用量子态解决博弈论困境

Azhar Iqbal[†]、James M. Chappell[‡]、Claudia Szabo[†]、Derek Abbott[‡]

[†]澳大利亚阿德莱德大学计算机与数学科学学院，
南澳大利亚州 5005，澳大利亚

[‡]澳大利亚阿德莱德大学电气与电子工程学院，南澳
大利亚州 5005，澳大利亚。

arXiv:2304.03605v2 [quant-ph] 2 Nov 2023

摘要

我们提出了一种基于Fine定理、用于构建经典博弈量子版本的新框架。该定理表明，对于给定的一组边缘分布，一组贝尔不等式构成了相应联合概率分布存在的充要条件。利用Fine定理，我们将玩家收益及其策略均重新表述为一组边缘分布，从而为研究这样一类边缘分布铺平了道路：它们对应于纠缠量子态，但可能不存在相应的联合概率分布。通过利用量子态并采用正算子值测度（正算子值测度），我们进而考察特定的量子态，这些量子态有可能解决经典博弈中固有的困境。

I. 引言

在对非合作博弈 [7–9]进行量子化的传统方法 [1–6]中，每位参与者在纠缠量子态上实施局部幺正变换（策略）。随-后，通过量子测量 [10]确定每位参与者的收益。目标是确定满足与玩家收益相关的纳什不等式集合的局部幺正操作集合。为了发展博弈的量子版本，各种方法论和观点应运而生 [5, 11–14]。Bleiler [15]将一种集合论方法形式化，用于博弈量子化，引入了适当量子化、不适当量子化和完全量子化的概念，并探索了通过量子叠加这一视角，在博弈量子化中实现更广义随机化概念的潜力。

一个纠缠的量子态 [10], 经过仔细考察后显示出，其本质上能够提供量子、非经典的概率分布，从而突破贝尔不等式 [16–19]。这一认识启发我们构建了一个框架，在该框架中，博弈论挑战通过量子态的独特属性加以阐述，具体而言，就是利用它们生成非经典概率分布的能力。

Fine定理 [21–23]断言，给定一组边缘分布后，一组贝尔不等式为确保这些边缘分布存在联合概率分布提供了必要且充分的条件。在此基础上，本文介绍了一种用于量子博弈的新方法，该方法直接源自经典博弈的混合策略版本。借助Fine定理，我们将每位参与者的收益及其策略重新表述为联合概率分布的边缘分布。通过博弈论分析，我们能够确定可能解决该博弈的边缘分布集合，进而识别相应的量子态。为从这些量子态中推导边缘概率分布，我们深入研究正算子值测度（POVM） [10]——这一概念此前已在量子博弈研究中得到探讨 [5, 26]。

我们以 Fine 定理为基础的创新方法，通过聚焦于一组贝尔不等式的 Fine 定理，重新诠释量子博弈。通过仔细审视概率分布的边缘分布，我们的方法促使博弈从经典混合策略版本无缝过渡到与纠缠态相关的量子版本。这一框架为如何利用源自纠缠量子态的非经典概率分布提供了全新视角，从而阐明并解决博弈论方面的...

难题。

II. 三个二值可观测量的 Fine定理

我们考虑 Fine定理 [21–23]，该定理针对三个二值可观测量，表述如下。若 a、b、c 是二值可观测量（每个都映射到 $\{+1,-1\}$），且给定其联合分布 $P_{a,\,b}$、$P_{a,\,c}$ 以及 $P_{b,\,c}$，那么存在与给定的各对联合分布相容的联合分布 $P_{a,\,b,\,c}$ 的充要条件是满足以下不等式组：

$$\begin{aligned} P(a)+P(b)+P(c) &\le 1+P(ab)+P(ac)+P(bc),\\ P(ab)+P(ac) &\le P(a)+P(bc),\\ P(ab)+P(bc) &\le P(b)+P(ac),\\ P(ac)+P(bc) &\le P(c)+P(ab), \end{aligned} \tag{1}$$

where $P(\bullet)$ 是每个括号内的可观测量取值为 $+1$ 的概率 .

在 Fine定理的证明中，当某个可观测量 O（例如）取值为 -1 时，记作 $\bar{}O$ 当且仅当可观测量 O 取值为 $+1$；我们还将 $\xi = P(abc)$ 记为如此。那么，若存在与给定的各对联合分布相容的分布 $P_{a,\,b,\,c}$，其中的各项必须满足

$$\begin{aligned} P(ab\bar{c}) &= P(ab)-\xi,\\ P(a\bar{b}c) &= P(ac)-\xi,\\ P(a\bar{b}\bar{c}) &= P(a)-P(ab)-P(ac)+\xi,\\ P(\bar{a}bc) &= P(bc)-\xi,\\ P(\bar{a}b\bar{c}) &= P(b)-P(ab)-P(bc)+\xi,\\ P(\bar{a}\bar{b}c) &= P(c)-P(ac)-P(bc)+\xi,\\ P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) &= 1-P(a)-P(b)-P(c)+P(ab)+P(ac)+P(bc)-\xi. \end{aligned} \tag{2}$$

使用 $0\le\xi\le\min(P(ab)\ P(ac)\ P(bc))$，要求式（2）中的每一项均非负这一条件将得到方程组（1）。反过来，如果满足方程组（1），那么按上述方式选取 ξ 即可确保方程（2）定义所需的分布 $P_{a,b,c}$.

III. 将Fine定理应用于三人博弈

设 $\Re = \{$A、B、C$\}$ 为参与者集合。经典三人标准型博弈由以下内容给出：a）三个非空集合 Σ_{A}、 Σ_{B} 和 Σ_{C}，分别表示参与者 A、B 和 C 的策略集；b）三个定义在 $\Sigma_{\mathrm{A}} \times \Sigma_{\mathrm{B}} \times \Sigma_{\mathrm{C}}$ 上的实值函数 P_{A}、 P_{B} 和 P_{C}。积空间 $\Sigma_{\mathrm{A}} \times \Sigma_{\mathrm{B}} \times \Sigma_{\mathrm{C}}$ 是所有元组 (σ_{A}、σ_{B}、σ_{C}) 的集合，其中 $\sigma_{\mathrm{A}} \in \Sigma_{\mathrm{A}}$、 $\sigma_{\mathrm{B}} \in \Sigma_{\mathrm{B}}$ 和 $\sigma_{\mathrm{C}} \in \Sigma_{\mathrm{C}}$。策略是指这样的元组 ($\sigma_{\mathrm{A}}$、 σ_{B}、σ_{C})，而 P_{A}、 P_{B}、 P_{C} 是三位参与者的收益函数。该博弈记作 $\Gamma = \{\Sigma_{\mathrm{A}}, \Sigma_{\mathrm{B}}, \Sigma_{\mathrm{C}}$； P_{A}、P_{B}、 $P_{\mathrm{C}}\}$。

为了将Fine定理应用于三人博弈，我们使用上述符号，并考虑参与者A、B和C的博弈，其中玩家收益定义为

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= \alpha_1 P(abc) + \beta_1 P(ab\bar{c}) + \gamma_1 P(a\bar{b}c) + \delta_1 P(a\bar{b}\bar{c}) + \\ &\epsilon_1 P(\bar{a}bc) + \varepsilon_1 P(\bar{a}b\bar{c}) + \zeta_1 P(\bar{a}\bar{b}c) + \eta_1 P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}); \qquad (3)\\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= \alpha_2 P(abc) + \beta_2 P(ab\bar{c}) + \gamma_2 P(a\bar{b}c) + \delta_2 P(a\bar{b}\bar{c}) + \\ &\epsilon_2 P(\bar{a}bc) + \varepsilon_2 P(\bar{a}b\bar{c}) + \zeta_2 P(\bar{a}\bar{b}c) + \eta_2 P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}); \qquad (4)\\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= \alpha_3 P(abc) + \beta_3 P(ab\bar{c}) + \gamma_3 P(a\bar{b}c) + \delta_3 P(a\bar{b}\bar{c}) + \\ &\epsilon_3 P(\bar{a}bc) + \varepsilon_3 P(\bar{a}b\bar{c}) + \zeta_3 P(\bar{a}\bar{b}c) + \eta_3 P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}). \qquad (5)\end{aligned}$$

其中$\alpha_{1,\ 2,\ 3}$、 $\beta_{1,\ 2,\ 3}$、...$\eta_{1,\ 2,\ 3}$为实数， λ、 μ、 $\nu \in [0,1]$ 以及

$$\lambda = P(a),\ \mu = P(b),\ \nu = P(c), \qquad (6)$$

分别定义为参与者 A、B 和 C 的（混合）策略。式（3、4、5）定义了一般博弈中三位参与者的玩家收益，从而为将 Fine定理应用于该博弈铺平道路。请注意，例如，可观测量 b 在可观测量 b 取值 $+1$ 时，取¯值 -1，记作 b。对于可因子化情形，参与者的收益（3、4、5）表示为

