m(t)-B}\right| > \delta\right) < \epsilon. \tag{4.1}$$

命题*4.1*的证明：我们区分两种情形：

$$\text{Case (a): } \beta \in B_2, \sigma > \sqrt{2}, \quad \text{Case (b): } \beta \in B_2, \sigma \le \sqrt{2}. \tag{4.2}$$

我们首先证明情形 (a) 下的命题4.1。由马尔可夫不等式和三角不等式，(4.1) 中的概率上界为

$$\delta^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma(x_k(t)-m(t))}\mathbb{1}_{x_k(t)<m(t)-B}\right). \tag{4.3}$$

现在，(4.3) 中的期望等于

$$\mathrm{e}^{t-\sigma m(t)}\int_{-\infty}^{m(t)-B}\mathrm{e}^{\sigma x-\frac{x^2}{2t}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi t}}=\mathrm{e}^{t-\sigma m(t)+\sigma^2 t/2}\int_{-\infty}^{m(t)-B}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi t}}. \tag{4.4}$$

利用高斯尾界和 $\sigma>\sqrt{2}$，(4.4) 中的后一个积分有如下上界：

$$\frac{\sqrt{t}}{m(t)-\sigma t-B}\mathrm{e}^{-(m(t)-\sigma t-B)^2/2t}. \tag{4.5}$$

将 (4.5) 代回 (4.4)，存在一个常数 $C>0$，使得 (4.4) 有如下上界：

$$Ct^{-1/2}\mathrm{e}^{t-\sigma m(t)+\sigma^2 t/2-(m(t)-\sigma t-B)^2/2t}\leq C\mathrm{e}^{(\sqrt{2}-\sigma)B}(1+o(1)). \tag{4.6}$$

由于 $\sqrt{2}-\sigma<0$，当先令 t 趋于无穷大，再令 B 趋于无穷大时，(4.6) 收敛于零。这就完成了命题4.1在情形 (a) 下的证明。

接下来，我们证明命题4.1在情形 (b) 下成立。在此情形下，(4.1) 中的概率有如下上界：

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\sigma m(t)}\mathbb{1}_{x_k(t)<m(t)-B}\right|>\delta\right), \tag{4.7}$$

根据引理2.1，其本身有如下上界：

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\sigma m(t)}\mathbb{1}_{x_k(t)<m(t)-B,x_k\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\right|>\delta\right)+\epsilon, \tag{4.8}$$

对其中所有足够大的 C，利用切比雪夫不等式，我们将 (4.8) 中的概率上界为

$$\delta^{-2}\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)+\sigma x_{k'}(t)-i\tau y_{k'}(t)-2\sigma m(t)}\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\right). \tag{4.9}$$

利用 (3.2)，(4.9) 中的期望等于

$$\mathrm{e}^{-2\sigma m(t)}\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)+i\tau\sqrt{1-\rho^2}(z_k(t)-z_{k'}(t))}\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\right). \tag{4.10}$$

由于 Z 是在与X相同的 Galton-Watson树上的变速分枝布朗运动，期望等于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)}\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\tau\sqrt{1-\rho^2}(z_k(t)-z_{k'}(t))}\right]\Bigg)\\&=\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\bar{\lambda}x_{k'}(t)}\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma}}\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)}\Bigg).\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10)中的期望上界为

$$(I)+(II) \equiv \mathrm{e}^{-2\sigma m(t)}\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)} \times\Big(\mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})\le r}+\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,x_k,x_{k'}\in\mathcal{U}_{t,\gamma},d(x_k,x_{k'})>r}\Big)\Bigg). \tag{4.12}$$

(I) 等于

$$\mathrm{e}^{-2\sigma m(t)}\int_0^r \mathtt{d}s\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathtt{d}y\mathrm{e}^{-\lambda y-\frac{y^2}{2(t-tA(s/t))}}\right|^2. \tag{4.13}$$

对高斯积分进行显式计算可得,

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-2\sigma m(t)}\int_0^r \mathtt{d}s\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\mathrm{e}^{2\sigma^2tA(s/t)}\mathrm{e}^{(\sigma^2-\rho^2\tau^2)(t-tA(s/t))}\\ &\quad\le t^{3\sigma/\sqrt{2}}\mathrm{e}^{((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2)t}\int_0^r \mathtt{d}s\mathrm{e}^{-s+\sigma^2tA(s/t)}\le r\mathrm{e}^{\sigma^2r}t^{3\sigma/\sqrt{2}}\mathrm{e}^{((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2)t},\end{aligned} \tag{4.14}$$

它趋于零，因为 $t\to\infty$，这里用到了 $\beta\in B_2$。我们通过只保留分裂时刻处的局部化约束，并进一步分解示性函数中的事件，对 (4.12) 中的 (II) 作上界估计。其上界为

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\lambda x_{k'}(t)-2\sigma m(t)}\left(\mathbb{1}_{E_1}+\mathbb{1}_{E_2}+\mathbb{1}_{E_3}\right)\right) \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{aligned}E_1 &= \left\{r\le d(x_k,x_{k'})\le\left(\Sigma^2\right)^{-1}(t-B/2), x_k\left(d(x_k,x_{k'})\right)\le U_{A,\gamma}(d(x_k,x_{k'}))\right\},\\ E_2 &= \left\{d(x_k,x_{k'})>(\Sigma^2)^{-1}(t-B/2),\ x_k(d(x_k,x_{k'}))<U_{A,\gamma}(d(x_k,x_{k'}))-B/2\right\},\\ E_3 &= \left\{\begin{matrix}d(x_k,x_{k'})>(\Sigma^2)^{-1}(t-B/2),\ x_k(t),x_{k'}(t)<m(t)-B,\\ x_k(d(x_k,x_{k'}))>U_{A,\gamma}(d(x_k,x_{k'}))-B/2\end{matrix}\right\}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

利用多到二引理,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)-2\sigma m(t)}\mathbb{1}_{E_1}\right) \tag{4.17}$$

等于

$$\begin{aligned}&\int_r^{\left(\Sigma^2\right)^{-1}(t-B/2)}\mathtt{d}s\mathrm{e}^{2t-s-2\sigma m(t)}\int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)}\frac{\mathtt{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{d}y'\mathrm{e}^{\overline{\lambda}y'-\frac{(y')^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

按照 (3.38)-(3.41) 中的方法，我们将 (4.18) 上界估计为

$$\mathrm{e}^{2t+\left(\sigma^2-\tau^2\right)t-2\sigma m(t)}\left(\int_{(\Sigma^2)^{-1}(r)}^{t-B/2}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\geq 0}\right. \tag{4.19}$$

$$\left.+\int_{r}^{\left(\Sigma^2\right)^{-1}(t-B/2)}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)<0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\left(U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\right)^2}{2tA(s/t)}}}{\sqrt{2s}-2\sigma\sqrt{tA(s/t)}}\right).$$

（4.19）中第二个加项的被积函数是

$$\frac{t^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2s}-2\sigma\sqrt{tA(s/t)}}\mathrm{e}^{(\sqrt{2}-\sigma)^2t-\tau^2t-\left(\sqrt{2s}-\sigma\sqrt{tA(s/t)}\right)^2+\tau^2tA(s/t)} \tag{4.20}$$

$$\times\mathrm{e}^{\left(2\sigma-\sqrt{\frac{2s}{tA(s/t)}}\right)\left((tA(s/t)\wedge(t-tA(s/t))\wedge C)^\gamma-\frac{\sqrt{tA(s/t)}}{2\sqrt{2s}}\log(t)\right)}. \tag{4.21}$$

我们将 (4.20) 中的指数项改写为

$$\mathrm{e}^{\left((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2\right)(t-tA(s/t))}. \tag{4.22}$$

因此，对于 $\gamma<\alpha<1$，我们可以给出（4.19）中的第二个积分的上界，得到

$$\int_{r}^{\left(\Sigma^2\right)^{-1}(t-t^\alpha)}\mathrm{d}s\frac{t^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2s}-2\sigma\sqrt{tA(s/t)}}\mathrm{e}^{\left((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2\right)(t-tA(s/t))+O(s^\gamma)}\to 0 \tag{4.23}$$

as $t\uparrow\infty$。此外，(4.19) 中第一个积分的被积函数从上方被 b 所界定 y

$$(1+o(1))\,\mathrm{e}^{\left((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2\right)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{\left(\sqrt{\frac{2s}{tA(s/t)}}-2\sigma\right)((t-tA(s/t))\vee C)^\gamma}, \tag{4.24}$$

