arXiv:2304.03627v2 [math.CO] 6 Jun 2024

按多重宽度对宽度1晶格四面体进行分类

吉特鲁德·哈姆

Abstract. 我们介绍格多胞体的多重宽度，并利用它对所有多重宽度为$(1, w_2, w_3)$ 的格点四面体进行分类和计数。这种分-类所采用的方法可以扩展为计算机算法，以对具有任意给定多重宽度的格点四面体进行分类。我们利用该方法对具有多重宽度$(2, w_2, w_3)$且 w_2 和w_3 较小的四面体进行分类，并对计算具有任意多重宽度的格点四面体的函数作出猜想。

1. Introduction

格多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有限个格点的凸包，也就是$\mathbb{Z}^d$中的点。我们认为格多胞体仅在仿射幺模等价意义下定义。若一个格多胞体可通过对 $\mathbb{Z}^d$ 作基变换，再进行整数平移，映射到另一个格多胞体，则称二者（仿射）等价。格单形是仿射独立格点的凸包。例如，在二维和三维中，它们分别是三角形和四面体。

格单纯形是反复受到研究的对象，并具有多种应用。通过托里克几何，它们与代数几何相关，并且与托里克 $\mathbb{Q}$-阶乘奇点密切相关。至多具有终端奇点的托里克Fano 三维簇，是通过找出所有仅有原点和其顶点作为格点的三维格多胞体而分类的[Kas06]。实现这一目标的关键步骤之一，是对所有此类四面体进行分类。仅有其顶点作为格点的单纯形，可以通过将一个顶点置于原点并考察其生成的锥，给出终端商奇点。这些单纯形被称为空单纯形，并分别在三维和四维中由 [Whi64] 和 [IVnS21] 分类。格单纯形在混合整数和整数优化中也有应用，例如参见[AWW11] 和 [AKN20]。

多胞体的一个重要仿射不变量是其宽度。回忆一下，对于一个格多胞体$P \subseteq \mathbb{R}^d$ 和一个原始对偶向量 $u \in (\mathbb{Z}^d)^*$ ， P 关于 u的宽度，记作宽度$_u(P)$，是将 P 沿着法向量为 u的超平面投影所得到的区间长度；也就是说，宽度$_u(P)$:= 最大值$_{x\in P}\{u \cdot x\}$ − 最小值$_{x\in P}\{u \cdot x\}$。于是， P的（第一）宽度，记作宽度$^1(P)$，是沿所有非零对偶向量 u的最小宽度，即宽度$^1(P)$:= 最小值 $_{u\in(\mathbb{Z}^d)^*\setminus\{0\}}\{$ 宽度 $_u(P)\}$。宽度在上文提到的 [IVnS21]和 [AWW11] 的证明中都发挥了作用，这促使我们寻求理解给定宽度的单纯形。然而，在至少为2的维数中，给定宽度的单纯形有无穷多个。我们希望记录关于一个多胞体的宽度的足够信息，使得满足这些条件的多胞体只有有限多个。为此，我们考虑一个格多胞体在多个方向上的宽度。对于一组线性无关的对偶向量 u_1， .. ., $u_d \in (\mathbb{Z}^d)^*$，我们可以考虑一个元组，其各项为宽度$_{u_i}(P)$。对 $\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ 应用字典序后，我们得到这样的元组中的最小者。我们称 P 的多重宽度，记作mwidth(P)，并且该元组的第 i项是 P的第 i 个宽度，记作宽度$^i(P)$。由于宽度$^i(P)$总是大于或等于宽度$^{i-1}(P)$，因此从现在起，除非另有说明，令 w_1、 w_2 和 w_3 为满足 $0 < w_1 \leq w_2 \leq w_3$ 的整数。

该作者在 [Ham23a]中根据多重宽度对格点三角形进行了完整分类。结果出奇地简单，并且给出了三角形的一种标准形式，从中可以得到它们的

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：52B10；次要分类号：52B20、52-08。
Key words and phrases. 格多胞体、多重宽度、单纯形、分类算法。

宽度和自同构群可以轻松读出。此外，这表明，计算第二宽度至多为 w_2 的格点三角形数量的序列，其生成函数等于 $\mathbb{P}(1,1,1,2,2,2)$中一个8次超曲面的希尔伯特级数。在这里，我们研究其中有多少内容可以推广到三维。理想情况下，我们将描述如下定义的有限集合$\mathcal{T}_{w_1,w_2,w_3}$。

定义 1.1。对于整数 $0 < w_1 \leq w_2 \leq w_3$，多重宽度为 (w_1, w_2, w_3) 的四面体集合在仿射等价意义下（记作 $\sim$）为

$$\mathcal{T}_{w_1,w_2,w_3} := \{T = \operatorname{conv}(v_1, v_2, v_3, v_4) : v_i \in \mathbb{Z}^3, \operatorname{mwidth}(T) = (w_1, w_2, w_3)\}/\sim .$$

定理 1.4 通过建立 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$ 与一组四面体 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 之间的双射，在第一宽度为 1 时实现了这一点。要定义 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$，我们必须先回顾按多重宽度对格点三角形进行的分类，然后定义新分类将包含的四种四面体类型。

定义 1.2。令 $\mathcal{S}_{w_1,w_2}$ 为格点三角形集合

- 凸包((0,0),(w_1, y_1),(0, w_2))，其中 $0 \leq y_1 \leq$（$w_2 - y_1$ 模 w_1），
- 凸包((0,0),(w_1, y_1),(x_2, w_2))，其中 $0 < x_2 \leq \frac{w_1}{2}$ 且 $0 \leq y_1 \leq w_1 - x_2$（并且若 $w_1 = w_2$ 则 $y_1 \geq x_2$ ）
- 且若 $w_1 < w_2$，则凸包((0, y_0), (w_1, 0), (x_2, w_2))，其中 $1 < x_2 < \frac{w_1}{2}$ 且 $0 < y_0 < x_2$。

如[Ham23a，定理 1.2] 表明，将格点三角形映射到其仿射等价类，可得到一个双射：从 $\mathcal{S}_{w_1,\ w_2}$ 到具有多重宽度 (w_1, w_2) 的格点三角形（按仿射等价）的集合。

现在我们定义 $\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$，这是本文的主要分类结果：

定义 1.3。$\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$ 中将出现的四种类型的四面体为

(1) 凸包($\{0\} \times t$, (1,0,0))，其中 $t \in \mathcal{S}_{w_2,\ w_3}$；(2) 凸包((0, 0, 0), (0, w_2, z_1), (1, 0, 0), (1, 0, w_3))，其中 $0 \leq z_1 \leq \frac{w_2}{2}$；(3) 凸包((0, 0, 0), (0, w_2, z_1), (1, 0, w_3), (1, y_1, 0))，其中 $0 < y_1 \leq w_2$ 且 $w_3 - w_2 \leq z_1 \leq w_3$；(4) 凸包((0, 0, 0), (0, w_2, w_3), (1, 0, w_3), (1, y_1, z_1))，其中 $0 < z_1 < y_1 < w_2$。

这些示例请参见图1。

若 $w_3 > w_2 > 1$ 令 $\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$ 为包含所有类型 1-4的四面体的集合。

如果 $w_3 = w_2 > 1$ 那么 $\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_2}$ 是所有类型为 1 和 2 的四面体，以及满足 $y_1 \leq z_1$ 且类型为 4 的四面体的集合，满足条件 $z_1 \leq w_2 - y_1$。

如果 $w_3 > w_2 = 1$ 那么

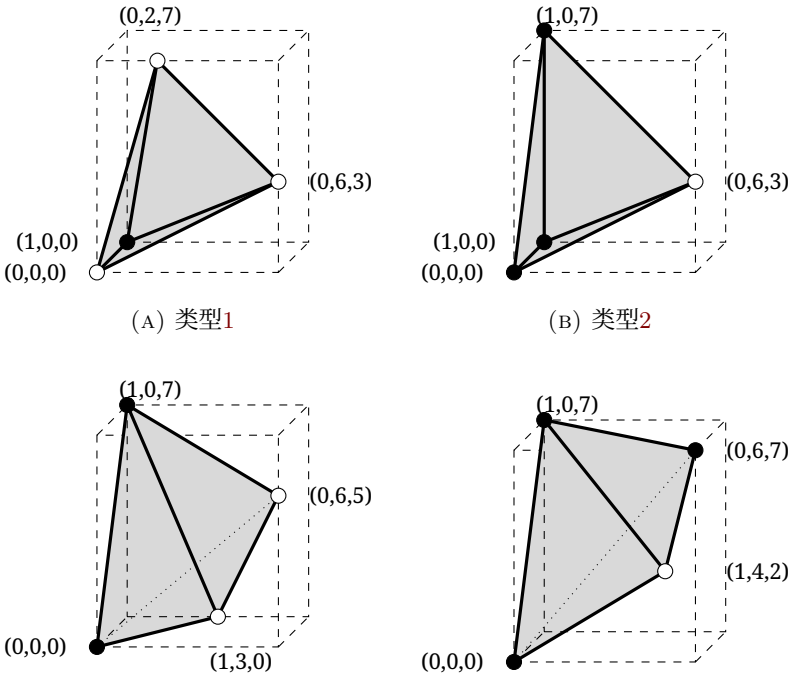
$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1,1,w_3} := \{ &\operatorname{conv}((0,0,0),(0,1,0),(0,0,w_3),(1,0,0)),\\ &\operatorname{conv}((0,0,0),(0,1,w_3-1),(1,0,w_3),(1,1,0)),\\ &\operatorname{conv}((0,0,0),(0,1,w_3),(1,0,w_3),(1,1,0))\}.\end{aligned}$$

如果 $w_3 = w_2 = 1$ 那么

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1,1,1} := \{ &\operatorname{conv}((0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)),\\ &\operatorname{conv}((0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))\}.\end{aligned}$$

最后这两种情况包含类型为 1和 3。

现在我们可以陈述本文的主要定理。



(A) 类型1 (B) 类型2

(C) 类型3 (D) 类型4

FIGURE 1. 类型为1-4 的四面体示例，当 $w_2 = 6$ 且 $w_3 = 7$。对于给定类型，黑色顶点固定不变，白色顶点则可变。

定理 1.4. 存在一个从 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$ 的双射，该映射将四面体对应到其仿射等价类。特别地，

- 当 $w_3 > w_2 > 1$ $\mathcal{T}_1$ 的基数，w_2，w_3 为 $2w_2^2 + 4$ 若 w_2 为偶数，且 w_3 为偶数 $2w_2^2 + 3$ 若 w_2 为偶数且 w_3 为奇数 $2w_2^2 + 2$ 若 w_2 为奇数
- 当 $w_2 > 1$ $\mathcal{T}_1$ 的基数，w_2，w_2 为 $w_2^2 + w_2 + 2$ 若 w_2 为偶数 $w_2^2 + w_2 + 1$ 若 w_2 为奇数
- 当 $w_3 > 1$ 的基数为 3 时，$\mathcal{T}_{1,\ 1,\ w_3}$
- 且$\mathcal{T}_{1,\ 1,\ 1}$ 的基数为 2。

	w_3											
w_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	8	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12
3	0	0	13	20	20	20	20	20	20	20	20	20
4	0	0	0	22	35	36	35	36	35	36	35	36
5	0	0	0	0	31	52	52	52	52	52	52	52
6	0	0	0	0	0	44	75	76	75	76	75	76

TABLE 1. 多重宽度为 $(1, w_2, w_3)$ 的格点四面体在仿射等价意义下的数量，适用于较小的 w_2 和 w_3。

表 1 给出了 $\mathcal{T}_{1,\ w_2,\ w_3}$ 在 $w_2 \leq 6$ 和 $w_3 \leq 12$ 由定理 1.4描述时的基数。证明的思路是首先证明，具有多重宽度 $(1, w_2, w_3)$ 的四面体是

