arXiv:2304.03629v1 [physics.flu-dyn] 7 Apr 2023

T弯月面对皂膜流动中涡街的影响

Ildoo Kim*

韩国忠州建国大学机电一体化系 *27478*（日期：2023年4月10日）

摘要

在皂膜实验中，必须插入外部物体才能产生涡量。然而，这一操作会导致物体附近出现局部厚度变化，也就是弯月面。由于弯月面形成可能会改变物体附近的流动，因此准确表征弯月面对于正确解读数据至关重要。在本研究中，我们插入由铝、钛和玻璃制成的圆柱锥体，并使用长工作距离显微镜测量弯月面的大小。对于所有受测材料，我们发现弯月面的大小都小于 0.2 毫米，远小于毛细长度。此外，通过比较不同材料物体后方涡街的形成情况，我们得出结论：弯月面相当于为物体本身的尺寸增加了一段长度。如果物体尺寸与弯月面大小相近，这种附加长度效应就不可忽视。

* ildoo.kim.phys@gmail.com

I. 引言

流动肥皂膜通道 [1–3] 是研究二维流动中涡旋形成、自组织和演化的一种颇具吸引力的实验工具，因为它易于操作、便于观察且成本低廉。凭借这些优势，许多研究论文利用肥皂膜通道探究了各种现象，包括尾流结构 [5–7], 流固耦合 [8, 9], 和湍流 [10–14]。

肥皂膜实验通常需要将外部物体插入肥皂膜中。在许多情况下，我们使用肥皂膜通道，因为我们最终关注的是二维流动中涡旋之间的相互作用，例如湍流 [10, 15, 16]。因此，涡量是大多数皂膜实验中的主要关键词之一，而插入物体则是产生涡量的一种手段。例如，将圆柱锥插入肥皂膜中，以研究二维层流涡街[5],；将梳状物插入其中，以研究二维湍流 [10]。

插入外部物体时，弯月面的形成会导致膜的局部厚度发生变化。然而，在许多研究中，人们往往不加说明地默认插入的物体不会改变流动，只会产生涡量。这一假设通常被视为理所当然，使肥皂膜实验对相关领域的研究者而言具有普遍意义。弯月面的存在可能通过两种方式影响下游流动。第一种情况下，弯月面的厚度变化可能引发马兰戈尼应力。弯月面处的肥皂膜较厚；根据肥皂浓度和平均膜厚，弯月面处的表面张力可能低于周围区域 [17]。此时，马兰戈尼应力可能朝向物体作用，从而改变流动模式。第二种情况下，弯月面可能改变局部黏度。根据先前的研究 [18, 19], ，膜的黏度由表面黏度 ν_s 和体黏度 ν_b构成，即 $\nu = \nu_b + 2\nu_s/\delta$，其中$\delta$ 为膜厚。因此，雷诺数 Re 的测量值 $= UD/\nu$可能存在估算误差，其中 U 和 D 分别为系统的特征速度和特征长度尺度，而 ν 为运动黏度。

这两种情形对插入物体不会改变流动这一假设提出了挑战，但文献只能提供部分答案。2010年，Tran等。 使用激光多普勒测速测量了肥皂膜通道边界金属丝附近的速度，距离近至 $50\ \mu$m，但未观察到偏离恒定速度梯度 [20] 的现象。

他们的观测结果与罗格斯大学此前通过较低分辨率测量结果得出的结论一致等人；他们没有观测到边界金属丝附近速度梯度存在异常 [21]。在静态肥皂膜中，其厚度明显小于流动的肥皂膜，研究人员对微米级纤维周围弯月面的形成进行了研究 [22] ，研究背景是接触线弛豫[23]。这些研究间接表明，弯月面的局部增厚可能不会在量化皂膜流动中的流动结构时发挥重要作用。然而，对于流动肥皂膜装置中弯月面的直接观测及其影响的定量研究尚未开展。

在本研究中，我们利用两个关键实验特点直接观察弯月面的形成，并研究其对下游流动的影响。首先，我们使用长工作距离显微镜监测插入肥皂膜中的小物体。该装置使我们能够精确测量物体及其周围弯月面的尺寸。其次，我们使用由不同材料制成的物体：铝、钛和玻璃。这些材料对肥皂水具有不同的润湿特性，因此我们预计弯月面的尺寸取决于所用材料的类型。我们推测，如果弯月面不影响下游流动，那么由不同材料产生的涡街，其空间和时间排列的测量结果应无法区分。具体而言，空间排列通过波长量化，即纵向上两个涡旋之间的距离。已知波长与 D成正比，即$\lambda = \alpha D + \lambda_0$，其中 α 和 λ_0 是参数 [24]。时间排列通过斯特劳哈尔数 $\mathrm{St} = fD/U$量化，其中 f是脱落频率。如果弯月面对下游流动产生不可忽略的影响，那么这种影响应体现在 λ和 St 的测量结果中。

