arXiv:2304.03584v1 [math.DG] 7 Apr 2023

回到几乎里奇孤立子

VladimirRovenski*, SergeyStepanov†和 Irina Tsyganok‡

摘要

在本文中，我们运用几何动力学和几何分析的概念与方法研究完备几乎里奇孤立子。特别地，我们刻画了完备几乎里奇孤立子类中的爱因斯坦流形。随后，我们利用里奇张量的正交展开考察紧致几乎里奇孤立子，从而为几乎里奇孤立子的概念提供依据。

关键词：几乎 Ricci 孤立子；能量密度；无穷小调和变换；共形基灵向量。

数学主题分类（2010）主要：53C21；次要：58J05。

1 引言

里奇流理论的重要组成部分之一是称为里奇孤立子的自相似解，参见 [7, 第 153 页-176]。里奇孤立子是爱因斯坦流形的推广，过去二十年间受到越来越深入的研究。这一理论除了因 G. Perelman 证明了庞加莱猜想而广为人知（详情参见 [12]）之外，在微分几何和理论物理中也有广泛的应用。另一方面，几乎里奇孤立子的研究由 Pigola、Rigoli、Rimoldi 和 Setty 开创；几乎里奇孤立子是拟爱因斯坦流形和里奇孤立子的推广，参见 [15]。若一个 n 维 $(n \geq 2)$ 黎曼流形 (M, g) 上存在一个光滑完备向量场 ξ 和一个函数 $\lambda \in C^{\infty}(M)$，使得

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_{\xi}\, g + \lambda\, g. \tag{1.1}$$

这里，Ric 是里奇张量，$\mathcal{L}_{\xi}$ 是沿 ξ方向的李导数算子。也就是说，对于 M上的任意光滑向量场 X、Y，有 $(\mathcal{L}_{\xi}\, g)\ (X,\ Y) = g\,(\nabla_X \xi,\ Y) + g\,(\nabla_Y \xi,\ X)$，其中 ∇是协变导数（列维-奇维塔联络）。称 $(M,\ g,\ \xi,\ \lambda)$为几乎 Ricci 孤立子。当 $\lambda = const$时，它是里奇孤子。注意，当 ξ 是基灵向量场，即 $\mathcal{L}_{\xi}\, g = 0$时，几乎 Ricci 孤立子 $(M,\ g,\ \xi,\ \lambda)$是爱因斯坦流形，即 $Ric = \frac{s}{n}\, g$。由此可应用舒尔引理，例如 [11], ，得到 $\lambda = const$。在特殊情形下，若对某个函数 $f \in C^{\infty}\,(M)$ 有 $\xi = \nabla f$，则称 $(M,\ g,\ \xi,\ \lambda)$为势函数为 f的梯度几乎里奇孤立子。

在 [15], 中，研究了几乎里奇完备梯度孤子。其他较新的论文研究了紧致几乎里奇孤立子（例如，[3, 2, 8]），或研究了具有额外几何结构流形上的几乎里奇孤立子，例如 [10, 14]。此外，人们还尝试寻找几乎里奇孤立子在理论物理中的应用，参见例如 [9]。

在第2—3节中，我们使用几何动力学和几何分析的概念与方法研究完备的几乎里奇孤立子。在第4节中，我们将对称二阶张量的正交展开（参见 [5, 第 130]页）应用于里奇张量，以研究紧的几乎里奇孤立子。特别是，这将使几乎里奇孤立子的概念得到实证。

*以色列海法大学数学系，3498838，海法。电子邮箱：vrovenski@univ.haifa.ac.il

†俄罗斯莫斯科125993，金融大学数学系；以及俄罗斯莫斯科125190，20号，全俄科技信息研究所数学系。电子邮箱：s.e.stepanov@mail.ru

‡俄罗斯莫斯科125993，金融大学数学系。电子邮箱：i.i.tsyganok@mail.ru

2 完备几乎 Ricci 孤立子

在此，我们从几何动力学的角度研究完备的几乎 Ricci 孤立子，¯见 [19, 1]。记 θ 为 ξ 的 g-对偶 1-形式， $\Delta = \nabla^*\nabla$为 ∇ 的形式伴随算子 ∇^* 所对应的拉普拉斯算子。首先，我们提出一个用于证明主要结果的引理。

