arXiv:2304.03633v2 [math.CA] 7 Apr 2024

论贝西科维奇集的广义豪斯多夫维数

XIANGHONG CHEN、LIXIN YAN 和 YUE ZHONG*

ABSTRACT. Keich [14]证明，对于 $\mathbb{R}^2$ ，贝西科维奇集的广义豪斯多夫维数的精确测度函数介于$r^2 \log\ 1/r$和 $r^2(\log\ 1/r)(\log\log 1/r)^{2+\varepsilon}$之间，这是通过改进 Bourgain [7]的一个论证得到的。目前尚不清楚Keich的界中迭代对数是否为必要项。在本文中，我们构造了一族贝西科维奇直线集，其精确测度函数小于 $r^2(\log 1/r)(\log\log 1/r)^{\varepsilon}$。此外，这些贝西科维奇集是极小的，其含义是：集合中实质上每个方向上只有一条直线。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 记号与预备知识 43.构造**E**
$_M$ 94.构造
$E_{\{M_n\}}$ 265.
$E_{\{M_n\}}$ 36的广义豪斯多夫维数6.
$E_{\{M_n\}}$ 44的极小性参考文献
48

1. INTRODUCTION

称紧集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 为*Besicovitch* 集，如果它的勒贝格测度为零，且在每个方向上都包含一条单位线段。Besicovitch 集的概念与*Kakeya* 集密切相关；Kakeya 集是指可以将一条单位线段连续旋转经过 $180°$ 的集合。Besicovitch 最初构造之后 [3], [4], , Perron [19], 、Besicovitch [5], 、Sawyer [21], 、K¨orner [15], 、Babichenko 等人 [2] 采用不同方法给出了 Besicovitch 集的其他构造（另见 [20], [23], [12], [1], [14], [25]）。关于 Besicovitch 集的更多背景，读者可参阅 Falconer [10, § 12.1], 、Mattila [17, 第 18], [18, 章 22],以及 Bishop-Peres [6, 第 9] 章；关于它与调和分析的联系，可参阅 Wolff [25] 和 Tao [24] 。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 28A78,42B25.*Key words and phrases.* Besicovitch 集，Kakeya 集，豪斯多夫维数，闵可夫斯基维数。

*通讯作者。

众所周知，每个 Besicovitch 集的豪斯多夫维数都是 2[9]。本文研究一个更精细的问题：如何用广义豪斯多夫维数来度量 Besicovitch 集（参见 [17, 第 4], [10, 章§ 2.5]）。基于 Cordoba [8], 的早期工作，Keich [14] 证明，Besicovitch 集闵可夫斯基维数的尖锐测度函数为 $r^2\log(1/r)$。通过改进 Bourgain [7], 的一个论证，他进一步证明，Besicovitch 集广义豪斯多夫维数的尖锐测度函数介于 $r^2\log(1/r)$ 和 $r^2\log(1/r)(\log\log(1/r))^{2+\varepsilon}$ 之间。特别是，他留下了一个未解问题：是否存在一个 Besicovitch 集，其相对于测度函数 $r^2\log(1/r)$ 的豪斯多夫测度为零？本文研究一族自然的 Besicovitch 集（下文记为 $\mathcal{K}$），并证明，在这一族中可以找到显式的 Besicovitch 集例子，其尖锐测度函数可以任意接近 $r^2\log(1/r)$。

我们的主要结果可以表述如下。

定理 A。存在一个 *Besicovitch* 集 $E \in \mathcal{K}$，其相对于 $r^2\log(1/r)$ 的豪斯多夫测度是有限的，而其相对于 $r^2\log(1/r)(\log\log(1/r))^{\varepsilon}$ 的豪斯多夫测度对于所有 $\varepsilon > 0$。都是无限的。

事实上，定理A中的迭代对数可以替换为随着 $r \to 0$ 趋于无穷而增长至无穷的任意因子；精确表述见下文的定理 5.1。

$\mathcal{K}$ 中的贝西科维奇集被构造为直线集（参见 [5]），也就是说，每个 $E \in \mathcal{K}$ 都可以写成

$$E = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} l$$

对于一族 $\mathcal{L}$ 线段。我们还证明，每个Besicovitch集$E \in \mathcal{K}$ 都是“极小”的，即在每个方向上只有一条包含于 E 且指向该方向的线段，但对于可数多个方向，存在两条这样的线段。

定理 B。对于每个 $E \in \mathcal{K}$，存在一个可数的$\Omega \subset \mathbb{S}^1$ 方向集合使得

(*i*) 若 $\omega \in \mathbb{S}^1 \backslash \Omega$，则恰有一条直线 $\ell \parallel \omega$ 满足 $\mathcal{H}^1(\ell \cap E) > 0$；(*ii*) 若 $\omega \in \Omega$，则恰有两条直线 $\ell_i \parallel \omega (i = 1, 2)$ 满足 $\mathcal{H}^1(\ell_i \cap E) > 0$。

这里，和往常一样 $\mathcal{H}^1$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的一维豪斯多夫测度。事实上，定理 B 中的例外方向 Ω 和直线 ℓ, ℓ_i 可以相当精确地描述。详情参见定理 6.1。我们指出，K¨orner [15]和 K´atay [13] 已证明，对于没有例外方向的典型（就贝尔范畴意义而言）贝西科维奇集，更强的“极小性”性质成立。

经过旋转，只需考虑包含斜率介于 0 和 1 之间的单位线段的紧集。我们仍将这种集合称为 Besicovitch 集，并用 $E \in \mathcal{K}$ 表示这类集合。

与 Besicovitch 的构造类似， [4], 集合 $E \in \mathcal{K}$ 是基于两个要素构造的：(i) Kakeya 型集构造；(ii) 迭代。给定一个二进整数 $M = 2^m$，我们采用 Besicovitch 的“剪切-滑动”过程的一种变体来生成 Kakeya 型集 $\mathbf{E}_M$，它是 2^M 许多三角形的并集，这些三角形的底边为 2^{-M}、高度为 1，且指向彼此相隔 2^{-M} 的方向，从而

$$|\mathbf{E}_M| \approx \frac{1}{M}, \quad \text{as } M \to \infty.$$

正如 [14], 所示， $\frac{1}{M}$ 阶是可能的最小阶数，这由 Cordoba [8]的工作所证明。Perron [19] 和Schoenberg[23] 的构造达到了这一阶数（另见 [22], [2], [6, 第 9] 章）。本文中使用的 Kakeya 型集 $\mathbf{E}_M$ 对应于 [23] 中的最小构造。

该构造的第二个要素是一个迭代，对$\mathbf{E}_M$ 中的每个三角形执行切割和滑动过程（依此类推）。更准确地说，给定一个非递减序列 $\{M_n \to \infty\}$，这样的迭代从$\mathbf{F}_1 = \mathbf{E}^{M_1}$开始，并生成一个 Kakeya 型集序列$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots$，其极限集

$$E = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_n$$

变成一个Besicovitch集（记作 $E_{\{M_n\}}$ 以下）。这些贝西科维奇集构成上文提到的族 $\mathcal{K}$ ，也就是说，

$$\mathcal{K} := \left\{E_{\{M_n\}} : M_n \text{ is dyadic, nondecreasing, and satisfies } M_n \to \infty\right\};$$