我们从实验中了解到，弯月面的大小取决于物体 D 的大小，并且会影响 λ 和 St。当D 较小时（$D < 1$ 毫米），弯月面的大小与 D 成正比，但受上限约 0.2 毫米的限制。因此，只有当 D 较小时（$\simeq 0.2$ 毫米），弯月面的影响才显著，否则可以忽略。

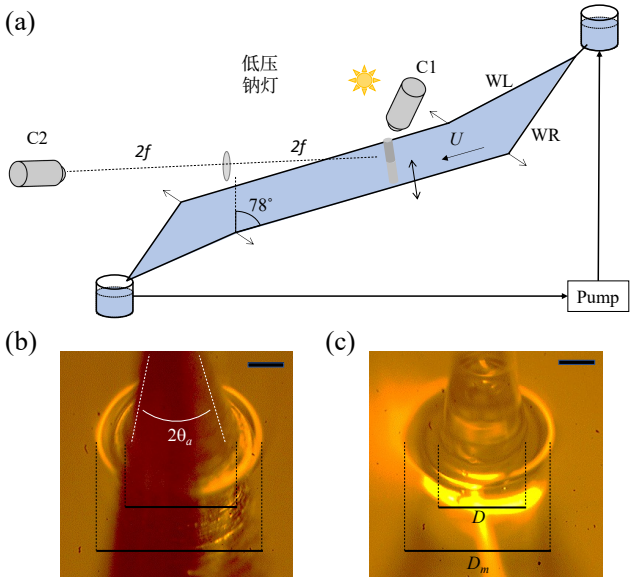

图1。（a）实验装置。我们使用倾斜肥皂膜通道来降低流速。高速摄像机（C1）通过干涉测量监测肥皂膜上的流动结构，远距离显微镜（C2）监测物体的插入深度。（b）钛圆锥和（c）玻璃圆锥的典型显微图像。如图所示，图中物体的尺寸 D 以及包括弯月面在内的尺寸 D_m 清晰可辨。（b）和（c）中的比例尺为200 μ米。

II. 实验装置

我们的实验使用倾斜肥皂膜通道进行，该通道如图所示 1（a）所示，并在先前的出版物中进行了讨论 [5, 25]。简而言之，该通道由两根平行的尼龙丝WL 和WR 组成。当肥皂膜通道中建立起流动时，这两根丝长约 2 m，间隔 50 mm。通道倾斜了 78°，以将重力的影响降低 80%。这种倾斜使我们能够获得相对较慢的平均流速 $U \sim 0.65\mathrm{m/s}$。在此流速下，肥皂膜的厚度约为$3\,\mu\mathrm{m}$，由于类马赫数约为 0.17，因此具有较弱的可压缩性。[26]

实验中使用的肥皂溶液是将商用洗碗皂（Dawnnon-ultra，Proctor & Gamble）的2%溶液加入蒸馏水配制而成的（表面活性剂的总体浓度为 $c_0 = 0.02$）。使用毛细管黏度计测量时，该溶液的运动黏度为 $1.3 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$。

编号	材料	尖端尺寸	θ_a	θ_c	$\theta = \theta_a + \theta_c$
1	Al	50 μm	13°	58±2°	71°
2	Ti	30 μ米	13°	51±3°	64°
3	玻璃	10 μ米	5° 至 10°	≈0°	≃ 5°

表I. 实验中使用的外部物体列表及其润湿特性：顶角 θ_a、接触角 θ_c和 $\theta \equiv \theta_a + \theta_c$。接触角通过使用 0.05% 肥皂溶液的悬滴法测量。

我们将一个垂直于肥皂膜的外部物体插入其中，从而在下游产生涡街。该外部物体具有圆形横截面，并经过锥形处理，使得雷诺数Re $= UD/\nu$（其中 D is为物体的直径）可以通过改变插入深度进行调节。测试段位于通道顶部下方约 1 米处，并且在该位置的观测范围（数厘米）内，流速变化不大。