等价于 $[0,1]\times[0,w_2]\times[0,w_3]$的一个子集。然后，我们依次对四面体顶点可能的 x 坐标、y 坐标和 z坐标进行分类。在每一步中，我们都会排除在某个方向上的宽度过小或与其他情形等价的情况。四面体的两个不同顶点可能具有相同的 x 和 y坐标，因此我们需要考虑格点的多重集。滥用记号时，即使 v_i 彼此不同时，我们也将包含格点 $v_i\in\mathbb{Z}^d$ 的 n 点多重集写作 $\{v_1,\dots,v_n\}$。我们将宽度的概念扩展到这些集合，规定一个集合的宽度就是其凸包的宽度。

我们可以完全分类 $\mathbb{Z}$ 中宽度为 w_1 的四点集。这些四点集可以表示多重宽度为 (w_1,w_2) 的 $\mathbb{Z}^2$ 中所有四点集可能具有的 x 坐标。第二个宽度给出了其可能 y 坐标的界限，我们可以完全分类平面中多重宽度为 $(1,w_2)$ 的四点集。类似地，这些四点集表示多重宽度为 $(1,w_2,w_3)$ 的四面体顶点可能具有的前两个坐标。考虑可分配给每个点的可能 z 坐标后，我们便可得到上述分类。

当 $w_1>1$ 这种证明风格需要检查的情况数量会急剧增加。然而，该方法可以用于创建一个算法，对具有给定多重宽度的四面体进行分类。通过这种方式，我们开始对多重宽度较小时的宽度 2 情形进行分类。已分类的四面体数量可见表2。我们进行这一分类的范围仅限于获得并检验关于多重宽度为（25.3 ， w_2， w_3）的四面体数量的猜想。我们能在多大程度上将二维结果推广到三维情形仍是一个开放问题，但迄今为止我们发现的结果中的相似性似乎令人充满希望。

	w_3										
w_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	17	45	47	45	47	45	47	45	47	45	47
3	0	87	178	175	178	175	178	175	178	175	178
4	0	0	161	320	325	320	325	320	325	320	325
5	0	0	0	244	493	490	493	490	493	490	493
6	0	0	0	0	358	716	721	716	721	716	721
7	0	0	0	0	0	482	970	967	970	967	970
8	0	0	0	0	0	0	636	1274	1279	1274	1279
9	0	0	0	0	0	0	0	801	1609	1606	1609
10	0	0	0	0	0	0	0	0	995	1994	1999

TABLE 2. 具有多重宽度 $(2,w_2,w_3)$ 的格点四面体在较小的 w_2 和 w_3下模仿射等价的数量。四面体完整列表见 [Ham23b]。

在第2节中，我们正式定义多重宽度。我们证明了关于具有给定多重宽度的多胞体的一些事实。特别地，具有多重宽度(w_1,w_2,w_3) 的三维格多面体等价于 $[0,w_1]\times[0,w_2]\times[0,w]$ 的一个子集，其中 w 是 w_1+w_3-1和 $\max\{w_1+w_2,w_3\}$ 中较小的一个。在第 3 节中，我们对 $\mathbb{Z}$ 中具有多重宽度 w_1 的四点集，以及 $\mathbb{Z}^2$ 中具有多重宽度(w_1,w_2) 且具有 x-坐标 $\{0,0,0,w_1\}$或 $\{0,0,w_1,w_1\}$的四点集进行分类。由此得到多重宽度为$(1,w_2)$的四点集的分类。在第4 节中，我们证明定理1.4。命题4.2、4.3 和4.5 表明，将格四面体映射到其等价类的映射是一个定义良好的双射，从 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$。在第 5 节中，我们描述这一分类的计算扩展。我们对平面中的多重宽度为 (w_1,w_2)的四点集，以及对于较小的 w_1, w_2 和 w_3的多重宽度为 $(2,w_2,w_3)$的四面体进行分类。基于这些分类，我们对一般情况下计算此类集合和四面体数量的函数提出猜想。

致谢。我谨向我的导师 Alexander Kasprzyk 和 Jo- hannes Hofscheier 致以谢意，感谢他们慷慨地分享专业知识，并在整个

项目期间给予我支持。此外，也感谢所有曾问我能否推广三角形分类的人；你们激励我重新投入这个项目。本研究部分得到了 Heilbronn 数学研究所的资助。

2. Width and parallelepipeds

设 $N \cong \mathbb{Z}^d$ 是一个格，$N^* := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^d$ 是其对偶格，而 $N_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong \mathbb{R}^d$ 是包含 N 的实向量空间。对于两个整数元组 $w = (w_1, \ldots, w_d)$ 和 $w' = (w'_1, \ldots, w'_d)$，我们称 $w <_{lex} w'$，当且仅当存在某个 $1 \le i \le d$，使得 $w_i < w'_i$ 且 $w_j = w'_j$ 对所有 $j < i$ 都成立。这定义了 $\mathbb{Z}^d$ 上的字典序。

定义 2.1. 设 P 为格多胞体，$u \in N^*$ 为对偶向量。我们将 P 关于 u 的宽度定义为

$$\mathrm{width}_u(P) := \max_{x \in P}\{u \cdot x\} - \min_{x \in P}\{u \cdot x\}.$$

由于宽度均为非负数，因此可以定义

$$\mathrm{mwidth}(P) := \min_{u_1, \ldots, u_d \in N^*} (\mathrm{width}_{u_1}(P), \ldots, \mathrm{width}_{u_d}(P))$$

其中，最小值是按照字典序取得的，并且要求 u_1、.....、u_d 线性无关。我们将这个元组称为 P 的多重宽度，并将宽度 $\mathrm{width}_{u_i}(P)$ 称为 P 的 i 宽度，记作宽度 $i(P)$。

现在定义多胞体 $\mathcal{W}_P := (P - P)^*$，它是 P 与 $-P$ 的 Minkowski 和的对偶。注意，$\mathcal{W}_P$ 是一个有理多胞体，但不一定是格多胞体。这个多胞体以下述方式编码了 P 的宽度。

引理 2.2。对于对偶格点 u，当且仅当 $u \in w\mathcal{W}_P$ 时，宽度 $\mathrm{width}_u(P) \le w$。

证明。根据定义，对偶多胞体 $\mathcal{W}_P$ 是满足以下条件的有理点集合：对于所有 $x \in P - P$，均有 $u \cdot x \le 1$。对于固定的格点 u，当且仅当对于 P 中的所有点对 x_1 和 x_2，$u \cdot (x_1 - x_2) \le w$ 时，宽度 $\mathrm{width}_u(P) \le w$。这等价于对于 $P - P$ 的所有点 x，均有 $\frac{1}{w} u \cdot x \le 1$；换言之，即 $u \in w\mathcal{W}_P$。□

请注意，这等价于说 i阶宽度是 P的 i阶连续极小值。关于多胞体连续极小值的定义，见 [KL88，第 581]页。我们使用引理2.2 来证明以下结果。

命题 2.3. 设 $d \ge 2$ 和 $P \subset N_{\mathbb{R}}$ 是格多胞体。若 P 相对于两个线性无关的本原对偶向量具有宽度 w_1 和 w_2，则 P 等价于 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times \mathbb{R}^{d-2}$ 的一个子集。

证明。必要时重新标记，我们可以假设 $w_1 \le w_2$。选取线性无关的本原对偶向量 u_1 和 u_2，使其实现 P所述的宽度。我们知道 u_1、$u_2 \in w_2\mathcal{W}_P$。作为实向量，u_1 和 u_2 生成一个二维向量空间，其中包含一个N^*的子格。三角形凸包$(0, u_1, u_2) \subseteq w_2\mathcal{W}_P$包含一个格点 u'_2，使得 $\{u_1, u'_2\}$ 是该子格的一个基。由于 $u'_2 \in w_2\mathcal{W}_P$，我们知道 $\mathrm{width}_{u'_2}(P) \le w_2$。经过换基，我们可以假设 u_1 和 u'_2 是前两个标准基向量。这个换基和平移足以将 P映射到 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times \mathbb{R}^{d-2}$的一个子集。□

注意，这是一种由前两个维度造成的假象，因为这里依赖皮克定理来假定所有空格点三角形都是等价的。在三维及更高维度中，我们可能不再能够假定所有空单纯形都是等价的。

命题 2.4. 设 Q 是一个格多胞体，其在三个线性无关方向上的宽度分别为 w_1、w_2 和 w_3。假设 $0 < w_1 \le w_2 \le w_3$，则 Q 等价于$[0, w_1] \times [0, w_2] \times [0, w_1 + w_3 - 1]$的一个子集。此外，如果（$w_1$, w_2, w_3）是 Q 的多重宽度，那么 Q等价于 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times [0, \max\{w_1 + w_2, w_3\}]$.

证明。 根据命题 2.3 我们可以假设 Q 是平行六面体的一个子集

$$P \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^3 : (1,0,0) \cdot v \in [0, w_1], (0,1,0) \cdot v \in [0, w_2], u \cdot v \in [a, a + w_3]\}$$

对于某个整数 a 和某个与 (1, 0, 0) 和 (0, 1, 0) 线性无关的对偶向量 u。设 $u = (u_x, u_y, u_z)$，那么 $u_z \neq 0$。事实上，我们可以假设 $u_z > 0$，否则用 $-u$ 替换 u，并调整 a，使其不改变 P。因此，我们可以选取整数 k_x 和 k_y，使得 $0 \leq k_i u_z - u_i < u_z$。现在令 φ 为如下所述的剪切变换。

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, k_x x + k_y y + z).$$

通过检查 $\varphi(P)$ 顶点的 z 坐标，我们可以证明

$$\begin{aligned}\operatorname{width}_{(0,0,1)}(\varphi(Q)) \leq & \frac{w_1(k_x u_z - u_x) + w_2(k_y u_z - u_y) + w_3}{u_z} \\ \leq & w_1\left(1 - \frac{1}{u_z}\right) + w_2\left(1 - \frac{1}{u_z}\right) + w_3\frac{1}{u_z}\end{aligned}$$

由于 $w_2 \leq w_3$ 这小于 $w_1 + w_3$。平移后，这表明 Q 等价于 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times [0, w_1 + w_3 - 1]$ 的一个子集。这利用了以下事实： Q 是一个格多胞体，因此具有整数宽度。

现在设 Q 的多重宽度为 (w_1, w_2, w_3)，那么我们证明 Q 等价于 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times [0, \max\{w_1 + w_2, w_3\}]$ 的一个子集。在上述不等式中，如果 $u_z = 1$，则宽度$_{(0,0,1)}(\varphi(Q)) \leq w_3$，因此得证。如果 $u_z \geq 2$，考虑以下事实：宽度$_{(0,0,1)}(\varphi(Q)) \leq w_1 + w_2 + \frac{w_3 - w_1 - w_2}{u_z}$。如果 $w_3 > w_1 + w_2$，则 $w_1 + w_2 + \frac{w_3 - w_1 - w_2}{u_z}$ 至多为 $\frac{w_1 + w_2 + w_3}{2}$，而后者小于 w_3。如果 $w_3 \leq w_1 + w_2$，则 $w_1 + w_2 + \frac{w_3 - w_2 - w_1}{u_z}$ 至多为 $w_1 + w_2$。由于 $\varphi(Q)$ 的第三个宽度为 w_3，且其前两个宽度由 (1, 0, 0) 和 (0, 1, 0) 实现，因此相对于 (0, 0, 1)，其宽度不可能小于 w_3。这排除了 $u_z \geq 2$ 和 $w_3 > w_1 + w_2$ 的情形，因此，经过平移后，$\varphi(Q)$ 是所需盒子的一个子集。□