因为 t 中的多项式项恰好相消。由于对于所有这样的s，$(t-tA(s/t))\vee C=(t-tA(s/t))$，当 B 足够大时，我们得到

$$\int_{(\Sigma^2)^{-1}(t-t^\alpha)}^{\left(\Sigma^2\right)^{-1}(t-B/2)}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{\left((\sqrt{2}-\sigma)^2-\tau^2\right)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{\left(\sqrt{\frac{2s}{tA(s/t)}}-2\sigma\right)((t-tA(s/t)))^\gamma}\leq\mathrm{e}^{-cB}, \tag{4.25}$$

对于某个常数 $c>0$，对于所有足够大的 B。利用(4.19)中的(4.23)和(4.25) 的界，我们将 (4.19) 中的第一项从上方估计为

$$t^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\left(\sqrt{2}-\sigma\right)^2t-\tau^2t}\int_{r}^{t-B/2}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\geq 0}. \tag{4.26}$$

注意到

$$\mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)}\mathbb{1}_{U_{A,\gamma}(s)-2\sigma tA(s/t)\geq 0}\leq\mathrm{e}^{\left(\sqrt{2}-\sigma\right)^2t-\tau^2t+O((((tA(s/t)\wedge(t-tA(s/t)))\vee C)^\gamma)}. \tag{4.27}$$

利用 (4.27) 以及在情形 (b) 中，当 $\tau>1/\sqrt{2}$ 时，$\tau^2t\bar{A}(s/t))\leq s/2$，可知 (4.26) 中的积分有一个常数上界。因此，当 t 趋于无穷时，(4.26) 收敛于零。接下来，我们从上方估计

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)-2\sigma m(t)}\mathbb{1}_{E_2}\right) \tag{4.28}$$

其上界为

$$\int_{(\Sigma^2)^{-1}(t-B/2)}^{t} \mathrm{d}s \mathrm{e}^{2t-s-2\sigma m(t)} \int_{-\infty}^{U_{A,\gamma}(s)-B/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi t A(s/t)}} \mathrm{e}^{2\sigma x - \frac{x^2}{2tA(s/t)}} \tag{4.29}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}} \mathrm{e}^{\beta y - \frac{y^2}{2t(1-A(s/t))}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}} \mathrm{e}^{\overline{\beta} y' - \frac{(y')^2}{2t(1-A(s/t))}}.$$

按照上述二阶矩计算的做法，并利用对积分域上的所有充分大的 t，$U_{A,\gamma}(s) - B/2 - 2\sigma t A(s/t) < 0$，我们可以将 (4.29) 从上方估计为

$$\mathrm{e}^{2t+\left(\sigma^2-\tau^2\right)t-2\sigma m(t)} \int_{(\Sigma^2)^{-1}(t-B/2)}^{t} \mathrm{d}s \mathrm{e}^{-s+(\sigma^2+\tau^2)tA(s/t)} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\left(U_{A,\gamma}(s)-B/2-2\sigma t A(s/t)\right)^2}{2tA(s/t)}}}{\sqrt{2s}-2\sigma\sqrt{tA(s/t)}}. \tag{4.30}$$

最后，我们将

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA\left(\frac{d(x_k,x_{k'})}{t}\right)\right)} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda} x_{k'}(t)-2\sigma m(t)} \mathbb{1}_{E_3}\right) \tag{4.31}$$

从上方估计为

$$\int_{(\Sigma^2)^{-1}(t-B/2)}^{t} \mathrm{d}s \mathrm{e}^{2t-s-2\sigma m(t)} \int_{U_{A,\gamma}(s)-B/2}^{U_{A,\gamma}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t A(s/t)}} \mathrm{e}^{2\sigma x - \frac{x^2}{2tA(s/t)}}$$
$$\times \int_{-\infty}^{m(t)-B-x} \frac{\mathrm{d}y \mathrm{e}^{\beta y - \frac{y^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}} \int_{-\infty}^{m(t)-B-x} \frac{\mathrm{d}y' \mathrm{e}^{\overline{\beta} y' - \frac{(y')^2}{2t(1-A(s/t))}}}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}}. \tag{4.32}$$

由于 $A(s/t) \leq 1$，在 x 的积分域上有

$$m(t)-B-x \leq m(t)-U_{A,\gamma}(s)-B/2 \leq \sqrt{2}(t-s)-B/2. \tag{4.33}$$

因此，在进一步配方后，关于 y 和 y' 的积分可从上方估计为

$$\mathrm{e}^{(\sigma^2-\tau^2)t(1-A(s/t))} \int_{-\infty}^{\sqrt{2}(t-s)-B/2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\beta t(1-A(s/t)))^2}{2t(1-A(s/t))}}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\sqrt{2}(t-s)-B/2} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{2\pi t\left(1-A(s/t)\right)}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(y'-\overline{\beta} t(1-A(s/t))\right)^2}{2t(1-A(s/t))}}$$
$$\leq \mathrm{e}^{(\sigma^2-\tau^2)t(1-A(s/t))} \mathrm{e}^{-2\frac{\left((\sqrt{2}-\sigma)B/2-B/2\right)^2}{2t(1-A(s/t))}} \leq \mathrm{e}^{(\sigma^2-\tau^2)t(1-A(s/t))} \mathrm{e}^{-\frac{\left((\sqrt{2}-\sigma)-1\right)^2 B}{2}}. \tag{4.34}$$

现在可以像之前一样对 x 积分进行界定，但我们会得到关于 B 的负指数项，这带来了额外的衰减，从而完成证明。□

定理*1.4*的证明：将 $\mathbb{M}$ 记为 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 上赋予模糊拓扑的局部有限计数测度空间。对 $B>0$ 考虑泛函$\Phi_{\beta,B}$：$\mathbb{M}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\Phi_{\beta,B}\left(\sum_{i\in I}\delta_{x_i}\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{e}^{\beta x_i} \mathbb{1}_{x_i>-B} \tag{4.35}$$

其中 I 是可数指标集，$\sum_{i\in I}\delta_{x_i}$ 是局部有限计数测度。在其上泛函$\Phi_{\beta,B}$ 不连续的局部有限计数测度集合（该

测度充电 $-B$ 或 $+\infty$) 相对于 $\mathcal{E}_{\sigma_b,\,\sigma_e}$ 的分布而言为零。因此，根据连续映射定理可知，在分布意义下且当 $t\uparrow\infty$时，

$$\Phi_{\beta,B}\left(\mathcal{E}_{\sigma_b,\sigma_e}(t)\right)\Rightarrow\Phi_{\beta,B}\left(\mathcal{E}_{\sigma_b,\sigma_e}\right)=\sum_{k,l}\mathrm{e}^{\beta(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}\mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}>-B}. \tag{4.36}$$

注意，根据命题4.1，对于所有 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在 B_0，使得对于所有$B\geq B_0$以及所有足够大的 t,

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{X}_{\beta,1}(t)-\Phi_{\beta,B}(\mathcal{E}_{\sigma_b,\sigma_e}(t)|>\delta\right)<\epsilon. \tag{4.37}$$

因此，根据Slutsky定理，$\mathcal{X}_{\beta,\,1}(t)$依分布收敛于

$$\mathcal{X}_{\beta,1}=\lim_{B\uparrow\infty}\sum_{k,l}\mathrm{e}^{\beta(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}\mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}>-B}. \tag{4.38}$$

□

定理 *1.5* 的证明：利用表示式 (3.2)，$e^{-\sigma m(t)}\mathcal{X}_{\beta,\,\rho}(t)$ 在分布上等于

$$\sum_{k\leq n(t)}\mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)(x_k(t)-m(t))+i\tau\sqrt{1-\rho^2}z_k(t)+i\rho\tau m(t)}, \tag{4.39}$$

其中，$\{z_k(t)\ \ k=1,\ \ldots\ldots,\ n(t)\}$ 是定义在同一 Galton-Watson 树上的变速 BBM $X(t)$的独立副本。若 $\rho\notin\{-1,1\}$，则由 [23, 引理 3.2]（利用变速BBM中的每条路径都可视为标准 BBM的一条时间变换路径），并将引理陈述之后针对标准 BBM的讨论调整为适用于变速BBM，可得

$$\mathcal{G}(t):=\sum_{k\leq n(t)}\delta_{(x_k(t)-m(t),\exp[i\sqrt{1-\rho^2}\tau z_k(t)+i\rho\tau m(t)])} \tag{4.40}$$