我们制作了三种不同材料的圆锥，如表 I所示。首先，我们使用铝圆锥。通过精细的机械加工工艺将这些圆锥加工成锥形，使其尖端尺寸达到50 μm；由于铝的材料性质，进一步磨尖尖端极其困难。其次，我们使用钛圆锥。钛也难以车削，因为它比铝更硬、更脆。幸运的是，我们成功制作出一个尖端尺寸为 30 μm的钛圆锥。这两种金属圆锥的顶角 $2\theta_a$ 约为 26° [，见图 1(a)]，，因此薄膜法线与圆锥侧边之间的夹角保持不变，等于顶角的一半 θ_a。第三，我们使用玻璃圆锥。玻璃圆锥由拉玻璃器制成，尖端尺寸可达到 10 μm。玻璃圆锥的顶角随插入深度而变化；在圆锥底部附近，顶角 θ_a 趋近于 10°，但在圆锥尖端附近会减小至约 5°。

尽管玻璃具有亲水性，且接触角接近于零，但金属的润湿特性是我们在实验室内采用悬滴法测量的。我们测得纯水与铝之间的接触角为 87±1°，纯水与钛之间的接触角为 93±1°。我们注意到，这些数值与文献中的数值 [27], 略有不同；文献中报告，带氧化层的铝与纯水之间的接触角为 10° 至 60°，带氧化层的钛与纯水之间的接触角为 50°。

肥皂水与金属之间的接触角小于纯水与金属之间的接触角，因为表面活性剂能够改善润湿性。然而，由于接触角取决于流体的面积体积比，因此很难明确给出接触角。换言之，当液滴和肥皂膜由相同体积的肥皂水制成时，由于肥皂膜的表面积更大，其表面活性剂的表面浓度会更低，从而具有更大的表面张力。因此，为了最佳估算接触角，我们需要匹配表面浓度，而不是表面活性剂的总体浓度。为匹配浓度，我们采用朗缪尔吸附等温线 [17]

$$\Gamma = \frac{\Gamma^{\infty}}{1 + c^*/c}, \tag{1}$$

其中 Γ 是表面活性剂的表面浓度， c 是表面活性剂的体相浓度。结合物质守恒

$$c_0 = c + r_{av}\Gamma, \tag{2}$$

其中， r_{av} 是面积/体积比，用于推导 Γ 与 c_0 之间截至 r_{av}的关系。我们采用文献中的数值： $\Gamma_\infty = 0.76\% \cdot \mu\mathrm{m}$；对于 [17], 薄膜为 $c^* = 0.1\%$，对于静滴为$c^* = 0.01\%$（内部测量值），并得出结论：由 $c_0 = 0.02$制成的 $c_0 = 0.0005$ （0.05%）静滴，其润湿特性与该肥皂膜最为接近。我们使用 $c_0 = 0.0005$ 肥皂溶液进行的测量表明，我们的肥皂膜与铝之间以及肥皂膜与钛之间的接触角 θ_c 分别为$58\pm2^\circ$ 和 $51\pm3^\circ$。

我们使用两台相机监测肥皂膜通道。第一台相机是一台高速相机 [Phantom V5，图 1(a)] 中标记为 C1，安装在肥皂膜通道上方，用于监测物体下游的流动结构。我们使用单色光源（低压钠灯，589 nm）将流动结构显示为干涉图。肥皂膜具有轻微的可压缩性，其厚度变化与涡量[4]密切相关。这一特性使我们能够利用干涉图轻松捕捉流动结构。第二台相机安装在远距离显微镜 [上，图 1(a)]中的标记为 C2。通过采用 2f 光学布置，可将普通显微镜的工作距离延长至约 1 m。此装置使我们能够监测物体插入肥皂膜的插入深度及物体尺寸 D ，且不会遮挡高速相机的视野。

图 1(b-c)显示了远距离显微镜拍摄的典型图像，描绘了伸入肥皂膜的圆锥。图像清晰地显示了形成于物体之间的弯月面

和肥皂膜。虽然对膜厚进行精确剖析在技术上颇具挑战性，但弯月面的大小在光学上定义为外部光晕 D_m 与物体本身 D的大小之差。然后，弯月面的（横向）大小 d 计算为

$$d = \frac{D_m - D}{2}. \tag{3}$$

在后半部分，我们介绍涡街结构参数的测量结果，即波长 λ 和脱落频率 f，即肥皂膜中涡街的这些参数。我们通过 λ 和 f 的高速摄像机视频记录进行测量。波长定义为同号涡旋之间的距离；事实上，这个距离是下游距离的函数。随着涡街向下游移动，波长逐渐增大，直至达到渐近值 [5], ，我们将该渐近值作为 λ的测量值。频率 f 通过计算单位时间内产生的涡旋数量来测量。