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\lambda\mu\nu + (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\lambda\mu(1-\nu) + \\ &(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\lambda(1-\mu)\nu + (\delta_1,\delta_2,\delta_3)\lambda(1-\mu)(1-\nu) + \\ &(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)(1-\lambda)\mu\nu + (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(1-\lambda)\mu(1-\nu) + \\ &(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)(1-\lambda)(1-\mu)\nu + (\eta_1,\eta_2,\eta_3)(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu), \qquad (7)\end{aligned}$$

从而得到三人博弈的混合策略版本。

如果一个策略组合中的每个策略都是对该组合中其他所有策略的最佳回应，那么这个策略组合就是纳什均衡；也就是说，在其他参与者所采用的策略给定的情况下，没有参与者能够通过采用其他策略获得更高的收益。因此，这个博弈中由三元组 $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)$ 描述的纳什均衡，可由以下不等式得出

$$\frac{\partial \Pi_{\mathrm{A}}}{\partial \lambda} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\lambda^* - \lambda) \geq 0, \ \frac{\partial \Pi_{\mathrm{B}}}{\partial \mu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\mu^* - \mu) \geq 0, \ \frac{\partial \Pi_{\mathrm{C}}}{\partial \nu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\nu^* - \nu) \geq 0, \quad (8)$$

对所有 $\lambda, \mu, \nu \in [0, 1]$. 均成立。不等式 (8) 并不足够，因为所有导数都可能为零。在这种情况下，为了表明三元组 $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)$ 关于 λ、μ 和 ν 是一个极大值，我们还要求二阶导数 $\frac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{A}}}{\partial \lambda^2} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}$ $\frac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{B}}}{\partial \mu^2} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}$，以及$\frac{\partial^2 \Pi_{\mathrm{C}}}{\partial \nu^2} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}$ 为正。

IV. 三人囚徒困境的情形

对于三人囚徒困境博弈 [24, 25]，我们将玩家收益写作

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda, \mu, \nu) = (\varkappa, \varkappa, \varkappa)P(abc) + (\kappa, \kappa, \vartheta)P(ab\bar{c}) + (\kappa, \vartheta, \kappa)P(a\bar{b}c) \\ +(\tau, \theta, \theta)P(a\bar{b}\bar{c}) + (\vartheta, \kappa, \kappa)P(\bar{a}bc) + (\theta, \tau, \theta)P(\bar{a}b\bar{c}) \\ +(\theta, \theta, \tau)P(\bar{a}\bar{b}c) + (\omega, \omega, \omega)P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}),\end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}&\text{a) } \vartheta > \varkappa, \ \ \omega > \tau, \ \ \theta > \kappa, \\ &\text{b) } \vartheta > \theta > \omega, \ \ \varkappa > \kappa > \tau, \\ &\text{c) } \kappa > \omega, \ \ \varkappa > \theta, \ \ \kappa > (1/2)(\tau + \theta), \ \ \varkappa > (1/2)(\kappa + \vartheta).\end{aligned} \quad (10)$$

满足这些要求的一个例子是.....的情况

$$\varkappa = 7, \ \vartheta = 9, \ \kappa = 3, \ \tau = 0, \ \omega = 1, \ \theta = 5, \quad (11)$$

其中玩家收益（3,4,5）表示为

$$\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) = (7,7,7)P(abc) + (3,3,9)P(ab\bar{c}) + (3,9,3)P(a\bar{b}c) \\ +(0,5,5)P(a\bar{b}\bar{c}) + (9,3,3)P(\bar{a}bc) + (5,0,5)P(\bar{a}b\bar{c}) \\ +(5,5,0)P(\bar{a}\bar{b}c) + (1,1,1)P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}). \tag{12}$$

我们有

$$\begin{aligned} P(ab) &= P(abc) + P(ab\bar{c}) = \lambda\mu\nu + \lambda\mu(1-\nu) = \lambda\mu, \\ P(ac) &= \lambda\nu,\ P(bc) = \mu\nu, \end{aligned} \tag{13}$$

对于可因子化情形，贝尔不等式（BIs）（1）则呈现为

$$\begin{aligned} &\lambda + \mu + \nu \leq (1 + \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu), \\ &\lambda\mu + \lambda\nu \leq \lambda + \mu\nu,\ \lambda\mu + \mu\nu \leq \mu + \lambda\nu,\ \lambda\nu + \mu\nu \leq \nu + \lambda\mu, \end{aligned} \tag{14}$$

也就是说，后三个不等式之和呈现为

$$\begin{aligned} 2(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) &\leq (\lambda + \mu + \nu) + (\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu), \\ (\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) &\leq (\lambda + \mu + \nu), \\ (\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) &\leq (\lambda + \mu + \nu) \leq (1 + \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu), \end{aligned} \tag{15}$$

也就是说，对于可因子化情形，这些不等式构成一个一致的集合，因为后三个贝尔不等式与第一个贝尔不等式相一致。

结合（11），对于可因子化情形，参与者的收益表示为

$$\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) = (7,7,7)\lambda\mu\nu + (3,3,9)\lambda\mu(1-\nu) + \\ (3,9,3)\lambda(1-\mu)\nu + (0,5,5)\lambda(1-\mu)(1-\nu) + \\ (9,3,3)(1-\lambda)\mu\nu + (5,0,5)(1-\lambda)\mu(1-\nu) + \\ (5,5,0)(1-\lambda)(1-\mu)\nu + (1,1,1)(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu), \tag{16}$$

也就是说

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= \lambda(\mu\nu-\mu-\nu-1)+4\mu+4\nu+1,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= \mu(\lambda\nu-\lambda-\nu-1)+4\nu+4\lambda+1,\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= \nu(\lambda\mu-\mu-\lambda-1)+4\mu+4\lambda+1. \qquad (17)
\end{aligned}$$

对于三人囚徒困境博弈的纳什均衡，即三元组（λ^*,μ^*,ν^*），我们考虑不等式 (8), 并得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Pi_{\mathrm{A}}}{\partial\lambda} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\lambda^*-\lambda) = (\mu^*\nu^*-\mu^*-\nu^*-1)(\lambda^*-\lambda)\geq 0,\\
&\frac{\partial\Pi_{\mathrm{B}}}{\partial\mu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\mu^*-\mu) = (\lambda^*\nu^*-\lambda^*-\nu^*-1)(\mu^*-\mu)\geq 0,\\
&\frac{\partial\Pi_{\mathrm{C}}}{\partial\nu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\nu^*-\nu) = (\lambda^*\mu^*-\mu^*-\lambda^*-1)(\nu^*-\nu)\geq 0, \qquad (18)
\end{aligned}$$

这给出了(λ^*,μ^*,ν^*)的纳什均衡 =(0,0, 0)，即三位参与者中的每一位都采用背叛策略。在此纳什均衡下，玩家收益随后可表示为 Π_{A}(0,0,0) = Π_{B}(0, 0, 0) =Π_{C}(0,0, 0) = 1. 注意，对于策略三元组(1,1,1)，三位参与者中的每一位都采用合作策略。从不可因子分解的概率分布视角研究量子博弈的方法见参考文献 [27]，而从三人囚徒困境的视角对 W态与 GHZ态之间差异的讨论也见参考文献[28]。

A. 用边缘分布表示的玩家收益

现在将式（2、6）代入，得到参与者收益 $\Pi_{\mathrm{A,B,C}}$ 。

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) = \alpha_{1,2,3}\xi &+ \beta_{1,2,3}(P(ab)-\xi)+\gamma_{1,2,3}(P(ac)-\xi)\\
&+\delta_{1,2,3}(\lambda-P(ab)-P(ac)+\xi)\\
&+\epsilon_{1,2,3}(P(bc)-\xi)+\varepsilon_{1,2,3}(\mu-P(ab)-P(bc)+\xi)\\
&+\zeta_{1,2,3}(\nu-P(ac)-P(bc)+\xi)\\
&+\eta_{1,2,3}(1-\lambda-\mu-\nu+P(ab)+P(ac)+P(bc)-\xi). \qquad (19)
\end{aligned}$$

