正交与辛随机张量模型的对偶性：一般不变量

汉内斯·开普勒[1] 和托马斯·穆勒[2]

[1]海德堡大学理论物理研究所，哲学家之路*19*号，*69120*海德堡，德国

[2]波尔多大学，*LaBRI CNRS UMR 5800*，法国塔朗斯

arXiv:2304.03625v1 [hep-th] 7 Apr 2023

摘要

在 Gurau 和 Keppler 2022 年的研究（arXiv:2207.01993）中，证明了具有四次相互作用的正交与辛张量模型之间的一种关系。本文给出另一种证明，并将其推广到任意阶的多项式相互作用。我们研究阶数为 D的张量模型，其指标在置换下不具有对称性，并且变换为 $O(N)$ 和 $Sp(N)$ 的 D 个基本表示的张量积。我们明确展示，这些模型在微扰论中逐图满足从 N 到 $-N$ 的对偶性。

目录

1 引言 1

2 模型的设置
3 3 微扰展开 以彩色图表示 **7**

4 结论与展望 **10**

参考文献 **12**

1 引言

随机张量模型 [1–6], 作为随机矩阵模型的推广而引入，是如下类型的概率测度：

$$d\mu[T] = e^{-S[T]} \prod_{(a_1,\dots,a_D)} \frac{dT^{a_1\dots a_D}}{\sqrt{2\pi}} , \tag{1.1}$$

其中，作用量 $S[T]$ 由在某种对称变换下保持不变的不变量构成。这些模型类似于零维量子场论，其微扰展开可以重新组织为关于 $1/N$ [7–14] 的级数。由于它们的费曼图与高维三角剖分对偶，随机张量为研究随机拓扑空间提供了一个框架；在一维情形下，张量模型提供了一种不含淬火无序的 Sachdev-Ye-Kitaev模型替代方案。

[15, 16]；在更高维度中，它们导向张量场论以及一类新的大规模 N 髓状共形场论 [17–21]。

本文研究具有辛和/或正交对称性的张量模型。关于负维度下正交群与辛群之间关系的几种体现形式，已有文献进行了研究：一方面，在表示论的背景下，可以理解 $SO(-N) \simeq Sp(N)$ [22–25] 之间的关系。另一方面，对于偶 N，已知 $SO(N)$ 和$Sp(N)$ 规范理论可通过将 N 改为 $-N$ [26] 而联系起来。在三维时空中具有辛费米子的矢量模型已在 [27] 中研究过，而具有物质场和汤川相互作用的 $SO(N)$ 与 $Sp(N)$ 规范理论的一个例子可见于 [28]。此外，已证明这种对偶性也存在于正交与辛矩阵系综（ $\beta = 1,4$ 系综）之间 [29]。

其中一位作者已在 [30] 中研究过张量模型的正交/辛对偶性。在该文中，引入了一种分次彩色张量模型（见下文定义1 中的介绍）。随后证明，当替换 $N_c \leftrightarrow -N_c$ 并同时改变对称性 $O(N_c) \leftrightarrow Sp(N_c)$ 时，该模型的配分函数和连通二点关联函数保持不变量。然而， [30] 中的分析采用了中间场/哈伯德–斯特拉托诺维奇变换。这种方法只能处理玻色场，但仅适用于四次相互作用的情形。我们直接在张量模型通常的着色图表示中工作，将 [30] 的结果推广到任意阶相互作用，并以更直接的方式展开研究。

主要结果。 我们考虑阶数为 D 的张量，其指标在置换下没有任何对称性，并将指标的位置称为其颜色 c，其中 $c = 1,\ 2,\ \dots D$。这些张量在 D 个 $O(N)$ 和/或 $Sp(N)$ 的基本表示的张量积中变换，即每个张量指标分别由不同的 $O(N)$ 或 $Sp(N)$ 矩阵变换。当 $Sp(N)$ 因子的数量为奇数时，张量分量是实费米的（反对易、奇）；当该数量为偶数时，张量分量是实玻色的（对易、偶）。为方便起见，我们为张量指标赋予宇称：如果该指标在 $O(N_c)$ 或 $Sp(N_c)$ 下变换，则分别记为 $|c| = 0$ 或 $|c| = 1$。在本文中，我们通过允许任意的多项式相互作用，推广了 [30] 的结果。

定义 1。 实分次张量模型满足如下对称性：

$$\boldsymbol{O}_1(N_1) \otimes \boldsymbol{O}_2(N_2) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{O}_D(N_D), \quad \boldsymbol{O}_c(N_c) = \begin{cases} O(N_c), & |c| = 0 \\ Sp(N_c), & |c| = 1 \end{cases}, \tag{1.2}$$

（因此得名“分次”）由如下测度定义：

$$d\mu[T] \simeq e^{-S[T]} \prod_{a_1,\dots,a_D} dT^{a_1\dots a_D}, \qquad S[T] = \frac{1}{2}\left(T^{a_1\dots a_D} T^{b_1\dots b_D} \prod_{c=1}^{D} g^c_{a_c b_c}\right) + \sum_{\substack{\mathcal{B}\ connected, \\ |V(\mathcal{B})|>2}} \frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} I_{\mathcal{B}}(T), \tag{1.3}$$

其中 $g^c_{a_c b_c}$ 是克罗内克 $\delta_{a_c b_c}$ 对于 $|c| = 0$ 或标准辛形式 $\omega_{a_c b_c}$ 对于 $|c| = 1$ 且求和遍历阶数高于二的独立连通迹不变量 $I_{\mathcal{B}}(T)$，其由无向着色图 $\mathcal{B}$ 索引（详见第2 节）。

帕 配分函数 Z 和一个不变量的期望值 $\langle I_{\mathcal{B}}(T)\rangle$ 的定义为 ：

$$Z(\{\lambda\}) = \int d\mu[T], \quad \text{and} \quad \langle I_{\mathcal{B}}(T)\rangle(\{\lambda\}) = \frac{1}{Z}\int d\mu[T]\ I_{\mathcal{B}}(T), \tag{1.4}$$

a并可通过微扰展开求得。我们的主要定理如下： g:

定理 2. 配分函数 Z 的微扰级数以及不变量 $\boldsymbol{hI_{\mathcal{B}}(T)i}$ 的期望值可表示为对 $(D+1)$-无向彩色图 $\boldsymbol{G}$ 求和的形式和。每一项对应一个特定的图 $\boldsymbol{G}$，并写成以下乘积：

$$K(\{\lambda\},\mathcal{G})\cdot\prod_{c\in\mathcal{D}}\Big((-1)^{|c|}N_c\Big)^{F_{c/0}(\mathcal{G})}\,, \tag{1.5}$$

的一项 K，编码了对耦合常数的依赖 $\lambda_{\mathcal{B}}$ 以及与$\mathcal{G}$相关的一些组合数，还有一项取决于 N_1、$N_2\ldots$、N_D（相关定义见第2节，级数的精确形式见第3节）。

证明。该定理由命题8和推论9推出。 □

关键的一点是，所有因子 N_c 都具有 $(-1)^{|c|}N_c$的形式，因此交换 $O(N_c)\leftrightarrow Sp(N_c)$ 和 $N_c\leftrightarrow -N_c$后，每一项都映射到自身。由于在图示中，每个 N_c 都与由颜色 $c/0$（由交替颜色 c 和 0 的边组成的环）构成的一个面相对应，因此，这一结果可以看作量子场论中每个费米环通常出现的负号的推广。但应注意，完整的张量不一定是费米的（其分量不一定是反对易的格拉斯曼数）。

2 模型的设定

本节定义模型。首先，我们明确所关注的张量空间。其次，我们用有向边有色图来描述可能的张量不变量；最后，我们明确模型及其不变性性质。

张量。 一般张量 $T^{a_1\ldots a_D}$ 在其指标的置换下不具有任何对称性，因此指标的位置是明确的 c，称为其颜色。颜色集合记为$\mathcal{D}=\{1,\ldots,D\}$。我们为每种颜色指定一个奇偶性，有时将颜色分为 $|c|=0$ 偶和 $|c|=1$ 奇。若带有$|c|=1$（即奇颜色）的颜色数量为偶数，则张量分量为玻色（偶）；否则为费米（奇）：格拉斯曼数 $T^{a_1\ldots a_D}$ 与$\sum_{c\in\mathcal{D}}|c|$具有相同的奇偶性。

设 $H_c=\mathrm{R}^{N_c|0}$ for $|c|=0$ 和 $H_c=\mathrm{R}^{0|N_c}$ for $|c|=1$ 分别为维数为 N_c 的实超向量空间，它们要么纯偶，要么纯奇。每个 H_c 都赋有一个非退化的分次对称内积 g^c:

$$g^c(u,v)=(-1)^{|c|}g^c(v,u),\quad \forall u,v\in H_c\,. \tag{2.1}$$

在标准基下，g^c 与标准对称形式或辛形式一致，即对于$|c|=0$为 $g^c_{a_cb_c}=\delta_{a_cb_c}$，对于 $|c|=1$ 则为 $g^c_{a_cb_c}=\omega_{a_cb_c}$。与通常一样，我们将 $(g^c)^{-1}$ 的分量记为 $g^{c,\ a_cb_c}$。保持 g^c 不变的等距群，在 $|c|=0$ 情形下为 $O(N_c)$，在 $|c|=1$ 情形下为 $Sp(N_c)$，统记为 $\boldsymbol{O}_c(N_c)$: $=\{O_c\mid g^c_{a_cb_c}=O^{a'_c}_{a_c}O^{b'_c}_{b_c}g^c_{a'_cb'_c}=(Og^cO^T)_{a_cb_c}\}$。

The tensors are elements of

$$H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_D\,, \tag{2.2}$$

并根据各个 H_c的类型，在若干正交群和辛群的张量积表示中变换:

$$T^{a_1\ldots a_D}\to(O_1)^{a_1}{}_{b_1}\ldots(O_D)^{a_D}{}_{b_D}\,T^{b_1\ldots b_D},\quad O_1\otimes\cdots\otimes O_D\in\bigotimes_{c\in\mathcal{D}}\boldsymbol{O}_c(N_c)\,. \tag{2.3}$$

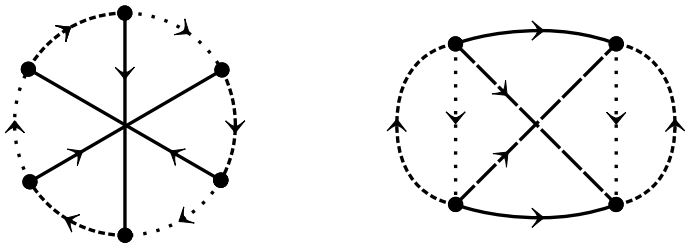


图 1. 有色有向图示例：左侧为一个三色六次图（轮图），右侧为一个四色四次图。不同颜色用不同线型表示

有向边有色图与不变量。 张量分量中的不变多项式通过使用内积 g^c收缩颜色 c 的指标构造。唯一的二次不变量为：

$$g^{\otimes D}(T,T) = T^{a_{\mathcal{D}}} T^{b_{\mathcal{D}}} \prod_{c\in\mathcal{D}} g^c_{a_c b_c} \,. \tag{2.4}$$

一般的迹不变量是关于 $T^{a_{\mathcal{D}}}$的多项式，通过收缩相同颜色的指标对构造。这些不变量可用有向边有色图来表示。张量不变量的图形表示通常称为泡 [2,5]。

定义 3（有向边有色图）。闭有向边 D有色图（简称有向彩色图）是一个有向图 $\vec{B} = (V(\vec{B}), \vec{E}(\vec{B}))$，其顶点集为 $V(\vec{B})$，边集为 $\vec{E}(\vec{B})$，满足：

- 边集被划分为 D 个互不相交的子集 $\vec{E}(\vec{B}) = \bigsqcup_{c=1}^{D} \vec{E}^c(\vec{B})$，其中我们将颜色为 c 的边子集记作 $\vec{E}^c(\vec{B}) \ni e^c = (v, w)$，其中 $v, w \in V(\vec{B})$。
- 每个集合 $\vec{E}^c(\vec{B})$ 是顶点的有向配对。