这表明，任何具有多重宽度 (w_1, w_2, w_3) 的三维格多面体都等价于 $[0, w_1] \times [0, w_2] \times [0, w]$ 的一个子集，其中

$$w \coloneqq \min\{w_1 + w_3 - 1, \max\{w_1 + w_2, w_3\}\}.$$

一般而言，这个界未必是紧的。

3. Four-point sets in the plane

本节的主要目标是对第一宽度为 1 的平面四点集进行分类。多重宽度为 (1, 1) 的四点集恰好是 {(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)} 以及{(0, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1)}。当 $w_2 > 1$ 多重宽度为 $(1, w_2)$ 时，四点集为{(0, 0), $(0, w_2)$, $(0, y_0)$, (1, 0)}，其中 $y_0 \in [0, \frac{w_2}{2}]$ 以及 {(0, 0), $(0, w_2)$, (1, 0), $(1, y_1)$}，其中 $y_1 \in [0, w_2]$ （例如，参见图 2）。这可以直接证明，但我们将在这里证明一个更一般的结果。我们将对平面中的所有四点集 S 进行分类，这些四点集的多重宽度为 (w_1, w_2)，其中 $w_2 > w_1$；如果宽度$_{u_1}(S) = w_1$，那么 S的所有点都包含在法向量为 u_1 的两个超平面 S所界定的区域内。这足以对平面中的宽度为 1 的四点集进行分类，同时也是使用该方法实际能够得到的最一般分类。之所以这样做，是因为它可能有助于今后扩展四面体分类。

首先，我们将 $\mathbb{Z}$ 中所有宽度为 w_1的四点集进行分类。

命题 3.1. 从三角形$Q_{w_1} \coloneqq \operatorname{conv}((0, 0), (0, w_1), (\frac{w_1}{2}, \frac{w_1}{2}))$中的格点集合到 $\mathbb{Z}$ 中宽度为 w_1的四点集等价类集合存在一个双射。该双射由映射 (x_1, x_2) 到 $\{0, x_1, x_2, w_1\}$ 给出。特别地，此类集合在等价意义下的数量为

$$\begin{cases} \frac{w_1^2}{4} + w_1 + 1 & \text{if } w_1 \text{ is even} \\ \frac{w_1^2}{4} + w_1 + \frac{3}{4} & \text{if } w_1 \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明. 映射 $(x_1, x_2) \mapsto \{0, x_1, x_2, w_1\}$ 是良定义的，它将 Q_{w_1}中的一个格点映射到一个宽度为 w_1的四点集。为证明满射性，注意到任意宽度为 w_1 的四点集的凸包都等价于 conv$(0, w_1)$。因此，我们可以假设 0 和 w_1 是该集合中的点，而 $x_1, x_2 \in [0, w_1]$ 是另外两个点。通过重新标记x_i，我们可以假设 $x_1 \le x_2$。反射将 $\{0, x_1, x_2, w_1\}$ 映射到 $\{0, w_1 - x_2, w_1 - x_1, w_1\}$，因此我们可以假设 $x_1 \le w_1 - x_2$。这表明 $(x_1, x_2) \in Q_{w_1}$。

为证明单射，设 (x_1, x_2) 和 (x_1', x_2') 是 Q_{w_1} 中的格点，满足 $\{0, x_1, x_2, w_1\}$ 与 $\{0, x_1', x_2', w_1\}$等价。 $\mathbb{Z}$中线段唯一的非平凡仿射自同构是关于其中点的反射，因此要么 $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$，要么 $(x_1, x_2) = (w_1 - x_2', w_1 - x_1')$。第一种情形下结论成立。第二种情形下，注意到 $x_1 = w_1 - x_2' \ge x_1'$ 和 $x_1' = w_1 - x_2 \ge x_1$，因此 $x_1 = x_1'$。同理， $x_2 = x_2'$，从而得证。

通过统计 Q_{w_1} 中格点所在的竖直直线上的点数即可进行计数。因此，若 w_1 为偶数，总点数为 $(w_1+1)+(w_1-1)+\cdots+1$；若 w_1 为奇数，则为 $(w_1+1)+(w_1-1)+\cdots+2$。化简后即得所给公式。□

现在我们转而研究 $\mathbb{Z}^2$ 中多重宽度为 (w_1, w_2) 的四点集。若一个多胞体的多重宽度为 $(w_1, \ldots, w_d)$，且它是 $w_1 \times \cdots \times w_d$ 盒子的子集，那么它必须在该盒子的每个面上都有一个顶点，否则其多重宽度就会更小。因此，作为 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 子集且多重宽度为 (w_1, w_2) 的四点集，其 x 坐标等价于上述已分类集合之一。我们将讨论限制在对应的 Q_{w_1} 点为 (0,0) 或 $(0, w_1)$ 的情形，因为这已足以分类 $\mathbb{Z}^2$ 中所有多重宽度为 $(1, w_2)$ 的四点集。我们还假设 $w_1 < w_2$，因为多重宽度为 (1, 1) 的四点集很容易识别；而对于 $w_1 > 1$，对多重宽度为 (w_1, w_1) 的四点集进行分类会给证明带来不必要的复杂性。

命题 3.2. 设 S 是平面中的一个四点集，其多重宽度为 (w_1, w_2)，其中$0 < w_1 < w_2$。存在一个对偶向量 u_1，使得宽度$_{u_1}(S) = w_1$，并且 $u_1 \cdot S$ 等价于$\{0, 0, 0, w_1\}$，当且仅当 S 等价于以下四个四点集中的恰好一个:

- $\{(0, 0), (0, w_2), (0, y_0), (w_1, y_1)\}$，其中 $0 \le y_0 < \frac{w_2}{2}$且 $0 \le y_1 < w_1$,
- $\{(0,0),(0, w_2),(0, \frac{w_2}{2}),(w_1, y_1)\}$，其中 $0 \le y_1 \le (w_2 - y_1$ 模 $w_1)$，且 w_2 为偶数。

证明。首先我们证明，所列四点集的多重宽度为 (w_1, w_2)。只需注意到 在这两种情况下，如果 $u = (u_x, u_y)$ 是与 $u_y \ne 0$ 对应的对偶向量，那么

$$\mathrm{width}_u(S) \ge |u \cdot (0, w_2) - u \cdot (0, 0)| = |u_y w_2| \ge w_2.$$

这些集合在 $u_1 = (1,0)$ 下的像为 $\{0, 0, 0, w_1\}$，由此证明了一个方向上的蕴含关系。

接下来，我们证明，所有具有多重宽度 (w_1, w_2) 且存在对偶向量 u_1使得 $u_1 \cdot S$的四点集 S，都等价于给出的两种情形之一。设S是这样一个集合，那么根据命题 2.3，我们可以假设它是 $[0, w_1] \times [0, w_2]$的子集。由于$w_1 < w_2$ 使 S 具有宽度 w_1 的方向在正负号意义下唯一，因此 $u_1 = \pm(1, 0)$。在 u_1下， S 中的点会被映射到（可能相差 -1 倍的）其 x坐标，因此，要使这些点映射到与 $\{0, 0, 0, w_1\}$ 等价的集合，唯一的可能就是 S中有三个点位于矩形的一条竖直边上

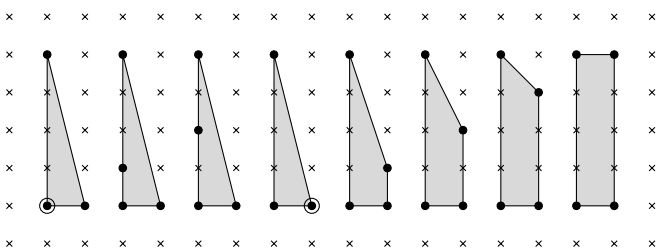


FIGURE 2. 在 $\mathbb{Z}^2$ 中具有多重宽度(1,4)的所有 4点集，按仿射等价- 性分类，以及它们的凸包。具有相同坐标的两个点用带圆圈的点表示。

而第四个点位于另一条竖直边上。因此，经过反射 $(x,y) \mapsto (w_1 - x, y)$ 后（如有必要），我们可以假设 S 包含三个 x 坐标为 0 的点，以及一个 x 坐标为 w_1 的点。此外，S 必须包含 $(0,0)$ 和 $(0,w_2)$；否则，对某个整数 k 作剪切变换 $(x,y) \mapsto (x, y-kx)$ 后，S 等价于一个更小矩形的子集，这与其宽度矛盾。因此，我们假设 $S = \{(0,0),(0,w_2),(0,y_0),(w_1,y_1)\}$。

通过反射 $(x,y) \mapsto (x, w_2 - y)$，我们可以假设 $0 \le y_0 \le \frac{w_2}{2}$。通过剪切变换 $(x,y) \mapsto (x, y-kx)$（其中 k 为某个整数），我们可以假设 $0 \le y_1 < w_1$。如果 $y_0 = \frac{w_2}{2}$ 和 $y_1 > (w_2 - y_1 \bmod w_1)$，那么我们可以通过先关于直线 $y = \frac{w_2}{2}$ 反射、再进行剪切变换，使 $x = w_1$ 上顶点的 y 坐标变小。更准确地说，选取 k 使得 $w_2 - y_1 - kx = (w_2 - y_1 \bmod w_1)$，则反射和剪切变换 $(x,y) \mapsto (x, w_2 - y - kx)$ 将 S 变为给定四点集中的一个。这证明了 S 等价于给定形式中的某一个集合。

最后，我们证明这两种情况下的四点集是唯一的。设

$$S = \{(0,0),(0,w_2),(0,y_0),(w_1,y_1)\} \sim \{(0,0),(0,w_2),(0,y_0'),(w_1,y_1')\} = S'$$

其中 S 和 S' 分别具有命题中的两种形式之一。我们将证明 S 和 S' 相等。我们可以将这些集合视为它们的凸包；它们是带有一个标记点的三角形。由于 $w_2 > w_1$，考察 $[0,w_1] \times [0,w_2]$ 中线段的格长（即它们所包含的格点数减 1），我们可以看到，从 $(0,0)$ 到 $(0,w_2)$ 的边是每个三角形中格长为 w_2 的唯一一条边。因此，将 S 映射到 S' 的仿射映射必须将这条边映回自身。这使问题归结为剪切变换 $(x,y) \mapsto (x, y-kx)$，以及先反射再进行剪切变换 $(x,y) \mapsto (w_2 - y - kx)$，其中 k 为整数。这些映射下 S 的像为

$$\{(0,0),(0,w_2),(0,y_0),(w_1,y_1 - kw_1)\}, \quad \text{and}$$
$$\{(0,0),(0,w_2),(0,w_2 - y_0),(w_1,w_2 - y_1 - kw_1)\}$$

由于 $0 \le y_0, y_0' \le \frac{w_2}{2}$ 这表明 $y_0 = y_0'$。这些像的第四点的 y 坐标必须等于 y_1'，因此，由于 $0 \le y_1' < w_1$，我们必须始终选择 k，使得这个 y 坐标模 w_1 化简。由于 $0 \le y_1 < w_1$，如果剪切变换将 S 映射到 S'，这意味着 $y_1 = y_1'$ 和 $S = S'$。如果反射后接剪切变换将 S 映射到 S'，那么 $y_0' = w_2 - y_0$，且由于 $y_0 = y_0'$，我们有 $y_0 = \frac{w_2}{2}$。这意味着 $y_1 \le (w_2 - y_1 \bmod w_1) = y_1'$，并根据交换 S 和 S' 的对称论证，我们有 $y_1' \le (w_2 - y_1' \bmod w_1) = y_1$，因此 $y_1 = y_1'$ 和 $S = S'$。□

命题 3.3. 设 S 是平面中的一个四点集，其多重宽度为 (w_1,w_2)，其中 $0 < w_1 < w_2$。存在一个对偶向量 u_1，使得宽度 $u_1(S) = w_1$，并且 $u_1 \cdot S$ 等价于 $\{0,0,w_1,w_1\}$，当且仅当 S 等价于以下四个点集中的恰好一个：

- $\{(0,0),(0,w_2),(w_1,y_1),(w_1,y_2)\}$，其中 $0 \le y_1 \le y_2 \le w_2$ 且 $y_1 \le (w_2 - y_2 \bmod w_1)$
- $\{(0,0),(0,y_0),(w_1,y_1),(w_1,w_2)\}$，其中 $\max\{w_2 - y_1, w_2 - (w_1 - y_1)\} \le y_0 < w_2$