式(19) 将玩家收益重新表示为概率 λ、μ、ν，这些概率代表玩家策略，并在 (6) 中定义。利用 $\xi = P(abc)$，这些收益表示为

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) &= (\alpha_{1,2,3} - \beta_{1,2,3} - \gamma_{1,2,3} + \delta_{1,2,3} - \epsilon_{1,2,3} + \varepsilon_{1,2,3} + \zeta_{1,2,3} - \eta_{1,2,3})P(abc) \\ &+(\beta_{1,2,3} - \delta_{1,2,3} - \varepsilon_{1,2,3} + \eta_{1,2,3})P(ab) + (\epsilon_{1,2,3} - \varepsilon_{1,2,3} - \zeta_{1,2,3} + \eta_{1,2,3})P(bc) \\ &+(\gamma_{1,2,3} - \delta_{1,2,3} - \zeta_{1,2,3} + \eta_{1,2,3})P(ac) + (\delta_{1,2,3} - \eta_{1,2,3})\lambda \\ &+(\varepsilon_{1,2,3} - \eta_{1,2,3})\mu + (\zeta_{1,2,3} - \eta_{1,2,3})\nu + \eta_{1,2,3}. \end{aligned} \tag{20}$$

我们将方程（20）视为相应量子博弈的定义性收益关系，因为这些收益也使我们能够考虑贝尔不等式（1）被违反的情形。当方程（2）中定义的分布 $P_{a、b、c}$ 不成立时，就会出现这种情况。

我们在此强调，当贝尔不等式成立时，推导方程（3、4、5）的步骤可以逆向进行(20)这是因为贝尔不等式（1）是联合分布 ξ 存在的充要条件。也就是说，根据给定的收益关系（20），可以得到收益关系（3、4、5），进而针对方程（7）所考虑的可因子化概率情形，得到经典混合策略博弈。

B. 用边缘分布表示三人囚徒困境中的玩家收益

将方程（11、2、6）代入后，可得上述玩家收益 $\Pi_{A、B、C}$：

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(ab) - P(ac) - \lambda + 4\mu + 4\nu + 1, \\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(ab) - P(bc) + 4\lambda - \mu + 4\nu + 1, \\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(bc) - P(ac) + 4\lambda + 4\mu - \nu + 1. \end{aligned} \tag{21}$$

现在，如果贝尔不等式成立，那么联合分布（2）存在，玩家收益（21）采取经典混合策略博弈中的形式。

V. 使用量子态

现在我们使用量子态 $|\Psi\rangle$，并假设二值可观测量 a、b 和 c 是保利自旋翻转算符 σ_z 的本征值。σ_z 的对角表示为

$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$，且 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 σ_z 的本征态，分别为

$|\psi\rangle_{+1} = |0\rangle$ 和 $|\psi\rangle_{-1} = |1\rangle$，对应的本征值为 $+1$ 和 -1。设 ρ_Ψ 为量子态 $|\Psi\rangle$ 的密度矩阵。

A. 使用正算子值测度计算贝尔不等式中的边缘分布

正算子值测度（POVM）[10] 是一种测度，其取值是希尔伯特空间上的半正定算子，而由正算子值测度描述的量子测量是对量子测量的一种推广。要在标准基下测量爱丽丝的系统，我们考虑如下正算子值测度

$$M_{\mathrm{A}}^0 = |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}},\ M_{\mathrm{A}}^1 = |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}}, \tag{22}$$

对此，我们有

$$M_{\mathrm{A}}^0 + M_{\mathrm{A}}^1 = (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}) \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}} = \mathcal{I}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}} = \mathcal{I}, \tag{23}$$

类似地

$$M_{\mathrm{B}}^0 + M_{\mathrm{B}}^1 = M_{\mathrm{C}}^0 + M_{\mathrm{C}}^1 = \mathcal{I}. \tag{24}$$

爱丽丝、鲍勃和克里斯分别获得结果 $+1$的概率为

$$\lambda = P(a) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{A}}^0\rho),\ \mu = P(b) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{B}}^0\rho),\ \nu = P(c) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{C}}^0\rho). \tag{25}$$

对于概率 $P(ab)$，我们考虑如下正算子值测度

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{AB}}^{00} &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}},\ M_{\mathrm{AB}}^{11} = |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}}, \\ M_{\mathrm{AB}}^{10} &= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}},\ M_{\mathrm{AB}}^{01} = |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}}. \end{aligned} \tag{26}$$

请注意

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{AB}}^{00}+M_{\mathrm{AB}}^{01} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}+|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\\
&= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\\
&= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}},\ \text{and}\\
M_{\mathrm{AB}}^{11}+M_{\mathrm{AB}}^{10} &= (|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\\
&= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes(|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}+|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\\
&= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}},\ \text{and, therefore}\\
M_{\mathrm{AB}}^{00}+M_{\mathrm{AB}}^{01}+M_{\mathrm{AB}}^{11}+M_{\mathrm{AB}}^{10} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\\
&= \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}=\mathcal{I}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

我们可以定义另一个正算子值测度，如下所示

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{AB}}^{+1} &= M_{\mathrm{AB}}^{00}+M_{\mathrm{AB}}^{11}\\
&= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}, \qquad (28)\\
M_{\mathrm{AB}}^{-1} &= M_{\mathrm{AB}}^{10}+M_{\mathrm{AB}}^{01}\\
&= (|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}+|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}})\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}, \qquad (29)
\end{aligned}
$$

并且我们得到 $P(ab) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{AB}}\rho)$。

类似地，对于 $P(bc)$，我们考虑由下式给出的正算子值测度

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{BC}}^{00} &= \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}),\ M_{\mathrm{BC}}^{11}=\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}),\\
M_{\mathrm{BC}}^{10} &= \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}),\ M_{\mathrm{BC}}^{01}=\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{BC}}^{+1} &= M_{\mathrm{BC}}^{00}+M_{\mathrm{BC}}^{11}\\
&= \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}), \qquad (31)\\
M_{\mathrm{BC}}^{-1} &= M_{\mathrm{BC}}^{10}+M_{\mathrm{BC}}^{01}\\
&= \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes(|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}+|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}), \qquad (32)
\end{aligned}
$$

并得到 $P(bc) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{BC}}\rho)$。

类似地，对于 $P(ac)$，我们考虑由下式给出的正算子值测度

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{AC}}^{00} &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}\,,\ M_{\mathrm{AC}}^{11} = |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \\ M_{\mathrm{AC}}^{10} &= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}\,,\ M_{\mathrm{AC}}^{01} = |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{33}$$

并且我们注意到

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{AC}}^{+1} &= M_{\mathrm{AC}}^{00} + M_{\mathrm{AC}}^{11} \\ &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{AC}}^{-1} &= M_{\mathrm{AC}}^{10} + M_{\mathrm{AC}}^{01} \\ &= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{35}$$

并得到 $P(ac) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{AC}}\rho)$。注意，

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{BC}}^{00} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}) \otimes (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}) \\ &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{BC}}^{11} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}) \otimes (|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}) \\ &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{BC}}^{10} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}) \otimes (|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}) \\ &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{BC}}^{01} &= (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}) \otimes (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}) \\ &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,. \end{aligned} \tag{39}$$

现在考虑

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{ABC}}^{+1} &= |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + \\ &\quad |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{ABC}}^{-1} &= |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + \\ &\quad |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}\,, \end{aligned} \tag{41}$$

对于哪些

$$M_{\mathrm{ABC}}^{+1}+M_{\mathrm{ABC}}^{-1}=\left(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}}\right)\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}=\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}=\mathcal{I} \tag{42}$$

也就是说， $M^{+1}{}_{\mathrm{ABC}}\ M^{-1}{}_{\mathrm{ABC}}$构成一个正算子值测度。

B. 使用正算子值测度求边缘分布

我们考虑 GHZ 型纯态，即 $|\Psi\rangle=a|000\rangle+b|111\rangle$ 其中 a、 $b\in\mathbb{C}$ 和 $|a|^2+|b|^2=1$。这给出 $\langle\Psi|=a^*\langle 000|+b^*\langle 111|$，并且我们有

$$\rho_\Psi=|\Psi\rangle\langle\Psi|=|a|^2|000\rangle\langle 000|+ab^*|000\rangle\langle 111|+a^*b|111\rangle\langle 000|+|b|^2|111\rangle\langle 111|, \tag{43}$$

因此，由（25）可得

$$\lambda=P(a)=\mathrm{Tr}(M_{\mathrm{A}}^0\rho_\Psi),\mu=P(b)=\mathrm{Tr}(M_{\mathrm{B}}^0\rho_\Psi),\nu=P(c)=\mathrm{Tr}(M_{\mathrm{C}}^0\rho_\Psi). \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^0\rho_\Psi)=\mathrm{Tr}\left[\left(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\right)\rho_\Psi\right]\\ &= \mathrm{Tr}[|a|^2\left(|000\rangle\langle 000|+ab^*|000\rangle\langle 111|\right)=|a|^2.\end{aligned} \tag{45}$$

and

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}^0\rho_\Psi)=\mathrm{Tr}\left[\left(\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}}\right)\rho_\Psi\right]\\ &= \mathrm{Tr}[|a|^2\left(|000\rangle\langle 000|+ab^*|000\rangle\langle 111|\right)=|a|^2.\end{aligned} \tag{46}$$

and

$$\begin{aligned}\nu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{C}}^0\rho_\Psi)=\mathrm{Tr}\left[\left(\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}}\right)\rho_\Psi\right]\\ &= \mathrm{Tr}[|a|^2\left(|000\rangle\langle 000|+ab^*|000\rangle\langle 111|\right)=|a|^2.\end{aligned} \tag{47}$$