引理 2.1。几乎 Ricci 孤立子 (M, g, ξ, λ) 的向量场 ξ 满足方程

$$\bar{\Delta}\,\theta = \mathrm{Ric}(\xi, \cdot) - (n-2)\,d\lambda\,. \tag{2.1}$$

回忆一下，向量场 ξ 在流形上生成一个流，它是由无穷小自微分同胚组成的单参数群 [11, pp. 12-14]。若由 ξ 生成的无穷小自微分同胚局部单参数群是一个调和自微分同胚群，则向量场 ξ 是 (M, g) 上的无穷小调和变换。当且仅当 $\Delta\theta = Ric(\xi, \cdot)$ 时，向量场 ξ 是 (M, g) 上的无穷小¯调和变换，其中 θ 是 ξ 的 g- 对偶 1- 形式，见 [17]。特别地，基灵向量场是 (M, g) 上无穷小调和变换的一个例子，见 [16]。此外，与里奇孤子 (M, g, ξ, λ) 相关联的向量场 ξ 也是 (M, g) 上的无穷小调和变换 [17, 18]。注意，由 ξ 生成的无穷小调和变换局部单参数群，或调和流，与 De Turck 调和流 [7, pp. 113–117] 直接相关。

下一个推论由引理 2.1 得出。

推论 2.1. 一个 n 维（$n \geq 3$）几乎 Ricci 孤立子（M, g, ξ, λ）是 Ricci 孤子，当且仅当其向量场 ξ 是无穷小调和变换。同时，与二维几乎 Ricci 孤立子（M, g, ξ, λ）相关联的向量场 ξ 是无穷小调和变换。

函数

$$e(\xi) := \frac{1}{2}\,\|\xi\|^2 = \frac{1}{2}\,g(\xi, \xi).$$

被称为由向量场 ξ 生成的流的能量密度，参见 [19, 第 273–274] 页。 ξ 的流的动能由积分公式定义，参见 [1, 第 2；19； 37],页

$$E(\xi) = \int_M e(\xi)\,d\,\mathrm{vol}_g\,.$$

动能可以是无限的，也可以是有限的（例如，在紧流形上）。注意，动能在 Hamilton 动力学中发挥着重要作用，参见例如 [1]。

根据上述定义和引理 2.1，我们给出主要定理。

定理 2.1. 设 (M, g, ξ, λ) 是一个 n 维 $(n \geq 3)$ 完备几乎 Ricci 孤立子，且沿 ξ-流的轨迹变化率 λ 逐点下界为 $\mathrm{Ric}(\xi, \xi)$:

$$\mathcal{L}_\xi\,\lambda \geq \mathrm{Ric}(\xi, \xi). \tag{2.2}$$

若 $E(\xi) < \infty$，则 ξ 是平行向量场，且 (M, g) 是爱因斯坦流形。此外，若该孤子的体积无穷大，则 $\xi = 0$。

根据李导数的定义，例如 [11, 第 29-30], 页，(2.2) 中函数 $f \in C^1(M)$ 关于向量场 ξ 的李导数为

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi(f) = df(\xi) = \nabla_\xi f = g(\nabla f, \xi).$$

特别是，由定理 2.1 可知，并非每个完备黎曼流形都支持几乎 Ricci 孤立子结构，另见 [15, 推论 1.5 和例 2.4]。

备注 2.1。如果黎曼流形 (M,g) 具有完备平行向量场，那么 (M,g) 是可约的，即局部上是实直线与某个其他黎曼流形的度量乘积。在定理 2.1 中，可以用假设 (M,g) 不可约来替代“无限体积”条件。

定理 2.1 可补充如下。设 (M,g,ξ,λ) 是满足 $Ric(\xi,\xi) \leq 0$ 且 $E(\xi) < \infty$ 的二维完备几乎 Ricci 孤立子，则(M,g,ξ,λ) 与欧几里得平面或以下平坦完备曲面之一等距：圆柱面、环面、M¨obius 带和克莱因瓶。

以下断言由 (1.1) 和定理 2.1 得出。

推论 2.2. 设 (M,g,ξ,λ) 是一个完备的几乎 Ricci 孤立子，使得 $E(\xi) < \infty$。若 λ 是沿着此流的轨迹非递减的函数，且 $\mathcal{L}_\xi \sqrt{e}(\xi) \leq -\lambda$，则 (M,g) 是一个爱因斯坦流形。此外，若该孤子具有无限体积，则 $\xi = 0$。