证明。首先证明，所列四点集的多重宽度为 (w_1,w_2)。第一种情形可由命题 3.2 中的相同证明得到，因为它仍然包含 $(0,0)$ 和 $(0,w_2)$。对于第二种情形，只需证明，对于任意对偶向量 $u = (u_x,u_y)$，若 $u_y > 0$，则宽度 $u(S) \ge w_2$。在 S 下，u 的像为

$$u \cdot S = \{0, u_y y_0, u_x w_1 + u_y y_1, u_x w_1 + u_y w_2\}.$$

假设为了导出矛盾，S 相对于 u 的宽度小于 w_2。这意味着 $u \cdot S$ 中任意两个元素之差都必须小于 w_2，因此 $u_x w_1 + u_y w_2 < w_2$，这就意味着 $u_x < 0$。此外，$u_y y_0 - u_x w_1 - u_y y_1 < w_2$，我们将其重新排列可得

$$u_x > (u_y y_0 - w_2 - u_y y_1)/w_1. \tag{1}$$

根据对 y_0 和 y_1 的条件，我们有 $y_0 - y_1 \ge w_2 - w_1$ 因此 $u_y(y_0 - y_1) \ge w_2 - w_1$。将此与 (1) 结合可知 $u_x > -1$，这正是所需的矛盾。在 (1,0) 下，这些集合被映射为 $\{0,0,w_1,w_1\}$，这表明了一个方向上的蕴含。

令 S 为一个具有多重宽度(w_1, w_2)的四点集，并带有一个对偶向量 u_1，使得 $u_1 \cdot S$ 与 $\{0, 0, w_1, w_1\}$等价。我们将证明 S 与命题中列出的某个集合等价。根据命题 2.3，我们可以假设这是 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 的一个子集。由于$w_1 < w_2$ 第一宽度所实现的方向除符号外是唯一的，所以 $u_1 = \pm$(1,0)。这表明 S 包含两个 x-坐标为0的点，以及两个 x-坐标为 w_1的点。此外， S 必须包含 y-坐标为 0和 w_2 的点，否则它将具有更小的多重宽度。这意味着 (0, 0) 或 $(w_1, 0)$ 属于 S，并且 $(0, w_2)$ 或(w_1, w_2) 属于 S。在应用反射 $(x, y) \mapsto (w_1 - x, y)$后，我们可以假设 (0, 0) $\in S$。我们可以假设以下两种可能性之一：

A. $S = \{(0, 0), (0, w_2), (w_1, y_1), (w_1, y_2)\}$ 其中 $0 \le y_1 \le y_2 \le w_2$，B. $S = \{(0, 0), (0, y_0), (w_1, y_1), (w_1, w_2)\}$ 其中 $0 \le y_0 < w_2$ 且 $0 < y_1 \le w_2$

其中，额外的不等式来自对 y_i 重新标记，并去除各情形之间的重叠。

在 A 中，我们的目标是使直线 $x = w_1$ 上顶点的 y 坐标最小；这既可以通过绕 y 轴剪切变换实现，也可以先关于直线 $y = \frac{w_2}{2}$ 反射，再进行这样的剪切变换。通过剪切变换，我们可以假设 $0 \le y_1 < w_1$。考虑由 $(x, y) \mapsto (x, w_2 - y - kx)$ 给出的映射，其中整数 k 满足 $w_2 - y_2 - kw_1 = (w_2 - y_2 \text{ 模 } w_1)$。该映射是自反的，并将 S 映为 $\{(0, 0), (0, w_2), (w_1, y_1'), (w_1, y_2')\}$；后者也具有 A 的形式，且 $y_1' < w_1$。要么 $y_1 \le (w_2 - y_2 \text{ 模 } w_1) = y_1'$，要么 $y_1' \le (w_2 - y_2' \text{ 模 } w_1) = y_1$。无论哪种情况， S 都等价于命题中列出的某个集合。

在 B 中，我们可以通过应用映射 $(x, y) \mapsto (w_1 - x, w_2 - y)$ 得到同形式的集合，该映射分别将 y_0 和 y_1 替换为 $w_2 - y_1$ 和 $w_2 - y_0$。因此，我们可以假设 $y_0 \ge w_2 - y_1$。现在考虑像 $(-1, 1) \cdot S = \{0, y_0, y_1 - w_1, w_2 - w_1\}$。为了避免 S 关于 $(-1, 1)$ 的宽度小于 w_2，$(-1, 1) \cdot S$ 中某一对元素之差必须至少为 w_2。然而，逐一检查这些差值，只有 $y_0 - (w_2 - w_1)$ 和 $y_0 - (y_1 - w_1)$ 可能至少为 w_2。如果 $y_0 - (w_2 - w_1) \ge w_2$，那么肯定有 $y_0 - (y_1 - w_1) \ge w_2$，因此我们可以假设后者成立。因此， S 等价于命题中列出的某个集合。

现在我们证明，命题中列出的集合在等价性意义下彼此不同。这两种情况彼此不同，因为第一种情况的凸包具有一条格长度为 w_2 的格长度边，而第二种情况没有。设 S 和 S' 属于第一种形式，并假设

$$S = \{(0, 0), (0, w_2), (w_1, y_1), (w_1, y_2)\} \sim \{(0, 0), (0, w_2), (w_1, y_1'), (w_1, y_2')\} = S'.$$

这两者要么都等于 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 的顶点，要么它们的凸包各自恰好有一条格长为 w_2的边。如果它们相等，我们就完成了；否则，将 S映射到 S'的映射必须保持从(0,0)到$(0, w_2)$的线段不变。这将问题归结为剪切变换$(x, y) \mapsto (x, y - kx)$，以及先反射再进行剪切变换$(x, y) \mapsto (x, w_2 - y - kx)$，其中$k$为整数。由于 $0 \le y_1, y_1' < w_1$ 如果一个剪切变换将 S 映射到 S'，那么 $S = S'$。如果先反射再进行剪切变换将 S 映射到 S'，那么 $y_1' = (w_2 - y_2 \text{ 模 } w_1) \ge y_1$，对称地 $y_1 \ge y_1'$，因此 $y_1 = y_1'$。由于 S 和 S' 的凸包的体积必须相等，这表明 $y_2 = y_2'$ 和$S = S'$。

现在令 S 和 S' 为命题中列出的第二种形式，并假设

$$S = \{(0, 0), (0, y_0), (w_1, y_1), (w_1, w_2)\} \sim \{(0, 0), (0, y_0'), (w_1, y_1'), (w_1, w_2)\} = S'.$$

根据它们的多重宽度，我们知道 $\pm$(1, 0) 是唯一使它们具有宽度 w_1的对偶向量。因此，将 S 的凸包映射到 S' 的凸包的映射，必须将法向量为 (1, 0) 的边映射到法向量为 (1, 0) 的边。因此，只需考虑 S 和 S' 的凸包的竖直边长度。根据 S 和 S' 的条件，它们最左侧的竖直边至少与最右侧的竖直边一样长，因此 $y_0 = y_0'$、$y_1 = y_1'$ 和 $S = S'$。□

我们使用这些命题来对具有多重宽度 $(1, w_2)$ 的四点集进行分类。

推论3.4。设 S 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的四点集，其多重宽度为 $(1, w_2)$，那么如果 $w_2 > 1$ 要么S 等价于

- $\{(0,0), (0, w_2), (0, y_0), (1, 0)\}$ 与 $y_0 \in [0, \frac{w_2}{2}]$ 或
- $\{(0,0), (0, w_2), (1, 0), (1, y_1)\}$ 其中 $y_1 \in [0, w_2]$.

计算可能的整数 y_0 和 y_1 可知，这些整数的计数为

$$\begin{cases} \frac{3w_2}{2} + 2 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ \frac{3w_2}{2} + \frac{3}{2} & \text{if } w_2 \text{ odd.} \end{cases}$$

如果相反， $w_2 = 1$ 那么 S 等价于

- $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ 或
- $\{(0, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

4. Proof of Theorem 1.4

在本节中，我们证明定理 1.4，也就是说，我们证明将四面体映射到其仿射等价类的映射，定义了一个双射：从四面体集合 $\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$ 到多重宽度为 $(1, w_2, w_3)$ 的四面体在仿射等价意义下的集合$\mathcal{T}_{1,\ w_2,\ w_3}$。

我们首先给出一个关于满射性的预备引理。

引理 4.1。 设 T 是一个多重宽度为 $(1, w_2, w_3)$的格四面体。那么存在一个 T'类型为 *1*、*2*、*3*或 *4*的四面体，如定义 *1.3*所述，它与 T等价。

证明。 根据命题 2.4 我们可以假设 T是 $[0, 1] \times [0, w_2] \times [0, w_3]$的子集。 T 的顶点只能位于平面 $x = 0$ 和 $x = 1$ 中，因此，经过反射后，我们可以假设 x的顶点的坐标 T 要么是 $\{0, 0, 0, 1\}$，要么是 $\{0, 0, 1, 1\}$。我们将证明

- 如果 x坐标为 T， $\{0, 0, 0, 1\}$ 那么 T 等价于一个类型为 1 的四面体，
- 如果 x坐标为 T， $\{0, 0, 1, 1\}$ 那么 T 等价于一个类型为 2、3 或 4的四面体。

如果 x坐标为 $\{0, 0, 0, 1\}$，那么 T 是一个嵌入在平面 $x = 0$ 中的三角形与一个 x坐标为 1 的点的凸包。对于整数 k_1 和 k_2，剪切变换 $(x, y, z) \mapsto (x, y + k_1 x, z + k_2 x)$ 可以将 x坐标为 1 的顶点移动到任意一个 x坐标为 1 的格点，而不改变平面 $x = 0$中的三角形。因此，我们可以假设，在投影到最后两个坐标后， T 映射为该三角形。该三角形是一个 $w_2 \times w_3$ 矩形的子集，因此其多重宽度至多为 (w_2, w_3)。如果其多重宽度按字典序小于 (w_2, w_3)，那么就存在与 $u_1 = (1, 0, 0)$ 线性无关的对偶向量 u_2' 和 u_3'，使得 $(1, \text{宽度}_{u_2'}(T), \text{宽度}_{u_3'}(T)) <_{lex} (1, w_2, w_3)$，这就产生了矛盾。因此，该三角形的多重宽度为 (w_2, w_3)。根据 [Ham23a, Theorem 1.1]，我们可以假设该三角形位于 $\mathcal{S}_{w_2, w_3}$。然后，通过另一个同形式的剪切变换，我们可以将第四个顶点移至 $(1, 0, 0)$，从而证明 T 等价于一个形式为 1 的四面体。

如果 x 坐标为 $\{0, 0, 1, 1\}$，我们需要考虑将 T 的顶点投影到前两个坐标后得到的四点集。它的多重宽度必须为 $(1, w_2)$，否则 T 的多重宽度会更小。根据推论 3.4，该集合等价于集合 $\{(0, 0), (0, w_2), (1, 0), (1, y_1)\}$ 中的一个，其中 $y_1 \in [0, w_2]$ 为整数；通过对 T 作仿射映射，我们可以假设它们相等。接下来只需确定 T 各顶点的 z 坐标。这些坐标都是 $[0, w_3]$ 中的整数。它们中至少有一个必须等于 0，另一个 w_3；否则，相对于 $(0, 0, 1)$， T 的宽度小于 w_3，这与多重宽度矛盾。

将0 和 w_3 分配给两个顶点共有 12 种方式。完整列表请参见图 3 。通过在平面 $z = \frac{w_3}{2}$ 上的反射（如图 4所示），我们可以交换被分配0和 w_3的顶点。由此可见，(g)-(l) 与(a)-(f) 等价，因此我们不再考虑最后 6 种情况。

我们只剩下这些情况 (a)-(f)。先关于平面 $y = \frac{w_2}{2}$反射，再进行剪切变换 $(x, y, z) \mapsto (x, y - (w_2 - y_1)x, z)$，如图 4 所示，我们可以交换 z-坐标

