arXiv:2304.03598v1 [math.RA] 7 Apr 2023

关于对合上的厄米形式符号的 Artin-Schreier 型理论

Nicolas Garrel

引言

由 Artin和 Schreier 在 [1], 开创的域的序理论，通过对符号的研究，与该域的 Witt环 $W(K)$ 的结构有着密切联系。准确地说，以下两者之间存在一个典范双射：

- 域的序集合 $X(K)$ K；
- 符号映射sign$_P$： $W(K) \to \mathbb{Z}$ 在那些序 $P \in X(K)$；
- $W(K)$的素理想或剩余特征为 0。

符号映射sign$_P$ 根据 a 的P-符号将一维形式 $\langle a \rangle$ 映射到 ± 1，而对应于 $P \in X(K)$的素理想 $I_P(K)$ 就是 sign$_P$ 的核（所有细节请参阅 [7] ）。

将这一框架推广到 ε- 厄米形式的一个自然方向，是研究带对合的中心单代数，此时用 Witt群 $W(A,\sigma)$替代 $W(K)$。这一研究始于 [4]: 给定一个序 $P \in X(K)$，我们可以通过选择一个 Morita 等价（见第 2 节）来定义两个可能的群态射 $W^{\varepsilon}(A,\sigma) \to \mathbb{Z}$，它们相差一个符号，并且在 P 处仍被称为符号映射。

需要注意的是，这与早先关于对合符号的定义相一致（该定义是针对第一类对合发展起来的，见 [8], 另见 [6,A.11]）：只有对合的符号的绝对值才有恰当定义；对于一个 ε-厄米形式 h，将此定义应用于伴随反演σ_h，确实会得到 h 的符号绝对值，且正负号任选其一。对合中的这种符号歧义，可以视为这样一个事实的体现：对合只是双线性形式在相似意义下的一种下降。

我们还想指出的是，对于辛反演，这些定义同样完全说得通；按照通常的模式，辛反演与正交反演一样有趣，尽管在分裂情形下它们全都是双曲的。正交/辛反演，或者等价地说，厄米形式/反厄米形式具有同等地位，这是我们在本文中所构建框架的一个重要特征。

在 [2] 和 [3], 中，Astier 和 Unger 研究了这些符号映射，并确定了能够同时为所有序一致地做出这些符号选择的判据。他们的关键结果是，可以找到“参考形式” $h \in W(A,\sigma)$，使得

即对于 K的任意序 P， $W(A,\sigma)$ 的所有元素在 P 处的符号均为零（这与选择歧义无关），或者 h 在 P处具有非零符号。于是可以规定， h 在所有序处都应具有非负符号，由此确定一个配对 $W(A,\sigma) \times X(P) \to \mathbb{Z}$，使得对于任意 $x \in W(A,\sigma)$，其全符号映射 $X(K) \to \mathbb{Z}$ 是连续的。当然，这取决于参考形式的选择。

这一研究还可以进一步推进，以考察带对合的代数上的 ε-厄米形式。若(V,h)是 (A,σ)上的 ε-厄米形式，则通过厄米 Morita理论（见第2节），它对应于某个 (B,τ)；后者在基域的每个序上都有一个除符号外定义良好的符号。现在问题变成：给定(A,σ)，当厄米形式和序都发生变化时，我们能够以多大的协调性来选择这些符号?

如果固定该序，那么 [4]已对此进行了处理：本质上，对于给定序下基域的实闭包上的 (A,σ)，选择一个厄米特·莫里塔等价，就会同时为所有 ε-厄米形式确定符号，而另一种选择则会翻转所有符号。因此，固定该序时存在两个彼此相反且相容的选择，每个选择都给出一个加法映射 $W^{\varepsilon}(A,\sigma) \to \mathbb{Z}$。

在 [2] 和 [3], 中，Astier 和 Unger 研究了如何为所有序同时一致地选择这一加法映射。他们的关键结果是，可以找到“参考形式” $h \in W(A,\sigma)$，使得对于 K 的任意序 P，要么 $W(A,\sigma)$ 的所有元素在 P 处的符号均为零（这与选择上的歧义无关），要么 h 在 P 处的符号非零。于是可以规定 h 在所有序上的符号均为非负，由此确定一个配对 $W(A,\sigma) \times X(P) \to \mathbb{Z}$，使得对于任意 $x \in W(A,\sigma)$，其总符号映射 $X(K) \to \mathbb{Z}$ 连续。当然，这取决于参考形式的选择。

将所有这些研究纳入 Artin-Schreier 型理论中将是理想的。遗憾的是，Witt群 $W(A,\sigma)$不具有自然的环结构，这阻碍了在这一背景下进行直接推广。这一问题在 [3], 其中得到了一定程度的规避：作者引入了一个特设的态射类 $W(A,\sigma) \to \mathbb{Z}$，这些态射应被解释为“环态射”，并且确实对应于符号映射，但这并不完全令人满意。

在 [5], 中，我们引入了一个环 $\widetilde{W(A,\sigma)}$，称为一个带 involution 的代数的第一类<STYLE_PLACEHOLDER>混合Witt 环</STYLE_PLACEHOLDER>。作为一个群，它只是

$$\widetilde{W}(A,\sigma) = W(K) \oplus W(A,\sigma) \oplus W^{-1}(A,\sigma).$$

本文的核心观点是，这个环构成了移植 Artin-Schreier 理论的适当框架。我们的主要结果如下：

定理 0.1。 对于任意序 $P \in X(K)$，恰有两个环同态 $W(A,\sigma) \to \mathbb{Z}$扩张符号 $W(K) \to \mathbb{Z}$，且它们在$W^{\pm 1}(A,\sigma)$上相差一个符号。它们的核组成的集合 $\widetilde{X}(A,\sigma)$ 恰为$\widetilde{\ }$剩余特征为0的 $W(A,\sigma)$ 的素理想集合。

$\widetilde{\ }$我们的观点是，在此情境下， $X(A,\sigma)$ 是 $X(K)$ 的自然替代。正如上文所提到的，对符号作出相容的选择，恰好等同于选择显然映射 $X(A,\sigma) \to X(K)$ 的一个截面 $\widetilde{\ }$（我们在第 5 节将其称为极化 ）。

~**定理 0.2**。 **</style}若赋予 (**A,σ) </style}扎里斯基拓扑，则自然映射(A, σ) $\to$ $X(K)$ *</style}*是一个拓扑双重覆盖，而 *Astier* 和 *Unger* 通过参考形式定义的极化恰好就是连续截面。

请注意，虽然我们在此重点讨论的是第一类反演，但第二类对合的情形也已受到关注（在 [9] 关于对合，以及 [2] 和 [3] 关于厄米特形式的研究中），我们计划在未来的文章中对其进行类似的处理。

记号

在本文中， K 是一个特征不为 2 的固定域。

其Witt 环为 $W(K)$，基本理想为 $I(K)$。我们不区分二次型及其维特类。对角二次型记为 $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$，以及 n 重Pfister 型 $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle$。特别地，回顾一下， n 重 Pfister 型 $\langle\langle -1,\ldots,-1\rangle\rangle$ 是元素 $2^n\in W(K)$。