此外，由于 $P(ab)=\mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{AB}}\rho_\Psi)$，我们得到

$$P(ab) = \mathrm{Tr}[(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}) \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}}]\rho_{\Psi}$$
$$= \mathrm{Tr}(|a|^2 |000\rangle\langle 000| + ab^* |000\rangle\langle 111| + a^* b |111\rangle\langle 000| + |b|^2 |111\rangle\langle 111|)$$
$$= |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{48}$$

并且我们得到 $P(ab) = 1$。

同样，由于 $P(bc) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{BC}}\rho_{\Psi})$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M^{+1}_{\mathrm{BC}}\rho_{\Psi}) &= \mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathrm{A}} \otimes (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}})]\rho_{\Psi} \\ &= \mathrm{Tr}(|a|^2 |000\rangle\langle 000| + ab^* |000\rangle\langle 111| + a^* b |111\rangle\langle 000| + |b|^2 |111\rangle\langle 111|) \\ &= |a|^2 + |b|^2 = 1, \end{aligned} \tag{49}$$

并且，由于 $P(ac) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{AC}}\rho_{\Psi})$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M^{+1}_{\mathrm{AC}}\rho_{\Psi}) &= \mathrm{Tr}[|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}]\rho_{\Psi} \\ &= \mathrm{Tr}(|a|^2 |000\rangle\langle 000| + ab^* |000\rangle\langle 111| + a^* b |111\rangle\langle 000| + |b|^2 |111\rangle\langle 111|) \\ &= |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{aligned} \tag{50}$$

并且我们得到 $P(ac) = 1.$同样，由于 $P(abc) = \mathrm{Tr}(M^{+1}{}_{\mathrm{ABC}}\rho_{\Psi})$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M^{+1}_{\mathrm{ABC}}\rho_{\Psi}) &= \mathrm{Tr}[|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + \\ &\quad |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}]\rho_{\Psi} \\ &= \mathrm{Tr}(|a|^2 |000\rangle\langle 000| + ab^* |000\rangle\langle 111|) = |a|^2, \end{aligned} \tag{51}$$

并且我们得到 $P(abc) = |a|^2$ 贝尔不等式 (1) 具有以下形式

$$3|a|^2 \leq 4,\ 2 \leq |a|^2 + 1,\ 2 \leq |a|^2 + 1,\ 2 \leq |a|^2 + 1 \tag{52}$$

或违反了 $1 \leq |a|^2 \leq 4/3$ 的情况，例如，当 $a = 1/\sqrt{2}$.时

VI. 使用 GHZ态的三人囚徒困境博弈

现在，再考虑这样一种情况：对于所研究的囚徒困境博弈和GHZ态，我们具有参与者收益关系（21）的相关形式，此时有

$$\begin{aligned} \xi = P(abc) = 1/2, \\ \lambda = P(a) = 1/2,\ \mu = P(b) = 1/2,\ \nu = P(c) = 1/2, \\ P(ab) = 1,\ P(bc) = 1,\ P(ac) = 1,\ P(abc) = 1/2, \end{aligned} \tag{53}$$

这使我们得到

$$\Pi_{\mathrm{A}}(1/2, 1/2, 1/2) = \Pi_{\mathrm{B}}(1/2, 1/2, 1/2) = \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda, \mu, \nu) = 3. \tag{54}$$

VII. 三量子比特纯态的情况

考虑该态

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = c_1 |000\rangle + c_2 |001\rangle + c_3 |010\rangle + c_4 |011\rangle \\ + c_5 |100\rangle + c_6 |101\rangle + c_7 |110\rangle + c_8 |111\rangle , \end{aligned} \tag{55}$$

[8]与 $\sum |c_i|^2 = 1$. 对于此状态，我们得到[i]

$$\begin{aligned} P(ac) &= \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{AC}}^{+1} \rho_\Psi) = \mathrm{Tr}[|0\rangle \langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle \langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle \langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle \langle 1|_{\mathrm{C}}] \rho_\Psi \\ &= \mathrm{Tr}(|000\rangle \langle 000| + |010\rangle \langle 010| + |101\rangle \langle 101| + |111\rangle \langle 111|) |\Psi\rangle \langle \Psi| \\ &= |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_6|^2 + |c_8|^2 . \end{aligned} \tag{56}$$

类似于上述计算，我们还得到

$$
\begin{aligned}
\lambda &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 , \\
\mu &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_5|^2 + |c_6|^2 , \\
\nu &= |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + |c_7|^2 , \\
P(ab) &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_7|^2 + |c_8|^2 , \\
P(bc) &= |c_1|^2 + |c_4|^2 + |c_5|^2 + |c_8|^2 , \\
P(ac) &= |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_6|^2 + |c_8|^2 , \\
\xi = P(abc) &= |c_1|^2 + |c_4|^2 + |c_6|^2 + |c_7|^2 . \qquad (57)
\end{aligned}
$$

对于囚徒困境，将式（57）代入式（21），可得

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\left[3|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + 4|c_5|^2 + 2|c_6|^2 + 2|c_7|^2 - |c_8|^2\right] + 1, \\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\left[3|c_1|^2 + |c_2|^2 + 4|c_3|^2 + 2|c_4|^2 + |c_5|^2 + 2|c_7|^2 - |c_8|^2\right] + 1, \\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\left[3|c_1|^2 + 4|c_2|^2 + |c_3|^2 + 2|c_4|^2 + |c_5|^2 + 2|c_6|^2 - |c_8|^2\right] + 1, \qquad (58)
\end{aligned}
$$

表示　　用所考虑纯态的系数表示玩家收益　　e.

VIII. 混合三量子比特态的情形

我们考虑由以下公式给出的混合态 ρ_Φ

$$
\begin{aligned}
\rho_\Phi \;=\; & p_1|000\rangle\langle 000| + p_2|001\rangle\langle 001| + p_3|010\rangle\langle 010| + p_4|011\rangle\langle 011| + \\
& p_5|100\rangle\langle 100| + p_6|101\rangle\langle 101| + p_7|110\rangle\langle 110| + p_8|111\rangle\langle 111| , \qquad (59)
\end{aligned}
$$

8</style}其中 $0 \le p_i \le 1$
和 $\sum p_i = 1$.

$$
\begin{aligned}
\lambda \;&=\; \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^0 \rho_\Phi) = \mathrm{Tr}\left[(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}})\rho_\Phi\right] \\
&=\; \mathrm{Tr}\left[(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011|)\rho_\Phi\right] \\
&=\; p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \qquad (60)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}^{0}\rho_{\Psi}) = \mathrm{Tr}\left[(\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{C}})\rho_{\Phi}\right]\\ &= \mathrm{Tr}[p_1|000\rangle\langle 000| + p_2|001\rangle\langle 001| + p_5|100\rangle\langle 100| + p_6|101\rangle\langle 101|]\\ &= p_1+p_2+p_5+p_6 \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\nu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{C}}^{0}\rho_{\Phi}) = \mathrm{Tr}\left[(\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{I}_{\mathrm{B}}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}})\rho_{\Phi}\right]\\ &= \mathrm{Tr}\left[((|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}})\otimes(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}}+|1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}})\otimes|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}})\rho_{\Phi}\right]\\ &= p_1+p_3+p_5+p_7 \end{aligned} \tag{62}$$

IX. 乘积态

考虑一个单量子比特纯量子态

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= e^{i\delta_1}(\cos\frac{\theta_1}{2}|0\rangle + e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}|1\rangle),\\ |\psi_2\rangle &= e^{i\delta_2}(\cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle + e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle),\\ |\psi_3\rangle &= e^{i\delta_3}(\cos\frac{\theta_3}{2}|0\rangle + e^{i\phi_3}\sin\frac{\theta_3}{2}|1\rangle).\end{aligned} \tag{63}$$

这些状态的乘积态为

$$\begin{aligned}\left|\psi_{1,2,3}\right\rangle = e^{i(\delta_1+\delta_2+\delta_3)}[&(\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}|000\rangle + e^{i\phi_3}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}|001\rangle +\\ &e^{i\phi_2}\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}|010\rangle + e^{i(\phi_2+\phi_3)}\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}|011\rangle) +\\ &(e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}|100\rangle + e^{i(\phi_1+\phi_3)}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}|101\rangle +\\ &e^{i(\phi_1+\phi_2)}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}|110\rangle + e^{i(\phi_2+\phi_3)}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}|111\rangle)],\end{aligned} \tag{64}$$