详见第 4 节。

定理 A 的证明依赖于选取一个合适的（快速增长的）序列 $\{M_n\}$ ，以保证 $E_{\{M_n\}}$ 关于测度函数 $r^2 \log(1/r) \log\log\log(1/r)$ 具有正的豪斯多夫测度。$\mathbf{E}_M$ 的若干几何性质对证明至关重要。第一项是$\mathbf{E}_M$的 Perron 树结构。虽然其构造方式与 [19], $\mathbf{E}_M$ 并不完全相同，但它具有相似的性质：从一个大小约为 $\frac{1}{M} \times \frac{1}{M}$ 的“主干”出发，它会“分枝”成许多个（本质上）实心平行四边形，高度为 $\frac{k}{M}$，其中$k = 1, \cdots, M-1$。第二项几何性质是第一项的推论：$\mathbf{E}_M$ 在每个高度上都是 $\frac{1}{M}$-“多孔的”，因此当 $M \to \infty$ 时会收敛到一个实心的倒三角形。第三项性质与$\mathbf{E}_M$ 在每个高度及平面内的“质量分布”有关，由命题 3.5 和 3.9 概括。粗略地说，这些命题量化了$\mathbf{E}_M$ 在不同位置和尺度上偏离 $r^2\log(1/r)$ 维的程度。

本文的安排如下。在第 2 节中，我们介绍一些记号并给出一些预备知识。在第 3 节中，我们介绍 $\mathbf{E}_M$ 的构造，并证明上文提到的几何性质。在第4 节中，我们介绍 $E_{\{M_n\}}$ 的构造，并证明它的一些基本性质。定理A重新表述为定理5.1，并在第5节中予以证明。定理 B 及其更精确的版本（定理 6.1）在第 6 节中得到证明。

2. Notation and Preliminaries

在本文中，除非另有说明，所有集合（例如正方形、三角形、平行四边形、区间）均视为闭集。如果两个集合的内部不相交，则称它们不相交。下文中的所有集合均位于矩形 $[0,1]\times[-1,1]$ 中。

我们称 $x\in[0,1]$ 为二进有理数，如果 $x=\frac{j}{2^m}$ 对于某些整数 j 和 m。如果对于某些整数j 和 m，则称区间 I 为二进区间。如果对于某些二进区间 I_1 和 I_2，则称 $Q\subset\mathbb{R}^2$ 为二进方形。正方形 Q 的边长记为 $r(Q)$。除非另有说明，下文中的所有正方形均为二进方形。

我们用 δ 表示二进尺度，其形式为 $\delta=2^{-m}$，其中 $m\geq 0$ 是一个整数。设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 为一个紧集。我们用 $\mathcal{N}_\delta(E)$表示覆盖 E所需的最少 $\delta\times\delta$ 正方形数。我们所说的 E的覆盖，是指由正方形 $\{Q_i\}$ 组成的集合，满足 $E\subset\bigcup_i Q_i$；如果每个 Q_i 都满足$\delta_2\leq r(Q_i)\leq\delta_1$，那么我们称 $\{Q_i\}$ 为 E的 $[\delta_2,\delta_1]$覆盖。设 $\{Q_i\}$ 和 $\{Q_j\}$为两个正方形集合。我们记

$$\{Q_i\}\prec\{\widetilde{Q}_j\}$$

$\sim$ $\sim$表示每个 $Q\in\{Q_i\}$ 都包含于某个 $Q\in\{Q_j\}$中；在这种$\sim$情况下，我们称 $\{Q_i\}$ 嵌套于 $\{Q_j\}$中。E 的广义豪斯多夫测度将在不失一般性的情况下，通过 E的有限覆盖进行研究。这促成了以下定义，它们将在定理 A 的证明中发挥重要作用。

定义2.1（尺度受限 h-测度）。设 $h:(0,1]\to$（0,∞）是一个连续函数，满足$\lim_{r\to 0}h$（r）$=0$，并设 $E\subset[0,1]\times[-1,1]$。给定两个二进尺度 $\delta_2\leq\delta_1$，$[\delta_2,\delta_1]$-受限 h-测度 E 定义为

$$\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E;h)=\min\Big\{\sum_i h(r(Q_i)):\{Q_i\}\ is\ a\ [\delta_2,\delta_1]\text{-}cover\ of\ E\Big\}.$$

特别地，当 $\delta_1=1$ 且 $\delta_2=\delta$时，定义

$$\mathcal{M}_\delta(E;h)=\mathcal{M}_\delta^1(E;h).$$

注意，定义2.1也适用于 $[0,1]\times[-1,1]$的一般子集（不一定是紧集），并且 $\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E;h)$ 关于 E 是有限次次可加的。

注记 2.2. 当 E 包含于边长为 $r(\widetilde{Q})=\delta_1$ 的正方形 $\widetilde{Q}$ 中时，$\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E;h)^{\sim}$ 可以通过仅考虑 E 的那些覆盖 $\{Q_i\}$ 来计算，这些覆盖嵌套于 $\{Q\}$ $\sim$ $\sim$ 中（否则，可以沿着 Q 的边界将 Q_i “翻转”到 Q 内部）。

定义2.3 (最优覆盖**)**。设 h 和 E 如定义*2.1*所述。一组正方形 $\{Q_i\}$ 被称为最优 $[\delta_2,\delta_1]$-覆盖 E（相对于 h），如果定义 $\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}$（$E$；$h$）中的最小值由 $\{Q_i\}$取得；如果

而是 $\{Q_i\}$ 满足

$$\sum_i h(r(Q_i)) \le C \cdot \mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E;h)$$

若某绝对常数为 $C \ge 1$，则称 $\{Q_i\}$ 为关于 h 的准最优 $[\delta_2,\delta_1]$-覆盖 E。

当 $\delta_1 = 1$ 且 $\delta_2 = \delta$ 时，我们称 E 的一个最优 $[\delta,1]$-覆盖为最优δ-覆盖 E。注意，由于尺度限制， E 的最优 $[\delta_2,\delta_1]$-覆盖总是存在的。还要注意，由于最优性，最优覆盖必定由互不相交的正方形组成。

Set

$$\log(R) = \max(\log_2 R, 1), \quad R > 0.$$

在第 3 节和第 5 节中，对于适当的缓慢增长函数 $\phi(r)$（例如 $\log\log\log(1/r)$），我们将分别研究 $h(r) = r^2\log(1/r)$ 和 $h_1(r) = r^2\log(1/r)\,\phi(r)$。为简化记号，我们记

$$h(Q) = h(r(Q))$$

当 Q 是一个正方形时，记作 $h_1(Q) = h_1(r(Q))$。

我们用 $|E|$ 表示二维勒贝格测度（当 $E \subset \mathbb{R}^2$ 时）和一维勒贝格测度（当 $E \subset \mathbb{R}$ 时）。集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ 的内部、边界和闭包分别记为 $\mathrm{int}(E)$、$\mathrm{bdry}(E)$ 和 $\mathrm{cl}(E)$。 E 的垂直 δ-邻域 定义为