回忆一下，(M,g) 的体积形式由等式 $\omega_g(\partial_1,\ldots,\partial_n) = \sqrt{\det g}$ for$\partial_k = \partial/\partial x^k$ 定义，其中相对于局部坐标 $x^1,\ldots,x^n$。另请注意，黎曼流形 (M,g) 存在（全局）体积元，当且仅当 (M,g) 是可定向的，参见 [13, 第 195] 页。连通流形 (M,g) 上的体积形式具有单一的全局不变量，即（整体）体积 $\mathrm{Vol}(M,g) = \int_M \omega_g \, d\mathrm{vol}_g$，该体积在保体积形式变换下保持不变。体积 $\mathrm{Vol}(M,g)$ 可以是无限的，也可以是有限的（例如，对于紧流形 M，$\mathrm{Vol}(M,g) < \infty$）。

另一方面，具有非负Ricci曲率的完备非紧黎曼流形具有无限体积，参见 [4]。对于（M，g）的体积形式ω_g ，可以考察它沿着由 ξ的流所产生的轨迹的李导数。也就是说，我们有如下结论，参见 [12, 第 281]页：$\mathcal{L}_\xi \omega_g = (\mathrm{div}\ \xi)\omega_g$。根据李导数的定义， $\mathcal{L}_\xi \omega_g$度量了在由向量场 ξ生成的可微变换单参数群（或流）所确定的变形下，体积形式ω_g 的变化速率。

在著名专著 [13, 第 195] 页中，函数divξ 被称为由向量场 ξ生成的流下体积变化的对数速率（换言之，即体积膨胀率）。另一方面，条件div$\xi = 0$ 等于 $\mathcal{L}_\xi \omega_g = 0$。这意味着可微变换单参数群保持$\omega_g$ 不变，换言之，向量场 ξ 是体积形式的无穷小自同构，参见 [19,第 6]页。在动力系统中，这样的向量场 ξ 称为无散向量场，而由它生成的流称为不可压缩流，参见 [13, 第 125]页。无散向量场的几何动力学已在专著 [1]中得到详细研究。

以下命题成立。

引理 2.2. 设 (M,g,ξ,λ) 是一个完备定向几乎里奇孤子，且 ξ 的长度可积。如果体积膨胀的对数变化率在 ξ 的流所决定的形变下于 M 上不变号，那么 (1.1) 具有如下形式

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \frac{s}{n} g,$$

其中，右侧各分量相对于标准逐点标量积彼此正交。另一方面，如果 (1.1) 具有上述形式，那么 ξ 的流是不可压缩的。

推论 2.3. 设 (M,g,ξ,λ) 是一个完备定向几乎里奇孤子，且 ξ 的长度可积。如果在由 ξ 的流所确定的变形下，体积膨胀的对数变化率在 M 上不变号，那么 ξ 满足方程

$$\bar{\Delta}\,\theta = Ric(\xi,\cdot) - \frac{n-2}{n}\, ds.$$

3 第2节中结果的证明

引理 2.1 和推论 2.1 的证明。方程 (1.1) 关于局部坐标 $x^1, \dots, x^n$ 具有如下形式:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_\xi\, g_{ij} + \lambda\, g_{ij}, \tag{3.1}$$

其中 R_{ij}、g_{ij} 和 ξ_i 分别表示里奇张量 Ric、度量张量 g 的分量，以及 ξ 的分量 $\xi_i = g_{ij}\,\xi^j$。此外，$\theta = \xi^j$ 是在度量 g 所定义的对偶关系下与 ξ 对应的 1-形式。根据公式 $\mathcal{L}_\xi\, g_{ij} = \nabla_i\,\xi_j + \nabla_j\,\xi_i$，其中 $\nabla_i = \nabla_{\partial/\partial x^i}$，由 (3.1) 可得等式

$$\operatorname{div}\xi := \nabla_i\,\xi^i = s - n\,\lambda \tag{3.2}$$

关于 sconger, 标量曲率 s 的度量 g。将算子 $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ 应用于 (3.1)，我们得到

$$\nabla^i\,\nabla_i\,\xi_j + \nabla^i\nabla_j\,\xi_i = \nabla_j\,s - 2\,\nabla_j\,\lambda\,. \tag{3.3}$$