弱收敛为 $t\uparrow\infty$to

$$\mathcal{G}:=\sum_{k,l\geq1}\delta_{(\eta_k+\Delta_l^{(k)},U^{(k)}\tilde{W}_l^{(k)})}, \tag{4.41}$$

其中 $\eta_k,\Delta_l^{(k)}$ 如 (1.12) 中所述，$(U^{(k)})_{k\geq1}$ 是独立同分布的单位圆上均匀分布随机变量，$\tilde{W}_l^{(k)}$ 是单位圆上某个点过程的原子。我们用 $\tilde{\mathbb{M}}$ 表示 $\{\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\}\times\{z\in\mathbb{C}$ 上局部有限计数测度的空间：$|z|=1\}$，并赋予其 ˜ ˜弱收敛拓扑。对于 $B>0$，考虑泛函 $\Phi_{\beta,B}$：$\mathbb{M}\to\mathbb{C}$定义为

$$\tilde{\Phi}_{\beta,B}\left(\sum_{k\in I}\delta_{(x_k,z_k)}\right):=\sum_{k\in I}\mathrm{e}^{\beta x_k}z_k\mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}\geq-B}, \tag{4.42}$$

˜其中 I 是一个可数指标集。在˜上取值于 $\mathbb{M}$ 的局部有限计数测度集合中，泛函$\Phi_{\beta,\,B}$不连续的测度，即赋予（$-B$，·）或（$+\infty$，·）正测度的测度，关于 $\mathcal{G}$的分布而言，其测度为零。因此，根据连续映射定理可知，在分布意义下，

$$\lim_{t\uparrow\infty}\tilde{\Phi}_{\beta,B}(\mathcal{G}_t)=\tilde{\Phi}_{\beta,B}(\mathcal{G})=\sum_{k,l\geq1}\mathrm{e}^{(\sigma+i\rho\tau)(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}U^{(k)}\tilde{W}_l^{(k)}\mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}\geq-B}. \tag{4.43}$$

现在， $e^{i\rho\tau(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}U^{(k)}$ 在单位圆上均匀分布，因此 (4.43) 的分布等于

$$\sum_{k,l\geq 1} \mathrm{e}^{\sigma(\eta_k+\Delta_l^{(k)})} U^{(k)} \tilde{W}_l^{(k)} \mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}\geq -B}. \tag{4.44}$$

B由命题4.1可知，对于所有 $\epsilon,\delta>0$，都存在 B_0，使得对于所有 $B\geq B_0$ 和 t，都有 larg e,

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathcal{X}_{\beta,\rho}(t)-\tilde{\Phi}_{\sigma+i\rho\tau,B}(\mathcal{G}(t)\right|>\delta\right)<\epsilon. \tag{4.45}$$

因此，由Slutsky定理，$\mathcal{X}_{\beta,\ \rho}(t)$ 当 $t\uparrow\infty$ 时依分布收敛到

$$\mathcal{X}_{\beta,\rho}=\lim_{B\uparrow\infty}\sum_{k,l\geq 1}\mathrm{e}^{\sigma(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}U^{(k)}\tilde{W}_l^{(k)}\mathbb{1}_{\eta_k+\Delta_l^{(k)}\geq -B}=\sum_{k,l\geq 1}\mathrm{e}^{\sigma(\eta_k+\Delta_l^{(k)})}U^{(k)}\tilde{W}_l^{(k)}. \tag{4.46}$$

后者可改写为

$$\sum_{k\geq 1} e^{\sigma\eta_k}U^{(k)}W^{(k)}, \tag{4.47}$$

其中 $W^{(k)}:=\sum_{l\geq 1}e^{\sigma\Delta_l^{(k)}}\tilde{W}_l^{(k)}$ 是独立同分布的随机变量。因此，在给定 Y_{σ_b} 的条件下，$\mathcal{X}_{\beta,\rho}$ 的分布是复各向同性 ($\sqrt{2}\neq\sigma$)-稳定的。□

5. B3 阶段

Let

$$N_{\tau,\sigma}(t)=\mathrm{e}^{-t(1/2+\sigma^2)}\mathcal{X}_{\beta,\rho}. \tag{5.1}$$

定理 1.6 的证明依赖于矩方法，与 [14] 中定理 1.11 的证明类似。首先，我们在引理 5.1 中证明，二阶矩的极限在 $t\to\infty$ 时是有限的。然后，我们在引理 5.2 和引理 5.3 中证明，可以引入适当的截断。最后，在引理 5.4 中，我们研究截断版本的所有矩的渐近行为$N_{\tau,\ \sigma}(t)$。

引理 5.1 （二阶矩）。对于 $\beta\in B_3$，存在一个常数 C 使得 t

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(|N_{\tau,\sigma}(t)|^2)=C. \tag{5.2}$$

证明。由 (3.2)，(5.2) 中的期望等于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)+\sigma x_{k'}(t)-i\tau y_{k'}(t)-t(1+2\sigma^2)}\right). \tag{5.3}$$

利用 X 和 Y 的相关系数为 ρ，并令 $\lambda=(\sigma+i\tau\rho)$，(5.3) 可写为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)+i\sqrt{1-\rho^2}\tau(z_k(t)-z_{k'}(t))-t(1+2\sigma^2)}\right)\\&=\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)}\right),\end{aligned} \tag{5.4}$$

这里在以底层树为条件时，利用了 X 和 Z 的独立性。根据多到二引理，(5.4) 中的期望等于

$$K\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\int_0^t \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}$$
$$\times\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi(t-tA(s/t))}}\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2(t-tA(s/t))}}\right|^2$$
$$=K\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\int_0^t \mathrm{d}s\mathrm{e}^{2t-s+(\sigma^2-\tau^2)(t-tA(s/t))}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}. \quad (5.5)$$

由于关于 x 的积分计算结果为 $\mathrm{e}^{2\sigma^2 tA_{(s/t)}}$，因此总计得到

$$K\int_0^t \mathrm{d}s\mathrm{e}^{t-s-(\sigma^2+\tau^s)(t-tA(s/t))}. \quad (5.6)$$

现在，当 s 接近 t时，我们有

$$t-tA(s/t)=\sigma_e^2(t-s)+O(s^2/t). \quad (5.7)$$

注意到 $tA(s/t) < s$和 $\sigma^2+\tau^2<1$。利用这一点和 (5.7)，我们推得 (5.6) 中的积分渐近等于

$$\lim_{R\to\infty}K\int_{t-R}^t \mathrm{d}s\mathrm{e}^{t-s-(\sigma^2+\tau^s)(t-tA(s/t))}=\lim_{R\to\infty}K\int_{t-R}^t \mathrm{d}s\mathrm{e}^{t-s-(\sigma^2+\tau^s)\sigma_e^2(t-s)}$$
$$=\frac{K}{(\sigma^2+\tau^2)\sigma_e^2-1}. \quad (5.8)$$

□

引理 5.2。 设 $\beta\in B_3$。对于所有 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在 B_0，使得对于所有$B>B_0$，当所有 t 足够大时，

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)t}\mathbb{1}_{x_k(t)>2\sigma t+B\sqrt{t}}\right|>\delta\right)<\epsilon. \quad (5.9)$$

证明。 利用切比雪夫不等式，(5.9) 中的概率小于

$$\delta^{-2}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)t}\mathbb{1}_{x_k(t)>2\sigma t+B\sqrt{t}}\right|^2\right). \quad (5.10)$$

计算平方，并如(5.4)中所述利用 X 与Y之间的相关系数等于 ρ 与 $\lambda=(\sigma+i\tau\rho)$，则(5.10)中的期望等于

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)}\mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)>2\sigma t+B\sqrt{t}}\right). \quad (5.11)$$

我们将(5.11)中的期望拆分为两个加项，即 (I) 和 (II)，区分$d(x_k,x_{k'})<t-r$与否（我们将在证明中稍后选择 $r>0$）。

$$(I)\le\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{n(t)}\mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})\le t-r}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2}\mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda}x_{k'}(t)}\right), \quad (5.12)$$

当只对 s 从 0 积分到 $t-r$ 时，它等于 (5.5)。按照推导至 (5.8) 的计算，通过将 r 取足够大，可以使其小于 $\epsilon/3$ 。(II) 等于

$$K\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}$$
$$\times\left|\int_{2\sigma t+B\sqrt{t}-x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi(t-tA(s/t))}}\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2(t-tA(s/t))}}\right|^2. \tag{5.13}$$