而对于纯态 $|\Psi\rangle = c_1|000\rangle + c_2|001\rangle + c_3|010\rangle + c_4|011\rangle + c_5|100\rangle + c_6|101\rangle + c_7|110\rangle + c_8|111\rangle$，我们有 $\lambda = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2$。因此，对于乘积态 **(64)**，我们得到

$$\lambda = \cos^2\frac{\theta_1}{2},\ \mu = \cos^2\frac{\theta_2}{2},\ \nu = \cos^2\frac{\theta_3}{2}. \tag{65}$$

类似地,

$$\begin{aligned} P(ab) &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_7|^2 + |c_8|^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}, \end{aligned} \tag{66}$$

并且可以表示为 $P(ab) = \lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu)$。此外,

$$\begin{aligned} P(bc) &= |c_1|^2 + |c_4|^2 + |c_5|^2 + |c_8|^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta_2}{2}\cos^2\frac{\theta_3}{2} + \sin^2\frac{\theta_2}{2}\sin^2\frac{\theta_3}{2}, \end{aligned} \tag{67}$$

以及对于 状态 (64) 可表示为 $P(bc) = \mu\nu + (1-\mu)(1-\nu)$。类似地 ,

$$\begin{aligned} P(ac) &= |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_6|^2 + |c_8|^2 \\ &= \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_3}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_3}{2}, \end{aligned} \tag{68}$$

其可表示为 $P(ac) = \lambda\nu + (1-\lambda)(1-\nu)$, 并且

$$\begin{aligned} P(abc) &= |c_1|^2 + |c_4|^2 + |c_6|^2 + |c_7|^2 \\ &= \lambda\mu\nu + \lambda(1-\mu)(1-\nu) + (1-\lambda)\mu(1-\nu) + (1-\lambda)(1-\mu)\nu, \end{aligned} \tag{69}$$

对于状态 (64)。

X. 贝尔不等式违背

上述例子表明, 如上所述的一组不可因子化概率, 可以由三个量子比特的可因子化量子态产生。这是因为 $\lambda = P(a)$ $\mu = P(b)$ $\nu = P(c)$, 而对于乘积态 (64), 例如我们得到 $P(abc) \neq P(a)P(b)P(c)$。然而, 这组概率应满足贝尔不等式。下文将说明确实如此。考察贝尔不等式 (1), 可知对于态 (64), 贝尔不等式的形式为

$$
\begin{aligned}
3\left[\lambda+\mu+\nu\right] &\leq 4+2\left[\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu\right], \\
1+2\lambda(\mu+\nu) &\leq 3\lambda+2\mu\nu, \\
1+2\mu(\lambda+\nu) &\leq 3\mu+2\lambda\nu, \\
1+2\nu(\lambda+\mu) &\leq 3\nu+2\lambda\mu.
\end{aligned} \tag{70}
$$

将最后三个不等式相加，得到

$$
\begin{aligned}
3+2[\lambda(\mu+\nu)+\mu(\lambda+\nu)+\nu(\lambda+\mu)] &\leq 3(\lambda+\mu+\nu)+2(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu), \\
3+4[\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu] &\leq 3(\lambda+\mu+\nu)+2(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu), \\
3+2[\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu] &\leq 3(\lambda+\mu+\nu), \\
4+2[\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu] &\leq 1+3(\lambda+\mu+\nu),
\end{aligned} \tag{71}
$$

最后一行上面的等式与上一组中的最后一个不等式相结合，得到

$$
3\left[\lambda+\mu+\nu\right] \leq 4+2\left[\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\nu\right] \leq 1+3(\lambda+\mu+\nu), \tag{72}
$$

也就是说，这组不等式是自洽的。相比之下，对于纠缠态，一组类似的贝尔不等式将不是自洽的，即三条不等式成立将导致与第四条不等式相矛盾。需要注意的是，即使对于纠缠态，贝尔不等式也只会在某些方向上被违反，而不是在每个方向上都被违反。

相比之下，考虑我们所拥有的GHZ态

$$
\begin{aligned}
\xi &= P(abc) = 1/2, \\
\lambda = P(a) = 1/2,\ \mu &= P(b) = 1/2,\ \nu = P(c) = 1/2, \\
P(ab) = 1,\ P(bc) &= 1,\ P(ac) = 1,\ P(abc) = 1/2.
\end{aligned} \tag{73}
$$

以及贝尔不等式

$$
\begin{aligned}
P(a)+P(b)+P(c) &\le 1+P(ab)+P(ac)+P(bc),\\
P(ab)+P(ac) &\le P(a)+P(bc),\\
P(ab)+P(bc) &\le P(b)+P(ac),\\
P(ac)+P(bc) &\le P(c)+P(ab),
\end{aligned}
\tag{74}
$$

呈现为 $3/2 \le 4,\ 2 \le 3/2,\ 2 \le 3/2,\ 2 \le 3/2, 3/2 \le 4,\ 2 \le 3/2,\ 2 \le 3/2,\ 2 \le 3/2$ 的形式，因此违反了贝尔不等式。

XI. 三人囚徒困境的量子解

我们将三人囚徒困境中混合策略玩家的收益视为式（21）所给出

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(ab) - P(ac) - \lambda + 4\mu + 4\nu + 1,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(ab) - P(bc) + 4\lambda - \mu + 4\nu + 1,\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= \xi - P(bc) - P(ac) + 4\lambda + 4\mu - \nu + 1,
\end{aligned}
\tag{75}
$$

并分析这些不同的量子态。

A. 可分解态

对于可因子分解态 (64)，我们有

$$
\begin{aligned}
P(a)=\lambda,\ P(b)=\mu,\ P(c)=\nu,\ P(ab) &= \lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu),\\
P(bc)=\mu\nu + (1-\mu)(1-\nu),\ P(ac) &= \lambda\nu + (1-\lambda)(1-\nu),\\
P(abc) = \lambda\mu\nu + \lambda(1-\mu)(1-\nu) &+ (1-\lambda)\mu(1-\nu) + (1-\lambda)(1-\mu)\nu,
\end{aligned}
\tag{76}
$$

借此可将收益（75）重新表示为

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2(2\lambda\mu\nu - 2\lambda\mu - 2\lambda\nu - \mu\nu + \lambda + 3\mu + 3\nu) - 1,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2(2\lambda\mu\nu - 2\lambda\mu - \lambda\nu - 2\mu\nu + 3\lambda + \mu + 3\nu) - 1,\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2(2\lambda\mu\nu - \lambda\mu - 2\lambda\nu - 2\mu\nu + 3\lambda + 3\mu + \nu) - 1,
\end{aligned}
\tag{77}
$$

纳什不等式于是具有如下形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi_{\mathrm{A}}}{\partial \lambda} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\lambda^*-\lambda) = 2(2\mu^*\nu^*-2\mu^*-2\nu^*+1)(\lambda^*-\lambda) \geq 0,\\
&\frac{\partial \Pi_{\mathrm{B}}}{\partial \mu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\mu^*-\mu) = 2(2\lambda^*\nu^*-2\lambda^*-2\nu^*+1)(\mu^*-\mu) \geq 0,\\
&\frac{\partial \Pi_{\mathrm{C}}}{\partial \nu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)}(\nu^*-\nu) = 2(2\lambda^*\mu^*-2\lambda^*-2\mu^*+1)(\nu^*-\nu) \geq 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

可表示为

$$\begin{aligned}
(\mu^*\nu^*-\mu^*-\nu^*+1/2)(\lambda^*-\lambda) &\geq 0,\\
(\lambda^*\nu^*-\lambda^*-\nu^*+1/2)(\mu^*-\mu) &\geq 0,\\
(\lambda^*\mu^*-\lambda^*-\mu^*+1/2)(\nu^*-\nu) &\geq 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

由（79）可知，$(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)=(1,1,1)$ 和 $(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)=(0,0,0)$ 均不是解。对于非边三元组 (λ^*,μ^*,ν^*)，有

$$\mu^*\nu^*-\mu^*-\nu^*+1/2 = 0, \tag{80}$$

$$\lambda^*\nu^*-\lambda^*-\nu^*+1/2 = 0, \tag{81}$$

$$\lambda^*\mu^*-\lambda^*-\mu^*+1/2 = 0. \tag{82}$$

现在，用（80）减去（81）、用（81）减去（82），并用（80）减去（82），可得

$$(\nu^*-1)(\mu^*-\lambda^*)=0,\ (\lambda^*-1)(\nu^*-\mu^*)=0,\ (\mu^*-1)(\nu^*-\lambda^*)=0, \tag{83}$$