$$E(\delta) = \bigcup_{(x,y)\in E} \{x\} \times (y-\delta, y+\delta).$$

E 在 x 处的垂直截面记作 $E|_x$，即

$$E|_x = E \cap \big(\{x\} \times \mathbb{R}\big). \tag{2.1}$$

的垂直凸包定义为

$$\mathrm{cov}(E) = \bigcup_x \mathrm{co}(E|_x), \tag{2.2}$$

其中，$\mathrm{co}(E|_x)$表示 $\mathbb{R}^2$中的通常凸包。

若集合$\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^2$ 满足：对于每个 $z \in \mathbf{E}$ 和 $\varepsilon > 0$，都有

$$|D(z,\varepsilon) \cap \mathbf{E}| > 0.$$

这里，按惯例， $D(z,\varepsilon)$表示以 z为中心、半径为 ε的二维圆盘。实心集通常用粗体表示。

引理 2.4（最优覆盖的嵌套性）。令 h 如定义*2.1*中所述。设 $\widetilde{\mathbf{F}}_2 \subset \mathbf{F}_1$ 是 $[0,1]\times[-1,1]$ 中的两个实体集，并令 $\delta_2 \le \delta_1$。若 $\{Q_j\}$ 是相对于 h 的 $\mathbf{F}_1$ 的一个最优 δ_1-覆盖，则存在一个相对于 h 的 $\mathbf{F}_2$ 的最优 $\sim\delta_2$-覆盖，该覆盖嵌套于 $\{Q_j\}$ 中。

证明。 在 $\mathbf{F}_2$，的有限多个最优 δ_2-覆盖中，令 $\{Q_i\}$ 为其中一个极小覆盖，并且它由按字典序最大的 $\widetilde{}$ 个小正方形组成。我们证明 $\{Q_i\} \prec \{Q_j\}$。

$\widetilde{}$首先，注意到，由于 $\{Q_j\}$ 也是$\mathbf{F}_2$,的一个覆盖，我们有

$$\mathbf{F}_2 \subset \bigcup_{i,j} (Q_i \cap \widetilde{Q}_j). \tag{2.3}$$

$\widetilde{}$每个 $Q_i \cap Q_j$ 要么为空，要么属于以下三种情况之一:

$$Q_i \cap \widetilde{Q}_j \begin{cases} = Q_i, & \text{if } Q_i \subset \widetilde{Q}_j; \\ = \widetilde{Q}_j, & \text{if } \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_i; \\ \subset \operatorname{bdry}(Q_i), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.4}$$

由于$\mathbf{F}_2$ 是一个实心集合，最后一种情况（边界交）是多余的，因此可以从 (2.3) 的右端删去，从而

$$\mathbf{F}_2 \subset \Big(\bigcup_{\substack{i,j: \\ Q_i \subset \widetilde{Q}_j}} Q_i \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\substack{i,j: \\ \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_i}} \widetilde{Q}_j \Big).$$

为了完成证明，现在只需证明（2.4）中的第二种情况不会发生。

反设存在一个 i_0，使得 $\widetilde{}$ $Q_j \subsetneq Q_{i_0}$ 对于某个 j。由于 $\{Q_j\}$ 互不相交，我们有

$$\operatorname{int}(Q_{i_0}) \cap \mathbf{F}_1 \subset \bigcup_{j: \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_{i_0}} \widetilde{Q}_j,$$

从而

$$\operatorname{int}(Q_{i_0}) \cap \mathbf{F}_2 \subset \bigcup_{j: \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_{i_0}} \widetilde{Q}_j.$$

因此，再次利用 $\mathbf{F}_2$ 的实心性，正方形的集合

$$\big\{ \widetilde{Q}_j : \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_{i_0} \big\} \tag{2.5}$$

可用于将 Q_{i_0} 替换为 $\{Q_i\}$，从而形成一个新的 δ_2-覆盖 $\mathbf{F}_2$。将这个新覆盖记为 $\{Q_i'\}$。

剩下需要证明的是， $\{Q_i'\}$ 构成 $\mathbf{F}_2$，的一个最优 δ_2-覆盖；但这将导致矛盾，因为 $\{Q_i\}$ 被选为最小的。注意到， Q_{i_0} $\widetilde{}$ 可用于替换覆盖 $\{Q_j\}$ 中的正方形（2.5），从而形成一个新的$\backsim\delta_1$-覆盖 $\mathbf{F}_1$。由 $\{Q_j\}$ 的最优性可得

$$\sum_{j: \widetilde{Q}_j \subsetneq Q_{i_0}} h(\widetilde{Q}_j) \le h(Q_{i_0}).$$

这表明 $\{Q_i'\}$ 构成了$\mathbf{F}_2$, 的一个最优 δ_2-覆盖，且引理2.4的证明已经完成。□

接下来的两个引理将分别用于第4节和第5节，以简化重缩放论证。设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 且令 $\delta > 0$。记

$$\delta.E = \{(x, \delta y) : (x, y) \in E\}.$$

引理 2.5（次线性性）。设 h 和 E 如定义*2.1*所述，并设$\delta_2 \le \delta_1$。那么，对于任意 $\delta \le 1/2$，有

$$\mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(\delta.E; h) \ge \delta \cdot \mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(E; h).$$

证明。设 $\{Q_i\}$ 是关于 h的 $\delta.E$ 的一个最优 $[\delta_2, \delta_1]$覆盖，因此

$$\sum_i h(Q_i) = \mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(\delta.E; h).$$

Then

$$E \subset \bigcup_i (\delta^{-1}.Q_i)。$$

注意，每个 $\delta^{-1}.Q_i$ 都可以分解为 δ^{-1} 个二进方形$Q_{i,\ j}$，其中 $r(Q_{i,\ j}) = r(Q_i)$，$j = 1, \cdots, \delta^{-1}$。因此 $\{Q_{i,j}\}$ 构成了 E的一个 $[\delta_2, \delta_1]$覆盖。利用这个覆盖，我们可以估计

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(E; h) &\le \sum_i \sum_{j=1}^{1/\delta} h(Q_i^{(j)}) \\
&= \sum_i \delta^{-1} h(Q_i) \\
&= \delta^{-1} \mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(\delta.E; h).
\end{aligned}$$

将两边同乘 δ，即可证明引理 2.5。 □

令 $E \subset \mathbb{R}^2$ 并令 $l(x) = ax + b$ 为一条直线。我们记

$$E + l = \big\{(x, y + l(x)) : (x, y) \in E\big\}. \tag{2.6}$$

引理 2.6 (仿射稳定性**).** 设 h 和 E 如定义*2.1*所述，并设$\delta_2 \le \delta_1$。假设 $l(x) = ax + b$ 满足 $a \in [0, 1]$ 和 $E + l \subset [0, 1] \times [-1, 1]$。那么

$$\mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(E + l; h) \ge \frac{1}{3} \mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(E; h).$$

证明。证明与引理 2.5 的证明类似。设 $\{Q_i\}$ 是相对于 h 的 $E + l$ 的一个最优 $[\delta_2, \delta_1]$-覆盖，使得

$$\sum_i h(Q_i) = \mathcal{M}^{\delta_1}_{\delta_2}(E + l; h).$$

于是，记作 $(-l)(x) = -ax - b$，我们有

$$E \subset \bigcup_i (Q_i - l).$$

由于 $a \in [0,1]$，每个平行四边形 $Q_i - l$ 都可以由三个二进方形 $Q_{i,j}$ 覆盖，其中 $r(Q_{i,j}) = r(Q_i)$，$j = 1,2,3$。因此，$Q_{i,j}$ 构成 E 的一个 $[\delta_2, \delta_1]$- 覆盖。利用这个覆盖，我们可以给出界估计。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E;h) &\le \sum_i \sum_{j=1}^{3} h(Q_i^{(j)}) \\ &= \sum_i 3\, h(Q_i) \\ &= 3\, \mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(E+l;h).\end{aligned}$$