对于任意 $R>0$，若 $2\sigma t+B\sqrt{t}-x>R$，则通过选取足够大的 R，可以使关于 y 的积分的绝对值任意小（对任意有限的 r 均成立）（因为由 (5.7)， $t-tA(s/t)$ 是 r 阶的）。我们固定这样一个 $R>0$。最后，我们考察补集 $2\sigma t+B\sqrt{t}-x<R$。在此事件上，(5.13) 小于

$$K\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\int_{2\sigma t+B\sqrt{t}-R}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma x-\frac{x^2}{2tA(s/t)}}$$
$$\times\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi(t-tA(s/t))}}\mathrm{e}^{\lambda y-\frac{y^2}{2(t-tA(s/t))}}\right|^2. \tag{5.14}$$

我们像之前一样对 y 进行积分，得到 (5.14) 等于

$$K\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{(\sigma^2-\tau^2)(t-tA(s/t))}\mathrm{e}^{2t-s}\int_{2\sigma t+B\sqrt{t}-R}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\frac{(x-2\sigma tA(s/t))^2}{2tA(s/t)}}\mathrm{e}^{2\sigma^2tA(s/t)}}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}}. \tag{5.15}$$

我们观察到，该积分

$$\int_{2\sigma t+B\sqrt{t}-R}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\frac{(x-2\sigma tA(s/t))^2}{2tA(s/t)}}}{\sqrt{2\pi tA(s/t)}} \tag{5.16}$$

只要将 B 取足够大，就能使其任意小，因为当 $tA(s/t)=t-O(r)$时（见（5.7））。由引理 5.1 中的二阶矩计算可知，只要将 B 取足够大，就能使（5.14）任意小。结合此前得到的界，即完成引理 5.2 的证明。□

Set

$$\mathcal{S}_{r,t,\gamma}:=\left\{x(\cdot)\in C\left([0,t],\mathbb{R}\right):\forall s\in[(\Sigma^2)^{-1}(r),t]:x_k(s)>2\sigma tA(s/t)+(tA(s/t))^{\gamma}\right\}. \tag{5.17}$$

引理 5.3。设 $\beta\in B_3$、$\gamma>1/2$ 和 $B>0$。对于所有 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在 r_0，使得对于所有 $r>r_0$，并且对于所有足够大的 t，均一致成立，

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)t}\mathbb{1}_{x_k(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_k\notin\mathcal{S}_{r,t,\gamma}}\right|>\delta\right)<\epsilon. \tag{5.18}$$

证明。与引理 5.2的证明一样，我们使用切比雪夫不等式，将 (5.18) 中的概率从上方界定为

$$\delta^{-2}\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n(t)}\mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau y_k(t)-\left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)t}\mathbb{1}_{x_k(t)\le 2\sigma t+B\sqrt{t},x_k\notin\mathcal{S}_{r,t,\gamma}}\Big|^2\Big). \tag{5.19}$$

采用与 (5.11) 相同的重新表述，并去除对其中一个粒子的部分限制，(5.19) 中的期望有如下上界$\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}$ 乘以

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda} x_{k'}(t)} \mathbb{1}_{x_k(t),x_{k'}(t)\le 2\sigma t+B\sqrt{t}, x_k\notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}} \Big). \tag{5.20}$$

我们在引理 5.2 的证明中已经看到,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda} x_{k'}(t)} \mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})<t-r} \Big) \tag{5.21}$$

通过令 r 足够大，可以使其任意小。此外,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big(\textstyle\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2} \\ &\times \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda} x_{k'}(t)} \mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})>t-r} \mathbb{1}_{x_k(t)-x_k(d(x_k,x_{k'}))<-R} \Big) \end{aligned} \tag{5.22}$$

通过令 R 足够大，可以使其任意小。因此，只需对其进行界定

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big(\sum_{k,k'=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-(t-tA(d(x_k,x_{k'})/t))(1-\rho^2)\tau^2} \mathrm{e}^{\lambda x_k(t)+\overline{\lambda} x_{k'}(t)} \mathbb{1}_{x_k(t)\le 2\sigma t+B\sqrt{t}} \\ &\times \mathbb{1}_{x_k\notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}} \mathbb{1}_{d(x_k,x_{k'})>t-r} \mathbb{1}_{x_k(t)-x_k(d(x_k,x_{k'}))>-R} \Big). \end{aligned} \tag{5.23}$$

我们注意到，$x_k(t) - x_k(d(x_k, x_{k'})) > -R$ 和$x_t < 2\sigma t + B\sqrt{t}$ 蕴含

$$x_k(d(x_k, x_{k'})) \le 2\sigma t + B\sqrt{t} + R. \tag{5.24}$$

我们区分两种情况：第一种情况下，我们得到 $s \in [(\Sigma^2)^{-1}(r)\ d(x_k, x_{k'})]$；第二种情况下，存在 $s \in [d(x_k, x_{k'})\ t]$，使得时刻 s 的粒子位置过高。我们先讨论第一种情况。在此事件下，我们可以将 (5.23) 的上界估计为$Ke^{-t(1+2\sigma^2)}$ 倍

$$\begin{aligned} &\int_{t-r}^{t} \mathrm{d}q \mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(q/t))} \mathrm{e}^{2t-q} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda y_1(t-tA(q/t))+\overline{\lambda} y_2(t-tA(q/t))} \right) \\ &\times \mathbb{E}\left(e^{2\sigma x_1(tA(q/t))} \mathbb{1}_{\exists s\in[(\Sigma^2)^{-1}(r),q]: x_1(tA(s/t))\le 2\sigma tA(s/t)+(tA(s/t))^\gamma, x_1(tA(q/t))<2\sigma t+B\sqrt{t}+R.} \right), \end{aligned} \tag{5.25}$$

其中 x_1 是标准布朗运动，$y_1(t - tA(q/t))\ y_2(t - tA(q/t))$是相互独立的中心化高斯随机变量，其方差为 $t - tA(q/t)$。注意到

$$\zeta(s) = x_1(s) - \frac{s}{tA(q/t)} x_1(tA(q/t)), \tag{5.26}$$

是在时间 $tA(q/t)$内从零到零的标准布朗桥，我们看到（5.25）中的第二个期望的上界为

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sigma x_1(tA(q/t))} \mathbb{1}_{\exists s\in[r,tA(q/t)]:\zeta(s)\le 2\sigma s+s^\gamma-\frac{s}{tA(q/t)}(2\sigma t+B\sqrt{t}+R)} \right) \\ &\le \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sigma x_1(tA(q/t))} \mathbb{1}_{\exists s\in[r,tA(q/t)]:\zeta(s)\le s^\gamma-O\left(\frac{s}{\sqrt{t}}\right)-O\left(\frac{(r\vee R)s}{t}\right)} \right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sigma x_1(tA(q/t))} \right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(\exists s \in [r, tA(q/t)] : \zeta(s) \le s^\gamma - O\left(\frac{s}{\sqrt{t}}\right) - O\left(\frac{(r\vee R)s}{t}\right) \right), \end{aligned} \tag{5.27}$$

其中在最后一步，我们利用了 ζ 与 $x_1(tA(q/t))$ 相互独立。对于足够大的 r，根据标准布朗桥估计，(5.27) 中的概率小于 ϵ/C，其中

某个与 ϵ 无关的常数 $C>1$（并且通过增大 r 可以将其取为任意大）。将其代回 (5.25)，可得 (5.25) 的上界为

$$\epsilon/C\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}q\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(q/t))}\mathrm{e}^{2t-q}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda y_1(t-tA(q/t))+\overline{\lambda}y_2(t-tA(q/t))}\right)\mathbb{E}\left(e^{2\sigma x_1(tA(q/t))}\right). \tag{5.28}$$

在第二种情形中，即当 $s\in[d(x_k,\ x_{k'})\ t]$ 时，我们将 (5.23) 上界估计为 $Ke^{-t(1+2\sigma}$) 倍。 ^{2}

$$\begin{aligned}&\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}q\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(q/t))}\mathrm{e}^{2t-q}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\overline{\lambda}y_2(t-tA(q/t))}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sigma x_1(tA(q/t))}\right)\\&\quad\times\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(y_1(t)-y_1(tA(q/t)))}\mathbb{1}_{E_s}\right),\end{aligned} \tag{5.29}$$