映射 e_2： $I^2(K)$ $\to$ $H^2(K,\mu_2)$ 是克利福德不变量映射。它将二重 Pfister 型 $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 映射到布劳尔类 (a,b)。特别地，如果 Q 是四元数代数，则其范数型 n_Q 可由以下性质刻画：$e_2(n_Q)$ 是 Q的布劳尔类 $[Q]$ 。

带 involution 的代数(A,σ)over K 是有限维中心单 K-代数，而 σ 是第一类对合，因此 σ 在 K上限制为恒等映射。回顾一下， σ 可以是正交的，也可以是辛的。 A 的约化迹映射为 Trd_A： $A\to K$。

我们用 $W^\varepsilon(A,\sigma)$ 表示在 (A,σ)上的正则 ε-厄米形式的 Witt 群，其中有 $\varepsilon\in\{+1,-1\}$。我们通常用 $W(A,\sigma)$ 表示 $W^1(A,\sigma)$。如果 $a_1,\ldots,a_n\in A^\times$ 关于 σ （即 $\sigma(a_i)=\varepsilon a_i$）是 ε-对称的，那么我们将相应的对角 ε-厄米形式记为 $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle_\sigma\in W^\varepsilon(A,\sigma)$。特别地，我们有一个典范元素 $\langle 1\rangle_\sigma\in W(A,\sigma)$。

如果 σ 是正交的，则我们令 $W_\varepsilon(A,\sigma)=W^\varepsilon(A,\sigma)$；如果 σ 是辛的，则 $W_\varepsilon(A,\sigma)=W^{-\varepsilon}(A,\sigma)$】【。

对于任意交换环 R，$\mathrm{Spec}_0(R)\subset\mathrm{Spec}(R)$ 是位于 (0) $\in\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 之上的素理想所构成的子集。我们将其视为拓扑子空间。

1 域上的序与符号

我们首先简要概述域上的理论，主要用于确定记号；关于证明，请参见 [7] 。

回顾一下，若域 K 中的 -1 不能表示为 K 中若干平方的和，则称 K 为形式实域；若此外 K 的任何代数扩张都不是形式实域，则称 K 为实闭域。域 K 上的一个序是指数为 2、对加法封闭且不含 -1的子群 $P\subset K^*$ 。我们用 $X(K)$ 表示 K上所有序的集合。若 $P\in X(K)$，则称 (K,P) 为有序域，并记 sign_P： $K^\times\to\{\pm1\}$ 为核是 P的态射。于是，$\mathrm{sign}_P(a)$ 称为 $a\in K^*$的 P-符号（若无歧义，也称符号）。因此，我们可以谈论 P-正元素和 P-负元素。

有序域 (K,P) 的扩张是指满足以下条件的有序域 (L,Q)：L/K 是一个扩张，且 $P = Q \cap K$。若 L/K 是代数扩张，且 (L,Q) 是实闭域，则称 (L,Q) 为 K的一个实闭包。

命题 1.1。域 K 存在序当且仅当它形式实；实闭域存在唯一的序。任意有序域 (K,P) 都有一个实闭包 K_P，且在唯一的 K-同构意义下唯一。

命题 1.2。若 L 是实闭的，则 $W(L)$ 与 $\mathbb{Z}$ 之间存在一个（唯一的）环同构，它将 $\langle a\rangle$ 映到其相对于 L 唯一序的符号，对所有 $a \in L^*$ 均成立。

因此，对于域 K 上的任意序 P，存在唯一的环态射

$$\mathrm{sign}_P : W(K) \longrightarrow W(K_P) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z},$$

称为 K 在 P 处的符号，它扩展了 K^* 上的 P-符号映射（即 $\mathrm{sign}_P(\langle a\rangle) = \mathrm{sign}_P(a)$）。对于任意取值为 0 或素数的 $p \in \mathbb{N}$，我们记

$$\mathrm{sign}_{P,p} : W(K) \xrightarrow{\mathrm{sign}_P} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

于是我们定义

$$I_{P,p}(K) = \mathrm{Ker}(\mathrm{sign}_{P,p}).$$

我们也记 $I_P(K) = I_{P,0}(K)$。

命题 1.3.对于任意序 P 上的 K，我们有 $I_{P,2}(K) = I(K)$。此外，

$$\mathrm{Spec}(W(K)) = \{I(K)\} \coprod_{P \in X(K)} \{I_{P,p}(K) \,|\, p \text{ odd or } 0\}.$$

特别地，$X(K)$ 与 谱$_0(W(K))$之间存在一个典范同一化。

注 1.4。通过此同一性在 $X(K)$ 上赋予的拓扑称为所谓的哈里森拓扑。众所周知，$X(K)$是紧豪斯多夫且完全不连通的，并且由 $P \mapsto \mathrm{sign}_P$给出的嵌入 $X(K) \to \{\pm 1\}^{K^*}$ 实际上是一个闭嵌入。

2 厄米特 Morita 理论与混合 Witt 环

本节将回顾 [5]，中的必要内容，首先介绍一些 Hermitian Morita 理论。

如果 (A,σ) 和(B,τ) 是定义在 K 上的带对合代数，则从(B,τ) 到 (A,σ) 的厄米特·莫里塔等价是一个 B-A-双模 V，使得 $B \simeq \mathrm{End}_A(V)$，并赋予一个 ε-厄米特形式 h： $V \times V \to A$，使得 τ 是 h 的伴随反演。

当且仅当 A 和 B 布劳尔等价时，这样的等价才存在；在这种情况下，V 在双模同构意义下是唯一的，而 h 对于任意 $\lambda \in K^\times$，在乘以 $\langle\lambda\rangle$ 的意义下是唯一的。接着，当 σ 和 τ 具有相同类型时为 $\varepsilon = 1$，而当它们具有相反类型时为 $\varepsilon = -1$。

任意厄米特·莫里塔等价(V,h)对每个 $\varepsilon\in\{\pm1\}$ 诱导出一个 $W(K)$-模同构 $W_\varepsilon(B,\tau)\xrightarrow{\sim}W_\varepsilon(A,\sigma)$，使得 $\langle1\rangle_\tau$ 被映射到 h。

在 [5] 中，我们定义一个范畴 $\mathbf{Br}_h(K)$，称为 K 的厄米特 Brauer 2-群，其对象是带对合的代数 (A,σ)，态射 $(B,\tau)\to(A,\sigma)$（它们均可逆）则是厄米特·莫里塔等价。根据上文的说明，如果我们考虑 $W(K)$-模

$$\widetilde{W}_\varepsilon(A,\sigma)=W(K)\oplus W_\varepsilon(A,\sigma)$$

and

$$\widetilde{W}(A,\sigma)=W(K)\oplus W_1(A,\sigma)\oplus W_{-1}(A,\sigma),$$

那么，$\widetilde{W}$ 和 $\widetilde{W}_\varepsilon$ 是从 $\mathbf{Br}_h(K)$ 到 $W(K)$-模范畴的函子。注意，从本质上说，$\widetilde{W}(A,\sigma)$ 应该有四个因子，但 $W^{-1}(K)=0$。接下来，[5] 的关键结果是：

命题 2.1. *$W(K)$-模上的自然结构 $\widetilde{W}(A,\sigma)$ 可扩展为一个 $W(K)$-代数结构，使得 W 是从 $\mathbf{Br}_h(K)$ 到交换 $W(K)$-代数范畴的函子。*