因此，所有顶点都是 D价的，且与同一顶点相连的所有边颜色各不相同，并且 $V(\vec{\mathcal{B}})$ 的基数为偶数。我们用 $F_{c/c'}(\vec{\mathcal{B}})$ 表示颜色为 $c \neq c'$的面的数量，也就是说，由这两种不同颜色的边交替构成的圈。默认情况下，我们考虑有向图 $\vec{\mathcal{B}}$，并将无向图视为其有向版本的等价类 $\mathcal{B} = [\vec{\mathcal{B}}]$。所有图的顶点都带有标号。图 1、2中展示了一些示例。

由于反转奇颜色的边所引入的符号（请记住，这对应于转置反对称矩阵 ω），若干不变量仅相差一个负号。可以通过使用将 [30]中给出的规则推广而来的定号规则来消除这种歧义。

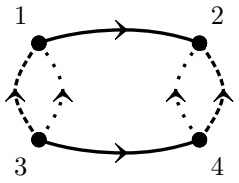
由有向彩色图定义的 $2k$ 阶不变量 $\vec{\mathcal{B}}$ 具有顶点 $V(\vec{\mathcal{B}}) = \{1, 2, \ldots, 2k\}$，将记作 $I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)$，其表达式如下：

$$\begin{aligned} I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) &= \sum_{a^1_{\mathcal{D}}, a^2_{\mathcal{D}}, \ldots, a^{2k}_{\mathcal{D}}} \left(\prod_{(i,j)\in\vec{P}_{ref,2k}} T^{a^i_{\mathcal{D}}} T^{a^j_{\mathcal{D}}} \right) \prod_{c\in\mathcal{D}} \left(\epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|} \prod_{(i,j)\in\vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}})} g^c_{a^i_c a^j_c} \right) \\ &= \sum_{a^1_{\mathcal{D}}, a^2_{\mathcal{D}}, \ldots, a^{2k}_{\mathcal{D}}} \left(\prod_{(i,j)\in\vec{P}_{ref,2k}} T^{a^i_{\mathcal{D}}} T^{a^j_{\mathcal{D}}} \right) \left(\prod_{c\in\mathcal{D}} \epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|} \; K^c_{\vec{\mathcal{B}}, a^1_c, \ldots, a^{2k}_c} \right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

此处 $P_{ref,\,2k}$ 是在顶点集合上任意但固定的参考配对，选取为$\vec{P}_{ref,\,2k} = \{(1、2)\ldots,\ (2k-1, 2k)\}$，并且引入配对 $\epsilon(\vec{P}_{ref,\,2k_p},\ \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|}$ 的符号以消除符号歧义。例如，考虑由图 2定义的枕头相互作用（图 2），$\vec{\mathcal{P}}$。相应的张量不变量为：

$$I_{\vec{\mathcal{P}}} = (-1)^{|1|+|2|} \sum_{a,b,c,d} \left(T^{a_1 a_2 a_3} T^{b_1 b_2 b_3} \right) \left(T^{c_1 c_2 c_3} T^{d_1 d_2 d_3} \right) \; g^1_{c_1 a_1} \; g^1_{d_1 b_1} \; g^2_{c_2 a_2} \; g^2_{d_2 b_2} \; g^3_{a_3 b_3} \; g^2_{c_3 d_3} \,. \tag{2.6}$$

$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = \{(3,1),(4,2)\}$
$\vec{P}_3 = \{(1,2),(3,4)\}$
$\vec{P}_{ref} = \{(1,2),(3,4)\}$



$\mathrm{sgn}(\vec{P}_{ref}, \vec{P}_1) = -1$
$\mathrm{sgn}(\vec{P}_{ref}, \vec{P}_2) = -1$
$\mathrm{sgn}(\vec{P}_{ref}, \vec{P}_3) = 1$

图2. 一个有色有向图（枕头 $\vec{\mathcal{P}}$），由三个配对定义。颜色一、二和三的边分别用虚线、点线和实线表示。对应的不变量见（2.6）。

在回顾将发挥核心作用的 ϵ的定义和性质之前，我们先说明应如何理解符号歧义：

- 由于张量可能反对易，因此在写出不变量的表达式时，$\vec{}$必须固定一个顺序。这通过参考配对 $P_{ref,\ 2k}$来实现。
- 如果两个有向彩色图 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 仅通过重定向其中的一些边而有所不同，则相应的迹不变量是相同的，至多需要转置其中的一些 $(g^c)^T = (-1)^{|c|} g^c$ 这可能会导致 $I_{\vec{\mathcal{A}}}(T)$ 与 $I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)$之间出现符号差异。为了限定于相互独立的不变量，我们将这类有向图视为属于同一个 等价类 $[\vec{\mathcal{A}}] = [\vec{\mathcal{B}}]$，也就是说，它们描述的是同一个无向 彩色图。
- 符号规定确保 $I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)$ 是一个类函数</style)：

$$I_{\vec{\mathcal{A}}}(T) = I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) \quad \text{if } \mathcal{A} = \mathcal{B}\ , \tag{2.7}$$

因此，可以使用 $[\vec{\mathcal{B}}]$ 的任意代表来写出该不变量。

由于最后一点，从现在起，我们将用无向图标记不变量$\mathcal{B}$，并且约定对于（2.5）已选择了任意一个有向代表 $\vec{\mathcal{B}} \in [\vec{\mathcal{B}}] \equiv \mathcal{B}$。

如果相应的颜色图是连通的，则称迹不变量为连通不变量。注意，任意两个不变量的乘积都可以写成单个非连通不变量，使得：

$$I_{\mathcal{A}}(T) I_{\mathcal{B}}(T) = I_{\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}}(T)\ , \tag{2.8}$$

并且，新的参考配对由原有参考配对的不交并给出（2.12）。

$\vec{}$ $\vec{}$**定向配对的符号**。考虑同一个含有 $2k$ 个元素的集合上的两个定向配对 P_1 和 P_2：

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \{(i_1, i_2), \ldots, (i_{2k-1}, i_{2k})\}\ , \\ \vec{P}_2 &= \{(j_1, j_2), \ldots, (j_{2k-1}, j_{2k})\}\ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

两个配对之间的符号 $\epsilon(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2)$ 定义为将 变为 的置换的符号。该符号具有以下性质：

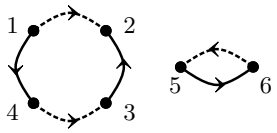
1. 该符号在其参数置换下保持对称：

$$\epsilon(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \epsilon(\vec{P}_2, \vec{P}_1)\ . \tag{2.10}$$