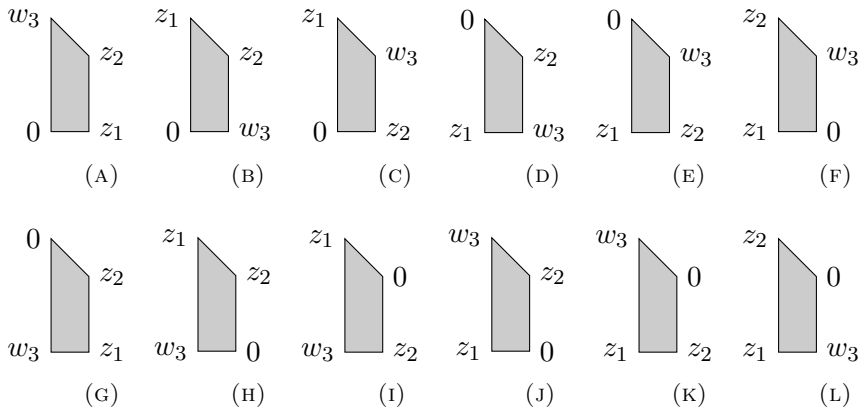


FIGURE 3. 四面体在投影到前两个坐标下的像凸包((0,0), (0, w_2), (1,0),(1, y_1))。标签表示每个顶点处的 z-坐标。数字 z_1 和 z_2 是范围为 $[0, w_3]$ 的整数，这十二种情况包含了具有多重宽度(1, w_2, w_3)且 x-坐标 $\{0, 0, 1, 1\}$ 在 $[0, 1] \times [0, w_2] \times [0, w_3]$中的所有四面体仿射等价类。

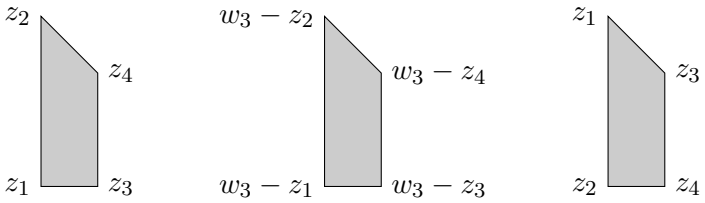


FIGURE 4. T =凸包((0,0, z_1),(0, w_2, z_2),(1,0, z_3),(1, y_1, z_4))的图像，以及两个在投影到前两个坐标后等价的四面体。标记表示每个顶点处的 z坐标。第二个四面体是将第一个四面体关于平面 $z = \frac{w_3}{2}$反射得到的。第三个是先将第一个四面体关于平面$y = \frac{w_2}{2}$反射，再进行剪切变换$(x, y, z) \mapsto (x, y - (w_2 - y_1)x, z)$得到的。

分配给下方两个顶点的与分配给上方两个顶点的进行比较。通过这种方式，我们看到 (d) 和 (e) 分别等价于 (c) 和 (b)，因此我们也可以忽略 (d) 和(e) 。

我们还剩下情形(a)、(b)、(c)和 (f)。在情形 (a) 中，沿着平面 $x = 0$进行剪切变换后，我们可以假设 $z_1 = w_3$ 或 $z_2 = w_3$。因此，(a) 已包含在情形 (b) 或(c) 中，我们可以忽略(a)。类似地，在情形 (f) 中，沿着平面 $x = 1$ 进行剪切变换后，我们可以假设 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$。因此，(f) 已包含在情形 (c) 或情形 (e) 中，因而也包含在 (b) 中。由此，我们忽略 (f)。

我们只剩下以下情形 (b)和 (c)。我们将通过证明情形 (c)的宽度不正确，除非它也等价于一种 (b) 型四面体，来说明我们也可以忽略情形 (c)。在情形 $y_1 = 0$ 中，$z_1 = 0$ 或者 $z_2 = w_3$，那么这些四面体将被归入情形 (b) （或(e)，因而(b)），所以我们假设这三个等式均不成立。情形 (c) 中的顶点在（$-z_2$, 0, 1）、（0, -1, 1）和（$w_3 - y_1$, 1, -1）下的像为

$$\{0, z_1, z_2, w_3 - z_2\}, \quad \{0, z_1 - w_2, z_2, w_3 - y_1\} \quad \text{and} \quad \{0, w_2 - z_1, w_3 - y_1 - z_2, 0\}$$

分别地。如果其中任何一个是 $[0, w_3$的子集），那么 T 的宽度将在某个与(1,0, 0)和(0, 1, 0)线性无关的方向上小于 w_3，这就是一个矛盾。为防止这种情况，以下三点必须成立。

- $z_1 = w_3$ or $z_2 = w_3$ or $z_2 = 0$

- $z_1 < w_2$ 或 $z_2 = w_3$ 或 $y_1 = 0$
- $(w_2 = w_3$ 和 $z_1 = 0)$ 或 $z_1 > w_2$ 或 $y_1 = z_2 = 0$ 或 $y_1 + z_2 > w_3$

排除我们已假设为不成立的选项后，可以看出这些条件不可能同时全部满足。因此，我们可以完全舍弃(c)，并假设当我们的四面体的x坐标为 $\{0, 0, 1, 1\}$ 时，它等价于

$$T = \text{conv}((0, 0, 0), (0, w_2, z_1), (1, 0, w_3), (1, y_1, z_2))$$

对于某些整数 z_1 和 z_2 在 $[0, w_3]$中。现在我们将根据以下情况把这个一般的四面体细分为类型 2、3 或 4 四面体，分别考虑 $y_1 = 0$ 和 $y_1 > 0$。

若 $y_1 = 0$，则 T 的顶点在 $(-z_2, 0, 1)$ 和 $(-z_2, -1, 1)$ 下的像是 ar e

$$\{0, z_1, w_3 - z_2, 0\}, \quad \text{and} \quad \{0, z_1 - w_2, w_3 - z_2, 0\}$$

分别地。这些都不可能是 $[0, w_3$的子集，因为这会与T的宽度矛盾。因此，$z_2 = 0$，否则我们就需要同时有 $z_1 = w_3$ 和 $z_1 < w_2$，但这不成立。通过剪切变换（x，y，z）$\mapsto$（x，y，$z - ky$），并且可能关于平面$y = \frac{w_2}{2}$反射，我们可以假设 $z_1 \leq$（$-z_1$ 模 w_2），因此 $0 \leq z_1 \leq \frac{w_2}{2}$。这表明 T 的形式为2。

如果改为考虑 $y_1 > 0$ T 的顶点在 $(-z_2, 0, 1)$、$(-1, 1, 1)$ 和 $(-1, -1, 1)$ 下的像，它们分别为

$$\{0, z_1, w_3 - z_2, 0\}, \quad \{0, w_2 + z_1, w_3 - 1, y_1 + z_2 - 1\}, \quad \text{and} \quad \{0, z_1 - w_2, w_3 - 1, z_2 - y_1 - 1\}$$

。同样，这些点都不可能是 $[0, w_3)$ 的子集，因此以下三点必须同时成立：

- $z_1 = w_3$ 或 $z_2 = 0$
- $w_2 + z_1 \geq w_3$ 或 $y_1 + z_2 - 1 \geq w_3$
- $z_1 < w_2$ 或 $z_2 < y_1 + 1$。

要满足这些条件，必须满足以下两种情况之一：$z_1 = w_3$ 且 $z_2 \leq y_1$ 或者 $z_2 = 0$ 且 $z_1 \geq w_3 - w_2$。当 $z_1 = w_3$ 且 $z_2 = y_1$ 时，该四面体与当 $z_2 = 0$ 且$z_1 = w_3 - w_2$ 时的四面体在剪切变换 $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - y$ 下等价但不相等。因此，我们还可以假设 $z_2 < y_1$，以避免重复。这证明 T 具有以下形式：3 或 4。□

下面说明，将四面体映射到其仿射等价类的映射给出了从$\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,\ w_2,\ w_3}$的满射。

命题 4.2. 设 T 为一个多重宽度为 $(1, w_2, w_3)$ 的格四面体。那么存在某个 $T' \in \mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$，其与 T 等价。

证明。根据引理 4.1 以及 $\mathcal{S}_{1,\ w_2,\ w_3}$的定义，如果 $1 < w_2 < w_3$，则结论成立。

现在我们考虑特殊情形。如果 $w_2 = w_3$ 且 T 是形如 3 的四面体，那么 T在映射 $(x,\ y,\ z) \mapsto ($ $1 - x,\ z_1 - z + x(w_2 - z_1)\ y$下的像为

$$\text{conv}((0, 0, 0), (0, w_2, y_1), (1, 0, w_2), (1, z_1, 0)).$$

如果 $y_1 > z_1$ 这也具有 3 的形式，但 y_1 和 z_1 的角色互换了。因此，为了去除重复情况，我们可以假设 $y_1 \leq z_1$。如果 $w_2 = w_3$ 且 T 是形如 4的四面体，那么 T在映射 $(x,\ y,\ z) \mapsto (x,\ w_2 - z,$ $w_2 - y)$ 下的像为

$$\text{conv}((0, 0, 0), (0, w_2, w_2), (1, 0, w_2), (1, w_2 - z_1, w_2 - y_1)).$$

这也具有以下形式：4 且该映射是自反的，因此除非 T 等于其像，否则我们需要删去其中一个四面体以去除重复项。我们的 T 仅当 $z_1 + y_1 = w_2$ 时才等于其像，因此我们可以假设 $z_1 \leq w_2 - y_1$。

当 $w_2 = 1$ 代入四面体 1-4 并化简后，可归结为以下几种情况：

- 凸包((0, 0,0),(0, 0, w_3), (0, 1, 0), (1, 0, 0))
- 凸包((0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, w_3))
- 凸包((0, 0,0),(0, 1, z_1),(1,0, w_3), (1, 1, 0)) 其中 $z_1 = w_3 - 1$ 或 $z_1 = w_3$。

在 $(x, y, z) \mapsto (1 - x - y, y, z)$ 下，这些映射中的第二个映射到第一个，因此剩下 $\mathcal{S}_{1,\ 1,\ w_3}$ 中出现的三个四面体。最后，当 $w_3 = 1$ 其中两个等价于嵌入平面 $x = 0$ 中的空三角形与点 (1, 0, 0) 的凸包时，问题便归结为 $\mathcal{S}_{1,\ 1,\ 1}$ 中的两种情况。□

下面证明，将四面体映射到其仿射等价类的映射给出了一个从$\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$的映射。

命题 4.3。设 $T \in \mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$，则 T 的多重宽度为 $(1, w_2, w_3)$。

证明。根据定义，$\mathcal{S}_1$、w_2、w_3 中的四面体始终属于形式 1–4 之一。因此，只需证明满足这些条件之一的四面体对于任意 $w_3 \geq w_2 \geq 1$ 都具有多重宽度 $(1, w_2, w_3)$。设 T 属于这些形式之一。格多胞体具有整数宽度，并且仅当其维数小于所在空间的维数时，才会在某个方向上具有零宽度。由于宽度$_{(1,0,0)}(T) = 1$，且 T 具有非零体积，其第一宽度为 1。此外，T 具有宽度 w_2 和 w_3，分别由对偶向量 (0, 1, 0) 和 (0, 0, 1) 实现。

剩下的两个宽度可能有两种失败方式。要么存在一个对偶向量 u，其与 (1, 0, 0) 线性无关，满足宽度$_u(T) < w_2$；要么存在一个对偶向量 u，其与 $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ 线性无关，满足宽度$_u(T) < w_3$。要证明这些情况不会发生，只需证明对于所有 $u = (u_x, u_y, 0)$，满足 $u_y \neq 0$ 宽度$_u(T) \geq w_2$，以及对于所有$u = (u_x, u_y, u_z)$，满足 $u_z \neq 0$ 宽度$_u(T) \geq w_3$。

令 π 为投影到前两个坐标上的投影，则

$$\text{width}_{(u_x,u_y,0)}(T) = \text{width}_{(u_x,u_y)}(\pi(T)).$$

然而，T 的顶点在 π 下的像所构成的四点集根据推论 3.4具有多重宽度 $(1, w_2)$。该集合的第一宽度由 (1,0) 实现，因此，对于所有$u = (u_x, u_y, 0)$且 $u_y \neq 0$，我们有宽度$_u(T) =$ 宽度$_{(u_x,u_y)}(\pi(T)) \geq w_2$。

现在反设存在对偶向量 $u = (u_x, u_y, u_z)$，其中 $u_z \neq 0$ is使得宽度$_u(T) < w_3$。不失一般性，我们可以假设 $u_z > 0$。那么根据命题 2.4的证明，形如 $(x, y, z) \mapsto (x, y, k_1x + k_2y + z)$ 的映射将 T映射到某个 $1 \times w_2 \times$ 宽度$_u(T)$盒子的子集中，其中 k_1 和 k_2为整数。T在该映射下的像是以下各项之一，具体取决于 T的形式。

(1) 凸包$(\{0\} \times \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{smallmatrix}\right) t$,(1, 0, k_1))其中 $t \in \mathcal{S}_{w_2,w_3}$(2)凸包((0, 0, 0),(0, w_2, $z_1 + k_2w_2$),(1, 0, k_1), (1,0, $w_3 + k_1$)) 其中 $0 \leq z_1 \leq \frac{w_2}{2}$(3) 凸包((0,0, 0), (0, w_2, $z_1 + k_2w_2$), (1,0, $w_3 + k_1$), (1, y_1, $k_1 + k_2y_1$))其中 $0 < y_1 \leq w_2$和 $w_3 - w_2 \leq z_1 \leq w_3$, (4) 凸包((0,0, 0), (0, w_2, $w_3+k_2w_2$), (1,0, w_3+k_1), (1, y_1, $z_1+k_1+k_2y_1$)) 其中 $0 < y_1 < w_2$和 $0 < z_1 < y_1$.