其中 y_1 是标准布朗运动且

$$\begin{aligned}E_s\ \equiv\ &\Big\{\exists s\in[q,t]y_1(tA(s/t))>2\sigma tA(s/t)+(tA(s/t))^{\gamma},\\&\qquad y_1(tA(q/t))<2\sigma t+B\sqrt{t}+R,y_1(t)<2\sigma t+B\sqrt{t}\Big\}\end{aligned} \tag{5.30}$$

Let

$$\xi(s)=y_1(s)-\frac{s}{t-tA(q/t)}y_1(t)-\frac{t-s}{t-tA(q/t)}y_1(tA(q/t)), \tag{5.31}$$

是一个在时间 $t-tA(q/t)$ 内从0 到 0 的布朗桥。那么，(5.29) 中最后的期望与 (5.27) 中类似，可由上界

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(y_1(t)-y_1(tA(q/t)))}\mathbb{1}_{\exists s\in[0,t-tA(q/t)]:\xi(s)>(s+tA(q/t))^{\gamma}-B\sqrt{t}-R}\right)\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(y_1(t)-y_1(tA(q/t)))}\right)\\&\quad\times\mathbb{P}\left(\exists s\in[0,t-tA(q/t)]:\xi(s)>(s+tA(q/t))^{\gamma}-B\sqrt{t}-R\right),\end{aligned} \tag{5.32}$$

其中我们使用了独立性。根据标准布朗桥估计，当 t 趋于无穷时，(5.32)中的概率收敛于 0。综上，我们可以对 (5.23) 给出如下上界。

$$\begin{aligned}&\epsilon/CK\mathrm{e}^{-(1+2\sigma)t}\int_{t-r}^{t}\mathrm{d}q\mathrm{e}^{-\tau^2(1-\rho^2)(t-tA(q/t))}\mathrm{e}^{2t-q}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda y_1(t-tA(q/t))+\lambda y_2(t-tA(q/t))}\right)\\&\qquad\times\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{2\sigma x_1(tA(q/t))}\right)\le\epsilon,\end{aligned} \tag{5.33}$$

对于某个足够大的常数 C（可由我们选取）。为此，注意到 (5.33) 中的左端与二阶矩（见 (5.3)）仅相差一个 ϵ/C 前置因子。由引理 5.1 可知二阶矩有限。由此证明了引理 5.5。□

定义

$$N_{\tau,\sigma}^{B,\gamma}(t):=\sum_{l=1}^{n(t)}e^{-t(1/2+\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma x_l(t)+i\tau y_l(t)}\mathbb{1}_{x_l(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_l\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}}, \tag{5.34}$$

并令

$$b_l(r):=\mathrm{e}^{-r/2-tA(r/t)\sigma^2}\mathrm{e}^{\sigma x_l(r)+i\tau x_l(r)}. \tag{5.35}$$

下面的引理给出了当 $t\to\infty$ 时， $N^{B,\gamma}_{\tau,\sigma}(t)$ 的矩渐近行为。

引理 5.4（矩的渐近行为）。 对于 $\beta\in B_3$，对于任意 $B>0$ 和 $\gamma>1/2$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left|N_{\tau,\sigma}^{B,\gamma}(t)\right|^2\right]=C_{2,B}, \tag{5.36}$$

其中 极限$_{B\to\infty} C_{2,\ B} = C_2$ 并且，对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\lim_{r\uparrow\infty}\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|N^{B,\gamma}_{\tau,\sigma}(t)\right|^{2k} \mid \mathcal{F}_r\right] = k!(C_{2,B}\mathcal{M}_{2\sigma\sigma_b,0})^k \quad \textit{a.s. and in } L^1. \tag{5.37}$$

此外，对于 $k' < k$,

$$\lim_{r\uparrow\infty}\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[N^{B,\gamma}_{\tau,\sigma}(t)^k\overline{N^{B,\gamma}_{\tau,\sigma}(t)}^{k'} \mid \mathcal{F}_r\right] = 0 \quad \textit{a.s. and in } L^1. \tag{5.38}$$

为了证明引理 5.4，我们需要以下引理。

引理5.5. [14, 引理3。5] 令 x、y 为服从 $\mathcal{N}(0,q)$ 分布的随机变量。则，对于任意 m_1、$m_2 \geq 1$，以及任意常数 $C > 0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{q\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{(m_1+2)\sigma x+i\tau m_2 x} + \mathrm{e}^{(m_1+2)\sigma x-i\tau m_2 x}\right)\mathbb{1}_{A_{x,\sigma,q,\gamma}}\right]\\ &\qquad o\Big(\mathrm{e}^{2\sigma q}\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{m_1\sigma x+i\tau m_2 x} + \mathrm{e}^{m_1\sigma x-i\tau m_2 x}\right)\mathbb{1}_{A_{x,\sigma,q,\gamma}}\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2\sigma y}\mathbb{1}_{A_{y,\sigma,q,\gamma}}\right]\Big),\end{aligned} \tag{5.39}$$

其中 $A_{x,\ \sigma,\ q,\ \gamma} := \{x < 2\sigma q + Cq^\gamma\}$. 类似地,

$$\begin{aligned}&\lim_{q\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{(m_1+1)\sigma x+i\tau(m_2+1)x} + \mathrm{e}^{(m_1+1)\sigma x-i\tau(m_2+1)x}\right)\mathbb{1}_{A_{x,\sigma,q,\gamma}}\right]\\ &= o\Big(\mathrm{e}^{2\sigma q}\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{m_1\sigma x+i\tau m_2 x} + \mathrm{e}^{m_1\sigma x-i\tau m_2 x}\right)\mathbb{1}_{A_{x,\sigma,q,\gamma}}\right]\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{(\sigma+i\tau)y} + \mathrm{e}^{(\sigma-i\tau)y}\right)\mathbb{1}_{A_{y,\sigma,q,\gamma}}\right]\Big).\end{aligned} \tag{5.40}$$

引理 *5.4*的证明： 我们对 $k \in \mathbb{N}$进行归纳。对于 $k = 1$，我们注意到，对于 $l \leq n(t)$,

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{1}\{x_l(t) > 2\sigma t + B\sqrt{t}\} + \mathbb{1}\{x_l(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_l \notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\}\\ + \mathbb{1}\{x_l(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_l \in \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\}.\end{aligned} \tag{5.41}$$

将这个单位分解代入（5.3），我们可以把 $\mathbb{E}\left[\left|N_{\tau,\sigma}(t)\right|^2\right]$ 改写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-2t\left(1/2+\sigma^2\right)}\mathbb{E}\Big[\sum_{l_1,l_2=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma\left(x_{l_1}(t)+x_{l_2}(t)\right)+i\tau\left(y_{l_1}(t)-y_{l_2}(t)\right)}\Big(\mathbb{1}_{\{x_{l_1}(t),x_{l_2}(t)>2\sigma t+B\sqrt{t}\}}\\ &\qquad + 2\mathbb{1}\{x_{l_1}(t) > 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_{l_2}(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}\}\\ &\qquad + \mathbb{1}\{x_{l_1}(t), x_{l_2}(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_{l_1} \notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\}\\ &\qquad + \mathbb{1}\{x_{l_1}(t), x_{l_2}(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_{l_2} \notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\Big)\Big]\\ &\qquad + \mathbb{E}\left[\left|N^{B,\gamma}_{\tau,\sigma}(t)\right|^2\right]\\ &\qquad =: \mathrm{(I)} + \mathrm{(II)} + \mathrm{(III)} + \mathrm{(IV)} + \mathrm{(V)}.\end{aligned} \tag{5.42}$$

注意，通过采用引理 5.2 和 5.3 证明中的计算方法，增大 B 和 r 分别可以使项 (I) 和 (III) 任意小。

项 (II) 可按项 (I) 的方式处理；对于（5.12）中的界及其下文，只需两个粒子位置中的一个超过 $2\sigma t + B\sqrt{t}$ 即可。

为了控制项 (IV)，我们将其上界估计为 $\mathrm{e}^{-2t\left(1/2+\sigma^2\right)}$ 乘以

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{l_1,l_2=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma\left(x_{l_1}(t)+x_{l_2}(t)\right)+i\tau\left(y_{l_1}(t)-y_{l_2}(t)\right)} 2\mathbb{1}\{x_{l_2}(t), x_{l_1}(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_{l_2} \notin \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\}\Big]. \tag{5.43}$$