$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$2. 对于同一集合上的三个配对 P_1、P_2、P_3，有：

$$\epsilon(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \epsilon(\vec{P}_1, \vec{P}_3)\epsilon(\vec{P}_2, \vec{P}_3)\ . \tag{2.11}$$

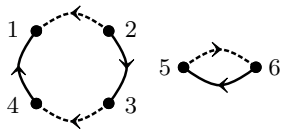
$\vec{P}_1 = \{(1,4),(3,2),(5,6)\}$
$\vec{P}_2 = \{(1,2),(4,3),(6,5)\}$

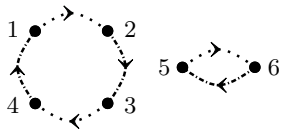


$\mathrm{sgn}(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = (-1)^{F_{1/2},even} = -1$

图3. 引理 4的图示. P_1 用实线边表示， P_2 用虚线边表示。左侧的面为奇，右侧的面为偶。

$\vec{P}_c = \{(2,3),(4,1),(6,5)\}$
$\vec{P}_{c'} = \{(2,1),(3,4),(5,6)\}$





ρ =(1234)(56)
$\vec{P}_r = \{(2,3),(4,1),(6,5)\}$
$\vec{P}_{r'} = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

图4. 引理证明图示 4。颜色 r/r' 的面与 ρ的圈重合，并且与颜色 c/c' 的面 $\vec{P}_c$ $\vec{P}_{c'}$ $\vec{P}_r$ 的面重合，边的方向除外。实线、虚线、点划线， $P_{r'}$ 点线。

3. 对于第一个含有 $2k$ 个元素的集合$\mathcal{S}_1$ 上的两个配对 P_1、 P_2 ，以及第二个含有 $2p$ 个元素的集合 $\mathcal{S}_2$ 上的两个配对 P_3、 P_4 ，乘积 $\epsilon(\vec{P}_1, \vec{P}_2)\epsilon(\vec{P}_3, \vec{P}_4)$ 可写为配对 $\vec{P}_1 \sqcup \vec{P}_3$ 和 $\vec{P}_2 \sqcup \vec{P}_4$ 的不交并的符号（定义在集合 $\mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2$上）：

$$\epsilon(\vec{P}_1, \vec{P}_2)\epsilon(\vec{P}_3, \vec{P}_4) = \epsilon(\vec{P}_1 \sqcup \vec{P}_3, \vec{P}_2 \sqcup \vec{P}_4) \,. \tag{2.12}$$

两个配对的符号有一个很好的图形解释，将会非常有用。

引理4. 将集合 S 的 $2k$ 元素表示为顶点，该集合上的两个配对 P_c 和 $P_{c'}$ 可以用带颜色（每个配对使用一种颜色—— c 或 c' ——）、连接顶点的有向边来表示。将颜色 c/c' 的面定义为由颜色为 c 和 c'的边交替构成的循环。如果沿其圈的方向观察，若面上有偶数（或奇数）条边指向相同方向，则称该面为偶面（或奇面）。[1] 记 $F_{c/c',even}$ 分别为 $F_{c/c',odd}$ 颜色 c/c'的偶面和奇面的数量，则符号 $\epsilon(\vec{P}_c, \vec{P}_{c'})$可表示为：

$$\epsilon(\vec{P}_c, \vec{P}_{c'}) = (-1)^{F_{c/c',even}} \,. \tag{2.13}$$

参见图 3示意图。

证明。 记 $\vec{P}_c = \{(i_1, i_2)\ldots,(i_{2k-1}, i_{2k})\}$ 和 $\vec{P}_{c'} = \{(j_1, j_2)\ldots,(j_{2k-1}, j_{2k})\}$，根据定义，$\epsilon(\vec{P}_c, \vec{P}_{c'})$是置换 $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{2k-1} & i_{2k} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{2k-1} & j_{2k} \end{pmatrix}$ 的符号。可以定义第二个置换ρ，其圈与 $\vec{P}_c \sqcup \vec{P}_{c'}$ 的面重合（暂时忽略边的方向）。置换 ρ 定义如下：

- $\rho(i)$是顶点 i 的后继，该顶点可通过沿着 i 所属的颜色为c/c' 的面顺时针移动到达。
- 写作 $\rho = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_{2k-1} & l_{2k} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{2k-1} & m_{2k} \end{pmatrix}$，可以将 ρ 看作由两个有向配对$\vec{P}_r = \{(l_1, l_2)\ldots, (l_{2k-1}, l_{2k})\}$和 $\vec{P}_{r'} = \{(m_1, m_2)\ldots, (m_{2k-1}, m_{2k})\}$组成，它们与 $\vec{P}_c$和 $\vec{P}_{c'}$ 的区别仅在于边的方向。

由于所有面都是偶长度，置换 ρ 的符号由$\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{F_{c/c'}}$给出。关键在于， ρ 的选取使其与 σ 对每个奇面而言相差奇数次对换，即$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{F_{c/c',\,odd}}\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{F_{c/c',\,even}}$。示意图见图4 。 □

[1]请注意，颜色为 c/c' 的面始终具有偶数条边，因此这一概念定义良好。

关于有向配对及其符号与 Pfaffian 和费米高斯积分之间联系的综述，请参阅 [31]的附录。

分次彩色张量模型。 如上所述，独立迹不变量的集合由有向彩色图的等价类索引 $\mathcal{B}=[\vec{\mathcal{B}}]$。由于它们是类函数，任意代表元 $\vec{\mathcal{B}}\in\mathcal{B}$都可用于定义 $I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)$。

定义 5（实分次张量模型）。 实分次张量模型 是测度 [2]：

$$\begin{aligned} d\mu[T] = e^{-S[T]}\,[dT], \quad [dT] = \prod_{a_{\mathcal{D}}} dT^{a_1\dots a_D}\cdot \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\prod_c N_c/2}}\,, & \sum_{c=1}^{D}|c| = 0 \mod 2 \\ 1\,, & \sum_{c=1}^{D}|c| = 1 \mod 2 \end{cases}, \\ with \quad S[T] = \frac{1}{2}g^{\otimes D}(T,T) + \sum_{\substack{\mathcal{B}\ connected,\\ |V(\mathcal{B})|>2}} \frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中归一化方式满足 $\int d\mu[T]=1$ 当 $\lambda_{\mathcal{B}}=0\ \forall \mathcal{B}$。