将两边同时除以 3，即得引理 2.6。 □

最后，我们记录三个简单的引理，它们将分别在第3、4和5节中发挥作用。

引理 2.7。设 Q 是一个二进方形。如果 $Q_i \subset Q$ 是满足

$$\Big|\bigcup_i Q_i\Big| \ge \rho\, |\widetilde{Q}|, \tag{2.7}$$

那么，对于任意递减函数 $\varphi : (0,1] \to (0,\infty)$，我们有

$$\sum_i h(Q_i) \ge \rho \cdot h(\widetilde{Q}), \tag{2.8}$$

其中 $h(r) = r^2\varphi(r)$。

证明。由 (2.7) 及勒贝格测度的次可加性，我们得到

$$h(\widetilde{Q}) = |\widetilde{Q}|\, \varphi(r(\widetilde{Q})) \le \rho^{-1} \sum_i |Q_i|\, \varphi(r(\widetilde{Q})). \tag{2.9}$$

由 φ 的单调性，

$$(2.9) \le \rho^{-1} \sum_i |Q_i|\, \varphi(r(Q_i)) = \rho^{-1} \sum_i h(Q_i).$$

两边同时乘以 ρ，引理 2.7 的证明至此完成。 □

引理 2.7 的一个简单推论是

$$\mathcal{M}_{\delta_2}^{\delta_1}(\widetilde{Q};h) = h(\widetilde{Q}), \tag{2.10}$$

其中 Q 和 h 如引理 2.7 所述，且 $\delta_2 \le \delta_1 = r(Q)$。

定义 2.8. 设 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 为一个有限实数集，且 $x_i < x_{i+1} (i = 1, \cdots, N-1)$，并设 $\varepsilon > 0$。若 X 是 ε-稠密的，则称其为 ε-稠密。

$$\max_{1 \le i < N} |x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon.$$

容易看出，当且仅当 $\bigcup_{x \in X} (I_\varepsilon + x)$ 连通时，X 是 ε-稠密的，其中 I_ε 是任意闭区间，且 $|I_\varepsilon| = \varepsilon$（特别地，可以取 $I_\varepsilon = [-\varepsilon, 0]$ 或 $[0, \varepsilon]$）。

引理 2.9。 设 X、$Y \subset \mathbb{R}$ 是 ε-稠密的，并满足

$$\min_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} |x-y| \le \varepsilon. \tag{2.11}$$

那么 $X \cup Y$ 是 ε-稠密的。

证明。记 $x_1 = \min X$, $x_N = \max X$, $x_{N+1} = x_N + \varepsilon$，以及 $y_1 = \min Y$。不妨设 $x_1 \le y_1$。那么，由 (2.11) 可知，我们必有 $y_1 \in [x_1, x_{N+1}]$。由于 X 和 Y 都是 ε-稠密的，对 $X \cup Y$进行排序可知， $X \cup Y$也是 ε-稠密的。□

定义 2.10。 设 $\eta > 0$。一族区间 $\{[x-\varepsilon-\eta, x]: \ x \in X\}$称为 η-连通，如果 $X \subset \mathbb{R}$ 是 ε- 稠密的。

很容易看出， $\{[x-\varepsilon-\eta, x] : x \in X\}$ 是 η-连通的，当且仅当 $\{[x, x+\varepsilon+\eta]: \ x \in X\}$ 是 η-连通的。引理 2.9 的一个直接推论如下。

推论2.11. 设 $\{I_i\}$ 和 $\{J_j\}$ 是两个 η-连通区间族，其中 $|I_i| = |J_j|$。记 $I = \bigcup_i I_i$和 $J = \bigcup_j J_j$。若 $|I \cap J| \ge \eta$，则区间族 $\{I_i\} \cup \{J_j\}$ 是 η-连通的。

下一个引理表明，在考虑集合的 $[\delta, 1]$-覆盖时，小于 δ 的（垂直）间隙实际上是“不可见”的。

引理2.12. 设 $F \subset \mathbb{R}^2$。假设 $F(\delta/2)$ 包含一个正方形 $\widetilde{Q}$，且$\sim r(Q) \ge \delta$。那么，只要 F 可由一族正方形 $\{Q_i\}$ 覆盖，且满足$\sim r(Q_i) \ge \delta$， Q也可被覆盖。

证明。 该引理本质上是一个一维命题，因为垂直邻域 $F(\delta/2)$ 是按截面定义的。反设

$$R = \widetilde{Q} \setminus \bigcup_i Q_i \neq \varnothing.$$

~因此，由于 $r(Q)$ $r(Q_i) \ge \delta$, R 必定包含一个边长为 ~$\sim\delta$的开正方形 Q_δ。根据假设 $Q \subset F(\delta/2)$, $Q_\delta \subset Q$ 的中心属于$F(\delta/2)$。根据 $F(\delta/2)$的定义，这意味着

$$Q_\delta \cap F \neq \varnothing,$$

这与 Q_δ 和 $\{Q_i\}$ 不相交相矛盾（ $\{Q_i\}$ 覆盖了 F）。 □

3. Construction of$\mathbf{E}_M$

在本节中，我们首先回顾[23]中的 Kakeya型集的构造。这些Kakeya 型集将作为第 4 节中迭代构造贝西科维奇集的“构建模块”。然后，我们证明这些 Kakeya 型集的一些几何性质和分布性质。

3.1. **构造**。 对于每个整数 $M \geq 2$，我们将使用剪切并滑动的过程构造一个 Kakeya型集$\mathbf{E}_M$ ，如 [23] 和 [14] 所示。这里的论述在一定程度上更加几何化，以便于证明$\mathbf{E}_M$的若干性质。

梯形的贝西科维奇压缩。为了追踪构造过程中产生的几何构形，我们先对一对共用一条边的梯形应用贝西科维奇压缩，并引入一些记号。更具体地说，给定一个垂直底边分别位于 $x = 0$ 和 $x = b > 0$ 处的梯形 T （图1，左），沿着底边中点切开 T。我们得到两个梯形 T_1 （上方）和 T_2 （下方）。$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$按需向上平移 T_1 ，然后将 T_2 向上平移（记新梯形为 T_1，T_2 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$），使得 T_1 和 T_2 的上边交于 $x = c$（$0 \leq c \leq b$）。由此我们得到一个分解

$$\widetilde{T_1} \cup \widetilde{T_2} = T' \cup (P - A), \tag{3.1}$$

其中， T' 是一个以 $x = 0$ 和 $x = c$为底的新梯形； P是一个由 $x = c$ 和 $x = b$之间界定的平行四边形； $A \subset P$ 是一个以$x = b$ 为底的（半开）三角形（图1，右）。我们经常写作 $P = P(a)$，以表示该平行四边形的斜率为 a。