III. 结果与讨论

A. 弯月面的测量值

图2 展示了不同材料的 d 测量值。对于所有材料， d 在 D 较小时会随 D 增大，但当 D相对较大时，则会达到各自的渐近值。对于铝， d 在 D 较小时随 $D < 1\text{mm}$ 增大，但在 0.22 mm 处达到渐近值。对于钛， d 在 D 较小时随 $D \lesssim 1\text{mm}$ 增大，但当 $D > 0.07\text{mm}$时变化不大，在 0.16 mm 处几乎保持恒定。对于玻璃，我们的实验范围仅涵盖较小的 D；因此无法直接观察到 d 的渐近值，但有明显迹象表明， d 会随着D 增大而趋近渐近值。

请注意， D 实验范围由尖端尺寸决定，而尖端尺寸又取决于制造过程中的材料性质。例如，铝相对较软且延展性高，因此极难切出锋利的尖端。因此，铝锥最为钝，使用铝进行的测量结果约在 0.5 mm 至 4 mm 之间。相比之下，玻璃圆锥是通过加热拉制制成的。这种方法可以制成极其尖锐的尖端，因此我们可以检测小于 1 mm 的 D 。

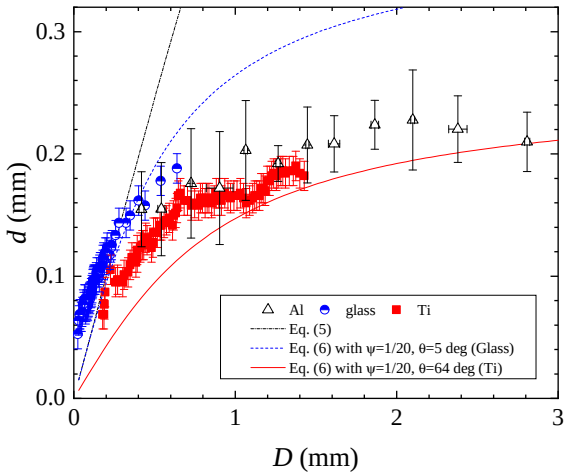

图2. d的测量值，即弯月面的尺寸，相对于 D。我们使用三种不同的圆锥收集数据：铝制（空心三角形）、玻璃制（半填充圆圈）和钛制（实心方块）。弯月面的形成尺寸远小于传统理论在方程（5）中的预测。方程（6）中带有模糊参数 $\psi = 1/4.5$ 的临时模型与数据大致吻合。请注意，铝圆锥的误差范围比其他圆锥更大，这是因为使用的显微镜放大倍率较低。

为了对测量结果进行合理解释，我们首先进行粗略的经典量纲分析，其中拉普拉斯压力与由毛细上升引起的压差相平衡， h。形式上，我们写作

$$\rho g h \simeq \sigma \left(-\frac{1}{D/2} + \kappa \cos\theta \right), \tag{4}$$

其中 σ 是肥皂膜的表面张力， $\theta = \theta_a + \theta_c$ 是顶角与接触角之和，且 κ 是弯月面的曲率，通常假定$\kappa \simeq h^{-1} \simeq d^{-1}$。那么，方程（4）的解如下：

$$h = l_c \cdot \frac{l_c}{D} \left(\sqrt{1 + \cos\theta \frac{D^2}{l_c^2}} - 1 \right) \simeq d. \tag{5}$$

式（5）分为两个区域。首先，当 D 相对较小时，忽略重力的影响，解仅由右侧两项之间的平衡决定，这表明弯月面与物体尺寸成正比，即 $h = D\cos\theta/2$。第二个区域在 D 增大时出现。在此区域中， $\rho g h$的相对重要性增加，而 D^{-1} 的相对重要性降低，解趋近于一个

渐近值 $h = l_c\sqrt{\cos\theta}$，其中 $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g} \approx 1.7$ mm 是肥皂膜的毛细长度（$\sigma \approx 28$ mN/m [17]）。然而，方程（5）高估了 d 当 D 很大时。在较大的 D 范围内，方程（5）表明 $d \to l_c$，但我们发现，我们对 d 的测量值远小于 l_c。