由此可从（83）推出，解满足 $\lambda^*=\mu^*=\nu^*$。此外，方程（80）、（81）、（82）可表示为

$$\mu^*+\nu^*-\mu^*\nu^*=1/2,\ \lambda^*+\nu^*-\lambda^*\nu^*=1/2,\ \lambda^*+\mu^*-\lambda^*\mu^*=1/2. \tag{84}$$

由 $\lambda^*=\mu^*=\nu^*$，我们得到 $2\lambda^*-(\lambda^*)^2=1/2$ 或（λ^*）$^2-2\lambda^*+1/2=0$ 或 $\lambda^*=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$，并且由于 $0\leq\lambda^*$、μ^*、$\nu^*\leq 1$，我们有 $\lambda^*=\mu^*=\nu^*=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，然后

$$
\begin{aligned}
P(ab) &= \lambda^*\mu^* + (1-\lambda^*)(1-\mu^*) = 2-\sqrt{2}, \\
P(bc) &= \mu^*\nu^* + (1-\mu^*)(1-\nu^*) = 2-\sqrt{2}, \\
P(ac) &= \lambda^*\nu^* + (1-\lambda^*)(1-\nu^*) = 2-\sqrt{2}, \\
P(abc) &= \lambda^*[\mu^*\nu^* + (1-\mu^*)(1-\nu^*)] + \mu^*(1-\lambda^*)(1-\nu^*) + \nu^*(1-\lambda^*)(1-\mu^*), \\
&= (2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})/2.
\end{aligned} \tag{85}
$$

为了找到与这些边缘分布相对应的量子态，我们使用态（55），对于该态，混合策略解 $\lambda^* = \mu^* = \nu^* = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 使概率 p_4得到负值。应舍弃该解，因此可因子分解态（64）不会产生任何解。现在我们考虑 GHZ 态和 W型态。

B. GHZ 型状态

对于 GHZ 型态，即 $|\Psi\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$ 其中 a、$b \in \mathbf{C}$ 且 $|a|^2 + |b|^2 = 1$。由此可得 $\langle\Psi| = a^*\langle 000| + b^*\langle 111|$，因此我们有

$$
\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = |a|^2|000\rangle\langle 000| + ab^*|000\rangle\langle 111| + a^*b|111\rangle\langle 000| + |b|^2|111\rangle\langle 111|, \tag{86}
$$

根据上文的讨论以及式（25），因此可得

$$
\lambda = P(a) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{A}}^0\rho), \mu = P(b) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{B}}^0\rho), \nu = P(c) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{C}}^0\rho). \tag{87}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^0\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}\left[(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}})\rho_\Psi\right] = |a|^2, \\
\mu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}^0\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}\left[(\mathcal{I}_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}})\rho_\Psi\right] = |a|^2, \\
\nu &= \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_{\mathrm{C}}^0\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}\left[(\mathcal{I}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}})\rho_\Psi\right] = |a|^2,
\end{aligned} \tag{88}
$$

$$
\begin{aligned}
P(ab) &= \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{AB}}^{+1}\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}[(|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}}) \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{C}}]\rho_\Psi = 1, \\
P(bc) &= \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{BC}}^{+1}\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathrm{A}} \otimes (|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}})]\rho_\Psi = 1, \\
P(ac) &= \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{AC}}^{+1}\rho_\Psi) = \mathrm{Tr}[|0\rangle\langle 0|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\mathrm{C}} + |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \otimes |1\rangle\langle 1|_{\mathrm{C}}]\rho_\Psi = 1, \\
\xi &= P(abc) = \mathrm{Tr}(M_{\mathrm{ABC}}^{+1}\rho_\Psi) = |a|^2.
\end{aligned} \tag{89}
$$

由于上述概率是超定的，GHZ态不允许参与者在所考虑的方案中进行选择。

C. W型态

对于W型态 $|\Psi_W\rangle = c_2|001\rangle + c_3|010\rangle + c_5|100\rangle$，当 $|c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 = 1$时，我们得到

$$\lambda = |c_2|^2 + |c_3|^2,\ \mu = |c_2|^2 + |c_5|^2,\ \nu = |c_3|^2 + |c_5|^2, \tag{90}$$

and

$$P(ab) = |c_2|^2,\ P(bc) = |c_5|^2,\ P(ac) = |c_3|^2,\ \xi = P(abc) = 0. \tag{91}$$

我们注意到

$$\lambda + \mu + \nu = 2(|c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2) = 2, \tag{92}$$

$$P(ab) = \frac{1}{2}(\lambda - \nu + \mu),\ P(bc) = \frac{1}{2}(\mu + \nu - \lambda),\ P(ac) = \frac{1}{2}(\lambda + \nu - \mu), \tag{93}$$

and 三人囚徒困境中混合策略参与者的收益（21）呈现为

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= -2\lambda + 4\mu + 4\nu + 1,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 4\lambda - 2\mu + 4\nu + 1,\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 4\lambda + 4\mu - 2\nu + 1.
\end{aligned} \tag{94}$$

纳什不等式随后变为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{\mathrm{A}}}{\partial \lambda} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\lambda^* - \lambda) &= -2(\lambda^* - \lambda) \geq 0,\\
\frac{\partial \Pi_{\mathrm{B}}}{\partial \mu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\mu^* - \mu) &= -2(\mu^* - \mu) \geq 0,\\
\frac{\partial \Pi_{\mathrm{C}}}{\partial \nu} \mid_{(\lambda^*,\mu^*,\nu^*)} (\nu^* - \nu) &= -2(\nu^* - \nu) \geq 0.
\end{aligned} \tag{95}$$

给出的结果为 $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = (0, 0, 0)$，这与式（92）矛盾。因此，W型态并不能为三人囚徒困境提供解决方案或表征。

D. The state $|\Psi\rangle = c_4 |011\rangle + c_6 |101\rangle + c_7 |110\rangle$

对于该状态

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= c_4 |011\rangle + c_6 |101\rangle + c_7 |110\rangle , \\ |c_4|^2 + |c_6|^2 + |c_7|^2 &= 1, \end{aligned} \tag{96}$$

由方程（57、58）可得

$$\begin{aligned} \lambda = |c_4|^2 ,\ \mu = |c_6|^2 ,\ \nu = |c_7|^2 , \\ \Pi_{\mathrm{A}}(\lambda, \mu, \nu) = 4(\mu + \nu) + 1, \\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda, \mu, \nu) = 4(\lambda + \nu) + 1, \\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda, \mu, \nu) = 4(\lambda + \mu) + 1, \end{aligned} \tag{97}$$

因此

$$\frac{\partial \Pi_{\mathrm{A}}}{\partial \lambda} |_{(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)} = \frac{\partial \Pi_{\mathrm{B}}}{\partial \mu} |_{(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)} = \frac{\partial \Pi_{\mathrm{C}}}{\partial \nu} |_{(\lambda^*, \mu^*, \nu^*)} = 0, \tag{98}$$

策略三元组（λ^*、 μ^*、 ν^*）成为纳什均衡，参与者的收益由方程（97）得出，为

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathrm{A}}(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = 4(\mu^* + \nu^*) + 1, \\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = 4(\lambda^* + \nu^*) + 1, \\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = 4(\lambda^* + \mu^*) + 1, \\ \text{with } \lambda^* + \mu^* + \nu^* = 1. \end{aligned} \tag{99}$$

也就是说，在三人囚徒困境中，该状态允许超越纯策略三元组 $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = (0,0,0)$的强支配，但其结果并不理想：出现的不是唯一的纳什均衡，而是一个纳什均衡连续统。例如，在 $(\lambda^*, \mu^*, \nu^*) = (1/3, 1/3, 1/3)$ 中，当$\Pi_{\mathrm{A,\ B,\ C}}(1/3, 1/3, 1/3) = 11/3.$

XII. 案例　　三人对称合作博弈

注意， a、 b、 c是双值可观测量，每个都映射到 $\{+1,-1\}$. 。设 $\wp$是 $\Re$的任意子集。 $\wp$ 中的参与者可以组成一个联盟，因此，在一切实际意义上，联盟 $\wp$ 都表现得像一个单独的参与者。预计$(\Re-\wp)$中的参与者将组成一个对立联盟，于是该博弈有两个相互对立的联盟参与者，即 $\wp$ 和$(\Re-\wp)$。三个参与者A、B和C分别从两种策略 $+1$、 -1中选择一种。如果三个参与者选择相同的策略，则没有收益；否则，选择相同策略的两个参与者各从“异类者”那里获得一单位货币。参与者A、B和C的收益函数 Π_{A}、 Π_{B} 和 Π_{C} 分别为 [29]