利用收缩的第二Bianchi恒等式，见(3.2)中的 [11], 和 $\nabla_i\,\xi^i$，我们有

$$\nabla_i\nabla_j\,\xi^i = \nabla_j\nabla_i\,\xi^i + R_{ij}\,\xi^i = \nabla_j\,s - n\nabla_j\,\lambda + R_{ij}\,\xi^i.$$

利用这一点，并注意到 $\bar{\Delta} = -\nabla^i\,\nabla_i$（拉普拉斯算子 $\bar{\Delta} = \nabla^*\nabla$ 及其坐标表达式一致，参见 [5, 第 1 段55]），我们将 (3.3) 改写为以下形式:

$$\bar{\Delta}\,\xi_j = R_{ij}\,\xi^i - (n-2)\,\nabla_j\,\lambda\,. \tag{3.4}$$

在无坐标形式下，(3.4) 与证明引理 2.1 的 (2.1) 一致。由此及 (2.1)，我们完成了推论 2.1 的证明。□

¯定理 2.1 的证明。在我们的情形下，第二个 Kato 不等式，$\|\xi\|\,\Delta\|\xi\| \geq -g(\Delta\,\xi,\xi)$，参见 [4, p. 380],

$$\|\xi\|\,\Delta\|\xi\| \geq -g(\bar{\Delta}\,\xi,\xi),$$

利用引理 2.1，可以改写为以下形式:

$$\|\xi\|\,\Delta\|\xi\| \geq (n-2)\,\mathcal{L}_\xi\lambda - Ric(\xi,\xi),$$

其中，Δ 是由等式 $\Delta\,f = \operatorname{trace}_g\nabla\,df$ 定义的拉普拉斯–贝尔特拉米算子，适用于任意函数 $f \in C^2(M)$。关于 $n \geq 3$ 的假设(2.2)意味着 $\|\xi\|\,\Delta\|\xi\| \geq 0$。于是，根据几何分析的经典定理（见 [21]），要么 $\int_M \|\xi\|^p\,d\mathrm{vol}_g = \infty$，其中 $p > 1$为正数；要么 $\|\xi\| = const$。因此，若至少对某个 $p > 1$有 $\|\xi\| \in L^p(M,g)$，则$\|\xi\| = const$。注意，不等式 $E(f) < \infty$ 等价于 $\|\xi\| \in L^2(M,g)$。根据上述结论（对 $p = 2$），以及条件 $E(f) < \infty$，可得 $\|\xi\| = const$。利用这一点和(3.4)，我们推出

$$0 = \frac{1}{2}\,\Delta\,g(\xi,\xi) = -g(\bar{\Delta}\,\xi,\xi) + \|\nabla\,\xi\|^2 = -Ric(\xi,\,\xi) + (n-2)\,\mathcal{L}_\xi\,\lambda + \|\nabla\,\xi\|^2. \tag{3.5}$$

根据（3.5），ξ 是一个平行向量场，特别地，$\mathcal{L}_\xi\, g = 0$。由（1.1）可得 $Ric = \lambda\, g$。由于$n \geq 3$，根据舒尔引理，例如，[11], 我们得到 $\lambda = const$。因此，(M,g)是一个爱因斯坦流形。接下来，如果 $\mathrm{Vol}(M,g) = \infty$，那么利用 $E(f) < \infty$ 以及 $\|\xi\| = const$，我们得到 $\xi = 0$。□

推论 2.2 的证明。由 (3.1) 我们推导出以下方程:

$$R_{ij}\,\xi^i\xi^j = \xi^i(\nabla_i\,\xi_j)\,\xi^j + \lambda\,\|\xi\|^2, \tag{3.6}$$

其中 $\xi^i(\nabla_i\,\xi_j)\xi^j = \frac{1}{2}\,\xi^i\nabla_i(\xi_j\,\xi^j) = \mathcal{L}_\xi\, e(\xi)$。因此，我们可以将 (3.6) 改写为以下形式

$$\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = \lambda\,\|\xi\|^2 + \mathcal{L}_\xi\, e(\xi).$$

因此，条件 $Ric(\xi,\xi) \le 0$ 等价于不等式 $\mathcal{L}_\xi \sqrt{e}(\xi) \le -\lambda$。由上述内容可知，推论 2.2 成立。□