注意到 (5.43) 与 (5.20) 相同。按照 (5.20) 后的论证，我们可以看出，通过增大 r.，可以使 (5.43) 任意小。

结合关于项 (I)、(II)、(III) 和 (IV) 的界，由引理 5.1 即得所述结论。

为了估计 $2k$阶矩，我们将 (5.37) 改写为

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sum_{l_1,\dots,l_{2k}\le n(t)}\left(\prod_{j=1}^{2k}\mathrm{e}^{-t(1/2+\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma x_{l_j}(t)+i\tau y_{l_j}(t)}+\prod_{j=1}^{2k}\mathrm{e}^{-t(1/2+\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma x_{l_j}(t)-i\tau y_{l_j}(t)}\right)\times\mathbb{1}\{x_{l_j}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_j}x_{l_1}\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\}\Big],\tag{5.44}$$

将每个加数与其复共轭配对。对于 $l_1,\dots,l_{2k}\le n(t)$，我们可以用以下算法找到一个匹配：令 $m=1$。

1. 选择两个标签 j,j'，使得 $d(x_{l_j},x_{l_{j'}})$ 最大。以下将它们分别记为 l_m 和 $l_{\sigma(m)}$。
2. 删除这两个标签。将 m 加 1。重复此过程。

我们将上述算法称为“最优匹配”。我们将由此得到的配对记为 $(l_1,l_{\sigma(1)}),\dots,(l_k,l_{\sigma(k)})$。我们将 (5.44) 改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{E}\Bigg[\sum_{l_2,\dots,l_k\le n(t)}\Big(&\prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma\left(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)+i\tau\left(y_{l_j}(t)+y_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)}\\&\times\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma(x_{l_1}(t)+x_{l_{\sigma(1)}}(t))+i\tau(y_{l_1}(t)-y_{l_{\sigma(1)}}(t))}+\\&\prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma\left(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)-i\tau\left(y_{l_j}(t)+y_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)}\\&\times\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma(x_{l_1}(t)+x_{l_{\sigma(1)}}(t))-i\tau(y_{l_1}(t)-y_{l_{\sigma(1)}}(t))}\Big)\\&\times\mathbb{1}\left\{x_{l_{\sigma(j)}}(t),x_{l_j}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_{\sigma(j)}},x_{l_j}(s)\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\right\}\\&\times\mathbb{1}\left\{x_{l_{\sigma(1)}}(t),x_{l_1}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_{\sigma(1)}},x_{l_1}\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\right\}\Bigg].\end{aligned}\tag{5.45}$$

利用 (3.2)，我们可以改写为 $j\in\{1,\sigma(1)\}$

$$y_{l_j}(t)=\rho y_{l_j}(t)+\sqrt{1-\rho^2}z_{l_j}(t),\tag{5.46}$$

其中，$z_k(t))_{k\le n(t)}$ 是与$(x_k(t))_{k\le n(t)}$处于同一棵Galton-Watson树上、但与其相互独立的分支布朗运动粒子。注意，利用要求 $d(x_{l_1},\ x_{l_{\sigma_1}})$取最大值这一条件，我们有

$$\begin{aligned}i\tau(y_{l_1}(t)-y_{l_{\sigma(1)}}(t))=i\sqrt{1-\rho^2}\tau\big[&z_1(t-tA(d(x_{l_1}(t),x_{l_{\sigma_1}}(t))/t))\\&-z_2(t-tA(d(x_{l_1}(t),x_{l_{\sigma_1}}(t))/t))\big]+i\tau\rho\left(x_{l_1}(t)-x_{l_{\sigma(1)}}(t)\right),\end{aligned}\tag{5.47}$$

其中，z_1,z_2 是两个相互独立的服从 $\mathcal{N}(0,t-tA(d(x_{l_1}(t),x_{l_{\sigma_1}}(t))/t))$ 分布的随机变量。将 (5.47) 代入 (5.45)，并对 z_1,z_2 计算期望。

第一个加项（注意第二个只是它的复共轭），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{E}\Bigg[&\sum_{l_2,\dots,l_k\le n(t)}\prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\exp\Big(\sigma(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t))+i\tau(y_{l_j}(t)+y_{l_{\sigma(j)}}(t))\Big)\\ &\times\mathbb{1}\Big\{x_{l_{\sigma(j)}}(t),x_{l_j}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_{\sigma(j)}},x_{l_j}(s)\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\Big\}\\ &\times\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-\tau^2(1-\rho^2)\left(t-tA(d(x_{l_1}(t),x_{l_{\sigma_1}}(t))/t)\right)}\mathrm{e}^{(\sigma+i\tau\rho)x_{l_1}(t)+(\sigma-i\tau\rho)x_{l_{\sigma(1)}}}\\ &\times\mathbb{1}\Big\{x_{l_{\sigma(1)}}(t),x_{l_1}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_{\sigma(1)}},x_{l_1}(s)\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\Big\}\Bigg].\end{aligned}\tag{5.48}$$

我们分解

$$\begin{aligned}x_{l_{\sigma(1)}}(t)&=x_{l_1}(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}}))+x^{(1)}(t-tA(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}}))/t);\\ x_{l_1}(t)&=x_{l_1}(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}}))+x^{(2)}(t-tA(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})/t)),\end{aligned}\tag{5.49}$$

其中，$x^{(1)},x^{(2)}$ 是两个相互独立的$\mathcal{N}(0,t-tA(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})/t))$-分布随机变量。根据我们匹配过程的第一步，将 (5.48)代入 (5.49)，并计算关于 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 的期望，我们得到 (5.48) 的上界为 [1]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[&\sum_{l_2,\dots,l_k\le n(t)}\prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma\left(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)+i\tau\left(y_{l_j}(t)+y_{l_{\sigma(j)}}(t)\right)}\\ &\times\mathbb{1}\Big\{x_{l_{\sigma(1)}}(t),x_{l_1}(t)<2\sigma t+B\sqrt{t},x_{l_1},x_{l_1}(s)\in\mathcal{S}_{r,t,\gamma}\Big\}\\ &\times\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)-\tau^2\left(t-tA(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})/t)\right)+\sigma^2\left(t-tA(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})/t)\right)}\mathrm{e}^{2\sigma x_{l_1}(d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}}))}\\ &\times\mathbb{1}\{\forall s\in[r,d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})]\colon x_{l_{\sigma(1)}}(s),x_{l_1}(s)\le 2\sigma tA(s/t)+(tA(s/t))^{\gamma}\}\Big].\end{aligned}\tag{5.50}$$

现在引入事件

$$\mathcal{A}_r=\Big\{\exists s\in[r,d(x_{l_1},x_{l_{\sigma(1)}})],\exists j\in\{2,\dots,k,\sigma(2),\dots,\sigma(k)\}\colon d(x_{l_1},x_{l_j})=s\Big\}.\tag{5.51}$$

我们可以将 (5.50) 重写为

$$\mathbb{E}\left[\dots\times\mathbb{1}_{\mathcal{A}_r}\right]+\mathbb{E}\left[\dots\times\mathbb{1}_{\mathcal{A}_r^c}\right]=:J_{\mathcal{A}_r}+J_{\mathcal{A}_r^c}.\tag{5.52}$$

我们利用引理 5.5 证明，第一项的阶小于第二项。考虑 $J_{\mathcal{A}_r}$。考虑由 Galton-Watson树的叶节点 l_1、$l_{\sigma(1)}$、.....、l_k、$l_{\sigma(k)}$生成的骨架。用 path(·) 表示从给定叶节点“·”通向树根的唯一一条路径（= 边的序列）。我们给 Galton-Watson树中的每条边关联以下数值

$$m(e):=\sum_{j\in\{1,\sigma(1),\dots,k,\sigma(k)\}}\mathbb{1}_{e\subset\mathrm{path}(l_j)}.\tag{5.53}$$

[1]由于引理 5.4 中的二阶矩计算，也有相应的下界成立。

对于 $k,\ j \le n(t)$，定义

$$\text{length}^{\text{eff}}(x_k(t), x_j(t)) := tA\left(\frac{d(x_1(t), x_k(t))}{t}\right) - tA\left(\frac{d(x_1(t), x_j(t))}{t}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.54}$$

有效长度。

引理 5.6。考虑路径 $x_{l_1}(t)$。存在 l_{j*}，其满足以下条件

(i) m 在 $d(x_1(t)\ x_{j^*-1}(t))$ 和 $d(x_1(t)\ x_{j^*}(t))$ 之间为常数，此外，

$$\text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{j^*-1}}, x_{l_{j^*}}) > 2r. \tag{5.55}$$

(ii) $\sum_{i=1}^{j*-1} \text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{i-1}}, x_{l_i}) < (\text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{j^*-1}}, x_{l_{j^*}}))^{\gamma}$, *where* $\text{length}^{\text{eff}}$ *is defined in* (5.54).