我们将证明，相对于 (0, 0, 1)，这些对象中任意一个的宽度都不可能小于 w_3。

1. 令 π 为到最后两个坐标的投影，则对于多胞体 P，我们有

$$\text{width}_{(0,0,1)}(P) = \text{width}_{(0,1)}(\pi(P)).$$

这意味着，凸包$(\{0\} \times \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{smallmatrix}\right) t$,(1, 0, k_1))，其中$t \in \mathcal{S}_{w_2,w_3}$相对于(0,0, 1)的宽度从来不会小于 w_3，这要归功于 t的宽度。

2. 形如 2 的四面体的宽度至少为 w_3，相对于 (0,0,1)，由于顶点 (1,0, k_1) 和 (1,0, $w_3 + k_1$)。

3. 在形如 3 的四面体中，如果相对于 (0,0,1) 的宽度小于 w_3，则每一对 z-坐标之差必须小于 w_3。特别地，我们需要有 $w_3 + k_1 - k_1 - k_2y_1 < w_3$ 以及 $z_1 + k_2w_2 < w_3$。其中第一个条件意味着$k_2 > 0$，结合第二个条件可得 $z_1 + w_2 < w_3$。然而，$z_1 \geq w_3 - w_2$这就产生了矛盾。

4. 同样，对于形如 4 我们需要 $w_3 + k_2 w_2 < w_3$ 以及 $w_3 + k_1 - z_1 - k_1 - k_2 y_1 < w_3$。其中第一条意味着 $k_2 < 0$，而第二条意味着$k_2 > -z_1/y_1 > -1$，这与矛盾相矛盾。□

为了证明命题 4.5 我们需要以下引理。

引理 4.4. 设 $1 < w_2 \leq w_3$ 和 T 是 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 中的一个四面体，其 x-坐标为 $\{0, 0, 1, 1\}$。假设，将 T 投影到前两个坐标上得到的是

$$\operatorname{conv}((0,0),(0,w_2),(1,0),(1,y_1)).$$

Then,forany 满格同态 $\pi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$, if $\pi(T)$ is 等价 to

$$\operatorname{conv}((0,0),(0,w_2),(1,0),(1,y_1'))$$

对于某个整数 $y_1' \in [0, w_2]$，然后 $y_1' \geq y_1$。换言之， y_1 是最小的。

证明。对于形如 2 的四面体，这是显然的，因为 $y_1 = 0$。

设 T 的形式为 3 或 4。设 $\pi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ 是一个满格同态，使得对于某个整数 $y_1' \in [0, w_2]$, $\pi(T)$ 等价于凸包 conv((0, 0), $(0, w_2)$, (1, 0), $(1, y_1')$)。设 $P = (p_{ij})$ 是定义 π 的 2×3 整矩阵。由命题 2.3，存在对偶向量 u_1 和 $u_2 \in (\mathbb{Z}^2)^*$，它们构成 $(\mathbb{Z}^2)^*$ 的一组基，并实现 $\pi(T)$ 的前两个宽度。这意味着，对于 $i = 1$ 和 2，$\operatorname{width}_{u_i}(\pi(T)) = \operatorname{width}_{u_i \circ \pi}(T) = w_i$。由于 P 宽度为 1 的方向唯一，因此在必要时改变 u_1 的符号后，有 $u_1 P =$ (1, 0, 0)。令 U 为行向量分别为 u_1 和 u_2 的矩阵，然后将 P 替换为 UP，并相应地改变 π。这样，我们可以假设 P 的第一行为 (1, 0, 0)。由于这一操作是 $\mathbb{Z}^2$ 中的幺模映射，因此不会改变我们之前对 π 的假设。

若 $w_2 < w_3$ 实现 P的第二宽度的向量必为 $(u_x, u_y, 0)$，则 $u_2 P$ 的最后一项为 0。这使我们可以假设 $p_{23} = 0$。现在我们得到图像

$$\pi(T) = \operatorname{conv}((0,0),(0,p_{22}w_2),(1,p_{21}),(1,p_{21}+p_{22}y_1)).$$

它有一条格长为 $|p_{22}w_2|$ 的边，因此 p_{22} 必须为 0 或 ± 1。若 $p_{22} = 0$，则 $\pi(T)$ 只是一条线段，这与我们对 π的假设矛盾。若 $p_{22} = \pm 1$，则 $y_1' = |p_{22}y_1 + p_{21} - p_{21}| = y_1$，因此 $y_1' \geq y_1$，如所求。

剩下需要考虑的情形是 $w_3 = w_2 > 1$。将 P替换为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -p_{21} & 1 \end{smallmatrix}\right) P$后，我们可以假设 $p_{21} = 0$。于是剩下以下两种情形，分别对应于 3 和 4

$$\pi(T) = \operatorname{conv}((0,0),(0,p_{22}w_2 + p_{23}z_1),(1,p_{23}w_2),(1,p_{22}y_1)) \quad \text{or}$$

$$\pi(T) = \operatorname{conv}((0,0),(0,p_{22}w_2 + p_{23}w_2),(1,p_{23}w_2),(1,p_{22}y_1 + p_{23}z_1)).$$

对偶向量 (1, 0) 是实现 $\pi(T)$ 和 conv((0, 0), $(0, w_2)$, (1, 0), $(1, y_1')$) 第一宽度的唯一对偶向量。这两个四边形各自至多有两个法向量为 (1,0) 的面，因此这些面必定等价。这意味着 $\pi(T)$ 的一条竖直边的长度必须为 w_2，而另一条的长度必须属于 $[0, w_2]$。因此，要完成证明，只需证明对于每一种选择，即令其中一条竖直边的长度为 w_2，另一条竖直边的长度都必须至少为 y_1。

首先考虑与情形 3 相关的四边形。若 $|p_{22}w_2 + p_{23}z_1| = w_2$，那么在可能改变 P 的第二条直线的符号后，我们可以假设 $p_{23} = w_2(1 - p_{22})/z_1$。于是 $|p_{23}w_2 - p_{22}y_1| = |w_2^2/z_1 - p_{22}(w_2^2/z_1 + y_1)|$。这是 p_{22} 中一个线性函数的模，因此，为了求出它取得的最小值，我们注意到当 $p_{22} = w_2^2/(w_2^2 + y_1 z_1) \in [0, 1]$ 时，该值为零。由于 p_{22} 是整数，因此当其为 $p_{22} = 0$ 或 1 时，长度最小，分别得到值 w_2^2/z_1 和 y_1。鉴于当 $w_2 = w_3$ 时，形式为 3 的四面体所满足的条件，这两个值都至少为 y_1。

另一方面，若 $|p_{23}w_2 - p_{22}y_1| = w_2$，那么如上所述，我们可以假设 $p_{22} = w_2(p_{23} - 1)/y_1$。于是 $|p_{22}w_2 + p_{23}z_1| = |-w_2^2/y_1 + p_{23}(w_2^2/y_1 + z_1)|$，当 $p_{23} = w_2^2/(w_2^2 + z_1 y_1) \in [0, 1]$ 时其值为零。由于 p_{23} 是整数，因此其最小值实际上在 w_2^2/z_1 或 z_1 处取得；根据我们的假设，这两者都至少为 y_1。

现在考虑与情形 4 对应的四边形。如果 $|p_{22}w_2 + p_{23}w_2| = w_2$，那么如上所述，我们可以假设 $p_{22} + p_{23} = 1$。于是 $|p_{23}(w_3 - z_1) - p_{22}y_1| = |p_{23}(w_2 - z_1 + y_1) - y_1|$，它

在 $p_{23} = y_1/(w_2 - z_1 + y_1) \in [0,1]$ 时为零。由于 p_{23} 是一个整数，它实际上在 $w_2 - z_1$ 或 y_1 处取最小值，而根据我们的假设，这两者都至少为 y_1。

另一方面，如果 $|p_{23}(w_2 - z_1) - p_{22}y_1| = w_2$，那么注意到 $|p_{22}w_2 + p_{23}w_2| = |p_{22} + p_{23}|w_2$。由于这些都是整数，因此至少为 y_1，除非 $p_{23} = -p_{22}$。然而，这样一来我们就会有 $w_2 = |p_{23}|(w_2 - z_1 + y_1)$。不能让 p_{22} 和 p_{23} 同时为零，因此$w_2 \geq w_2 - z_1 + y_1 > w_2$，这就产生了矛盾。□

下面证明将四面体映射到其仿射等价类的映射从$\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$是单射。

命题 4.5。$\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 中的四面体在仿射幺模映射下彼此不同

证明。$\mathcal{S}_{1,1,1}$ 中的两个四面体的标准化体积分别为 1 和 2。由于体积是仿射不变量，它们必定互不相同。若 $w_3 > 1$ $\mathcal{S}_{1,1,w_3}$ 中的三个四面体的标准化体积分别为 w_3、$2w_3 - 1$ 和 $2w_3$，那么它们也必定互不相同。

在其余情形中，我们的目标是证明：若 T 和 T' 是$\mathcal{S}_{1}$、w_2、w_3 中的等价四面体，则要么 $T = T'$，要么这会导致矛盾。我们有 $w_2 > 1$，因此除去符号差异，$u_1 = (1, 0, 0)$是唯一一个使每个四面体相对于 u_1的宽度均为 1 的向量。设 T 和 T' 是$\mathcal{S}_{1}$、w_2、w_3 中的等价四面体，那么在 u_1 作用下，T 和T' 的顶点像必定等价。换言之，$\mathcal{S}_{1}$、w_2、w_3 中两个等价四面体的 x-坐标集合也等价。因此，形式为 1 的四面体总是与其他四面体互不相同。此外，若 T 和 T' 是形式为 1 的等价四面体，那么它们各自都有一个以 u_1为法向量的唯一面，因此这些面也必定等价。这些面是$\mathcal{S}_{w_2}$、w_3 中的三角形，因此根据[Ham23a，定理 1.1]，这意味着 $T = T'$。

现在设 T和 T' 是 $\mathcal{S}_{1}$、w_2、w_3 中形式为 2、3 或 4的等价四面体。根据引理 4.4，将 T 和 T' 的顶点集投影到前两个坐标上，所得集合相同。也就是说，x-坐标和 y-坐标分别在 T 和 T' 中相同。这立即表明，形式为 2的四面体不同于形式为 3 和 4的四面体。接下来我们将证明以下四个事实：

A. 如果 T和 T'都属于形式 2，那么 $T = T'$B. 如果 T和 T'都属于形式 3，那么 $T = T'$C. 如果 T和 T'都属于形式 4，那么 $T = T'$D. 如果 T 属于形式 3，而 T' 属于形式 4，那么就会得到矛盾。