引理 2.2 和推论 2.3 的证明。回顾以下定理，见 [6]：设 ξ是完备定向黎曼流形 (M,g) 上的一个光滑向量场，满足 $\|\xi\| \in L^1(M,g)$，且 div ξ在 (M,g) 上不变号，则 div $\xi = 0$在 (M,g) 上。特别地，若 ξ 是完备、非紧且定向的几乎 Ricci 孤立子 (M,g,ξ,λ) 的向量场，则由 (3.2) 可得 $s = n\lambda$。此时，(1.1) 可改写为以下形式

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \frac{s}{n} g. \tag{3.7}$$

因此，$g(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g, \frac{s}{n} g) = \frac{s}{n}\mathrm{div}\ \xi = 0$。由此，(3.7) 右端各项在逐点标量积意义下彼此正交。进而，(2.1) 可写为 $\bar{\Delta}\theta = \mathrm{Ric}(\xi, \cdot) + \frac{n-2}{n} ds$。□

4 紧致几乎里奇孤立子

这里，我们利用里奇张量的正交展开研究紧致几乎里奇孤立子；该展开通过对称二阶张量空间的 Becce 展开得到，参见 [6, 第 130] 页。

记 S^pM 为紧致黎曼流形（M，g）上对称协变 p 张量的空间，并按下式定义任意 φ、$\varphi' \in S^pM$的全局内积：

$$\langle \varphi,\ \varphi' \rangle = \int_M g(\varphi,\ \varphi')\, d\,\mathrm{vol}_g. \tag{4.1}$$

设 δ^*：$C^\infty(S^1M) \to C^\infty(S^2M)$ 为一阶微分算子，其定义为：对于任意光滑 1-形式 θ 及其 g 对偶向量场 ξ，参见 [5, 第 117 页； 514]。再设 δ :$C^\infty(S^2M) \to C^\infty(S^1M)$ 为 δ^* 的形式伴随算子，称为对称二阶张量的散度。在这种情况下，对于任意 $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ 和 $\theta \in C^\infty(S^1M)$，$\langle \varphi、\ \delta^*\theta \rangle = \langle \delta\varphi、\ \theta \rangle$ 成立。对于紧致黎曼流形（M，g），代数和 Im $\delta^* + C^\infty(M)\cdot g$ 在 S^2M中是闭的，且下列分解成立：

$$S^2M = (\mathrm{Im}\,\delta^* + C^\infty(M)\cdot g) \oplus (\delta^{-1}(0) \cap \mathrm{trace}_g^{-1}(0)); \tag{4.2}$$

此外，(4.2)中的两个因子都是无限维的，并且相对于全局标量积(4.1)彼此正交，参见 [5, 第 130] 页。

引理4.1. 设(M,g) 是一个紧致的 n 维黎曼流形，并且

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \lambda g + \varphi$$

里奇张量相对于全局标量积的正交展开（针对某个向量场 ξ 以及无散且无迹的对称二形式 φ）。然后

1. 对于 $n \ge 3$，向量场 ξ 是无穷小调和变换，当且仅当 $\lambda = const$；对于 $n = 2$，向量场 ξ 是无穷小调和变换；
2. 假设 $n \ge 3$和 $\int_M (\mathcal{L}_\xi s)\, d\,\mathrm{vol}_g \ge 0$意味着标量曲率 $s = const$满足 $\varphi = Ric - \frac{s}{n} g$，并且 ξ 是一个共形 Killing 向量场。

证明。对于里奇张量，分解（4.2）的形式为

$$\mathrm{Ric} = \big(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \lambda g\big) + \varphi \tag{4.3}$$

对于某个散度为零的无迹张量 $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ 和函数 $\lambda \in C^\infty(M)$。由 (4.3) 可得

$$-\delta\theta := \operatorname{div}\xi = s - n\,\lambda.$$

对 (4.3) 应用算子 δ，我们得到（另见 (2.1)）：

$$\bar{\Delta}\,\theta = \operatorname{Ric}(\xi,\,\cdot) - (n-2)\,d\lambda.$$

因此，对于 $n \geq 3$，ξ 是无穷小调和变换，当且仅当 $\lambda = const$；而对于 $n = 2$，向量场 ξ 是无穷小调和变换。另一方面，利用 $n\,\lambda = \delta\,\theta + s$，我们推导出以下等式：