证明。对于所有 $t > t_0(r)$，这样的 l_{j^*} 都存在，因为至多有 $2k-2$ 个点，在这些点处m 可能发生变化。因此，必定存在一个长度为 $> 2r$ 的时间区间（当 t 足够大时），在此期间 m 的值不会发生变化。注意，如果

$$\sum_{i=1}^{j*-1} \text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{i-1}}, x_{l_i}) > (2r)^{\gamma}, \tag{5.56}$$

那么只需检查关于长度$^{\text{eff}}(x_{l_{j^*-1}}, x_{l_{j^*}})$的条件（ii）。假设$l_1, \ldots, l_j$均不满足（ii）。那么，

$$\sum_{i=1}^{j-1} \text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{i-1}}, x_{l_i}) \le Cr^{(\frac{1}{\gamma})^j}. \tag{5.57}$$

由于 $i < 2k-2$ 且总时间等于 t，因此必定存在 j 使得

$$\text{length}^{\text{eff}}(x_{l_{j-1}}, x_{l_j}) > Cr^{(\frac{1}{\gamma})^j}, \quad \text{for } t > t_0(r), \tag{5.58}$$

其中 $t_0(r)$充分大。 □

我们将 m 在 $d(x_1(t)\ x_{j^*-1}(t))$与 $d(x_1(t)\ x_{j^*}(t))m^*$之间的$x_{l_1}(t)$路径上的取值称为.....。简记为 $R = d(x_1(t)\ x_{j^*-1}(t))$，并令

$$\ell = \ell(j^*, t) := d(x_1(t), x_{j^*}(t)) - d(x_1(t), x_{j^*-1}(t)). \tag{5.59}$$

于是，在时间区间（$R,\ R+l$）上，m 取值为 m^*。此外，在时刻 R，最小粒子几乎必然为 $\min^{k\le n(R)} x_k(R) + C\sqrt{2RtA(R/t)}$ 到 ∞，其中某个$C > 0$几乎必然存在。为说明这一点，注意到由对称性、马尔可夫不等式和高斯尾界，

$$\mathbb{P}(\min_{k\le n(R)} x_k(R) < -C\sqrt{2RtA(R/t)}) \le e^{R-(C')^2 tA(R/t)}. \tag{5.60}$$

由于 A 满足假设 1.1，因此它在 t 中可求和（并且当 C 足够大时，在 R 中也可求和）。由此，结论可由博雷尔–坎泰利引理得出。因此，我们可以在事件$x_{l_{j^*}}(R) > -C\sqrt{2RtA(R/t)}$上进行讨论。现在，

$$x_{l_{j^*}}(R+\ell) - x_{l_{j^*}}(R) < x_{l_{j^*}}(R+\ell) + C\sqrt{2tRA(R/t)}. \tag{5.61}$$

由于我们计算的是在 $x_{l_{j*}}(R+\ell) < 2\sigma tA((R+\ell)/t) + (tA((R+\ell)/t))^{\gamma}$ 条件下的期望，因此在该事件上得到

$$x_{l_{j^*}}(R+\ell) - x_{l_{j^*}}(R) < 2\sigma tA((R+\ell)/t) + (tA((R+\ell)/t))^{\gamma} + C\sqrt{2tRA(R/t)}. \tag{5.62}$$

由于我们对 j^* 的选择，有 $2\sigma tA(R/t) + C\sqrt{2tRA(\overline{R/t) < C'}[tA((R+\ell)/t) - tA(R/t)}]^\gamma$，其中某个正常数为 C'。仅对 $x_{l_{j^*}}(R+\ell) - x_{l_{j^*}}(R)$ 取期望，我们便可从 $J_{\mathcal{A}} + J_{\mathcal{A}}$ 中提取出因子

$$\mathbb{E}\Big[\left(\mathrm{e}^{(m^*\sigma+i\tau m')x_{l_{j^*}}(R+\ell)-x_{l_{j^*}}(R)} + \mathrm{e}^{(m^*\sigma-i\tau m')x_{l_{j^*}}(R+\ell)-x_{l_{j^*}}(R)}\right)\mathbb{1}_{E_{j^*,R}}\Big], \tag{5.63}$$

其中$E_{j^*,R}$ 等于

$$\begin{aligned} x_{l_{j^*}}(R+\ell) - x_{l_{j^*}}(R) \;&<\; 2\sigma\left(tA\left(\frac{R+l}{t}\right) - tA\left(\frac{R}{t}\right)\right) \\ &\quad +(C'+1)\left(tA\left(\frac{R+l}{t}\right) - tA\left(\frac{R}{t}\right)\right)^\gamma. \end{aligned} \tag{5.64}$$

根据引理 5.5，(5.63) 是

$$o\Big(\mathrm{e}^{2\sigma\ell}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{((m^*-2)\sigma+i\tau m')x_{l_{j^*}}(R+\ell)-x_{l_{j^*}}(R)}\mathbb{1}_{E_{j^*,R}}\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{2\sigma(x_{l_{j^*}}(R+\ell)-x_{l_{j^*}}(R))}\mathbb{1}_{E_{j^*,R}}\right]\Big), \tag{5.65}$$

对于 l 较大的情形（根据引理的假设 (i)，这对应于 r 较大的情形）。注意，(5.65) 中方括号内的量，对应于同一期望，只不过在底层树中，l_1，l_{σ_1} 在时间 R 之前分叉。

反复迭代可得

$$J_{\mathcal{A}_r} + \overline{J}_{\mathcal{A}_r} \underset{t,r\to\infty}{=} o(J_{\mathcal{A}_r^c} + \overline{J}_{\mathcal{A}_r^c}). \tag{5.66}$$

由于 k 是任意选取的，我们知道，对于足够大的 r，对 $2k$ 阶矩的主要贡献来自于 $l_1, \dots, l_k$ 在时刻 r 之前已经分裂的项。我们在给定 $\mathcal{F}_r$ 的条件下进行计算：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\sum_{l_1,l_2,\dots,l_k\le n(t)}\Big(\prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t))+i\tau(y_{l_j}(t)-y_{l_{\sigma(j)}}(t))} \\ &\qquad\qquad + \prod_{j=2}^{k}\mathrm{e}^{-t(1+2\sigma^2)}\mathrm{e}^{\sigma(x_{l_j}(t)+x_{l_{\sigma(j)}}(t))-i\tau(y_{l_j}(t)-y_{l_{\sigma(j)}}(t))}\Big) \\ &\times \mathbb{1}\left\{x_{l_{\sigma(j)}}(t), x_{l_j}(t) < 2\sigma t + B\sqrt{t}, x_{l_{\sigma(j)}}, x_{l_j}(s) \in \mathcal{S}_{r,t,\gamma}\right\}\mathbb{1}\{\sup_{j,j'\le k} d(l_j,l_{j'}) < r\}\;\Big|\;\mathcal{F}_r\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{l_1,l_2,\dots,l_k\le n(t)}\prod_{j=2}^{k} b_{l_j}(r)\bar{b}_{l_{\sigma(j)}}(r)\mathbb{E}\left[\left(\left(N_{\tau,\sigma}^{B,\gamma}(t-r)\right)^{(j)}\right)^2\right]\;\Big|\;\mathcal{F}_r\Big], \end{aligned} \tag{5.67}$$

其中，$b_{l_j}(r)$ 在 (5.35) 中定义，$\left(N^{B,\ \gamma}_{\tau\ \sigma,}(t-r)\right)^{(j)}$ 是 $N^{B,\ \gamma}_{\tau\ \sigma,}(t-r)$ 的独立同分布副本。正如本证明开头所述，根据我们的二阶矩计算（情形 $k=1$），

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\left(N_{\tau,\sigma}^{B,\gamma}(t-r)\right)^{(j)}\right)^2\right] = C_{2,B}. \tag{5.68}$$

此外，由于（标记过程中）在置换下具有不变性，

$$\sum_{l_1,l_2,\dots,l_k\le n(t)}\prod_{j=2}^{k} b_{l_j}(r)\bar{b}_{l_{\sigma(j)}}(r) = k!\Big(\sum_{k=1}^{n(r)}\mathrm{e}^{2\sigma x_k(r)-(r+2\sigma^2 tA(r/t))}\Big)^k. \tag{5.69}$$