目前尚无能够全面解释我们观测结果的定量理论，我们推测 d 远小于 l_c ，因为这是对动态弯月面的测量值。Guo 研究了从静态肥皂膜中伸出的一根细纤维（直径为 9μm）附近弯月面的瞬态轮廓等人 [22], ，发现其在约 $\sim \mathcal{O}(2)$ s 后达到平衡。根据 Clanet 和 Quéré 早先使用己烷进行的研究，若纤维更粗，达到平衡所需的时间会更短 [23]。他们发现，达到平衡所需的时间会随着纤维厚度增加而缩短，但最终会趋于恒定值。在我们的实验中，物体尺寸约为 $\mathcal{O}(2)$ μm，约为 Guo 等人考察的纤维尺寸的十倍 [22], ，因此我们预计达到平衡所需的时间会更短。然而，弯月面形成的时间尺度仅为 $\frac{D}{U} \simeq 1.5$ ms，远小于 Guo 等人的研究结果。因此，图2 中的测量应视为动态测量，超出了传统平衡理论的适用范围。

–

在接下来的讨论中，我们引入一个临时模型，仅用于拟合测量值。通过添加一个模糊因子 ψ，我们可以对方程（5）进行调整，使其覆盖 D 的整个范围，如下所示：

$$d = \psi l_c \cdot \frac{\psi l_c}{D}\left(\sqrt{1+\cos\theta\frac{D^2}{(\psi l_c)^2}} - 1\right). \tag{6}$$

于是，在较小和较大的 $d = D\cos\theta/2$ 和$d = \overline{\psi l_c}\sqrt{\cos\theta}$ 条件下，我们分别得到 D。两种条件之间的转变发生在$D \sim 2\psi l_c/\sqrt{\cos\theta}$附近。我们发现， $\psi = 1/4.5$与数据大致吻合，如图2中的实线曲线所示。

B. 涡街的波长

为研究弯月面对涡旋形成的影响，我们测量波长，并考察其与 D 和 D_m的关系。在一项先前的研究中，Roushan 和 Wu 使用玻璃棒在垂直流动的流动肥皂膜通道中进行实验，结果表明，涡街的波长λ 与 D 呈线性正比关系，且截距不为零，符合

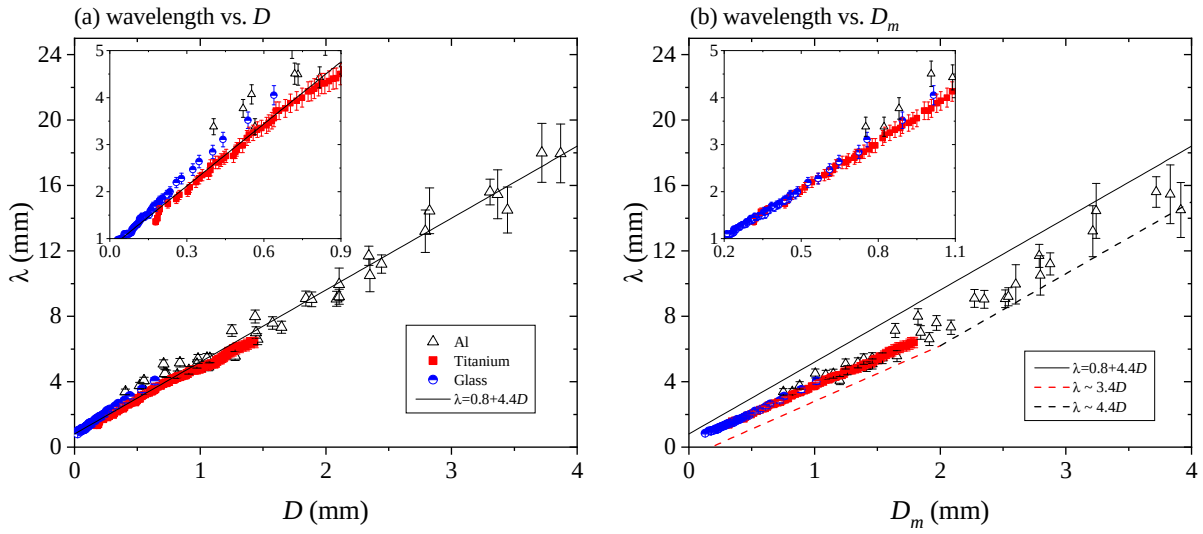

图3。 λ 的测量结果相对于 (a) D 和 (b) D_m绘出。尽管 λ 与 D 之间整体上似乎保持线性关系，但如插图所示，数据并不连续。以 D_m作图时，只有在 D_m 足够大时，线性关系才成立，但材料之间的差异减小了。

form

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha D, \tag{7}$$

Roushan 和 Wu（RW）对两个参数的测量值分别为： $\lambda_0^{(RW)} = 0.35 \pm$0.08 毫米和 $\alpha^{(RW)} = 4.1 \pm 0.3$。