3 彩色图的微扰展开

本节中，我们计算不变量的期望值，并说明它们在微扰展开中逐图满足 $N\to -N$对偶性。就技术层面而言，大多数结论都是对彩色随机张量模型已知结果的推广，例如 [2, 5]中总结的结果。下面回顾张量分量的交换关系：

$$T_{a_{\mathcal{D}}}T_{b_{\mathcal{D}}} = (-1)^{\sum_{c\in\mathcal{D}}|c|}T_{a_{\mathcal{D}}}T_{b_{\mathcal{D}}}\,, \tag{3.1}$$

并引入以下简写符号：

$$\begin{aligned} \delta^{a_{\mathcal{D}}}_{b_{\mathcal{D}}} = \prod_{i=1}^{D}\delta^{a_i}_{b_i}\,, \quad g_{a_{\mathcal{D}}b_{\mathcal{D}}} = \prod_{c\in\mathcal{D}} g^{c}_{a_c b_c}\,, \quad g^{a_{\mathcal{D}}b_{\mathcal{D}}} = \prod_{c\in\mathcal{D}} g^{c,\,a_c b_c}\,, \\ \text{and} \quad (\partial_T,\partial_T) = \sum_{a_{\mathcal{D}},b_{\mathcal{D}}} \frac{\partial}{\partial T^{a_{\mathcal{D}}}} g^{a_{\mathcal{D}}b_{\mathcal{D}}} \frac{\partial}{\partial T^{b_{\mathcal{D}}}}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

我们首先计算相对于通过将所有耦合常数 $\lambda_{\mathcal{B}}$ 设为零而得到的高斯测度的期望值。这就是反对易变量的高斯期望值$\langle\dots\rangle_0$的Wick定理。

引理 6。偶数个张量的高斯期望值：

$$\langle T^{a^1_{\mathcal{D}}}\dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}}\rangle_0 = \int [dT] e^{-\frac{1}{2}g^{\otimes D}(T,T)}\; T^{a^1_{\mathcal{D}}}\dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}}\,, \tag{3.3}$$

可计算为对 $2k$ 个元素的（无向）配对集合 P_{2k} 求和 ：

$$\langle T^{a^1_{\mathcal{D}}}\dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}}\rangle_0 = \sum_{P\in\mathcal{P}_{2k}} \epsilon(\vec{P}_{ref,2k},\vec{P})^{\sum_{c\in\mathcal{D}}|c|}\Big(\prod_{(i,j)\in\vec{P}} g^{a^i_{\mathcal{D}}a^j_{\mathcal{D}}}\Big)\,, \tag{3.4}$$

[2]我们将测度 $d\mu[T]$ 视为受扰动的高斯测度。因此，我们不考虑各种张量积分和矩阵积分的收敛性。由于我们将高斯积分视为图的生成函数，因此不会讨论此类问题。

其中 $\vec{P}$ 是 P 的一个（任意选取的）有向版本。每一项的值都与该选择无关，因为符号 ϵ $(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{P})$ 在重新排列配对时为奇，而 $g^{a^i_{\mathcal{D}} a^j{}_{\mathcal{D}}}$ 在相关情况下是反对称的。奇数阶矩为零；对于可交换的（玻色）张量分量，符号恒为平凡值。

证明。 这一经典结论可利用规范化高斯测度的导数表示加以证明：

$$\begin{aligned}\langle T^{a^1_{\mathcal{D}}} \dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}} \rangle_0 &= \left[e^{\frac{1}{2}(\partial_T, \partial_T)} \; T^{a^1_{\mathcal{D}}} \dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}} \right]_{T^{a^i_{\mathcal{D}}}=0,\, \forall i} = \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! 2^n} \Big((\partial_T, \partial_T) \Big)^n T^{a^1_{\mathcal{D}}} \dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}} \right]_{T=0} \\ &= \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! 2^n} \Big((\partial_T, \partial_T) \Big)^{n-1} \sum_{b_{\mathcal{D}}, c_{\mathcal{D}}} \frac{\partial}{\partial T^{b_{\mathcal{D}}}} g^{b_{\mathcal{D}} c_{\mathcal{D}}} \sum_{r=1}^{2k} (-1)^{r \sum_{c\in\mathcal{D}} |c|} \, \delta^{a^r_{\mathcal{D}}}_{c_{\mathcal{D}}} \, T^{a^1_{\mathcal{D}}} \dots \widehat{T^{a^r_{\mathcal{D}}}} \dots T^{a^{2k}_{\mathcal{D}}} \right]_{T=0} .\end{aligned} \tag{3.5}$$

迭代这一过程，导数将生成（有向的）配对 $\vec{P}$ 的 $2k$ 张量，并在它们必须与奇数个张量反对易时产生负号。以这种方式生成的总符号，正是 $\vec{P}$相对于参考配对 $\vec{P}_{ref,2k} = \{(1,2),(2,3)\dots,(2k-1,2k)\}$。

$$\sum_{\vec{P}\in\vec{\mathcal{P}}_{2k}} \frac{1}{2^k} \, \epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{P})^{\sum_{c\in\mathcal{D}} |c|} \Big(\prod_{(i,j)\in\vec{P}} g^{a^i_{\mathcal{D}} a^j_{\mathcal{D}}} \Big) , \tag{3.6}$$

其中，$\vec{\mathcal{P}}_{2k}$ 是 $2k$ 个元素的有向配对集合。由于符号 $\epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{P})$ 在重新排列配对时会变号，而 $g^{a^i_{\mathcal{D}} a^j{}_{\mathcal{D}}} = (-1)^{\sum_{c\in\mathcal{D}} |c|} g^{a^j{}_{\mathcal{D}} a^i_{\mathcal{D}}}$，每一项的值都不依赖于 $\vec{P}$ 中配对的顺序。若 P 是 $2k$ 个元素的（无向）配对，则与之关联的有 2^k 个有向配对 $\vec{P}$。将此重数考虑在内，即得所述结论。

□

命题 7。 由一个 D 色有向图 B 指定的 $2k$ 阶不变量的高斯期望：

$$\langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) \rangle_0 = \int [dT] e^{-\frac{1}{2} g^{\otimes D}(T,T)} \; I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) \, , \tag{3.7}$$

可计算为对 $(D+1)$-无向彩色图 $\mathcal{G} = [\vec{G}]$（费曼图）求和，这些图的边带有额外的颜色 0，且 $B \subset G$ 是颜色 $c \in D$ 的最大 D-彩色子图：

$$\langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) \rangle_0 = \sum_{\substack{\mathcal{G},\, \mathcal{B}\subset\mathcal{G} \\ |V(\mathcal{G})|=2k}} \prod_{c\in\mathcal{D}} \Big((-1)^{|c|} N_c \Big)^{F_{c/0}(\mathcal{G})} . \tag{3.8}$$

N_c 的幂由 G 的面数给出，交替颜色为 c 和 0.