注意，根据引理3.2， $\sum_{k=1}^{n(r)} \mathrm{e}^{2\sigma x_k(r)-(r+2\sigma^2 tA(r/t))}$ 依概率收敛于$\mathcal{M}_{2\sigma\sigma_b,0}$ 。这证明了（5.37）。

$k' < k$ 的情形类似。对前 k' 个粒子进行最优匹配（按照下文（5.44）所述的步骤）。其他粒子不参与匹配。取一个尚未匹配的 l_1 。沿着它的路径，我们同样可以找到第一个在其上 $m(\cdot)$为常数的宏观片段。应用引理 5.5，可得当 $\max_{j\in 1,\dots,k',1,\dots,k} d(l_1,l_j) < R$ 时，贡献最大，其中 R 充分大。注意到

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n(t)} \mathrm{e}^{\sigma x_k(t)+i\tau z_k(t)-(\frac{1}{2}+\sigma^2)t} \,\Big|\, \mathcal{F}_R\Big] = \mathrm{e}^{(1-\sigma^2-\tau^2)t/2-R-(\sigma^2-\tau^2)tA(R/t))/2} \sum_{k=1}^{n(R)} \mathrm{e}^{\sigma x_k(R)+i\tau z_k(R)}. \tag{5.70}$$

我们注意到，根据泰勒展开， $tA(R/t) = \sigma_b R + O(R^2/t)$。由于 $1-\sigma^2-\tau^2 < 0$ 属于 B_3，(5.70) 右侧的和在 $t\uparrow\infty$ 时趋于零。结合偶数情形中的论证，即可得出引理 5.4。□

定理 *1.6* 的证明。 回想一下，复各向同性分布 $\mathcal{N}(0, C_{2,B}\mathcal{M}_{2\sigma\sigma_b,0})$ 的偶数阶（分别为奇数阶）矩与 (5.37)（分别为 (5.38)）的右端相同。由引理 5.4 可知，在给定 $\mathcal{F}_r$ 的条件下，$N^{c,B}_{\sigma,\tau}(t)$ 的矩几乎必然收敛到 $\mathcal{N}(0, C_{2,B}\mathcal{M}_{2\sigma,0})$ 的矩，其中 $t\uparrow\infty$ ，然后 $r\uparrow\infty$。由于正态分布由其矩唯一确定，这意味着依分布收敛。此外，由引理 5.2 和引理 5.3，

$$\lim_{A\uparrow\infty}\lim_{t\uparrow\infty} \mathcal{L}\left[N_{\sigma,\tau}(t) - N^{c,B}_{\sigma,\tau}(t)\right] = \delta_0, \tag{5.71}$$

以及 $\lim_{B\to\infty} C_{2,B} = C_2$。定理 1.6 的结论得证。 □

6. 定理 1.2 的证明

本节中，作为前几节涨落结果的推论，我们推导出图 2 所示的相图。

定理*1.2*的证明。根据定理 1.3和定理1.6 以及引理3.9 (1)， $\beta \in B_1$ 和 B_3 在(1.8)中的依概率收敛由 [16,] 得出。对于 $|\rho| = 1$ ，玻璃相的收敛由定理 1.4得出；在其他情况下，则由定理 1.5得出。各相边界的公式 (1.8) 由极限对数配分函数的连续性得出。□

参考文献

[1] A. Adhikari 和 C. Brennecke。带横场的量子 Sherrington-Kirkpatrick 自旋玻璃模型的自由能。数学物理杂志，61(8):083302，16，2020。[2] L.-P.Arguin、A.Bovier 和N. Kistler。分枝布朗运动极值粒子的谱系。纯粹与应用数学通讯，64(12):1647–1676，2011。[3] E.C.Bailey 和J. P. Keating。对数相关场的极大值：近期的一些进展。物理学杂志 *A*，55(5)：论文编号 053001，76，2022。[4] I.Bena、M. Droz 和 A. Lipowski。平衡相变与非平衡相变的统计力学：Yang-Lee 形式。国际现代物理杂志*B*，19(29):4269–4329，2005。[5] A. Bovier 和 L. Hartung。双速分枝布朗运动的极值过程。电子概率杂志，19(18):1–28，2014。[6] A.Bovier和 L.Hartung。变速分枝布朗运动 1。弱相关区域中的极值过程。*ALEA* 拉丁美洲概率、数学与统计杂志，12(1):261–291，2015。[7] A. Bovier和 I. Kurkova。Derrida 广义随机能量模型。I. 具有有限层级的模型。*H.Poincaré* 概率与统计研究所年刊，40(4):439–480，2004。

[8] B.Derrida.包含能量间相关性的一种随机能量模型推广。物理学杂志快报，46(9):401–407，1985。[9] B.Derrida.随机能量模型配分函数的零点。物理学 A：统计力学与应用，177:31–37，1991。[10] B. Derrida、M.R.Evans 和E.R. Speer. 具有随机复权重的定向聚合物平均场理论。数学物理通讯，156(2):221–244，1993。[11] A. Dobrinevski、P.Le Doussal和K. Wiese.无序系统中的干涉：复杂随机景观中的一个粒子。物理评论 E，83(6):061116，2011。[12] M.Hairer 和H. Shen. 动力学正弦-戈登模型。数学物理通讯，341(3):933–989，2016。[13] L. Hartung和A. Klimovsky.复杂分枝布朗运动能量模型的玻璃相。电子通讯概率，20，2015。[14] L. Hartung和 A.Klimovsky. 复杂分枝布朗运动能量模型的相图。电子概率杂志，23：论文编号 127，27，2018。[15] J.Junnila、E.Saksman 和C. Webb. 虚部乘法混沌：矩、正则性及其与伊辛模型的联系。应用概率年刊，30(5):2099–2164，2020。[16] Z. Kabluchko 和A. Klimovsky. 复随机能量模型：零点与涨落。概率论及相关领域，158(1-2):159–196，2014。[17] Z.Kabluchko和A. Klimovsky. 复温度下的广义随机能量模型。预印本，2014。可访问http://arxiv.org/abs/1402.2142。[18] Z.Kabluchko和A.Klimovsky. 复温度下广义随机能量模型中的高斯涨落。预印本，2015。可访问 http://arxiv.org/abs/1402.2142。[19]A. Knauf.数论、动力系统与统计力学。数学物理评论，11(08):1027–1060，1999年9月。[20] H.Lacoin. 相边界上复高斯乘法混沌的收敛性。预印本，2023。可访问 https://arxiv.org/abs/2301.05274。[21] H.Lacoin、R.Rhodes和 V. Vargas. 复高斯乘法混沌。数学物理通讯，337(2):569–632，2015。[22] T. D. Lee 和 C.N. Yang.状态方程与相变的统计理论。II.晶格气体与伊辛模型。物理评论，87:410–419，1952。[23] T. Madaule、R.Rhodes 和 V.Vargas.复杂分枝布朗运动的玻璃相。数学物理通讯，334(3):1157–1187，2015。[24] C. Manai和S. Warzel.横向磁场中的广义随机能量模型：自由能与相图。概率数学物理，3(2):215–245，2022。[25] C.M.Newman和 W. Wu. Lee-Yang性质与高斯乘法混沌。数学物理通讯，369(1):153–170，2019。[26] X.Peng、H. Zhou、B.-B. Wei、J. Cui、J.Du和 R.-B. Liu. Lee-Yang 零点的实验观测。物理评论快报，114(1):010601，2015。[27]K.Takahashi. 自旋玻璃模型中配分函数零点的复制分析。物理学杂志 A，44(23):235001，23，2011。M.FELS，以色列理工学院——以色列理工学院，数据与决策科学学院，海法，3200003，以色列。电子邮箱：felsm@campus.technion.ac.il L. HARTUNG，约翰内斯·古腾堡大学美因茨数学研究所，STAUDINGER-WEG 9, 55099 美因茨，德国电子邮件地址：lhartung@uni-mainz.deA.KLIMOVSKY，数学研究所，数学系第八教席——应用随机学，维尔茨堡尤利乌斯-马克西米利安大学，EMIL-FISCHER-STR. 30，97074 WÜRZBURG，德国电子邮件地址: 安东·klimovsky@mathematik.uni-维尔茨堡.de