它满足 $W_1(A,\ \sigma)\cdot W_{-1}(A,\ \sigma)=0$，并且 $W_\varepsilon(A,\ \sigma)\cdot W_\varepsilon(A,\ \sigma)\subset W(K)$，因此特别地，$\widetilde{W}_\varepsilon(A,\ \sigma)$ 是一个子环。

此外，对于任意域扩张 L/K，自然映射 $\widetilde{W}(A,\ \sigma)\to\widetilde{W}(A_L,\ \sigma_L)$ 是一个环同态。

我们需要对以下两个基本情形中的这一结构作出明确描述：

例 2.2. 若 $(A,\sigma)=(K,\mathrm{Id})$，则 $\widetilde{W}(K,\mathrm{Id})=W(K)\oplus W(K)$ 作为环自然同构于群代数 $W(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$。

例 2.3. 若 $(A,\sigma)=(Q,\gamma)$ 是一个带有典范辛对合的四元数代数，则我们可以明确描述 $\widetilde{W}(Q,\gamma)$ 中的乘积：

- 对所有 a、$b\in K^\times$，
$$\langle a\rangle_\gamma\cdot\langle b\rangle_\gamma=\langle 2ab\rangle n_Q.$$
- 对所有纯四元数 z_1、$z_2\in Q^\times$，
$$\langle z_1\rangle_\gamma\cdot\langle z_2\rangle_\gamma=\langle-\operatorname{Trd}_Q(z_1z_2)\rangle\varphi_{z_1,z_2}$$
其中 $\varphi_{z_1,\ z_2}$ 是唯一的二重 Pfister 形式，使得 $e_2(\varphi_{z_1,\ z_2})=(z_2^2,\ z_2^2)+[Q]$。注意，$\operatorname{Trd}_Q(z_1z_2)$ 可能为零，但在这种情况下，z_1 与 z_2 反对易，因此 $\varphi_{z_1,\ z_2}$ 实际上仍然是双曲的（并且乘积为零）。

注 2.4。本文不需要进一步了解 $\widetilde{W}(A,\ \sigma)$ 的环结构，但记住 $\langle1\rangle_\sigma^2\in W(K)$ 无非就是所谓的对合迹形式 T_σ，会很有帮助。明确地说，二次型 $T_\sigma:A\to K$ 定义为 $a\mapsto\operatorname{Trd}_A(\sigma(a)a)$。

结合函子性，这意味着对于任意 $h\in W_\varepsilon(A,\sigma)$，我们有 $h^2=T_{\sigma_h}\in W(K)$，其中 σ_h 是 h 的伴随对合。

3 符号映射

本节中我们将描述所有符号映射:

定义 3.1。 设 $(A,\ \sigma)$ 是一个在 K 上的带 *involution* 的代数，且 $P \in X(K)$是 K 的一个序。$(A,\ \sigma)$ 在 P 处的一个符号映射是一个环同态 $\sim W(A,\ \sigma) \to \mathbb{Z}$，它延拓了 P 处的经典符号映射 $W(K) \to \mathbb{Z}$。

在一种情况下，这类映射显然存在:

定义 3.2. 设 (A,σ) 是一个在 K 上的带 *involution* 的代数。我们称 $\widetilde{\sim}$ $\widetilde{\sim}$一个环同态 $\rho\colon W(A,\sigma) \to W(K)$ 是 $W(A,\sigma)$ 的回缩，如果它在 $W(K)$ 上是恒等映射。

例 3.3。 增广映射 $W(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \to W(K)$ 定义了 $\widetilde{\sim}$ $\widetilde{\sim}$ 回缩 ρ，即 $W(K,\mathrm{Id})$ 的回缩，我们称之为 $W(K,\mathrm{Id})$ 的规范回缩。

通过简单复合，选择一个回缩（如果存在）即可同时定义所有 $P \in X(K)$ 处的符号映射；关于这一现象的进一步讨论，请参见第5 节，我们在那里将其称为 代数极化。

$\widetilde{\sim}$**注释3.4.** $W(A,\sigma)$存在回缩仅取决于布劳尔类 $[A]$，因为如果 $[B] = [A]$，那么对于 B 上的任意对合 τ，存在一个$\sim$ $\sim W(K)$-代数同构 $W(B,\tau) \simeq W(A,\sigma)$。

按照经典情形的方法（见第 1 节），我们定义符号映射的一般策略是将问题归结到实闭域的情形。对于这些情形，我们将证明典范回缩总是存在的。当然，在实闭域上，由于 $W(K)$ 与 $\mathbb{Z}$ 典范同构，回缩实际上与符号映射是一回事；但用回缩来表述这一点，在概念上更为清晰（也具有一定的额外一般性）。

回顾一下，经典结果（当 $K = \mathbb{R}$ 时由 Frobenius得出）表明，如果 K 是实闭的，那么 K 上唯一的除代数就是 K 本身和 Hamilton 四元数 $\mathbb{H}_K$；后者是布劳尔类为 $[\mathbb{H}_K] = (-1,-1) \in H^2(K,\mu_2)$ 的四元数代数。这意味着，K 上的任何带 involution 的代数都与(K,Id)或$(\mathbb{H}_K,\gamma)$ 莫里田等价。我们已经在例 3.3$\widetilde{\sim}$ 中看到，$W(K,\mathrm{Id})$具有一个典范回缩，因此只需处理 $(\mathbb{H}_K,\gamma)$ 的情形。

我们在一个稍微更一般的情形下进行此操作。回顾一下，如果 K 中平方的和仍是平方，则域 K 是毕达哥拉斯域（更多详情请参阅 [7]）。在这种情况下，要么 K 是平方闭的，要么 K 是形式实的，且 $W(K)$ 是无挠阿贝尔群。当然，实闭域是毕达哥拉斯域。

命题3.5。 设 K 是一个形式实毕达哥拉斯域。则存-$\widetilde{\sim}$在回缩 $\rho\colon\ W(\mathbb{H}_K,\gamma) \to W(K)$，且存在唯一一个称为典范回缩的回缩，使得 $\rho(\langle z\rangle_\gamma) = 0$ 对于任意可逆纯四元数$z \in \mathbb{H}_K$，并且 $\rho(\langle 1\rangle_\gamma) = 2$。

证明。 我们将 ρ定义为 $W(K)$上的恒等函数，以及 $W^{-1}(\mathbb{H}_K,\gamma)$ 上的零函数。还需为 $h \in W(\mathbb{H}_K,\gamma)$ 定义 $\rho(h)$。

一般而言，对于任意域 K 上的任意四元数代数 Q，若 $(V,h) \in W(Q,\gamma)$，则存在一个自然的二次型 $q_h\colon\ V \to K$，其定义为

$q_h(x) = h(x,x)$。我们声称，在本例中，存在某个 $\rho(h) \in W(K)$ 使得 $q_h = 2\rho(h)$；由于 $W(K)$ 无挠，因此该对象是唯一的。

事实上，一般而言，如果 $h = \langle a_1, \dots, a_n\rangle_\gamma$，那么 $q_h = \langle a_1, \dots, a_n\rangle n_Q$。在我们的情形中，$n_{\mathbb{H}_K} = \langle\langle -1, -1\rangle\rangle = 4 \in W(K)$，因此我们只需取 $\rho(h) = 2\langle a_1, \dots, a_n\rangle$。我们引入 $\rho(h)$ 的方式表明，这与对角化无关。