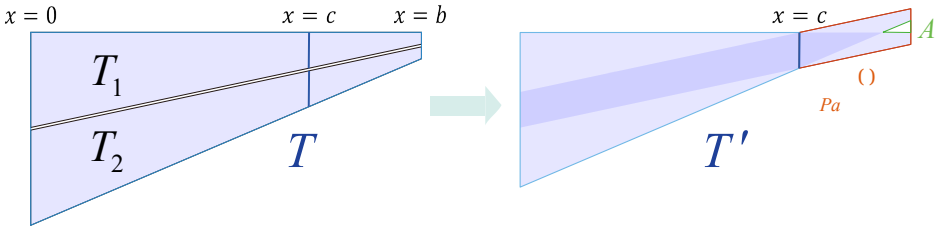


FIGURE 1. $T_1 \cup T_2$ 的 Besicovitch 压缩

现在我们描述该构造。

步骤 0。从第四象限中的直角三角形开始，其顶点为 (0, 0)、(1,0) 和 (0, −1)（图 2）。将三角形的竖直边视为底边。将底边划分为 2^M 个区间，每个区间长度为 2^{-M}。以这些区间为新底边，并以 (1,0) 为公共顶点，我们得到2^M 个细长三角形 $S_i^0, i = 1, \cdots, 2^M$。在后续步骤中，我们将竖直移动这些三角形，逐步得到 $\mathbf{E}_M$。为便于记号，我们也将 S_i^0 视为一个梯形，并设 $T_i^{(0)} = S_i^0$。

步骤j($j = 1, \cdots, M$)。给定 S_i^{j-1}和梯形 T（$j-1$ $\subset S_i^{j-1}$），i =1, $\cdots$, 2^{M-j+1}，将 S_{2i}^{j-1}向上滑动，使得 $T_{2i-1}^{(j-1)i}$和

$T_{2i}^{(j-1)}$ 相交于

$$x_j := 1 - \frac{j}{M}.$$

仍将平移后的副本记为 S_{2i}^{j-1}（分别记为 $T_{2i}^{(j-1)}$）。设 $S_i^j = S_{2i-1}^{j-1} \cup S_{2i}^{j-1}$，并令 $T_i^{(j)}$、P_i^j 和 A_i^j 由以下分解定义

$$T_{2i-1}^{(j-1)} \cup T_{2i}^{(j-1)} = T_i^{(j)} \cup (P_i^j - A_i^j)$$

如 (3.1) 所述。注意，梯形 $T_i^{(j)}$ 以 $x = 0$ 和 $x = x_j$ 为底，且平行四边形

$$P_i^j = P^j\Big(\frac{2i-1}{2^{M-j+1}}\Big), \quad i = 1, \cdots, 2^{M-j} \tag{3.2}$$

位于 $x = x_j$ 和 $x = x_{j-1}$ 之间。

最后，设 $\mathbf{E}_M = S_1^M$。至此，$\mathbf{E}_M$ 的构造完成。

3.2. $\mathbf{E}_M$ 的性质。 首先，我们对这一构造作一些基本观察。

命题 3.1. *(i)* 步骤 j 中的每个竖直条带大小均为 $\frac{j}{M}\frac{2^{j-1}}{2^M}$；*(ii)* $T_i^{(j)}$ 左侧的(较大)底边长度为 $\left(1 - \frac{j-1}{M}\right)\frac{2^j}{2^M} - \frac{1}{M}\frac{1}{2^M}$；*(iii)* P_i^j 的竖直边长度为 $\frac{1}{M}\frac{2^j}{2^M} - \frac{1}{M}\frac{1}{2^M}$；*(iv)* A_i^j 的竖直边长度为 $\frac{1}{M}\frac{1}{2^M}$。

证明。*(i)*–*(iv)*的证明很直接，因此此处略去。 □

下文中，我们用记号 T_i（分别用 $T_{(j)\,i}$、P_i^j、A_i^j）表示构造中 $T_{(0)\,i}$（分别表示 $T_{(j)\,i}$、P_i^j、A_i^j）的最终位置（作为一个集合）。因此，

$$\mathbf{E}_M = \bigcup_{i=1}^{2^M} T_i. \tag{3.3}$$

三角形 T_i 的上边是一条线段

$$\ell_{\alpha_i}(x) := \alpha_i x + \beta_i, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.4}$$

其中 $i = 1, \cdots, 2^M$，

$$\alpha_i = \frac{i-1}{2^M} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\},$$

$$\beta_i = -\alpha_i + \sum_{k=1}^{M} \varepsilon_k \frac{2^{M-k}}{2^M}\left(1 - \frac{k-1}{M}\right) = -\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \frac{(k-1)\varepsilon_k}{2^k}.$$

注意，根据命题 3.1 *(ii)*（结合 $j = M$），我们有

$$-\frac{1}{M} < \beta_i \le 0. \tag{3.5}$$

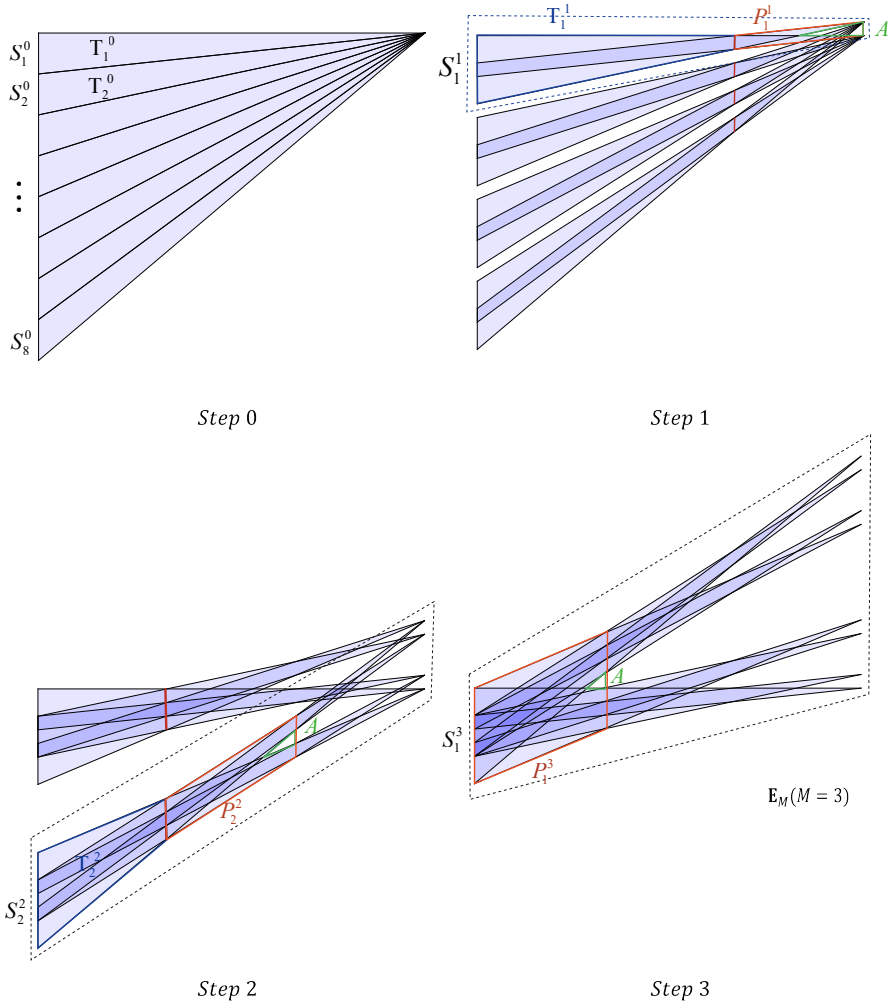


FIGURE 2. 构造$\mathbf{E}_3$

$P_i^j = P^j(\alpha)$ 的上侧（见 (3.2)）由上文定义的 ℓ_α 给出。相应地，$T_i^{(j)}$ 的上侧和 A_i^j 的下侧由 $\ell_{\alpha-\epsilon_j}$ 给出，其中

$$\epsilon_j := \frac{1}{2^{M-j+1}}, \quad j = 1, \cdots, M. \tag{3.6}$$

第 j-个带的$\mathbf{E}_M$ 定义为

$$\mathbf{E}_M^{(j)} = \mathbf{E}_M \cap \{(x, y) : x_j \le x \le x_{j-1},\, y \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1, \cdots, M.$$