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathrm{A}}(+1,+1,+1)=\Pi_{\mathrm{A}}(-1,-1,-1)=0,\\
&\Pi_{\mathrm{A}}(+1,+1,-1)=\Pi_{\mathrm{A}}(-1,-1,+1)=\Pi_{\mathrm{A}}(+1,-1,+1)=\Pi_{\mathrm{A}}(-1,+1,-1)=1,\\
&\Pi_{\mathrm{A}}(+1,-1,-1)=\Pi_{\mathrm{A}}(-1,+1,+1)=-2,
\end{aligned}\tag{100}$$

对 Π_{B} 和 Π_{C}也有类似的表达式。

设 $\wp=\{$B、C$\}$，因此 $\Re-\wp=\{$A$\}$。由 $\Gamma_{\wp}$表示的联盟博弈可用收益矩阵表示为

$$\begin{array}{c} \\ \wp\begin{array}{c}[+1,+1]\\[-1,+1]\\[+1,-1]\\[-1,-1]\end{array}\end{array}\begin{array}{c}\overset{\Re-\wp}{\begin{array}{cc}[+1] & [-1]\end{array}}\\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\end{array}.\tag{101}$$

这里，策略 $[+1,-1]$ 和 $[-1,+1]$ 被 $[+1,+1]$ 和 $[-1,-1]$支配。剔除这些被支配的策略后，收益矩阵变为

$$\begin{array}{c} \\ \wp\begin{array}{c}[+1,+1]\\[-1,-1]\end{array}\end{array}\begin{array}{c}\overset{\Re-\wp}{\begin{array}{cc}[+1] & [-1]\end{array}}\\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\end{array}.\tag{102}$$

可以看出，混合策略：

$$\wp : \frac{1}{2}[+1,+1] + \frac{1}{2}[-1,-1], \tag{103}$$

$$\Re - \wp : \frac{1}{2}[+1] + \frac{1}{2}[-1]. \tag{104}$$

分别是 $\wp$ 和 $(\Re - \wp)$ 的最优策略。在联盟博弈中，策略这一概念不复存在；其主要特征是联盟以及联盟的价值或收益。其基本假设是，每个联盟都能为其成员保证一定数量的收益，称为联盟的价值，用来衡量该联盟所拥有的价值。联盟的价值是指联盟通过选择适当的策略能够确保自身获得的收益，而"局外人"可以阻止联盟获得超过这一数额的收益。采用策略（103，104），无论对手采取何种策略，都能确保参与者 $\wp$ 获得 1 的收益；因此，联盟 $\upsilon(\Gamma_\wp)$ 的价值为 1，即 $\upsilon(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\}) = 1$。由于 Γ 是零和博弈，也可以用 $\upsilon(\Gamma_\wp)$ 求出 $\upsilon(\Gamma_{\Re-\wp})$，即 $\upsilon(\{\mathrm{A}\}) = -1$。该博弈是对称的，因此可以写成

$$\begin{aligned}
\upsilon(\Gamma_\wp) = 1, \quad \text{and} \quad \upsilon(\Gamma_{\Re-\wp}) = -1, \text{ or} \\
\upsilon(\{\mathrm{A}\}) = \upsilon(\{\mathrm{B}\}) = \upsilon(\{\mathrm{C}\}) = -1, \\
\upsilon(\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}) = \upsilon(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\}) = \upsilon(\{\mathrm{C},\mathrm{A}\}) = 1.
\end{aligned} \tag{105}$$

参与者 A、B 和 C 的混合策略收益关系定义如下：

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(\lambda,\mu,\nu) = \Pi_{\mathrm{A,B,C}}(+1,+1,+1)P(abc) + \Pi_{\mathrm{A,B,C}}(+1,+1,-1)P(ab\bar{c}) + \\
\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(+1,-1,+1)P(a\bar{b}c) + \Pi_{\mathrm{A,B,C}}(+1,-1,-1)P(a\bar{b}\bar{c}) + \\
\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(-1,+1,+1)P(\bar{a}bc) + \Pi_{\mathrm{A,B,C}}(-1,+1,-1)P(\bar{a}b\bar{c}) + \\
\Pi_{\mathrm{A,B,C}}(-1,-1,+1)P(\bar{a}\bar{b}c) + \Pi_{\mathrm{A,B,C}}(-1,-1,-1)P(\bar{a}\bar{b}\bar{c}),
\end{aligned} \tag{106}$$

其中 $\lambda,\mu,\nu \in [0,1]$ 和 $P(\bullet)$ 是每个括起来的可观测量取值为 $+1.$ 的概率鉴于 (100)，上述收益可写为

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= P(ab\bar{c}) + P(a\bar{b}c) - 2P(a\bar{b}\bar{c}) - 2P(\bar{a}bc) + P(\bar{a}b\bar{c}) + P(\bar{a}\bar{b}c), \\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= P(ab\bar{c}) - 2P(a\bar{b}c) + P(a\bar{b}\bar{c}) + P(\bar{a}bc) - 2P(\bar{a}b\bar{c}) + P(\bar{a}\bar{b}c), \\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= -2P(ab\bar{c}) + P(a\bar{b}c) + P(a\bar{b}\bar{c}) + P(\bar{a}bc) + P(\bar{a}b\bar{c}) - 2P(\bar{a}\bar{b}c).
\end{aligned} \tag{107}$$

A. 可因子化情形

对于可因子化概率，收益（107）呈现以下形式

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\lambda(\mu+\nu-1)+\mu+\nu-4\mu\nu,\\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\mu(\nu+\lambda-1)+\lambda+\nu-4\lambda\nu,\\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2\nu(\lambda+\mu-1)+\lambda+\mu-4\lambda\mu. \end{aligned} \tag{108}$$

对于 $\mu=\nu$ 的情况，即参与者 B 和 C 结成联盟并采用相同的策略，而参与者 A 被排除在外，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\mu) &= 2(\lambda-\mu)(2\mu-1),\\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\mu) &= \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\mu)=(\lambda-\mu)(1-2\mu). \end{aligned} \tag{109}$$

对于 $\lambda=\nu$ ，即参与者A 和 C组成联盟并采用相同的策略，而参与者 B 被排除在外的情况，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\lambda) &= (\lambda-\mu)(2\lambda-1)=\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\lambda),\\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\lambda) &= 2(\mu-\lambda)(2\lambda-1). \end{aligned} \tag{110}$$

对于 $\lambda=\mu$ ，即参与者 A 和 B 结成联盟并采用相同策略，而参与者 C 被排除在外的情况，我们有

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\lambda,\nu) &= (\lambda-\nu)(2\lambda-1)=\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\lambda,\nu),\\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\lambda,\nu) &= 2(\nu-\lambda)(2\lambda-1). \end{aligned} \tag{111}$$

鉴于这些收益关系，令 $\mu=\nu=c$，即参与者 B 和 C 结成联盟并采用策略 c，而参与者 A 被排除在外并采用 $\lambda=l\neq c$，从而导致

$$\Pi_{\mathrm{B}}(l,c,c) = (l-c)(1-2c)=\Pi_{\mathrm{C}}(l,c,c), \tag{112}$$

$$\Pi_{\mathrm{A}}(l,c,c) = -2(l-c)(1-2c)=-2\Pi_{\mathrm{B}}(l,c,c), \tag{113}$$

即当 $l=c$时，我们得到 $\Pi_{\mathrm{A}}(l,c,c)=0$，符合预期。此外，当 $l=1-c$时，我们得到

$$\Pi_{\mathrm{A}}(l,c,c)=-2(2c-1)^2=\Pi_{\mathrm{B}}(c,l,c)=\Pi_{\mathrm{C}}(c,c,l), \tag{114}$$

也就是说，联盟可以被视为单个参与者。注意到 $\Pi_{\mathrm{B}}(l,c,c)=l-2cl-c+2c^2$ 我们现在考虑

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(l^*,c^*,c^*)-\Pi_{\mathrm{A}}(l,c^*,c^*) &= \frac{\partial\Pi_{\mathrm{A}}}{\partial l}\,|_{(l^*,c^*)}\,(l^*-l)=-2(1-2c^*)(l^*-l)\geq 0,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(l^*,c^*,c^*)-\Pi_{\mathrm{B}}(l^*,c,c) &= \frac{\partial\Pi_{\mathrm{B}}}{\partial c}\,|_{(l^*,c^*)}\,(c^*-c)=(-2l^*-1+4c^*)(c^*-c)\geq 0,
\end{aligned} \tag{115}$$

这给出 $c^*=l^*=1/2$.