按构造，$W(\mathbb{H}_K, \gamma) \xrightarrow{\rho} W(K)$因而是一个 $W(K)$-模态射，并且它是唯一满足该命题条件的态射，因为$W(\mathbb{H}_K, \gamma)$ 是由 $\langle 1\rangle_\gamma$作为 $W(K)$-模生成的。还需证明 ρ是一个环同态，这相当于对于 $x \in W^\varepsilon(\mathbb{H}_K, \gamma)$ 和 $y \in W^{\varepsilon'}(\mathbb{H}_K, \gamma)$，有 $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$。

若 $\varepsilon \neq \varepsilon'$，则 xy 和 $\rho(y)$ 为零，因此我们可以假设 $\varepsilon = \varepsilon'$。若 $\varepsilon = 1$，则可将问题化归为 a 的 $x = \langle a\rangle_\gamma$ 和 $x = \langle b\rangle_\gamma$，$b \in K^\times$，并根据例 2.3，我们需要证明

$$\langle 2ab\rangle n_{\mathbb{H}_K} = (2\langle a\rangle) \cdot (2\langle b\rangle),$$

这成立，因为 $\langle 2\rangle$ 可由 $n_{\mathbb{H}_K}$ 表示 $n_{\mathbb{H}_K} = 4 \in W(K)$。

若 $\varepsilon = -1$，我们需要证明对于所有可逆纯四元数 z_1，$z_2 \in \mathbb{H}_K$，

$$\langle -\operatorname{Trd}_Q(z_1 z_2)\rangle \varphi_{z_1, z_2} = 0,$$

这意味着 $\varphi_{z_1,\ z_2}$ 总是双曲的，而根据定义，这意味着

$$(z_1^2, z_2^2) = (-1, -1).$$

但对于任意纯四元数 z，z^2 是三个平方和的相反数，因此，由于 K 是毕达哥拉斯域，z^2 是一个平方的相反数。 □

现在回到一般情形。设 (A, σ) 是任意域 K 上带对合的代数。对于任意 $P \in X(P)$，令 D_P 为 K_P 上与 A_{K_P} 布劳尔等价的唯一除代数。我们在 D_P 上定义一个对合 θ_P，并将 $X(K)$、 $= X_1(A)$ 和 $\coprod X_{-1}(A)$ 划分为若干部分，具体如下:

- 若 $D_P = K_P$，则 $\theta_P = \mathrm{Id}$ 和 $P \in X_1(A)$;
- 若 $D_P = \mathbb{H}_{K_P}$，则 $\theta_P = \gamma$ 和 $P \in X_{-1}(A)$。

例 3.6. 若 A 是分裂的，则 $X_1(A) = X(K)$，且 $X_{-1}(A) = \emptyset$。另一方面， $X_1(\mathbb{H}_K) = \emptyset$，且 $X_{-1}(\mathbb{H}_K) = X(K)$。

注 3.7. 这种划分的要点在于， $P \in X_\varepsilon(A)$ 上的符号映射在 $W_{-\varepsilon}(A, \sigma)$ 上为零。由于我们对 $W_1(A, \sigma)$ 和 $W_{-1}(A, \sigma)$ 给予同等地位，因此我们对 $X_1(A)$ 和 $X_{-1}(A)$ 的处理是对称的。

在 [2], 中，作者只研究 $W(A, \sigma)$ 上的符号，这造成了不对称。在他们的术语中，若 σ 是辛的，则 $Nil[A, \sigma]$ 是 $X_1(A)$；若 σ 是正交的，则 $X_{-1}(A)$（因此 $Nil[A, \sigma]$ 总是 $W(A, \sigma)$ 中“无关紧要”的序的集合）。

对于任意 $P \in X(K)$，$\mathrm{Br}_h(K_P)$ 中恰有两个同构 $(A_{K_P}, \sigma_{K_P}) \to (D_P, \theta_P)$。确实，至少存在一个，因为根据构造$[A_{K_P}] = [D_P]$，而任意两个选择相差某个 $\langle a\rangle$ 的乘法。

与 $a \in K_P^\times$ 一起；但由于 K_P 是实闭的，它只有两个平方类。我们将 f_P^η 记作这两个同构，其中 $\eta = \pm 1$；选择哪一个标记为 $\eta = 1$ 或 $\eta = -1$ 是任意的。对所有 $P \in X(P)$ 同时作出的选择，就是我们稍后将称为极化的对象（见第5 节）。在此之前，我们始终假设已经对所有 P 作出了任意但固定的选择。

对于任意 $P \in X(K)$，我们都有一个规范回缩 $\rho_P : \widetilde{W}(D_P, \theta_P) \to W(K_P)$，其由例 3.3 或命题 3.5 给出。于是，我们可以定义 (A, σ) 在 P 处的两个符号映射：

$$\widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta : \widetilde{W}(A, \sigma) \longrightarrow \widetilde{W}(A_{K_P}, \sigma_{K_P}) \xrightarrow{(f_P^\eta)_*} \widetilde{W}(D_P, \theta_P) \xrightarrow{\rho_P} W(K_P) \xrightarrow{\operatorname{sign}} \mathbb{Z}.$$

我们需要 Astier 和 Unger 的一个技术性结果：

引理 3.8（[2], 定理 6.1）。设 ε，$\eta \in \{\pm 1\}$ 且设 $P \in X_\varepsilon(A)$。则存在 $h \in W_\varepsilon(A, \sigma)$，使得 $\widetilde{\text{符号}}_P^\eta(h) \neq 0$。

现在我们可以验证，我们的构造涵盖了所有情况：

命题 3.9。设 (A, σ) 是 K 上的带对合的代数。对于任意 $P \in X(K)$，(A, σ) 在 处恰有两个不同的符号映射，即 符号$_P^\eta$ *for* $\eta = \pm 1$。若 $P \in X_\varepsilon(A)$，则这两个映射在 $W_{-\varepsilon}(A, \sigma)$ 上均为 0，并且它们在 $W_\varepsilon(A, \sigma)$ 上相差一个符号。

证明。由回缩 ρ_P 的构造可直接得出，两个 $\widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta$ 在 $W_{-\varepsilon}(A, \sigma)$ 上均为零。它们在 $W_\varepsilon(A, \sigma)$ 上相差一个符号，这是因为 f_P^1 和 f_P^{-1} 相差一个 $\langle -1 \rangle = -1 \in W(K)$ 乘法。于是，引理 3.8 表明，$\widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta$ 是两个不同的函数。

令 $f : \widetilde{W}(A, \sigma) \to \mathbb{Z}$ 是延拓 sign_P 的环同态，并令 $x \in W_{\varepsilon'}(A, \sigma)$ 对于某个 $\varepsilon' = \pm 1$。则 $f(x)^2 = \operatorname{sign}_P(x^2) = \widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta(x)^2$（对于任意 η），因此 $f(x) = \widetilde{\operatorname{sign}}_P^{s(x)}(x)$ 对于某个 $s(x) = \pm 1$（若 $f(x) \neq 0$，则其唯一确定）。现在我们要证明，对于所有可能的 x，都可以取相同的 $s(x)$。

如果 $\varepsilon' \neq \varepsilon$，两者都有 $\widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta(x) = 0$，因此对于所有 $x \in W_{-\varepsilon}(A, \sigma)$，我们可以任意选择 $s(x)$。