显然,

$$\mathbf{E}_M = \bigcup_{j=1}^{M} \mathbf{E}_M^{(j)}.$$

注意，根据构造,

$$\mathbf{E}_M^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{2^{M-j}} \left(P_i^j - A_i^j\right). \tag{3.7}$$

特别地，我们有

$$\mathbf{E}_M^{(j)} \subset \mathbf{P}_M^{(j)} := \bigcup_{i=1}^{2^{M-j}} P_i^j, \tag{3.8}$$

因此,

$$\mathbf{E}_M \subset \mathbf{P}_M := \bigcup_{j=1}^{M} \mathbf{P}_M^{(j)}. \tag{3.9}$$

以下命题表明，$\mathbf{P}_M$ 具有 Perron 树结构，其中 P_i^j 表示“分支”， A_i^j 表示“分岔点”。注意，对于 $2 \le j \le M$，$\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中的每个 $P_i^j = P^j(\alpha)$ 都与 $\mathbf{P}_M^{(j-1)}$ 中的两个平行四边形 $P^{j-1}(\alpha \pm \epsilon_{j-1})$ 相连。

命题 3.2。 对于每个 $j = 1, \cdots, M$，平行四边形 $P_i^j \subset \mathbf{P}_M^{(j)} (i = 1, \cdots, 2^{M-j})$ 两两不交，并且相对于斜率按单调(递增)顺序排列。

证明。 当 $j = M$ 时，结论显然成立，因为$\mathbf{P}_M^{(M)}$ 中只有一个平行四边形。因此，我们假设 $j \le M-1$ 。根据 (3.2)，$\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中任意两个平行四边形的斜率之差都是 $\frac{1}{2^{M-j}}$ 的倍数。设

$$\alpha = \sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \quad \widetilde{\alpha} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\widetilde{\varepsilon}_k}{2^k}$$

为两个这样的平行四边形的斜率。不失一般性，假设它们相邻，即

$$\alpha - \widetilde{\alpha} = \frac{1}{2^{M-j}}.$$

设 $k_0 \in \{1, 2, \cdots, M-j\}$ 为满足条件的二进制位

$$\begin{cases} \varepsilon_k = \widetilde{\varepsilon}_k, & k = 1, 2, \cdots, k_0 - 1; \\ \varepsilon_{k_0} = 1,\ \widetilde{\varepsilon}_{k_0} = 0; & \\ \varepsilon_k = 0,\ \widetilde{\varepsilon}_k = 1, & k = k_0 + 1, \cdots, M - j. \end{cases}$$

然后，由 (3.4) 得，

$$\ell_\alpha(x_j) - \ell_{\widetilde{\alpha}}(x_j) = \frac{M-j-k_0+1}{M}\frac{1}{2^{k_0}} - \sum_{k=k_0+1}^{M-j}\frac{M-j-k+1}{M}\frac{1}{2^k}$$
$$= \frac{2}{M}\frac{1}{2^{k_0}} - \frac{1}{M}\frac{1}{2^{M-j}}.$$

由于 $k_0 \le M-j$，因此

$$\ell_\alpha(x_j) - \ell_{\widetilde{\alpha}}(x_j) \ge \frac{1}{M}\frac{1}{2^{k_0}} > \frac{1}{M}\frac{1}{2^{M-j}} - \frac{1}{M}\frac{1}{2^M}.$$

根据命题 3.1（iii），可知平行四边形 $P^j(\alpha)$ 的左下顶点严格高于 $P^j(\widetilde{\alpha})$ 的左上顶点（参见图 2）。由于 $P^j(\alpha)$ 与 $P^j(\widetilde{\alpha})$ 之间的垂直距离在$x = x_j$ 处达到最小值，且相邻对 $(\alpha,\ \widetilde{\alpha})$ 是任意的，因此我们得出结论：$\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中的平行四边形按斜率递增排列。命题 3.2 的证明至此完成。□

注 3.3。我们从上述证明中得到两个观察结果。

(i) 相邻平行四边形之间的垂直距离 $P^j(\alpha)$ P^j 在 $\mathbf{P}_M^{(j)}$ 处取得其最小值

$$\frac{2}{M}\frac{1}{2^{k_0}} - \frac{2}{M}\frac{1}{2^{M-j}} + \frac{1}{M}\frac{1}{2^M}; \tag{3.10}$$

尤其是，它至少为 $\frac{1}{M}\frac{1}{2^M}$，且不超过 $\frac{1}{M}$。

(ii) 当 $\alpha - \widetilde{\alpha} = 2^{-M}$ 时，通过类似的论证，可以得到

$$\ell_\alpha(0) - \ell_{\widetilde{\alpha}}(0) = \frac{2^{M-k_0+1} - M - 1}{M \cdot 2^M}; \tag{3.11}$$

特别地，$|\ell_\alpha(0) - \ell_{\widetilde{\alpha}}(0)| \ge \frac{1}{M\cdot 2^M}$ 在 M 为偶数时总是成立。

对于 $0 \le x \le 1$，记截面（见（2.1））

$$\mathbf{E}_M^x = \mathbf{E}_M|_x, \quad \mathbf{P}_M^x = \mathbf{P}_M|_x,$$

and

$$T_i^x = T_i|_x \quad (i = 1, \cdots, 2^M). \tag{3.12}$$

当 x 固定时，我们通常将这些截面视为 $\mathbb{R}$ 的子集。显然，

$$\mathbf{E}_M^x = \bigcup_{i=1}^{2^M} T_i^x$$

是由 2^M 个长度为 $\frac{1-x}{2^M}$ 的区间组成的并集。当 $x_j < x \le x_{j-1}$ 时，根据 (3.8) 和命题 3.1 (iii)，$\mathbf{E}_M^x \subset \mathbf{P}_M^x$ 可以被 2^{M-j} 个长度为 $\frac{2^j}{M\cdot 2^M} - \frac{1}{M\cdot 2^M}$ 的区间覆盖。因此

$$|\mathbf{E}_M^x| \le |\mathbf{P}_M^x| < 2^{M-j}\,\frac{2^j}{M\cdot 2^M} = \frac{1}{M}. \tag{3.13}$$