A. 除非 $w_2 = w_3$ 和 $z_1 = z_1' = 0$，T 或 T' 中格长为 w_3 的唯一一条边是从 (1, 0, 0) 到 (1, 0, w_3) 的边。因此，$T = T'$或将 T映射到T'的仿射映射会保持这条边不变。满足这一条件的 T 到 T' 的顶点映射方式只有四种。定义映射 θ：$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, 1)$，并令 π：$\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ 为向前三个坐标的投影。$\mathbb{Z}^3$ 中的仿射映射恰好是形如 $(x, y, z) \mapsto \pi(\theta(x, y, z)U)$ 的映射，其中 U是最后一列为 $(0, 0, 0, 1)^T$ 的幺模矩阵。令 M和 M' 分别为其行是 $\theta(T)$ 和 $\theta(T')$ 的顶点的矩阵。令 σM 表示根据 σ 对 M 的行进行置换后得到的矩阵。$M^{-1}M'$、$((12)M)^{-1}M'$、$((34)M)^{-1}M'$ 或 $((12)(34)M)^{-1}M'$ 中至少有一个是幺模矩阵。这些矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (z_1' - z_1)/w_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_2 & -1 & 0 & w_2 \\ -z_1' & -(z_1 + z_1')/w_2 & 1 & z_1' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w_3 & (z_1 + z_1')/w_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_2 & -1 & 0 & w_2 \\ w_3 - z_1' & (z_1 - z_1')/w_2 & -1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，$(z_1 - z_1')/w_2$ 或 $(z_1 + z_1')/w_2$ 是整数。无论哪种情况，$0 \leq z_1$、$z_1' \leq \frac{w_2}{2}$这一事实都迫使 $T = T'$。

B. T 和 T' 的标准化体积为 $w_2w_3 + z_1y_1 = w_2w_3 + z_1'y_1$，因此 $z_1 = z_1'$ 和 $T = T'$。

C. T 和 T' 的标准化体积为 $w_2w_3 - w_2z_1 + y_1w_3 = w_2w_3 - w_2z_1' + y_1w_3$，因此 $z_1 = z_1'$ 和 $T = T'$。

D. 设 P 和 P' 是由 $2T$ 和 $2T'$ 与平面 $x = 1$ 相交得到的平行四边形。它们是：

$$P = \operatorname{conv}((0, w_3), (y_1, 0), (w_2, w_3 + z_1), (w_2 + y_1, z_1))$$
$$P' = \operatorname{conv}((0, w_3), (y_1, z_1'), (w_2, 2w_3), (w_2 + y_1, w_3 + z_1'))$$

由于 T 与 T' 等价，因此 P 与 P' 也等价。我们将证明这会导致矛盾。根据平行四边形的对称性，$P - (0, w_3)$ 必须与 $P' - (0, w_3)$ 或 $P' - (y_1, z_1')$ 幺模等价。考虑三个矩阵 M、M_1 和 M_2，其行分别是与原点相邻的 $P - (0, w_3)$、$P' - (0, w_3)$ 和 $P' - (y_1, z_1')$ 的以下顶点：

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & -w_3 \\ w_2 & z_1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} y_1 & z_1' - w_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -y_1 & w_3 - z_1' \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

$M_1^{-1}M$、$((12)M_1)^{-1}M$、$M_2^{-1}M$ 和 $((12)M_2)^{-1}M$ 中必有一个是幺模矩阵。所需的逆矩阵为

$$M_1^{-1} = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} w_3 & w_3 - z_1' \\ -w_2 & y_1 \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} -w_3 & w_3 - z_1' \\ w_2 & y_1 \end{pmatrix}$$
$$((12)M_1)^{-1} = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} w_3 - z_1' & w_3 \\ y_1 & -w_2 \end{pmatrix}, \quad ((12)M_2)^{-1} = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} w_3 - z_1' & -w_3 \\ y_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

其中 $V = w_2w_3 - w_2z_1' + w_3y_1$。由此可知，以下两者之一成立：

$$U = M_1^{-1}M = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} w_2w_3 - w_2z_1' + w_3y_1 & -w_3^2 + w_3z_1 - z_1z_1' \\ 0 & w_2w_3 + z_1y_1 \end{pmatrix}$$

是幺模矩阵，或者以下某个量是整数：

$$\frac{w_2w_3 - y_1z_1' + w_3y_1}{V}, \quad \frac{z_1y_1 - w_2w_3}{V}, \quad \frac{-w_2w_3 + w_3y_1 - z_1'y_1}{V}.$$

它们分别是 $((12)M_1)^{-1}M$、$M_2^{-1}M$ 和 $((12)M_2)^{-1}M$ 的第 (1, 1)、(2, 2) 和 (1, 1) 个元素。由于 U 的对角线元素为正，因此若 U 是幺模矩阵，它们必须都为 1。由此可知

$$\begin{pmatrix} y_1 & z_1' - w_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1U = M = \begin{pmatrix} y_1 & -w_3 \\ w_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

对于某个整数 a。由此可得 $z_1' - w_3 - ay_1 = -w_3$ 和 $w_3 - aw_2 = z_1$。由于 $w_3 - w_2 \le z_1 \le w_3$，所以 $a = 0$ 或 1。因此，$z_1' = 0$ 或 y_1，这两种情况都与前提矛盾，所以 U 不可能是幺模矩阵。

注意，$-z_1'y_1 > -w_2z_1'$ 因此第一个分数至少为 2。由此可得 $2w_2z_1' \ge w_2w_3 + w_3y_1 + z_1'y_1$，这与 w_2w_3 矛盾，因为 w_3y_1 都大于 w_2z_1'，且 $z_1'y_1$ 非负。由于 $y_1 < w_2$ 且 $z_1 \le w_3$，第二个分数至多为 -1，由此可得 $w_2z_1' \ge z_1y_1 + w_3y_1$。这与 $w_3 \ge w_2$ 且 $y_1 > z_1'$ 矛盾。最后，由于 $y_1 < w_2$，第三个分数也至多为 -1，因此 $z_1'(w_2 + y_1) \ge 2w_3y_1$。这与 $z_1' < y_1$ 和 $w_2 + y_1 < 2w_2 \le 2w_3$ 矛盾。□

现在我们利用本节的结果来证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。命题 4.3 表明，将一个四面体映射到其等价类的映射，是从 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 到 $\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$ 的良定义映射。命题 4.2 和 4.5 表明该映射是双射。剩下的任务是求 $\mathcal{S}_{1,w_2,w_3}$ 的基数。当 $w_2 = 1$ 时，这显而易见。当 $w_2 > 1$ 时，我们将三角形分类与新的四面体结合起来，得到所需的计数。□

计数第二宽度为 w_2的格点三角形的序列的生成函数是加权射影空间中超曲面的希尔伯特级数，因此我们研究$\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}$ 的基数的生成函数，记为$|\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}|$。

推论 4.6。$|\mathcal{T}_{1,\ w_2,\ w_3}|$ 的生成函数为

$$\sum_{w_2=1}^{\infty}\sum_{w_3=w_2}^{\infty} t^{w_2}s^{w_3}|\mathcal{T}_{1,w_2,w_3}| = \frac{f(s,t)}{2(1-s^2)(1-ts)^3(1+ts)}$$

其中 $f(s,t)$ 是多项式

$$t^5s^7+5t^5s^6+4t^5s^5-2t^4s^7-5t^4s^6-9t^4s^5-4t^4s^4+4t^3s^6+13t^3s^5+7t^3s^4$$
$$-6t^3s^3-5t^2s^4-3t^2s^3+4t^2s^2-4ts^4-10ts^3-4ts^2+2ts+2s^3+14s^2+20s+8.$$

证明概要。 这可以利用定理 1.4来证明。首先注意，$\sum_{w_3=w_2}^{\infty} s^{w_3}|\mathcal{T}_{1,\ w_2,\ w_3}|$是

$$\frac{s(s+2)}{1-s}$$

当 $w_2=1$ 和

$$s^{w_2}\frac{w_2^2(s+1)^2+w_2(1-s^2)+(\frac{3}{2}s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2})+\frac{1}{2}(-1)^{w_2}(s^2+s+1)}{1-s^2}.$$

否则。结合这些结果，我们便得到所需结论。所有这些工作都可以利用关于多项式生成函数的知识手工完成，也可以借助计算机代数系统完成。□

若要改为统计第一宽度为1 且第三宽度为 w_3 的格点四面体，我们在上述生成函数中令 $t=1$，从而得到

$$\frac{-s^7+4s^6+8s^5-6s^4-3s^3+22s+8}{2(1-s)^4(1+s)^2}.$$

这两个生成函数都不具备三角形的那个生成函数的任何性质。然而，这并不妨碍一般情况下对具有给定多重宽度的格点四面体进行计数的函数具备这些性质。

5. Computational and conjectural results

上述方法可以改编为一种算法，用于对给定多重宽度的四点集和四面体进行分类。我们使用 Magma V2.27 实现所有算法。

算法 1 将多重宽度为（w_1、 w_2）的四点集分类。它获取宽度为 w_1 直线上的四点集列表，并以所有可能的方式为每个集合中的每个点分配一个范围为 $[0,w_2]$ 的 y-坐标。平面中的结果集合包括所有多重宽度为（w_1、 w_2）的四点集。

我们排除所有宽度不正确的对象。令 P 为此类集合的凸包，然后我们使用多胞体 $\mathcal{W}_P$ 检查其多重宽度。当且仅当 conv($(w-1)\mathcal{W}_P\cap\mathbb{Z}^d$) 的维数小于 i 且 conv($w\mathcal{W}_P\cap\mathbb{Z}^d$) 的维数至少为 i时， P 的 i阶宽度为 w。这使我们能够检查一个多胞体的多重宽度是否等于 (w_1, w_2)，而不必实际计算其多重宽度。

我们还使用仿射幺模标准形来舍弃重复的集合。Kreuzer 和 Skarke 在其 Palp 软件 [KS04]中为格多胞体引入了一种幺模标准形。这可以通过依次将多胞体的每个顶点平移到原点，并在这些可能性中找出最小的幺模标准形，从而扩展为仿射标准形。如果四点集的凸包是四边形，我们可以直接使用此标准形。如果凸包是三角形，我们先求出该三角形的标准形，然后考虑第四个点在此标准形中可能被映射到的位置。我们选择其中最小的点，并将三角形的顶点与该点组成的集合称为四点集的标准形，记为 NF(S)。注意，我们保留每个

算法 1：将 $\mathbb{Z}^2$ 中多重宽度为 (w_1, w_2) 的四点集分类。

数据：Q_w 中所有格点组成的集合 $\mathcal{P}$ $_1$ = 凸包((0, 0), (0, w_1), ($\frac{w_1}{2}$, $\frac{w_1}{2}$).
结果：包含平面中所有多重宽度为 $\mathcal{A}$ 的四点集的集合
(w_1, w_2) 表示为 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 的一个子集。
$\mathcal{A} \longleftarrow \emptyset$
标准形式 $\longleftarrow \emptyset$
对于 $(x_1, x_2) \in \mathcal{P}$ 执行
  对于 $h_1, h_2, h_3, h_4 \in [0, w_2] \cap \mathbb{Z}$ 使得 $h_i = 0$ 并且 $h_j = w_2$ 对于某个 $i < j$ 执行
    $S \longleftarrow \{(0, h_1), (x_2, h_2), (x_3, h_3), (w_1, h_4)\}$
    如果 mwidth(S) $= (w_1, w_2)$ 且 NF(S) $\notin$ 标准形式 则
      $\mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{A} \cup \{S\}$
      标准形式 $\longleftarrow$标准形式 $\cup$ {NF(S)}

集合以及集合本身，因为对于四面体分类，我们需要将四点集写成 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 的子集。

运行算法 1 在宽度较小时会得到表 3。我们利用这些数据来估计一个函数，该函数统计平面中宽度为（w_1， w_2）的四点集数量。为了决定需要计算多少数据，我们使用以下命题。