图 3(a) 展示了波长相对于 D的测量结果，采用铝、钛和玻璃表面，结果表明线性关系近似成立。我们确定参数的方法不同于 Roushan 和 Wu 的确定方法 [24], ，因为我们得到 $\alpha = 4.4$和 $\lambda_0 = 0.8$毫米。比例常数在不确定度范围内相符，但截距约为他们测量值的两倍。我们推测，截距差异是由两次实验的流速不同造成的（RW：1.2 m/s；本研究：0.65 m/s），因为一项使用 0.6 m/s 流速的独立实验 [5]报告 $\lambda_0 = 1.00 \pm 0.03$毫米和 $\alpha = 4.3 \pm 0.1$。

尽管 λ 与 D 之间关系的总体趋势大致呈线性，但只有当 λ 相对于 D_m作图时，不同材料的数据才是连续的。在图 3(a-b) 的插图中，数据被放大以便详细展示。图 3(a) 的插图显示，使用玻璃和钛获取的数据彼此并不相连。然而，在图 3(b) 的插图中，两组数据完全连续。这一观察结果

表明，在确定 λ时， D_m 是比 D 更相关的长度尺度。

我们指出，如果以 D_m 为基准绘制数据， λ to D 的现象学线性关系并不适用。此时曲线大致分为两个区间，分别是小 D 区间和大 D 区间。在小 D 区间，即 $D < 2\psi l_c/\sqrt{\cos\theta} \simeq 1.4$mm 时，我们得到 $D = D_m/(1+\cos\theta)$。经过这一代换，λ-D 关系中的比例常数α 变为 $\alpha/(1+\cos\theta)$，对应于 λ-D_m 关系。根据 $\theta \simeq 71°$，新的比例常数约为 3.3，与测量值 3.4 相符。在大 D 区间，比例常数保持不变，但截距变为 $\lambda_0 - 2\alpha\psi l_c\sqrt{\cos\theta}$。在本研究中，位移 $2\alpha\psi l_c\sqrt{\cos\theta}$ 计算为 2 mm，与测量值一致。

——　　——

总之，根据我们的实验观察，我们推断如下。1）涡街的波长 λ 由 D_m 决定，而非 D。2）随着弯月面尺寸 d 接近渐近值， λ 与 D 之间的关系明显呈线性，尤其是在实验中使用相对较大的 D 时。3）在二维肥皂膜中，弯月面应视为侵入物体的一部分。

C. 斯特劳哈尔数-雷诺数关系

为进一步确认我们观察到的弯月面会影响涡旋形成这一现象，我们比较了基于 D 和 D_m的斯特劳哈尔数与雷诺数之间的关系。斯特劳哈尔数定义为 $\mathrm{St} = fD/U$，其中 f是涡脱落频率；雷诺数定义为$\mathrm{Re} = UD/\nu$，其中 ν 是流体的运动黏度。这些定义使用 D_m 而不是 D进行修改，即 $\mathrm{St}_m = fD_m/U$ 和 $\mathrm{Re}_m = UD_m/\nu$。

在图 4中，我们绘制了根据D 和 D_m计算得到的斯特劳哈尔数-雷诺数关系。与我们对波长相对于 D 和 D_m的观察类似，当使用 D定义这些无量纲数时，斯特劳哈尔数相对于雷诺数并未呈现连续测量结果。在 $\mathrm{Re} \sim [100, 200]$附近，使用玻璃和钛进行测量所得的结果超出了误差范围，二者出现偏离。随着 Re 增大，两组测量结果在误差范围内重叠。然而，如果使用 D_m定义无量纲数，则两组测量结果在统计上无法区分。