由于这些不变量是类函数，结果只取决于无向图。

证明。根据引理6，可得：

$$\begin{aligned}\langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T) \rangle_0 &= \sum_{\{a_{\mathcal{D}}\}} \Big\langle \prod_{(i,j)\in\vec{P}_{ref,2k}} T^{a^i_{\mathcal{D}}} T^{a^j_{\mathcal{D}}} \Big\rangle_0 \prod_{c\in\mathcal{D}} \left(\epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|} \prod_{(i,j)\in\vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}})} g^c_{a^i a^j} \right) \\ &= \sum_{\{a_{\mathcal{D}}\}} \sum_{P\in\mathcal{P}_{2k}} \epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{P})^{\sum_{c\in\mathcal{D}} |c|} \Big(\prod_{(i,j)\in\vec{P}} g^{a^i_{\mathcal{D}} a^j_{\mathcal{D}}} \Big) \prod_{c\in\mathcal{D}} \left(\epsilon(\vec{P}_{ref,2k}, \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|} \prod_{(i,j)\in\vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}})} g^c_{a^i_c a^j_c} \right) .\end{aligned} \tag{3.9}$$

现在，利用两个配对的符号性质（2.11）消除对参考 $\vec{P}_{ref,2k}$ 的依赖，并按颜色重新整理乘积，得到：

$$\sum_{\{a_{\mathcal{D}}\}} \sum_{P\in\mathcal{P}_{2k}} \prod_{c\in\mathcal{D}} \left(\epsilon(\vec{P}, \vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}}))^{|c|} \Big(\prod_{(i,j)\in\vec{P}} g^{c,\, a^i_c a^j_c} \Big) \Big(\prod_{(i,j)\in\vec{E}^c(\vec{\mathcal{B}})} g^c_{a^i_c a^j_c} \Big) \right) . \tag{3.10}$$

根据配对 $\vec{P}$，向 $\vec{\text{B}}$ 添加一种新的颜色 0 的边，可得到一个 $(D+1)$ 有向彩色图 $\vec{\text{G}}$。沿着颜色 $c/0$, g^c 和 $(g^c)^{-1}$ 的面交替出现；由于所有指标都要求和，每个这样的面贡献一个因子 N_c。不过请注意，由于 $g^c_{a_c b_c} g^{c,\, d_c b_c} = (-1)^{|c|}\delta^{d_c}_{a_c}$，若沿面同一方向指向的边数为奇数，该面会额外带上一个符号（这种面称为奇面）。结合这一点以及用颜色 $c/0$ 的偶面数表示 $\epsilon(\vec{P}, \vec{E}^c(\vec{\text{B}}))$ 的表达式（引理4），我们得到：

$$\sum_{\{a_{\mathcal{D}}\}} \sum_{\substack{\mathcal{G},\, \mathcal{B}\subset\mathcal{G} \\ |V(\mathcal{G})|=2k}} \prod_{c\in\mathcal{D}} \left(\left((-1)^{F_{c/0,even}(\vec{\mathcal{G}})}\right)^{|c|} \left((-1)^{F_{c/0,odd}(\vec{\mathcal{G}})}\right)^{|c|} \left(N_c\right)^{F_{c/0}(\vec{\mathcal{G}})} \right), \tag{3.11}$$

并且由于 $c/0$ 颜色的偶面和奇面的数量之和等于 $\vec{\mathcal{G}}$ 中此类面的总数（等同于 $\mathcal{G}$ 中此类面的总数），证明得证。不过请注意，结果并不取决于有向图的具体选取。这一点在每个中间步骤中都成立，因为 $\epsilon(\cdot,\cdot)^{|c|}$ 的对称性总是与 g^c 的分次对称性一致。

□

此时，我们已经具备了对配分函数进行微扰计算的所有要素。

命题 8。 配分函数 $Z(\{\lambda\}$ 分次彩色张量模型（定义 5）可以通过按耦合常数展开的形式幂级数求得，该级数由 $(D+1)$-彩色无向图 $\mathcal{G}$索引。将颜色 D-彩色的、由颜色 $c \in \mathcal{D}$ 构成的最大连通子图（称为泡）记作 $\mathcal{B}\ \subset\mathcal{G}$。求和仅遍历不含恰有两个顶点的泡的图 $\mathcal{G}$：

$$Z(\{\lambda_{\mathcal{B}}\}) = \sum_{\substack{\mathcal{G} \\ |V(\mathcal{B})|\neq 2\ \forall \mathcal{B}\subset\mathcal{G}}} \frac{1}{n_b(\mathcal{G})!} \left(\prod_{\mathcal{B}\subset\mathcal{G}} \frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} \right) \left(\prod_{c\in\mathcal{D}} \left((-1)^{|c|} N_c\right)^{F_{c/0}(\mathcal{G})} \right), \tag{3.12}$$

而 $n_b(\mathcal{G})$ 表示 $\mathcal{G}$ 中泡的总数。

证明。 我们展开相互作用部分，得到：

$$Z = \int [dT] e^{-\frac{1}{2} g^{\otimes}(T,T)} \sum_{\{p_{\mathcal{B}}\geq 0\}} \prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{p_{\mathcal{B}}!} \left(\frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} I_{\mathcal{B}}(T) \right)^{p_{\mathcal{B}}}, \tag{3.13}$$