B. 量子解

利用（2），参与者的混合策略收益关系（107）可重新表述为

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[P(ab)-2P(bc)+P(ac)-P(a)]+P(b)+P(c),\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[P(ab)+P(bc)-2P(ac)-P(b)]+P(a)+P(c),\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[-2P(ab)+P(bc)+P(ac)-P(c)]+P(a)+P(b).
\end{aligned} \tag{116}$$

现在，采用纯态（55）时，这些收益（116）的形式为

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[|c_2|^2+|c_3|^2-2|c_4|^2-2|c_5|^2+|c_6|^2+|c_7|^2]-2\lambda+\mu+\nu,\\
\Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[|c_2|^2-2|c_3|^2+|c_4|^2+|c_5|^2-2|c_6|^2+|c_7|^2]+\lambda-2\mu+\nu,\\
\Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= 2[-2|c_2|^2+|c_3|^2+|c_4|^2+|c_5|^2+|c_6|^2-2|c_7|^2]+\lambda+\mu-2\nu.
\end{aligned} \tag{117}$$

现在考虑对三量子比特纯态施加的以下约束

$$|c_4|^2=|c_6|^2=|c_7|^2,\ \ |c_2|^2=|c_3|^2=|c_5|^2, \tag{118}$$

从而将上述收益降低至

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{A}}(\lambda,\mu,\nu) &= -2\lambda+\mu+\nu,\\ \Pi_{\mathrm{B}}(\lambda,\mu,\nu) &= \lambda-2\mu+\nu,\\ \Pi_{\mathrm{C}}(\lambda,\mu,\nu) &= \lambda+\mu-2\nu. \end{aligned} \tag{119}$$

现在，定义式 (57) 使参与者的策略变量 λ、μ 和 ν 变得相同，并且每个参与者的收益也都变为零，即 $\Pi_{\mathrm{A}}(\varkappa) = \Pi_{\mathrm{B}}(\varkappa) = \Pi_{\mathrm{C}}(\varkappa) = 0$. 这使得参与者没有动力组建联盟。

XIII. 讨论

Fine定理确立了指定边缘分布存在联合概率分布，与满足一组贝尔不等式之间的联系，这种联系由充要条件构成。借助Fine定理，我们将博弈的混合策略收益关系改写为联合概率分布边缘分布的形式。如果这些边缘分布存在相应的联合分布，那么还可以进一步将其关于这些边缘分布的表述简化为涉及联合分布本身的表达式。关键的是，若该联合分布可因子分解，博弈便可归结为其经典混合策略对应形式，因此经典混合策略博弈仍包含在本文提出的框架之中。也就是说，仅仅存在与一组边缘分布相对应的联合分布，并不一定就能得到经典混合策略博弈。按照上述含义，该分布的可因子分解性仍是一项关键要求。换言之，如上所述，可因子分解的概率分布会导出经典混合策略博弈，并确保满足贝尔不等式。但值得注意的是，满足贝尔不等式的概率分布，并不一定能保证其可按上述方式因子分解。

此外，透过Fine定理，我们证明了玩家收益和策略——当用一组边缘分布重新表述时——为分析量子概率在潜在解决博弈所能表达的困境方面可以提供什么奠定了基础。借助Fine定理，以及所考虑的或给定的量子态和经典博弈的混合策略版本，所提出的框架能够直接考察量子概率可以为博弈提供什么。为了获得

所需的边缘分布来自量子态，该框架使用正算子值测度。

应用于三人囚徒困境时，确定了一个三量子比特纯态 (96)，在该状态下，所提出的框架导致了不理想的结果，并出现了连续统的纳什均衡。应用于三人对称合作博弈时，确定了如 (118) 所示的三量子比特纯态集合，在这些状态下，参与者都没有动力组成联盟。该框架为从量子态所能提供的视角分析一系列博弈铺平了道路，并有望解决这些博弈固有的困境。

所提出的量子化方法在文献[15],所定义的意义下是完备的，因为经典博弈的混合策略版本仍嵌入在其量子化版本之中。文献[5]描述了正算子值测度如何推广基于EWL[2, 3] 和 MW [4]方案的量子化方案。然而，鉴于要应用Fine定理，以便用一组边缘分布重新表达参与者的收益和策略，本文更直接地使用正算子值测度。

XIV. 结论

本质上，所引入的方法为直接从经典混合策略迭代中获得博弈的量子版本铺平了道路，同时也考虑到与一组边缘分布相对应的联合概率分布可能存在或不存在、相应的贝尔不等式，以及将它们联系起来的Fine定理。所提出的框架并不局限于纳什博弈论，而是具有灵活性，可以纳入非纳什博弈论解概念。这涵盖了多种概念，例如完美预测均衡、半透明均衡、完全透明均衡、超理性和极小极大可理性化等。此外，这项研究一个自然而然的后续方向，是将Fine定理应用于四个二值可观测量 [21–23]，为四人博弈的量子化铺平道路。

---

[1] D. A. Meyer，《量子策略》，《物理评论快报》82，1052（1999）。[2] J. Eisert，M. Wilkens，M. Lewenstein，《量子博弈与量子策略》，《物理评论快报》83，3077（1999）。

[3] J. Eisert、M. Wilkens，《量子博弈》。《现代光学杂志》47，2543（2000）。[4] L. Marinatto、T. Weber，《一种处理完全信息静态博弈的量子方法》，《物理快报A》272/5-6（2000）。[5] 第13章（量子博弈：数学家综述），载于V. N. Kolokoltsov和O. A. Malafeyev，《理解博弈论：多主体竞争与合作系统分析导论》第2版，第13.10节，World Scientific（2020）；另见其中的参考文献，https://arxiv.org/abs/1909.04466[6] https://scholar.google.com.au/citations?user=wkfPcaQAAAAJ&hl=en上的网址列有大量关于量子博弈的出版物。[7] K. Binmore，《博弈论：极简介绍》，牛津大学出版社，牛津（2007）。[8] M. J. Osborne，《博弈论导论》，牛津大学出版社，牛津（2003）。[9] E. Rasmusen，《博弈与信息：博弈论导论》第3版，Blackwell Publishers Ltd.，牛津（2001）。[10] A. Peres，《量子理论：概念与方法》，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特（1995）。[11] Ram´on Alonso-Sanz，《量子博弈模拟》，Springer（2019）；另见其中的参考文献。ISBN 978-3-030-19633-2。[12] F. S. Khan、N. Solmeyer、R. Balu等，《量子博弈：历史、现状与诠释综述》。《量子信息处理》17，309（2018）；另见其中的参考文献，https://doi.org/10.1007/s11128-018-2082-8[13] P. Frackiewicz，《量子计算在博弈论中的应用》，LAP Lambert Academic Publishing（2014），ISBN-13：978-3659608834。[14] David Schneider，《量子博弈的几何探索》，载于《重新审视博弈论》，Hardy Hanappi编，DOI：10.5772/53931（2013）。[15]Steven A. Bleiler，《量子博弈形式体系及其应用》，https://arxiv.org/abs/0808.1389[16] J. Bell，《论爱因斯坦–波多尔斯基–罗森悖论》，《物理学》1，195–200（1964）。[17] J. Bell，《量子力学中可言说与不可言说之事》，剑桥大学出版社，剑桥（1987）。[18] A. Aspect、J. Dalibard、G. Roger，《利用随时间变化的……对贝尔不等式进行实验检验》

分析器，《物理评论快报》49，1804–1807（1982）。[19] J. F. Clauser、M. A. Horne、A. Shimony、R. A. Holt，《检验局域隐变量理论的提议实验》，《物理评论快报》23，880–884（1969）。[20] A. Iqbal、S. Weigert，《量子关联博弈》，《物理学杂志 A：数学与一般》37，5873–5885（2004）。[21] A. Fine，《联合分布、量子关联与对易可观测量》，《数学物理杂志》23，1306（1982）。[22] A. Fine，《隐变量、联合概率与贝尔不等式》，《物理评论快报》48，291（1982）。[23] J.J. Halliwell，《Fine定理的两种证明》，《物理学快报 A》378，第40期，2945–2950（2014）。[24]M.J. O’Donnell，《三人囚徒困境》，网址：http://www.classes.cs.uchicago.edu/archive/1998/fall/CS105/Project/node6.html，芝加哥大学计算机科学系（1998）。[25] A. Iqbal、T. Cheon 和 D. Abbott，《在爱因斯坦–波多尔斯基–罗森–玻姆设置下进行的三人对称量子博弈的概率分析》，《物理学快报 A》372，6564–6577（2008）。[26] C.F. Lee 和 N. F. Johnson，《量子博弈的效率与形式主义》，《物理评论 A》67，022311（2003）。[27] A. Iqbal、J. M. Chappell 和 D. Abbott，《非因子化混合策略经典博弈与量子博弈之间的等价性》，《皇家学会开放科学》3，文章编号150477（2016）。[28] Y-J. Han、Y-S. Zhang、G-C. Guo，《量子三人囚徒困境中的 W 态与 Greenberger–Horne–Zeilinger 态》，《物理学快报 A》295，61–64（2002）。[29] E. Burger、J.E. Freund，《博弈论导论》，Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，1963年。