注意，(3.13)对 $j=1,\cdots,M$ 一致成立。对x 积分 (3.13) 得到 $|\mathbf{E}_M|<\frac{1}{M}$。如 [14], 所示，这足以界定相应贝西科维奇集的广义闵可夫斯基维数（详情请参见命题 4.3(iii)）。

注 3.4. 设 $P^j(\alpha)$ 是 $\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中的一个平行四边形。对于 $0\le x\le x_j$，考虑这些区间

$$\left\{T_i^x : T_i\cap P^j(\alpha)\neq\varnothing\right\}. \tag{3.14}$$

根据$\mathbf{E}_M$ 的构造（参见图 *2*），这些区间的并集是梯形 $T_i^{(j)}$ 的横截面，因此是连通的。此外，根据推论 *2.11*，并对 j 进行归纳，区间族(3.14) 在定义 *2.10* 的意义下是 $\frac{1}{M\cdot 2^M}$-连通的。

为了研究广义豪斯多夫维数，我们还需要了解$\mathbf{E}_M^x$的进一步分布性质。下文中，记

$$r_j=\frac{2^j}{M\cdot 2^M}. \tag{3.15}$$

注意，$r_0=\frac{1}{M\cdot 2^M}$，且 $r_j=2^jr_0$ 随着 j 按二进制增长。尺度 r_j（$j=1,\cdots,M$）的重要性在于，它们近似给出了 $\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中平行四边形的垂直宽度（根据命题 3.1(iii)，仅相差 r_0）。

下面的命题表明，每个截面 $\mathbf{E}_M^x\subset\mathbf{E}_M^{(j)}$ 在尺度 r_j 及以上（直至 x_{j-1}）都构成一个类 Cantor 集。为方便起见，我们将用 $\mathbf{P}_M^x$ 代替 $\mathbf{E}_M^x$。设 $I\subset\mathbb{R}$ 为一个开区间，记 $N_x(I)$ 为 $\mathbf{P}_M^x\cap I$的连通分支数。补集 $\mathbb{R}\backslash\mathbf{P}_M^x$ 的一个连通分支称为$\boldsymbol{P}_M^x$的间隙，记作 w（其长度可以是无穷大）。

命题 3.5。 假设 $x_j<x\le x_{j-1}\,(j=1,\cdots,M-1)$。设 I 为一个开区间，满足 $r_j\le|I|\le x_{j-1}$，并设 w_{max} 为与 I相交的$\mathbf{P}_M^x$的最大间隙。如果 $|I\cap w_{max}|\le\frac{|I|}{2}$，那么

$$\frac{1}{24}\frac{\frac{|I|}{r_j}}{\log\frac{|I|}{r_j}}\le N_x(I)\le 8\frac{\frac{|I|}{r_j}}{\log\frac{|I|}{r_j}}. \tag{3.16}$$

证明。根据命题3.2，$\mathbf{P}_M^x$ 的间隔随着 x 从x_j 增加到x_{j-1}而增大。因此，只需证明 $x=x_j^+$ 的命题（一般情形可由单调性得出）。

更确切地说，当 $x=x_j^+$, $N_{x_j^+}(I)$被理解为$\mathbf{E}_M^{x_j}\cap I$ 的连通分支数时。为简便起见，我们记 $C_j=\mathbf{E}_M^{x_j}$。注意，C_j 是由 2^{M-j} 个长度为 r_j-r_0 的互不相交区间组成的并。根据注 3.3 (i)，C_j 中相邻区间之间的间隙大小为

由（3.10）给出。由此可知，这些间隙的大小按垂直方向排序后，构成一个自动序列，该序列由迭代的最终结果给出：

$$\begin{cases} W_1^{(j)} = \{r_0\}, \\ W_{2^\ell-1}^{(j)} = \left\{ W_{2^{\ell-1}-1}^{(j)},\ 2^\ell r_j - 2r_j + r_0,\ W_{2^{\ell-1}-1}^{(j)} \right\}, \quad \ell = 2, \cdots, M-j. \end{cases}$$

注意，选择下标使得 $\#W_{2^\ell-1}^{(j)} = 2^\ell - 1$。还要注意，

$$\max W_{2^\ell-1}^{(j)} = 2^\ell r_j - 2r_j + r_0$$

随 ℓ 增长，并且当 $\ell \geq 2$ 时与 $2^{\ell-1} r_j$ 可比（参见图 3）。

1,3,1,7,1,3,1,15,1,3,1,7,1,3,1,31,⋯,63,⋯

FIGURE 3. C_0 中的间隙按 $M \cdot 2^M$ $(M \geq 5)$ 缩放

现在考虑开区间 $I_\ell^{(j)}$ $(\ell = 1,\ 2,\ \cdots,\ M-j+1)$，它与 C_j 有相同的最小端点，长度为 $\ell \cdot 2^{\ell-1} r_j$（见图 4）。利用上述自动序列，很容易验证

$$N_{x_j^+}\left(I_\ell^{(j)}\right) = 2^{\ell-1}.$$

因此，

$$\frac{\frac{|I_\ell^{(j)}|}{r_j}}{\log \frac{|I_\ell^{(j)}|}{r_j}} \leq N_{x_j^+}\left(I_\ell^{(j)}\right) \leq 2\frac{\frac{|I_\ell^{(j)}|}{r_j}}{\log \frac{|I_\ell^{(j)}|}{r_j}}.$$

这表明，当 $I = I_\ell^{(j)}$ 时，(3.16)成立。一般情形可通过标准的倍增和自相似论证归结为这一情形；细节从略。□

注 3.6. (i) 上述证明表明，只要 $|I| \geq r_j$，中的上界就成立； (3.16)

(ii) 特别是当 $c(I) \in \mathbf{P}_M^x$ 时，条件 $|I \cap w_{max}| \leq \frac{|I|}{2}$ 得到满足，其中 $c(I)$ 表示 I 的中心。

现在我们转而讨论 $\mathbf{E}_M$ 的分布性质。在下文中，M 将始终取 $M = 2^m$ 的形式，其中 $m \geq 1$ 为某个整数。与第 2 节一样，我们将关注 二进覆盖 $\mathbf{E}_M$，即形如 $\{Q_i\}$ 的覆盖，其中二进方形 Q_i 两两不相交，并满足 $Q_i \cap \mathbf{E}_M \neq \varnothing$。

回顾(3.15)，$r_j = 2^{-(M-j)-m}$，它现在是一个二进尺度。同样，$x_j = 1 - \frac{j}{2^m}$ 现在是一个二进有理数。