如果 $\varepsilon' = \varepsilon$，根据引理 3.8，存在某个 $y \in W_\varepsilon(A, \sigma)$，使得 $\widetilde{\operatorname{sign}}_P^\eta(y) \neq 0$；特别地，$s(y)$ 被唯一确定，我们称其为 s。现在，对于任意 $x \in W_\varepsilon(A, \sigma)$，如果 $f(x) = 0$ 那么我们可以任意选择 $s(x) = s$，而如果 $f(x) \neq 0$，那么 $s(x)$ 被唯一确定，并且

$$f(xy) = \operatorname{sign}_P(xy) = \widetilde{\operatorname{sign}}_P^s(xy) = s(x)s \cdot \widetilde{\operatorname{sign}}_P^{s(x)}(x)\widetilde{\operatorname{sign}}_P^s(y) = s(x)s \cdot f(x)f(y)$$

由于 $f(x)f(y) \neq 0$，我们有 $s(x)s = 1$。 □

注 3.10。观察证明可知，P 处符号的所有延拓 $\widetilde{\ } : W_\varepsilon(A, \sigma) \to \mathbb{Z}$ 的唯一环同态是符号映射 $\widetilde{\text{sign}}_P^\eta$ 的限制（当且仅当 $P \in X_{-\varepsilon}(A)$ 时，这两个限制恰好相同）。

注 3.11。我们提醒读者，尽管我们的符号映射与先前文献中的基本相同，但其规范化方式有所不同。

当 $P \in X_{-1}(A)$时。事实上，之前的符号映射只要求是 $W(K)$-模同态 $W(A,\sigma) \to \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 被视为一个通过符号$_P$的 $W(K)$-模。在这种情况下，Astier 和 Unger 在 [3, 命题 7.4] 中证明，可以找到一个“最小”的满射符号，使得任何其他模同态都是这个最小符号的整数倍（当然，这个最小符号随后在相差一个符号的意义下是良定义的），并且他们将这些最小符号作为其符号。当 $P \in X_1(A)$ 时，这与我们的定义相同；但如果 $P \in X_{-1}(A)$，我们必须将这些最小映射乘以 2，才能得到一个环同态。

注3.12。我们也可以定义对合 σ 的符号：$\mathrm{sign}_P^\eta(\sigma)_{\text{定义}} = \widetilde{\mathrm{sign}}_P^\eta(\langle 1\rangle_\sigma)$。我们再次遇到了符号歧义，这就是为什么在 [8] 中只定义绝对值 $|\mathrm{sign}_P^\eta(\sigma)|$，并将其作为 σ 的符号定义。注意，这些定义是一致的，因为它们通过 $\mathrm{sign}_P(\sigma)^2 = \mathrm{sign}_P(T_\sigma)$ 来刻画$\mathrm{sign}_P(\sigma) \in \mathbb{N}$，并且在 $T_\sigma = \langle 1\rangle_\sigma^2$ 中的 $W(A,\sigma)$（见注 2.4）。

4 混合Witt环的谱

现在我们有了符号映射，接下来希望得到对 $\widetilde{\mathrm{Spec}}(W(A,\sigma))$ 的描述，类似于命题 1.3 对 $W(K)$ 的描述。我们通过研究自然态射的纤维来实现这一点。

$$\pi : \mathrm{Spec}(\widetilde{W}(A,\sigma)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W(K))$$

由该包含映射诱导。

首先，我们需要基本理想的对应概念。回顾一下，如果 V 是一个（右） A-模，那么它的约化维数 为 $\mathrm{rdim}(V) = \dim_K(V)/\deg(A)$，~~或者等价~~地，它是 $\mathrm{End}_A(V)$ 的次数。由于双曲型形式的约化维数为偶数， ε-厄米空间 (V,h) 的 Witt类具有良定义的模 2 约化维数：$\mathrm{rdim}_2(h) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。这定义了加性同态$W^\varepsilon(A,\sigma) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并且除了经典的“模 2 维数”态射$W(K) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$之外，我们还得到一个映射

$$\mathrm{rdim}_2 : \widetilde{W}(A,\sigma) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

容易看出这是一个环同态。

$\widetilde{\text{}}$定义 4.1。基本理想 $W(A,\sigma)$ 是 $I(A,\sigma) = \mathrm{Ker}(\mathrm{rdim}_2)$。

注记4.2.如果 A 不是分裂的，那么 $I(A,\sigma) = I(K) \oplus W(A,\sigma) \oplus W^{-1}(A,\sigma)$。$\widetilde{\text{}}$如果 A 是分裂的，那么在任意 Morita 等价 $W(A,\sigma) \simeq W(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$下，我们有 $I(A,\sigma) = \{x,y \in W(K) \mid x+y \in I(K)\}$。

设 $P \in X(K)$，且令 $p \in \mathbb{N}$ 为 0 或素数。于是我们对 $\eta \in \{\pm 1\}$ 定义：

$$\widetilde{\mathrm{sign}}_{P,p}^\eta : \widetilde{W}(A,\sigma) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{sign}}_P^\eta} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

and

$$I_{P,p}^\eta(A,\sigma) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{sign}}_{P,p}^\eta),$$

$\widetilde{\text{}}$根据构造，这是 $W(A,\sigma)$ 的一个素理想（当 $p \neq 0$ 时为极大理想）。

命题 *4.3*。设 (A,σ) 是 K 上的带 *involution* 的代数。那么 π 上方 $I(K)$ 的纤维是 $\{I(A,\sigma)\}$。特别地，$I(A,\sigma)$ 是 $W(A,\sigma)$ 中具有剩余特征 2 的唯一素理想~理想，并且对于任意 $P\in X(K)$，我们有I_P^{η}，$2(A,\sigma)=I(A,\sigma)$。

此外，令 $P\in X(K)$，并令 p 为0 或一个奇素数。那么，π在 $I_{P,p}(K)$ 上方的纤维为 $\{I_{P,p}^{\eta}(A,\sigma)\,|\,\eta=\pm1\}$（二者不同）。

~证明。令 $I\subset W(A,\sigma)$ 为剩余特征为 2 的素理想。我们希望证明 $I(A,\sigma)=I$，这也意味着关于 I_P^{η}、$2(A,\sigma)$ 的陈述，以及关于 π在 $I(K)$ 上方的纤维的陈述。令 $x=x_0+x_1$，其中 $x_0\in W(K)$ 且$x_1\in W(A,\sigma)\oplus W^{-1}(A,\sigma)$。只需证明：$x^2\in I$ 当且仅当 $x^2\in I(A,\sigma)$。现在，$x^2=x_0^2+2x_0x_1+x_1^2$，并且 $2x_0x_1$ 总是在 I 和 $I(A,\sigma)$ 中，因为它们的剩余特征为 2，因此我们归结为证明 $y=x_0^2+x_1^2\in W(K)$ 属于 I 当且仅当它属于 $I(A,\sigma)$。但是，由于 $I\cap W(K)$ 的剩余特征为 2，$I\cap W(K)=I(K)=I(A,\sigma)\cap W(K)$。