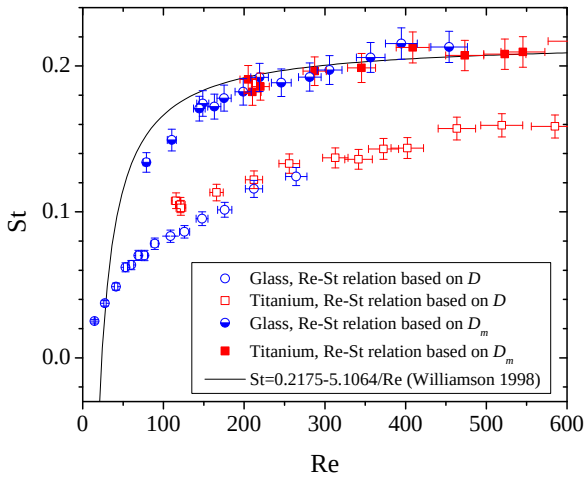

图4。基于 D （空心符号）和 D_m （实心符号）的 St – Re 关系。使用玻璃和钛测得的 St 在 Re $= [100, 200]$ 附近存在轻微偏差。然而，在 St_m –Re_m 关系中，该偏差减小到误差范围以内。实线曲线表示三维中的 St – Re 关系。

这一观察结果印证了我们对波长的观察，即弯月面会影响涡量的形成。

需要注意的是，如果使用 D_m定义无量纲数，数据点会向右上方移动。Re 和 St 均与 D成正比；如果用 D_m替代 D ，而 D_m始终大于 D，则这两个数都会增大。当 D 较小时，也就是说 Re 和 St 相对较小时，这种移动可能会很明显。

最后，我们推测，二维 Re-St 关系之所以被测量为不同于其三维对应关系，部分原因在于弯月面的影响。在许多研究中，观察到二维涡街的行为不同于三维涡街。例如，测得的 Re-St 关系参数不同，甚至起始雷诺数也不一致。然而，如图 4所示，基于 D_m 的 $\mathrm{St} = 0.2175 - 5.1064/\mathrm{Re}$ [28, 29] 关系与三维层流涡街的瑞利关系相符，即。这种吻合表明，二维和三维层流涡街之间的差异至少部分源于实验伪影。这也表明，皂膜流动中的一些小雷诺数物理现象（例如起始雷诺数）仍需进一步研究。

IV. 总结

总而言之，当将外部物体插入肥皂膜时，我们研究了弯月面对下游涡街形成的影响。在实验中，我们将由不同材料组成的物体（包括铝、钛和玻璃）插入肥皂膜，并使用远距离显微镜测量弯月面的尺寸。本研究的主要发现有两个方面。

首先，我们发现弯月面远小于毛细长度。在我们的实验中，弯月面的尺寸起初与物体的尺寸成正比，但最终趋于渐近值。渐近值约为0.2至 0.3mm，取决于材料。然而，这些测量结果远小于水（2.7 mm）或肥皂水（1.7mm）的毛细长度。即使将接触角考虑在内，该测量值仍约比量纲分析的估算值小五倍。

其次，我们发现，弯月面相当于为物体尺寸增加了一个长度尺度。如果将弯月面的尺寸加到物体尺寸上来解释涡街，不同材料的数据便会汇聚成一条曲线。这一观察结果表明，弯月面会影响下游的涡结构，并且在未来肥皂膜研究中准确评估数据时，可能需要考虑这种附加长度效应。

然而，只有当物体尺寸与弯月面尺寸相当时，这种附加长度效应才最为显著。在所有测试案例中，弯月面长度均不超过 0.2 mm。考虑到大多数肥皂膜研究中使用的物体尺寸为 $\sim \mathcal{O}(1)$ mm，弯月面可能导致的误差或许有限。

---

[1] M. Gharib 和 P. Derango，“用于研究二维层流和湍流剪切流动的液膜（肥皂膜）通道”，Physica D: Nonlinear Phenomena **37**，406–416（1989）。[2] J.-M. Chomaz 和 B. Cathalau，“肥皂膜作为二维经典流体”，Physical Review A **41**，2243（1990）。[3] H. Kellay、X.-L. Wu 和 W. I. Goldburg，“湍流肥皂膜实验”，Physical Review Letters **74**，3975（1995）。[4] M. Rivera、P. Vorobieff 和 R. E. Ecke，“流动肥皂膜中的湍流：速度、涡量、