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \langle \varphi,\, \delta^*\theta + \lambda g\rangle = \langle \operatorname{Ric} - \delta^*\theta - \lambda\, g, \delta^*\theta + \lambda\, g\rangle \\
&= \langle \operatorname{Ric}, \delta^*\theta\rangle - \langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle - \langle \lambda\, g, \delta^*\theta\rangle + \langle \operatorname{Ric},\, \lambda\, g\rangle - \langle \delta^*\theta, \lambda\, g\rangle - \langle \lambda\, g, \lambda\, g\rangle \\
&= \langle \delta\operatorname{Ric}, \theta\rangle - \langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle - 2\langle \lambda\, g, \delta^*\theta\rangle + \int_M (\lambda\, s)\, d\operatorname{vol}_g - n\int_M \lambda^2\, d\operatorname{vol}_g \\
&= -\frac{1}{2}\,\langle ds, \theta\rangle - \langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle + 2\langle d\lambda, \theta\rangle + \int_M \lambda(s - n\lambda)\, d\operatorname{vol}_g \\
&= -\frac{1}{2}\,\langle ds, \theta\rangle - \langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle + 2\langle d\lambda, \theta\rangle - \int_M (\lambda\,\delta\,\theta)\, d\operatorname{vol}_g \\
&= -\frac{1}{2}\,\langle ds, \theta\rangle - \langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle + \langle d\lambda, \theta\rangle. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

因此，

$$n\,\langle d\lambda, \theta\rangle = \langle d(\delta\,\theta + s), \theta\rangle = \langle d\delta\theta, \theta\rangle + \langle ds, \theta\rangle = \langle \delta\theta, \delta\theta\rangle + \langle ds, \theta\rangle. \qquad (4.5)$$

因此，由 (4.4) 和 (4.5) 可得

$$\frac{n-2}{2n}\int_M (\mathcal{L}_\xi\, s)\, d\operatorname{vol}_g = -\langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle + \frac{1}{n}\,\langle \delta\theta, \delta\theta\rangle \leq 0,$$

因为对于任意协变二阶张量 φ，$\|\varphi\|^2 \geq \frac{1}{n}\,(\text{迹}_{\,g}\,\varphi)^2$。

假设 $n \geq 3$ 和 $\int_M (\mathcal{L}_\xi\, s)\; d\mathrm{vol}_g \geq 0$，或者特别地，假设 $\mathcal{L}_\xi\, s \geq 0$，则有

$$\langle \delta^*\theta, \delta^*\theta\rangle - \frac{1}{n}\,\langle \delta\theta, \delta\theta\rangle = 0. \qquad (4.6)$$

另一方面，以下等式成立：

$$\Big\|\frac{1}{2}\,\mathcal{L}_\xi\, g - \frac{1}{n}\,(\operatorname{div}\xi)\, g\Big\|^2 = g(\delta^*\theta, \delta^*\theta) - \frac{1}{n}\,(\delta\,\theta)^2. \qquad (4.7)$$

由 (4.6) 和 (4.7) 可得

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{L}_\xi\, g = \frac{1}{n}\,(\operatorname{div}\xi)\, g,$$

也就是说，ξ 是一个共形 Killing 向量场。在这种情况下，由 (4.3) 可推得

$$\varphi = \operatorname{Ric} - \frac{s}{n}\, g,$$

对其应用舒尔引理，进而得出 $s = const$。 □

类似于以下推论的结论已在 [17] 中针对里奇孤子得到了证明 s.

推论4.1. 设 (M, g, ξ, λ) 是一个 n 维紧致几乎 Ricci 孤立子 ($n \geq 3$)，且满足

$$\int_M (\mathcal{L}_\xi\, s)\, d\operatorname{vol}_g \geq 0$$

其标量曲率为 s。那么 (M, g) 与一个欧几里得 n-球面等距。

证明。对于 $\varphi = 0$，方程 (4.3) 具有几乎Ricci 孤立子方程 (1.1) 的形式。因此，如果 (M, g, ξ, λ) 是一个紧致的几乎 Ricci 孤立子，使得

$$\int_M (\mathcal{L}_\xi\, s)\, d\,\mathrm{vol}_g \geq 0,$$

或者，特别是 $\mathcal{L}_\xi\, s \geq 0$，那么它就是一个爱因斯坦流形，而 ξ 是一个共形 Killing 向量场。根据 [20, 推论 4.5], ，该孤立子是一个欧氏球面。□