命题5.1. 平面中多重宽度为（w_1, w_2）的四点集至多有（$\frac{w_1^2}{4} + w_1 + c$）（$6w_2^2 + 1$）个，其中 $c = 1$ 在 w_1 为偶数时成立，$c = \frac{3}{4}$ 在 w_1 为奇数时成立。

证明。 由命题 3.1 可知，

$$\begin{cases} \frac{w_1^2}{4} + w_1 + 1 & \text{if } w_1 \text{ even} \\ \frac{w_1^2}{4} + w_1 + \frac{3}{4} & \text{if } w_1 \text{ odd} \end{cases}$$

宽度为 w_1的直线上的四点集。设$(y_1, \ldots, y_4) \in [0, w_2]^4$为一个格点，表示我们赋予每个点的 y 坐标。我们知道，存在指标 i_0 和 i_1，使得 $y_{i_0} = 0$ 且 $y_{i_1} = w_2$。通过反射，不妨假设 $i_0 < i_1$。我们还假设这些值尽可能小。通过分别计算六种情形中的可能性，我们证明，在直线上的一个四点集中，至多有 $6w_2^2 + 1$ 种赋予 y坐标的方式。□

	w_2											
w_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20
2	0	13	31	42	49	60	67	78	85	96	103	114
3	0	0	39	101	123	148	170	195	217	242	264	289
4	0	0	0	114	282	342	394	454	506	566	618	678
5	0	0	0	0	254	624	727	835	938	1046	1149	1257
6	0	0	0	0	0	520	1239	1428	1605	1794	1971	2160
7	0	0	0	0	0	0	937	2206	2490	2781	3065	3356
8	0	0	0	0	0	0	0	1595	3682	4120	4542	4980
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2527	5775	6380	6994
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3851	8687	9534
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5610	12555
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7949

TABLE 3. 具有多重宽度 (w_1, w_2) 的四点集按仿射等价分类的数量。

准多项式是指其系数为具有整数周期的周期函数的多项式。根据定理 1.4 和 [Ham23a, Theorem 1.2]，用于计数格点三角形和宽度1晶格四面体的函数是分段准多项式，其系数的周期为2，因此我们可以预期，用于计数平面四点集的函数也具有类似形式。根据命题 5.1，如果存在一个准多项式，用于计数多重宽度为(w_1, w_2)的四点集，我们预期它关于 w_2至多是二次的。由于对称性增强，我们预期 $w_1 = w_2$ 的情形会有所不同。我们还预期 w_2 为奇数和偶数时的情形不同，因此分别考虑。将二次多项式拟合到$(w_1, w_1+1) \ldots, (w_1, w_1+5)$以及$(w_1, w_1+2) \ldots, (w_1, w_1+6)$的结果后，我们得到以下猜想，它与表3中的条目一致。

猜想 5.2. 多重宽度为 (w_1, w_2) 的四点集的数量为 $w_1 < w_2$。

$$\begin{cases} 9w_2 + 6 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ 9w_2 + 4 & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 2$,

$$\begin{cases} \frac{47}{2}w_2 + 7 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ \frac{47}{2}w_2 + \frac{11}{2} & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 3$,

$$\begin{cases} 56w_2 + 6 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ 56w_2 + 2 & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 4$,

$$\begin{cases} \frac{211}{2}w_2 - 9 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ \frac{211}{2}w_2 - \frac{23}{2} & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 5$

$$\begin{cases} 183w_2 - 36 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ 183w_2 - 42 & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 6$

$$\begin{cases} \frac{575}{2}w_2 - 94 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ \frac{575}{2}w_2 - \frac{195}{2} & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 7$ 且

$$\begin{cases} 430w_2 - 180 & \text{if } w_2 \text{ even} \\ 430w_2 - 188 & \text{if } w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

当 $w_1 = 8$。

人们很容易想在 w_1 中拟合三次多项式，以匹配这些多项式的系数，从而得到一个准多项式来计数四点集，只要 $w_1 < w_2$。然而，结果是

$$\begin{cases} (\frac{5}{6}w_1^3 + \frac{1}{6}w_1 + 2)w_2 - \frac{5}{4}w_1^3 + \frac{39}{4}w_1^2 - \frac{47}{2}w_1 + 24 & \text{if } w_1, w_2 \text{ even} \\ (\frac{5}{6}w_1^3 + \frac{1}{6}w_1 + 2)w_2 - \frac{5}{4}w_1^3 + \frac{39}{4}w_1^2 - \frac{49}{2}w_1 + 24 & \text{if } w_1 \text{ even and } w_2 \text{ odd} \\ (\frac{5}{6}w_1^3 + \frac{1}{6}w_1 + \frac{1}{2})w_2 - w_1^3 + \frac{51}{8}w_1^2 - 10w_1 + \frac{53}{8} & \text{if } w_1 \text{ odd and } w_2 \text{ even} \\ (\frac{5}{6}w_1^3 + \frac{1}{6}w_1 + \frac{1}{2})w_2 - w_1^3 + \frac{51}{8}w_1^2 - \frac{21}{2}w_1 + \frac{53}{8} & \text{if } w_1, w_2 \text{ odd} \end{cases}$$

这与表 3 每当 $w_1 \geq 9$。这表明，要么不存在这样的拟多项式，要么对于 w_1 的较小取值，我们存在特殊情形，因此无法从这些数据中预测它。对一个序列取连续差分有助于确定它何时由拟多项式给出，因为高阶项会相互抵消，从而使模式更加明显。考察计数多重宽度（w_1, $w_1 + 1$）四点集的序列及其连续差分（以及这些差分的连续差分，等等），看来如果这样的拟多项式存在，我们将需要显著更多的数据点才能对其进行估计。因此，我们不尝试对足够多的四点集进行分类，以提出这样的猜想。

使用四点集的分类后，我们接着对四面体进行分类。此过程采用了与四点集情况相似的算法（见算法 2），但有两个主要区别。我们不再能假设所有需要分类的四面体都包含在 $w_1 \times w_2 \times w_3$ 盒子中，因此必须允许为每个点赋予更多 z坐标。此外，由于我们不会将此分类扩展到更高维度，只需存储每个四面体的标准形即可进行计数。

算法 2：按多重宽度（w_1、w_2、w_3）对四面体进行分类。

数据：集合 $\mathcal{A}$，包含平面中多重宽度为（w_1、w_2）的所有四点集写作 $[0, w_1] \times [0, w_2]$ 的子集。
结果：集合 $\mathcal{T}$，包含所有多重宽度为（w_1、w_2、w_3）的四面体。
$\mathcal{T} \longleftarrow \emptyset$
对于 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in \mathcal{A}$，执行
  对于 $h_1, h_2, h_3, h_4 \in [0,$最大值$\{w_1 + w_2, w_3\}] \cap \mathbb{Z}$ 使得 $h_i = 0$ 且 $h_j \geq w_3$ 对于一些 $i < j$ do
    $T \longleftarrow$ 凸包$(v_i \times \{h_i\} : i = 1, 2, 3, 4)$
    若 mwidth$(T) = (w_1, w_2, w_3)$ 则
      $\mathcal{T} \longleftarrow \mathcal{T} \cup \{\text{NF}(T)\}$

根据定理 1.4，我们可以期望多重宽度为 $(2, w_2, w_3)$ 的四面体由关于 w_2 的某些二次函数计数。由于任意三个点都可以拟合一个二次函数，为了作出合理的猜想，我们希望在 $|\mathcal{T}_{2、w_2、w_3}|$ 的每个子序列中至少有 4 个点。纳入 $w_2 = 2$ 的情形后，得到的多项式次数会更高，因此我们需要对 $w_2 = 3$ 至 10 的多重宽度至少为 $(2, w_2, w_2)$、$(2, w_2, w_2+1)$ 和 $(2, w_2, w_2+2)$ 的四面体进行分类，以获得足够的数据点。宽度为 2、第二宽度至多为 10、第三宽度至多为 12 的格四面体分类见数据库 [Ham23b]，其计数结果列于表 2。对表 2 中所示的序列拟合多项式，得到如下结果。

猜想 5.3。$\mathcal{T}_{2,\ w_2,\ w_3}$ 的基数如下：

- 当 $w_3 > w_2 > 2$ $\mathcal{T}_2$的基数为，$_{w_2,\ w_3}$ 为 $-1\ 4($
$81w_2^2 - 1\ 8w_2 + 76)$时，如果 w_2 且 w_3 为偶数 $-1\ 4($
$81w_2^2 - 1\ 8w_2 + 56)$时，如果 w_2 为偶数且 w_3 为奇数 $-1\ 4($
$81w_2^2 - 1\ 8w_2 + 37)$时，如果 w_2 为奇数且 w_3 为偶数 $-1\ 4($
$81w_2^2 - 1\ 8w_2 + 25)$时，如果 w_2 且 w_3 为奇数
- 当 $w_2 > 2$ $\mathcal{T}_2$的基数，$_{w_2,\ w_2}$ 为 $-1\ 8($
$81w_2^2 - 2\ 2w_2 + 80)$，如果 w_2 为偶数 $-1\ 8($
$81w_2^2 - 2\ 0w_2 + 27)$，如果 w_2 为奇数
- 当 $w_3 > 2$ $\mathcal{T}_2$ 的基数，$_{2,\ w_3}$ 为偶数时是 -47，为奇数时是 -45 w_3 w_3
- 以及 $\mathcal{T}_2$ 的基数，$_{2,\ 2}$ 为 17。

更一般地，我们还可以猜测，以下规律将继续成立 .

猜想5.4. 存在一个包含4 个分量的分段拟多项式，用于计数多重宽度为 (w_1, w_2, w_3)的格点四面体。 $w_3 \geq w_2 \geq w_1 > 0$中每一种等式组合都对应一个分量。在 $w_3 > w_2 > w_1 > 0$ 的情况下，首项系数是 $w_3 = w_2 > w_1 > 0$情况下首项系数的两倍。对于固定的 w_1 和 w_2，$|\mathcal{T}_{w_1, w_2, w_3}|$ 最多有三个取值，这取决于 w_3 是奇数、偶数，还是等于 w_2。

References

[AKN20] Gennadiy Averkov, Jan Kr¨umpelmann, and Benjamin Nill. 具有固定正数个内部格点的格单形：近乎最优的体积界。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 20201338713885, 2020101093130():–. https://doi.org/./imrn/rny.

[AWW11] Gennadiy Averkov、Christian Wagner 和 Robert Weismantel。极大无格点多面体：有限性及三维情形的显式描述。 *Math. Oper. Res.*, 36(4):721–742, 2011. https://doi.org/10.1287/moor.1110.0510. [Ham23a] Girtrude Hamm。按两个最小宽度对格点三角形进行分类。https://arxiv.org/abs/2304.03007, 2023. [Ham23b] Girtrude Hamm。多重宽度较小的宽度为 2 的四面体，2023。*Zenodo*, https://doi.org/10.5281/zenodo.7802562. [IVnS21] ´Oscar Iglesias-Vali˜no 和 Francisco Santos。空格点格单形的完整分类。*Rev. Mat. Iberoam.*, 37(6):2399–2432, 2021. https://doi.org/10.1016/j.endm.2018.06.027. [Kas06] Alexander Kasprzyk。具有终端奇点的环面 Fano 三维簇。 *Tohoku Math. J.*, ( ): – . https://doi.org/ . /tmj/ . [KL88] Ravi Kannan 和 L

´ ´ ´

Ann. of aszlo *Math. (2)* 128 3 577 602, 1988 Lovasz。覆盖极小值与无格点凸体。, ( ): – . [KS04] Maximilian Kreuzer 和 Harald Skarke。PALP：用于分析格点多胞体并应用于环面几何的软件包。 *Comput. Phys. Comm.*, 157(1):87–106, 2004. https://doi.org/10.1016/S0010-4655(03)00491-0. [Whi64] G. K. White。格点四面体。 *Canadian J. Math.*, 16:389–396, 1964.

School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, UK
Email address: girtrude.hamm@nottingham.ac.uk