现在令 $P\in X(K)$，且 p 为 0 或奇素数；我们令 $R=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.~设 I属于 π 在 I_P上方的纤维，$_p(K)$，并令 f：$W(A,\sigma)\to S$为核为 I的满射态射，其中 $R\subset S$。那么由于 $f_{|W(K)}=$sign$_P$，与命题 3.9 的证明相同的论证表明，$R=S$ 且 $f=$~sign$_{P,p}^{\eta}$，其中 $\eta=\pm1$唯一。事实上，同样地，我们证明，对于固定的 $x\in W_{\varepsilon}(A,\sigma)$，有 $f(x)^2=$~sign$_{P,p}^{\eta}(x)^2$。由于 S是整环，这意味着对于某个 η，有 $f(x)=$~sign$_{P,p}^{\eta}(x)$（特别是 $S=R$）；其余推理也相同，唯一的区别是我们必须援引 $p\neq2$，以证明 η是唯一确定的（因此这两个可能的理想确实不同）。 □

推论 4.4。令 $(A,\ \sigma)$ 为 K 上的带 *involution* 的代数。我们有

$$\mathrm{Spec}(\widetilde{W}(A,\sigma))=\{I(A,\sigma)\}\coprod_{P\in X(K)}\{I_{P,p}^{\eta}(A,\sigma)\,|\,\eta=\pm1,p\ odd\ or\ 0\}.$$

~**注 4.5.** 该证明也适用于计算 $W_{\varepsilon}(A,\sigma)$ 的谱：$I(K)$ 上方有一个素理想，每个满足 $P\in X_{\varepsilon}(A)$ 的 $I_{P,p}(K)$ 上方有两个素理想，而每个满足 $P\in X_{-\varepsilon}(A)$ 的 $I_{P,p}(K)$ 上方有一个素理想。

注 4.6。在注 3.11 的连续性中，Astier 和 Unger 在[3, 6.5,6.7]得到了略有不同且可以说更强的结果，因为他们用一种更弱的“理想”概念（该概念不涉及两个厄米形式的乘积）得到了类似的分类。不过，对于位于$I(K)$之上的素理想，情况有所不同，因为他们找到了许多这样的“理想”（当然，只有 $I(A,\sigma)$ 是真正的理想）。

仿照经典情形，我们令

$$\widetilde{X}(A,\sigma)=\mathrm{Spec}_0(\widetilde{W}(A,\sigma))$$

~作为谱$(W(A,\sigma))$的拓扑子空间；其元素是 $I_P^{\eta}:=I_{P,\ 0}^{\eta}$~对于 $P\in X(K)$}。因此，连续映射 π: 谱$(W(A,\sigma))\to$谱$(W(K))$~诱导出一个连续的二对一映射 π: $X(A,\sigma)\to XK$。

~**引理4.7**。映射 π：$X(A,\ \sigma)\to X(K)$ 是开的。

$\widetilde{}$证明。令 $x \in W(A,\sigma)$。由于主开集 $D(x)$ 构成扎里斯基拓扑的一个基，只需证明 $\pi(U)$是开的，其中 $U = D(x) \cap \backsim X(A,\sigma)$。记 $x = x_0 + x_1$，其中 $x_0 \in W(K)$ 且 $x_1 \in W(A,\sigma) \oplus W^{-1}(A,\sigma)$。

那么 $\pi(U)$ 就是满足以下条件的序 P的集合：至少有一个 $\widetilde{\text{sign}}_P^\eta(x)$ 不为零。但它们同时为零的唯一可能是 $\text{sign}_P(x_0)$ 和 $\widetilde{\text{sign}}_P^\eta(x_1)$ =0，而第二个等式等价于 $\text{sign}_P(x_1^2) = 0$。这两个条件定义了 $X(K)$ 的一个闭子集，因此其补集是开集。 □

与经典情形一样，我们有一个全符号：

定义 4.8。设(A,σ) 是 K 上一个带 *involution* 的代数。任意 $x \in W(A,\sigma)$ 的总符号是函数

$$\widetilde{\text{sign}}(x) : \widetilde{X}(A,\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$\widetilde{}$通过将 x 对 X 中的各种素理想取模得到(A,σ)。

明确地，$\widetilde{\text{sign}}(x)(I_P^\eta) = \widetilde{\text{sign}}_P^\eta(x)$，但需要注意的是，$\widetilde{\text{sign}}(x)$ 不依赖于任何极化的选择。

命题 4.9。设 (A,σ) 是 K上的带 *involution* 的代数。那么对于 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$任意 $x \in W(A,\sigma)$，全符号 $\text{sign}(x)$ 是连续函数。

证明。根据定义，$\widetilde{\text{sign}}(x)^{-1}(\{n\})$ 是 $\widetilde{X}(A,\sigma)$ 与 $\text{Spec}(W(A,\sigma))$ 中的扎里斯基闭集 $V(x - n\langle 1\rangle)$ 的交集，因此它在 $X(A,\sigma)$ 中是闭的。 □

5 极化

[2] 和 [3] 中的一个主要目标，可以解释为定义一个$\widetilde{}$适当的全符号，它定义在 $X(K)$上，而非 $X(A,\sigma)$上（他们将其称为 $\mathcal{M}$-符号和 H-符号）。

定义 *5.1*。设 *(A,σ)* 是一个定义在 K 上的带 *involution* 的代数。若 U 是 X *(K)* 的一个开子集，则 *(A,σ)* 在 U 上的局部极化是$\mp$ 在 U 上的集合论截面。我们用 *$\text{Pol}_U(A,\sigma)$* 表示U 上的局部极化集合。若 $s \in$ *$\text{Pol}_U(A,\sigma)$*，则称 $-s \in$ *$\text{Pol}_U(A,\sigma)$* 为 s 的相反（局部）极化，其中对所有 $P \in U$， $-s(P) \neq s(P)$。

当 $U = X(K)$ （分别地， $X_+(A)$、 $X_-(A)$）时，我们称之为(A,σ)的全局（分别地，正交、辛）极化，这些极化的集合记为$\text{Pol}(A,\sigma)$ （分别地，$\text{Pol}_+(A,\sigma)$、$\text{Pol}_-(A,\sigma)$）。全局极化也简称为极化。

若 $s \in \text{Pol}(A,\sigma)$，则对于任意 $x \in \widetilde{W}(A,\sigma)$，$x$ 相对于 s的全符号为

$$\widetilde{\text{sign}}^s(x) : X(K) \xrightarrow{s} \widetilde{X}(A,\sigma) \xrightarrow{\widetilde{\text{sign}}(x)} \mathbb{Z}.$$

我们也记作 $\widetilde{}$符号$_P^s(x) = \widetilde{}$符号$^s(x)(P)$。

显然 $\text{Pol}(A,\sigma) \simeq \text{Pol}_+(A,\sigma) \times \text{Pol}_-(A,\sigma)$。我们的看法是，极化是对 $\widetilde{\text{sign}}_P^+$ 和 $\widetilde{\text{sign}}_P^-$ 进行标记的选择，而正交（分别为辛）极化则仅是对 $P \in X_+(A)$（分别为

$X_{-}(A)$). 我们定义符号映射的方式表明，选择极化也等价于选择一个 Morita等价，即在所有 $P \in X(K)$ 下，在 $(A_{K_P}, \sigma_{K_P})\tilde{}$ 与 (D_P, θ_P) 之间的 Morita 等价，但 $X(A,\sigma)$ 的整体结构使得讨论极化方便得多。我们的目标是在各种 (A, σ) 上找到相关的自然极化类，或者理想情况下找到自然极化。