和厚度场，” Phys. Rev. Lett.81, 1417–1420 (1998)。

[5] I. Kim 和 X.-L. Wu，“不同形状障碍物产生的层流涡街的统一斯特劳哈尔数—雷诺数关系”，Physical Review E 92，043011（2015）。[6] I. Kim，“三角形物体后方涡街的分离排列结构”，Journal of Fluid Mechanics 862，216–226（2019），1807.00203。[7] N. G. Chikkam 和 S. Kumar，“流动肥皂膜中绕旋转疏水／非疏水圆柱体的流动”，Physical Review Fluids 4，114802（2019）。[8] S. Jung、K. Mareck、M. J. Shelley 和 J. Zhang，“快速流动的肥皂膜中可变形物体的动力学”，Phys. Rev. Lett. 97，134502（2006）。[9] R. Singh、M. M. Bandi、A. Mahadevan 和 S. Mandre，“淹没海草床中单子叶水草摆动的线性稳定性分析”，Journal of Fluid Mechanics 786，R1（2015）。[10] B. K. Martin、X.-L. Wu、W. I. Goldburg 和 M. A. Rutgers，“肥皂膜中衰减湍流的频谱”，Physical Review Letters 80，3964（1998）。[11] M. A. Rutgers，“受迫二维湍流：逆向能量级联与正向涡量平方级联同时发生的实验证据”，Physical Review Letters 81，2244–2247（1998）。[12] H. Kellay、T. Tran、W. I. Goldburg、N. Goldenfield、G. Gioia 和 P. Chakraborty，“检验湍流中缺失的频谱联系”，Physical Review Letters 109，254502（2012）。[13] R. T. Cerbus 和 W. I. Goldburg，“二维肥皂膜湍流中的间歇性”，Physics of Fluids 25，105111（2013）。[14] I. Kim，“二维衰减湍流的多尺度样本熵”，Entropy 23，245（2021）。[15] R. H. Kraichnan，“二维湍流中的惯性区间”，Physics of Fluids 10，1417（1967）。[16] R. H. Kraichnan 和 D. Montgomery，“二维湍流”，Reports on Progress in Physics 43，35（1980）。[17] A. Sane、S. Mandre 和 I. Kim，“流动肥皂膜的表面张力”，Journal of Fluid Mechanics 841，R2（2018）。[18] A. A. Trapeznikov，“将二维黏度和剪切强度方法应用于肥皂及皂苷溶液中双面膜和表面层的结构与组成研究”，载于《第二届国际表面活性大会论文集》（1957），第242–258页。

[19] V.Prasad 和 E. R. Weeks，“肥皂膜中的流场：粘度与膜厚的关系”，Phys. Rev.E80, 026309 (2009)。[20] T. Tran、P. Chakraborty、N. Guttenberg、A. Prescott、H. Kellay、W. I. Goldburg、N.Goldenfeld 和 G. Gioia，“湍流流动中谱结构的宏观效应”，NaturePhysics 6, 438–441 (2010)。[21] M. A.Rutgers、X.-L. Wu、R. Bhagavatula、A.A.Petersen和W.I. Goldburg，“流动肥皂膜中的二维速度剖面和层流边界层”，Physics ofFluids8,2847– 2854(1996)。[22] S. Guo、X. Xu、T.Qian、Y.Di、M. Doi 和 P. Tong，“纤维上薄膜弯月面的起始”，Journal of FluidMechanics 865, 650–680 (2019)。[23] C. Clanet 和 D. Quere，“弯月面的起始”，Journal of FluidMechanics 460, 131 (2002)。[24] P.Roushan 和 X. L. Wu，“基于结构的斯特劳哈尔数—雷诺数关系解释”，Physical ReviewLetters 94, 054504 (2005)。[25] D.Georgiev 和P. Vorobieff，“西南地区最慢的肥皂膜隧道”，Rev. Sci.Instrum. 73,1177–1184(2002)。[26] I. Kim和 S.Mandre，“流动肥皂膜的马兰戈尼弹性”，Phys. Rev.Fluids 2, 082001(R)(2017)。[27] T.Watanabe，“陶瓷表面的润湿性——从超亲水性到超疏水性、从静态润湿性到动态润湿性的宽范围表面润湿性控制”，Journalof the Ceramic Societyof Japan117, 1285–1292 (2009)。[28] F.L. Ponta 和 H. Aref，“涡街的斯特劳哈尔数—雷诺数关系”，Physical ReviewLetters 93, 084501 (2004)。[29] C.H.K. Williamson，“定义圆柱绕流层流涡脱落的通用连续斯特劳哈尔数—雷诺数关系”，Phys. Fluids 31, 2742–2744 (1988)。