其中，我们为每个无向 D 色图$\mathcal{B}$ 赋予重数 $p_{\mathcal{B}} \geq 0$，并对这些图求和。交换求和与高斯积分的次序后，得到微扰级数：

$$\sum_{\{p_{\mathcal{B}}\geq 0\}} \left(\prod_{\mathcal{B}} \frac{1}{p_{\mathcal{B}}!} \left(\frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} \right)^{p_{\mathcal{B}}} \right) \left\langle \prod_{\mathcal{B}} \left(I_{\mathcal{B}}(T) \right)^{p_{\mathcal{B}}} \right\rangle_0 . \tag{3.14}$$

由于不变量的任意乘积都可视为一个非连通不变量（2.8），命题 7 可直接应用，从而得到对 $(D+1)$ 色无向图 $\mathcal{G}$ 的求和，唯一条件是这些图不含恰有两个顶点的泡 $\mathcal{B}\ \subset\mathcal{G}$ 。每当图 $\mathcal{G}$ 包含一个泡 $\mathcal{B}$ 时，都会产生一个因子 $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\sum_{\substack{\mathcal{G} \\ |V(\mathcal{B})|\neq 2\ \forall \mathcal{B}\subset\mathcal{G}}} \frac{1}{n_b(\mathcal{G})!} \left(\prod_{\mathcal{B}\subset\mathcal{G}} \frac{\lambda_{\mathcal{B}}}{|V(\mathcal{B})|} \right) \left(\prod_{c\in\mathcal{D}} \left((-1)^{|c|} N_c\right)^{F_{c/0}(\mathcal{G})} \right), \tag{3.15}$$

这里 $n_b(\mathcal{G})$ 是$\mathcal{G}$中泡的总数。

□

推论 9。 迹不变量的期望值可通过对配分函数的对数求导来计算：

$$\begin{aligned} &for\ |V(\mathcal{B})|=2: \quad \langle g^{\otimes D}(T,T)\rangle = \Big(\prod_{c\in\mathcal{D}}(-1)^{|c|}N_c\Big) + \Big(\sum_{\substack{\mathcal{B}\ connected,\\ |V(\mathcal{B})|>2}} \lambda_{\mathcal{B}}|V(\mathcal{B})|\,\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathcal{B}}}\Big)\ln Z(\{\lambda\})\,, \\ &for\ |V(\mathcal{B})|>2: \quad \langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)\rangle = -|V(\mathcal{B})|\,\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathcal{B}}}\ln Z(\{\lambda\})\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

期望值可以显式计算为形式和，类似于 $Z(\{\lambda\})$。导数作用于乘积中的一个 $\lambda_{\mathcal{B}}$，并标记相应的泡 $[B]\subset[G]$:

$$for\ |V(\mathcal{B})|>2: \quad \langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)\rangle = \sum_{\substack{\mathcal{G}\ connected,\\ \mathcal{B}\subset\mathcal{G}\ marked,\\ |V(\mathcal{B}')|\neq 2\ \forall\mathcal{B}'\subset\mathcal{G}}} \frac{1}{n_b(\mathcal{G})!}\Big(\prod_{\substack{\mathcal{B}'\subset\mathcal{G}\\ \mathcal{B}'\neq\mathcal{B}}}\frac{\lambda_{\mathcal{B}'}}{|V(\mathcal{B}')|}\Big)\Big(\prod_{c\in\mathcal{D}}\Big((-1)^{|c|}N_c\Big)^{F_{c/0}(\mathcal{G})}\Big)\,. \tag{3.17}$$

证明。 关于 $|V(\mathcal{B})|>2$ 的结论由定义 5、(1.4)、命题 8 以及一个常见事实推出：对数将其限制为连通图的和。对于 $|V(\mathcal{B})|=2$，考虑以下 Schwinger-Dyson 方程：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{(-1)^{\sum_c|c|}}{Z}\int[dT]\sum_{a_{\mathcal{D}}}\frac{\partial}{\partial T^{a_{\mathcal{D}}}}\Big(T^{a_{\mathcal{D}}}e^{-S[T]}\Big) \\ &= \Big(\prod_{c\in\mathcal{D}}(-1)^{|c|}N_c\Big) - \langle g^{\otimes D}(T,T)\rangle - \sum_{\substack{\mathcal{B}\ \text{conn.}\\ |V(\mathcal{B})|>2}}\lambda_{\mathcal{B}}\langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

并使用关于$\langle I_{\vec{\mathcal{B}}}(T)\rangle$的结果。第二行中的第一项可以解释为一个没有顶点、但带有 D 彩色边的环图。 □

4 结论与展望

本文展示了具有正交对称性和辛对称性的彩色张量模型之间的 N 到 $-N$ 对偶性。我们证明，任意图$\mathcal{G}$ 的振幅都带有因子$\prod_{c\in\mathcal{C}}\left((-1)^{|c|}N_c\right)^{F_{c/0}(\mathcal{G})}$，其中 $|c|$ 是赋予颜色 c 的分次，用以控制其对称性质（$|c|=0$ 对应 $O(N_c)$，$|c|=1$ 对应 $Sp(N_c)$），而 $F_{c/0}(\mathcal{G})$ 是图$\mathcal{G}$中颜色c 的面数。因此，对任意颜色 c，同时改变$O(N_c)\leftrightarrow Sp(N_c)$和 $N_c\leftrightarrow -N_c$ 时，任意图的振幅保持不变。我们的分析在很大程度上依赖于定向配对符号的性质。该符号确保不变量由无向图指定，且不依赖于边的任意选定定向。随后，通过仔细追踪玻色或费米性质所带来的符号，以及有向图中边重新定向产生的符号，我们得到了所需的图振幅表达式。

本项目顺理成章的后续工作，是研究在指标置换下具有对称性质的张量。 [22–25] 的工作表明，可以为正交群和对称群的任意张量表示（包括混合表示）构造类似模型。例如，我们猜想，采用在 $O(N)$ 的全对称表示中变换的 D 阶张量的张量模型（类似于 [11, 12, 32]），与基于$Sp(N)$全反对称表示的模型之间存在某种关系。对于奇数 D，辛模型也应当再次是费米的。此外，还应探究 $N\to -N$ 对偶性对张量场论的影响。符号变化可能会产生新的重整化群不动点。最后，也可以考虑具有更一般的 $OSp(m,\ n)$ 对称性的模型。在这种情况下，应当互换 n 和 m。