注记5.2。 [2] 中的 $\mathcal{M}$-符号概念对应于任意（正交/辛）极化。

注记 5.3. 对于任意极化 s，以及任意 $x \in W(K)$，$\widetilde{\text{符号}}^{s}(x)$ 是经典的全符号 $\text{sign}(x) : X(K) \to \mathbb{Z}$。

我们想强调极化的自然对称性。令 G 为π的集合论自同构群，并令 G_c（连续的）为 π的拓扑自同构群。那么 G 可与乘法群 $\mathcal{F}(X(K)\ \{\pm 1\})$ 及以下对象对应：一个函数 $f : X(K) \to \{\pm 1\}$当且仅当 $f(P) = -1$时，交换 $P \in X(K)$上方纤维中的元素。这也自然同构于带有对称差运算的 $X(K)$的子集群 $(\mathcal{P}(X(K))\ \Delta)$；若我们将 f 与 $f^{-1}(\{-1\})$关联起来，则可得此同构。于是 $G_c \subset G$ 对应于 $\mathcal{F}(X(K)\ \{\pm 1\})$中的连续函数，以及 $\mathcal{P}(X(K))$ 中的开闭子集。显然，G 在 $\text{Pol}(A,\sigma)$ 上单纯传递地作用。若$f \in \mathcal{F}(X(K)\ \{\pm 1\})$，则其作为 G 的元素在全符号上的作用为 $\widetilde{\text{符号}}^{f\cdot s} = f\ \widetilde{\text{符号}}^{s}$。函数 $s \mapsto -s$ 对应于 $\mathcal{F}(X(K)\ \{\pm 1\})$ 中的常值函数-1，以及 $X(K) \in \mathcal{P}(X(K))$。

注意，由于 π 是将函子 Spec_0 应用于包含映射 $\backsim W(K) \to W(A,\sigma)$ 的结果，因此 $W(A,\sigma)$ 的 $W(K)$-代数自同构群可典范地嵌入 G_c 中。我们将此嵌入的像称为 G_a（代数的缩写）。标准自同构子群的像记作 G_s（标准的缩写）。这一作用也可由以下事实推出：根据构造，$(A,\sigma) \mapsto X(A,\sigma)$ 定义了一个从 $\text{Br}_h(K)$ 到 $X(K)$ 上方的集合范畴的函子。注意，G_s 自然是 K^* 的一个商，因为标准自同构具有 $(\langle a\rangle_\sigma)_*$ 的形式，其中 $a \in K^*$ 为某个元素。

于是我们得到

$$G_s \subset G_a \subset G_c \subset G,$$

而且，如果对于任意的 (A,σ)，我们无法在 $\text{Pol}(A,\sigma)$ 中找到典范元素，那么至少可以尝试在 $\text{Pol}(A,\sigma)/H$ 中为那些不同的子群 $H \subset G$（当然，$\text{Pol}(A,\sigma)/G = \{*\}$）寻找典范类；或者至少在 $\text{Pol}_\varepsilon(A,\sigma)/H$ 中为某个 ε 寻找典范类。

注 5.4。 注意到，根据关于 $\text{Br}_h(K)$ 的函子性，$\text{Pol}(A,\sigma)/G_s$只取决于布劳尔类 $[A]$。

我们空间的拓扑性质使得研究下面这类对象显得十分自然：

定义 *5.5*。我们将 (A,σ) 上连续极化的集合记作 $Pol^c(A,\sigma)$，也就是 π 的连续截面。同样，我们有 $Pol^c_+(A,\sigma)$ 和 $Pol^c_-(A,\sigma)$，使得 $Pol^c(A,\sigma) \simeq Pol^c_+(A,\sigma) \times Pol^c_-(A,\sigma)$】【。

注5.6。通过构造，极化与一个集合论上的$\widetilde{\ }$截面相同，该截面为 π:谱$(W(A,\sigma))$ $\to$ 谱$(W(K))$，并且与点的特化相容。于是，连续极化与 π 的连续截面相同。

命题 5.7。设 (A,σ) 是 K上的带对合的代数。极化-$\widetilde{\ }$化 $s\in \mathrm{Pol}(A,\sigma)$ 连续，当且仅当对于所有 $x\in W(A,\sigma)$，相对于 s 的全符号$\widetilde{\mathrm{sign}}^{s}(x)$ 在 $X(K)$上连续。

$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$证明。由于绝对全符号 sign$(x)$ 在 $X(A,\sigma)$ 上是连续的（命题4.9），显然，如果 s 是 $\overline{\pi}$ 的连续截面，那么复合映射 $\widetilde{\mathrm{sign}}^{s}(x)$ 也是连续的。

反之，假设所有 $\widetilde{\mathrm{sign}}^{s}(x)$ 在 $\widetilde{X}(A,\sigma)$ 上都是连续的。令 $D(x)\subset\widetilde{\ }$谱$(W(A,\sigma))$为由 x 定义的开子集（即由在 x 处的局部化所定义的开子概形）。根据构造，$D_0(x):=D(x)\cap X(A,\sigma)$是 $\widetilde{\mathrm{sign}}(x)$ 取非零值的子集，因此 $s^{-1}(D_0(x))$ 是$X(K)$中 $\widetilde{\mathrm{sign}}^{s}(x)$ 取非零值的子集。根据假设，它在$\sim X(K)$中是开的。由于 $D_0(x)$ 构成 $X(A,\sigma)$ 的一个开基，这意味着 s 是连续的。

□

根据 G_c 的定义可知，若 Pol$^c(A,\sigma)$ 非空，则它是一个单传递的 G_c-集，因此它在 Pol$(A,\sigma)/G_c$ 中确定一个类。因此，我们只需判断是否存在一个连续极化，就能找出所有极化。这与研究 [3], 中的 H-符号密切相关，下面我们将对此进行探讨。

定义 5.8. 设 (A,σ) 是 K 上带 *involution* 的代数。若 $x\in\sim W(A,\sigma)$，记

$$U(x)=\{P\in X(K)\mid \widetilde{\mathrm{sign}}_P^{+}(x)\neq\widetilde{\mathrm{sign}}_P^{-}(x)\}.$$

我们称由 x 定义的 $X(K)$ 的 $U(x)$ 为主子集。

我们还定义 $s_x\in \mathrm{Pol}^{U(x)}(A,\sigma)$，称为由 x 定义的主局部极化，即满足对所有 $P\in U(x)$，都有 $\widetilde{\ }$符号$_P^{s_x}(x)>\widetilde{\ }$符号$_P^{-s_x}(x)$ 的唯一局部极化。

命题 *5.9.* 设 *(A,σ)* 是 K 上带 *involution* 的代数。则对

$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$任意 $x\in W(A,\sigma)$，$U(x)$ 是 $X(K)$ 的一个既开又闭子集，并且 s_x*:* $U(x)\to X(A,\sigma)$ 是 (A,σ) 在 $U(x)$ 上的连续局部极化。

$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$证明。令 $\tau:\ X(A,\sigma)\to X(A,\sigma)$ 为交换 π 的每个纤维中元素的函数。它是连续的，例如，这是因为它由 $\langle -1\rangle_\sigma$ 所定义的标准自同构诱导而来。我们定义 $f:\ \widetilde{X}(A,\sigma)\to\mathbb{Z}^2$ 为$\sim$ $\sim f=(\mathrm{sign}(x),\mathrm{sign}(x)\circ\tau)$，并且

$$S=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\mid m\neq n\},\quad S^{+}=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\mid m>n\}.$$