注记 4.1. 几乎 Ricci 孤立子的概念在 [15] 中被引入，指满足方程的黎曼流形 (M, g)。

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_V\, g = \lambda\, g,$$

其中 $\lambda \in C^\infty(M)$且 V是 M上的光滑向量场。上面的方程与(1.1)等价。也就是说，若我们假设 $\xi = -V$，则可由上面的方程推出(1.1)。因此，不等式 $\mathcal{L}_\xi\, s \geq 0$和 $\int_M (\mathcal{L}_\xi\, s)\, d\,\mathrm{vol}_g \geq 0$（其中 g度量的标量曲率为 s）分别可改写为 $\mathcal{L}_V\, s \leq 0$和 $\int_M (\mathcal{L}_V\, s)\, d\,\mathrm{vol}_g \leq 0$的形式，另见 [3], ，其中不等式被等式所取代。例如，若在紧致几乎 Ricci 孤子 (M, g, ξ, λ) 上的 ξ 流的轨迹沿着 $s = const$ ，且函数 λ非常数，则 (M, g) 与欧氏 n-球面等距，见 [3]。

参考文献

[1] Arnold V.I.、Klesin B.A.：《流体动力学中的拓扑方法》，Springer-Verlag，纽约（1998）。[2] Barros A.、GomesJ.N.、Rebeiro E.：《关于几乎 Ricci 孤立子刚性的注记》。《数学档案》，100，481–490（2013）。[3] Barros A.、BatistaR.、Ribeiro jr.E.：《具有常标量曲率的紧致几乎里奇孤立子是梯度的》。《数学月刊》f¨ur Mathematik，174，29–39（2014）。[4] Berard P.H.：《从消失定理到估计定理：重新审视博赫纳技巧》。《美国数学学会通报》，19（2），371–406（1988）。[5] BesseA.L.：《爱因斯坦流形》，Springer-Verlag，柏林和海德堡（2008）。[6]Caminha，A.：《黎曼空间上闭共形基灵向量场的几何》。《巴西数学学会通报》（新系列），41（2），277–300（2011）。[7] ChowB.、Lu P.、Ni L.：《Hamilton的里奇流》，载于《数学研究生进阶丛书》，77，AMS，普罗维登斯，罗得岛州（2006）。[8] Deshmukh S.：《与球面等距的几乎里奇孤立子》。《现代物理学中的国际几何方法杂志》，16（5），1950073（2019）。[9] Duggal K.L.：《几乎里奇孤立子及其物理应用》。《国际几何学电子期刊》，10（2），1–10（2017）。[10] Kar D.、MajhiP.：《几乎余K¨ahler流形上的Beta-几乎里奇孤立子》。《韩国数学杂志》，27（3），691–705（2019）。[11]Kobayashi S.、Nomizu K.：《微分几何基础》，第I卷。Wiley-Interscience出版物。John Wiley&Sons公司，纽约（1993）。[12] Morgan J.、TianG.：《里奇流与庞加莱猜想》，Clay数学专著，第3卷。AMS，普罗维登斯，罗得岛州；Clay数学研究所，马萨诸塞州剑桥（2007）。

[13] O'Neil B.：《半黎曼几何及其在相对论中的应用》，Academic Press，伦敦（1983）。[14] PatraD.S.、Rovenski V.：Kenmotsu 流形上的几乎 η-里奇孤立子。《EuropeanJ. Math.》，7，1753–1766（2021）。[15] PigolaS.、RigoliM.、Rimoldi M.、Setti A. G.：里奇几乎孤子。《Ann.Scuola Norm. Sup.PisaCl. Sci.》10（4），757–799（2011）。[16] Stepanov S.E.、Shandra I.G.：无穷小调和变换的几何。《Annals of Global Analysisand Geometry》，24，291–299（2003）。[17] StepanovS. E.、Shelepova V. N.：关于里奇孤立子的一则注记。《Mathematical Notes》，86：3，447–450（2009）。[18] StepanovS.E.、Tsyganok I.I.、Mikeˇs J.：从无穷小调和变换到里奇孤立子。《MathematicaBohemica》，138（1），25–36（2013）。[19] Udriste C.：几何动力学，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特（2002）。[20] Yano K.：黎曼几何中的积分公式，MarcelDekker，纽约（1970）。[21] Yau, S.-T.：完备黎曼流形的某些函数论性质及其在几何学中的应用。《Indiana Univ. Math. J.》，25，659–670（1976）。