致谢。 我们感谢 Razvan Gurau、Thomas Krajewski 和 Adrian Tanasa 提供意见并参与讨论。作者衷心感谢亨利·庞加莱研究所（UAR 839 CNRS-Sorbonne Université）和 LabEx CARMIN（ANR-10-LABX-59-01）的支持，本研究的部分工作在此期间完成。H. K. 获得德国研究联合会（DFG）“德国卓越战略”EXC–2181/1 – 390900948 项目（海德堡 STRUCTURES 卓越集群）的资助。T. M. 获得 ANR-20-CE48-0018 “3DMaps” 项目的部分资助。

参考文献

[1] *J. Ambjørn*、*B. Durhuus* 和 *T. Jonsson*，《三维单纯形量子引力与广义矩阵模型》，*Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 1133*。[2] *R. Gurau*，《随机张量》，牛津大学出版社，牛津，第*1*版（*2017*）。[3] *R. Gurau*，《随机张量导论》，*SIGMA 12 (2016)* 94 [1609.06439]。[4] *R. Gurau* 和 *J.P. Ryan*，《彩色张量模型——综述》，*SIGMA 8 (2012)* 20 [1109.4812]。[5] *A. Tanasa*，《组合物理》，牛津大学出版社，牛津，第*1*版（*2021*），*10.1093./oso/9780192895493.001.0001*。[6] *R. Gurau*，《张量模型与张量场论札记》，*2019*。[7] *R. Gurau*，《任意维度下彩色张量模型的完整 *1/N* 展开》，*Ann. Henri Poincaré 13 (2012)* 399 [1102.5759]。[8] *V. Bonzom*、*R. Gurau* 和 *V. Rivasseau*，《大 *N* 极限下的随机张量模型：将彩色张量模型去颜色化》，*Phys. Rev. D 85 (2012)* 084037 [1202.3637]。[9] *S. Carrozza* 和 *A. Tanasa*，《$O(N)$ 随机张量模型》，*Lett. Math. Phys. 106 (2016) 1531*[1512.06718]。[10] *D. Benedetti*、*S. Carrozza*、*R. Gurau* 和 *M. Kolanowski*，《三阶对称无迹张量模型与反对称张量模型的 $1/N$ 展开》，*Commun. Math. Phys. 371 (2019)*55 [1712.00249]。[11] *S. Carrozza*，《不可约张量模型的大 N 极限：具有混合置换对称性的 $O(N)$ 三阶张量》，*JHEP 06 (2018)* 39 [1803.02496]。[12] *S. Carrozza* 和 *S. Harribey*，《五指标不可约随机张量的梅洛尼大 N 极限》，*Commun. Math. Phys. 390 (2022)* 1219 [2104.03665]。[13] *S. Dartois*、*V. Rivasseau* 和 *A. Tanasa*，《多定向随机张量模型的 *1/N* 展开》，*Annales Henri Poincaré 15 (2013) 965*。[14] *T. Krajewski*、*T. Muller* 和 *A. Tanasa*，《棱柱张量模型的双重标度极限》，*2023*。[15] *E. Witten*，《一种无无序的 *SYK* 类模型》，*J. Phys. A 52 (2019)* 474002 [1610.09758]。[16] *I.R. Klebanov* 和 *G. Tarnopolsky*，《无颜色随机张量、梅洛尼图与 *Sachdev-Ye-Kitaev* 模型》，*Phys. Rev. D 95 (2017)* 046004 [1611.08915]。[17] *S. Giombi*、*I.R. Klebanov* 和 *G. Tarnopolsky*，《大 N 与小 ϵ 下的玻色张量模型》，*Phys. Rev. D 96 (2017)* 106014 [1707.03866]。

[18] K. Bulycheva、I.R. Klebanov、A. Milekhin 和 G. Tarnopolsky，大 N张量模型中的算符谱，*Phys. Rev. D* **97** (2018) 026016 [1707.09347]。[19] S. Giombi、I.R. Klebanov、F. Popov、S. Prakash 和 G. Tarnopolsky，棱柱形大 N 模型

s

对于玻色张量，*Phys. Rev. D98 (2018)* 105005 [1808.04344].[20] *I.R. Klebanov*、*F.Popov* 和 *G.Tarnopolsky*，大型 N 张量模型 *TASI*讲座，*PoS TASI2017(2018)* 004 [1808.09434].[21] *R.Gurau*，张量模型与张量场论笔记，*1907.03531*.[22] *R.C. King*，酉群、正交群和辛群不可约表示的修改规则与乘积，*Journalof Mathematical Physics 12 (1971) 1588*.[23] *P.Cvitanović* 和 *A.D. Kennedy*，负维度中的旋量，*Phys. Scripta 26 (1982) 5*.[24] *R.L. Mkrtchyan*和*A.P. Veselov*，李群与对称空间理论中的对偶性和负维度，*Journalof Mathematical Physics 52 (2011) 083514*.[25] *P. Cvitanović*，《群论》，*PrincetonUniversity Press*，*Princeton, N.J.(2008)*，*doi:10.1515/9781400837670*.[26] *R.L.Mkrtchian*，*Sp(2N)* 与 *SO(-2N)*规范理论的等价性，*Phys. Lett. B 105 (1981) 174*.[27] *A.LeClair*和*M.Neubert*，辛费米子模型的半洛伦兹不变性、幺正性和临界指数，*JHEP10(2007)* [0705.4657].[28] *A.D. Bond*、*D.F. Litim* 和*T.Steudtner*，具有马约拉纳费米子的新大型 N 等价性与渐近安全性，*Phys. Rev. D 101(2020)* [1911.11168].[29] *M.Mulase*和*A. Waldron*，正交与辛矩阵积分以及四元数费曼图的对偶性，*Commun. Math. Phys. 240 (2003)* 553 [math-ph/0206011].[30] *R.Gurau* 和 *H. Keppler*，正交与辛随机张量模型的对偶性，*AIHP*

D

*(*即将刊出*)*(2022) [2207.01993].[31] S. Caracciolo、A.D. Sokal 和 A. Sportiello，行列式与 *Pfaffian* 导数的 *Cayley* 型恒等式的代数／组合证明，应用数学进展 **50** (2013)474[1105.6270].[32] S. Carrozza 和 V. Pozsgay，具有 *sp(n)* 对称性的 *SYK* 类张量量子力学，核物理 *B* **941** (2019) 28 [1809.07753]。