然后 $U(x)=\pi(f^{-1}(S))$ 且 Im$(s_x)=f^{-1}(S^{+})$，因此 Im(s_x) 在

$\widetilde{\ }$$\sim X(A,\sigma)$中是闭的，而 $U(x)$ 在 $X(K)$ 中是开闭的（此处我们使用了 $X(A,\sigma)$ 的拟紧性）。现在若 Y是 $\widetilde{X}(A,\sigma)$ 中的任意闭集，则 $s_x^{-1}(Y)=\pi(Y\cap\mathrm{Im}(s_x))$，因此它在 $X(K)$ 中是闭的，这表明 s_x 是连续的。□

然后我们将 [3] 中的结果解释为：

定理 5.10。设 (A,σ) 是 K 上带 *involution* 的代数。那么对于任意$x_1,\ldots,x_n\in W_\varepsilon(A)$，存在 $x\in W_\varepsilon(A,\sigma)$，使得 $U(x_1)\cup\cdots\cup U(x_n)=U(x)$。特别地，存在 $x\in W_\varepsilon(A,\sigma)$，使得 $U(x)=X_\varepsilon(A)$，因此$\widetilde{\ }$存在全局连续极化，并且 $X(A,\sigma)\approx X(K)$ 作为拓扑空间与 $\coprod X(K)$ 同胚，其中 $\overline{\pi}$ 为典范投影。

此外，全局主极化的类是一个传递的 G_c-集合，因此它恰好是 $\mathrm{Pol}^c(A,\sigma)$。

证明。存在 $x\in W_\varepsilon(A,\sigma)$ 使得 $\bigcup U(x_i)=U(x)$ 是对 [3, 3.1] 的重新表述。存在 $x\in W_\varepsilon(A,\sigma)$使得 $U(x)=X_\varepsilon(A)$ 由拟紧性得到，因为引理 3.8 表明 $U(x_i)$ 构成 $X_\varepsilon(A)$ 的开覆盖。由于$\mathrm{Pol}^c_+(A,\sigma)$和 $\mathrm{Pol}^c_-(A,\sigma)$非空，$\mathrm{Pol}^c(A,\sigma)$ 也非空。如果$\backsim s\in\mathrm{Pol}(A,\sigma)$，那么 $X(A,\sigma)=\mathrm{Im}(s)\coprod\mathrm{Im}(-s)$，并且如果 s是连续的，则 $\mathrm{Im}(s)$ 和 $\mathrm{Im}(-s)$ 同胚于 $X(K)$。

主极化构成传递的 G_c-集这一事实，是对 [3, 3.3] 的重新表述。由于它们包含于 $\mathrm{Pol}^c(A,\sigma)$ 中，而 $\mathrm{Pol}^c(A,\sigma)$ 也是传递的 G_c-集，因此我们可以得出结论。 □

注记 5.11。在这一框架下，较弱的引理 3.8 简单地表明，带有 $x\in W_\varepsilon(A,\sigma)$ 的 $U(x)$ 构成 $X_\varepsilon(A)$ 的一个开覆盖；这说明 $\backsim X(A,\sigma)$ 是 $X(K)$ 的一个双覆盖，因为它具有局部平凡化。[2] 中的 H-符号这一概念对应于用主开子集对 $X_\varepsilon(A)$ 取有限开覆盖（由拟紧性可知，这样的覆盖存在）。一般而言，H- 符号对应于连续极化。

$\widetilde{\ }$鉴于 $\mathrm{Spec}(W(A,\sigma))$ 不仅是一个拓扑空间，还是一个概形，$\widetilde{\ }$我们还有另一类自然的极化：若 $\rho\colon W(A,\sigma)\to W(K)$ 是一个回缩（见定义 3.2），则应用 Spec 函子可得一个$\widetilde{\ }$概形态射 $\rho^*\colon\mathrm{Spec}(W(K))\to\mathrm{Spec}(W(A,\sigma))$，因而特别地得到一个连续极化。我们称这种形式的极化为 (A,σ) 的代数极化，并记作 $\mathrm{Pol}^a(A,\sigma)$。类似地，正交（分别地，辛）回缩定义了集合 $\mathrm{Pol}^a_+(A,\sigma)$（分别地，$\mathrm{Pol}^a_-(A,\sigma)$），即 (A,σ) 的代数正交（分别地，代数辛）极化。显然有一个单射 $\mathrm{Pol}^a(A,\sigma)\subset\mathrm{Pol}^a_+(A,\sigma)\times\mathrm{Pol}^a_-(A,\sigma)$，但一般而言，它是否为满射尚不明确。显然，$(A,\sigma)$ 存在代数（整体、正交或辛）极化与布劳尔类 $[A]$ 有关。

注记 5.12。根据构造，G_a 作用于 $\mathrm{Pol}^a_+(A,\sigma)$ 和 $\mathrm{Pol}^a_-(A,\sigma)$，并且在 $\mathrm{Pol}^a(A,\sigma)$ 上传递作用。特别地，$\mathrm{Pol}(A,\sigma)/G_a$ 中存在一个良定义的“代数”元素，而集合 $\mathrm{Pol}^a(A,\sigma)/G_s$、$\mathrm{Pol}^a_+(A,\sigma)/G_s$ 和 $\mathrm{Pol}^a_-(A,\sigma)/G_s$ 均良定义，且它们仅取决于布劳尔类 $[A]$。

例5.13。如果 A 是分裂的，则根据例 3.3，存在 (A,σ) 的代数极化。

例 5.14. 根据命题 3.5，(H_K,γ) 总是存在规范的代数辛极化；若 K 是毕达哥拉斯域，则存在规范的全局代数极化。另一方面，如果 K 的毕达哥拉斯数至少为 3，则 (H_K,γ) 不存在代数极化。

我们不知道还有其他存在代数极化的情形；刻画满足这一条件的布劳尔类将会很有意思。

References

[1] Emil Artin 和 Otto Schreier。《实域的代数构造》。汉堡大学数学研讨班论文集，5(1):85–99，1927。[2] Vincent Astier 和 Thomas Unger。厄米形式的符号与 Knebusch 迹公式。《数学年刊》，358(3-4):925–947，2014。arXiv：1003.0956。[3]Vincent Astier 和 Thomas Unger。厄米形式的符号与 Witt 群的 " 素理想 "。《数学进展》，285:497–514，2015。arXiv：1303.3494。[4] Eva Bayer-Fluckiger 和 Raman Parimala。经典群与 Hasse 原理。《数学年刊》，147(3):651–693，1998。[5] Nicolas Garrel。带对合代数的混合 Witt 环。《加拿大数学杂志》，75(2):608–644，2023。[6] Max-Albert Knus、Alexander Merkurjev、Markus Rost 和 Jean-Pierre Tignol。《对合之书》。美国数学学会，1998。[7] T.Y. Lam。《域上的二次型导论》。AMS，2005。[8] David W. Lewis 和 J. P. Tignol。关于对合的符号。《数学档案》，60(2):128–135，1993。[9] Anne Quéguiner。第二类对合的符号。《数学档案》，65(5):408–412，1995。