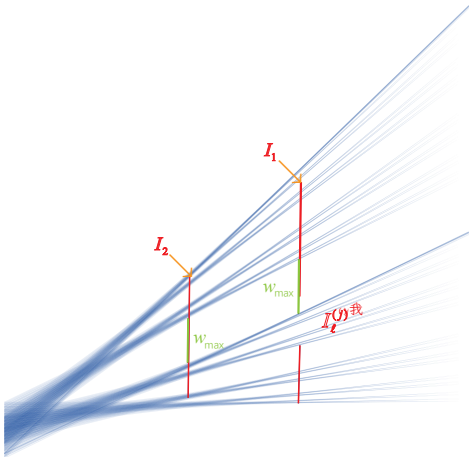


FIGURE 4. I的可能位置

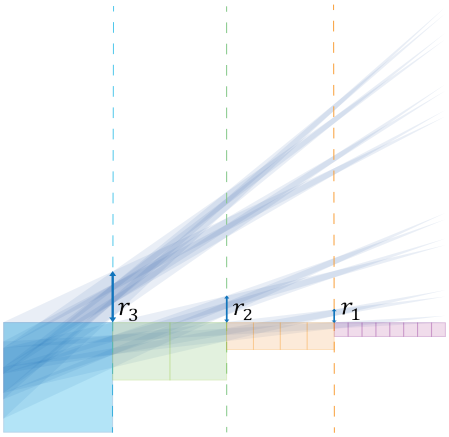


FIGURE 5. E 的自适应覆盖$_4$

定义 3.7（自适应覆盖）。对于 $j = 1, \cdots, M$，用二进方形 $\{Q_i^{(j)}\}$ 覆盖 $\mathbf{E}_M^{(j)}$，其中

$$Q_i^{(j)} \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R}, \quad r(Q_i^{(j)}) = r_j, \quad \operatorname{int}(Q_i^{(j)}) \cap \mathbf{E}_M^{(j)} \neq \varnothing.$$

集合 $\{Q_i^{adp}\} = \bigcup_{j=1}^{M} \{Q_i^{(j)}\}$。我们称 $\{Q_i^{adp}\}$ E 的自适应覆盖$\mathbf{E}_M$。

更一般地，若二进方形 Q 满足以下条件，则称其为自适应正方形

$$Q \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R} \quad \text{and} \quad r(Q) = r_j$$

对于某个 $j \in \{1, \cdots, M\}$。二进方形的并集 $F = \bigcup_i Q_i$ 称为次自适应的，如果每个 Q_i 要么满足 $r(Q_i) > \frac{1}{M}$，要么满足

$$Q \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R} \quad \text{and} \quad r(Q) \geq r_j$$

对于某个 $j \in \{1, \cdots, M\}$。

自适应覆盖 $\{Q_i^{adp}\}$ 是关于测度函数的$\mathbf{E}_M$ 的准最优覆盖

$$h(r) := r^2 \log(1/r),$$

其意义与定义 2.3 相同。为证明这一点，我们先给出一个定义。

定义 3.8（自适应测度）。给定 $\{Q_i^{adp}\}$，$F \subset \mathbb{R}^2$ 的自适应测度定义为

$$\mu(F) = \sum_{\substack{Q \in \{Q_i^{adp}\}: \\ \operatorname{int}(Q) \cap F \neq \varnothing}} h(Q). \tag{3.17}$$

注意，对于任意自适应正方形 Q,

$$\mu(Q) = \begin{cases} h(Q), & \text{if } Q \in \{Q_i^{adp}\}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

更一般地，对于任意子自适应集合 F，我们有

$$\mu(F) = \sum_{Q\in\{Q_i^{adp}\}:\, Q\subset F} h(Q). \tag{3.18}$$

因此， $\mu(\cdot)$ 在子自适应集上是有限可加的。

下面我们只关注 $\mathbf{E}_M \cap \{\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}\}$。这并不失一般性，因为可以通过缩放得到长度（至少）为 1 且斜率范围从 0 到 1 的线段。为简便起见，我们仍用 $\mathbf{E}_M$ 表示 $\mathbf{E}_M$ 的这部分，换言之，

$$\mathbf{E}_M = \mathbf{E}_M \cap \Big(\Big[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big] \times \mathbb{R} \Big). \tag{3.19}$$

类似地，我们记

$$\{Q_i^{adp}\} = \left\{ Q \in \{Q_i^{adp}\} : Q \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \mathbb{R} \right\}.$$

设 Q 是一个二进方形，记

$$(2k+1)Q = \bigcup_{\varepsilon\in\{0,\pm1,\cdots,\pm k\}} Q + (0, \varepsilon r(Q)), \quad k \ge 1. \tag{3.20}$$

命题 3.9。设 $Q^{(j)} \in \{Q_i^{adp}\}$。

(i)（小正方形）。令 $\{U_k\}$ 为 $(5Q^{(j)}) \cap \mathbf{E}_M$ 的二进制覆盖。然后

$$\mu(Q^{(j)}) \le 2 \sum_k h(U_k).$$

(ii) 设 U 为一个二进方形，且 $Q^{(j)} \subset U$.

(a) (中间正方形). 如果 $r(U) \le \sqrt{r_j}$，则

$$\mu(U) \le 96\, h(U);$$

(b)（大正方形）。如果 $\sqrt{r_j} \le r(U) \le \frac{1}{4}$，则有

$$\mu(U) \le 96\, |U| \quad and \quad |U| \le 24\, \mu(7U).$$

证明。(i) 由于 $\mu(Q^{(j)}) = h(Q^{(j)}) = h(r_j)$，只需考虑 $r(U_k) < r_j$， $\forall k$ 的情形。固定一个与 $Q^{(j)}$ 相交的平行四边形 P_i^j，它位于 $\mathbf{P}_M^{(j)}$ 中。由于 P_i^j 的斜率介于 0 和 1 之间，因此 P_i^j 中必定有一段水平宽度为 r_j 的线段被 $5Q^{(j)}$ 覆盖。因此，

$$\begin{aligned} |(5Q^{(j)}) \cap \mathbf{E}_M| &\ge |(5Q^{(j)}) \cap P_i^j| - |(5Q^{(j)}) \cap A_i^j| \\ &\ge r_j(r_j - r_0) - r_j r_0 \\ &\ge \frac{1}{2} r_j^2 \\ &= \frac{1}{2} |Q^{(j)}|. \end{aligned}$$

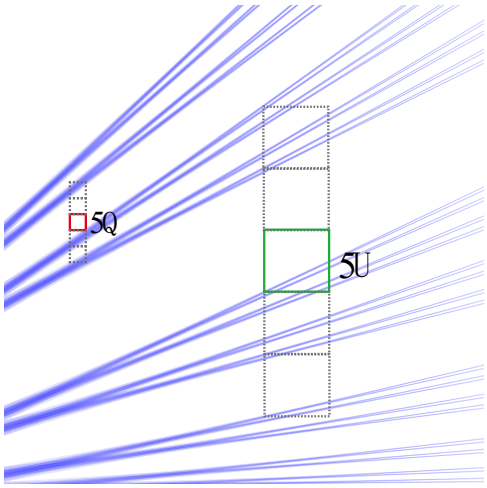


FIGURE 6. 正方形 Q 和 U 在竖直方向上延伸，以避免出现“相切”交叉

将 $5Q^{(j)}$ 分解为 5 个正方形 $\widetilde{Q}$，并对每个正方形应用引理 2.7。我们得到

$$\sum_k h(U_k) \geq \frac{1}{2} h(Q^{(j)}).$$

这就证明了（i）。

（ii）情形 $M = 2$ 可以直接验证。因此，下面我们假设 $M \geq 4$。首先，考虑情形 $r(U) \leq \frac{1}{M}$（注意 $\sqrt{r_j} \geq \frac{1}{M}$）。在这种情况下，我们有

$$Q^{(j)} \subset U \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R}.$$

记

$$N(U) = \#\{P^j \subset \mathbf{P}_M^{(j)} : P^j \cap \operatorname{int}(U) \neq \varnothing\}.$$

注意，每个自适应正方形 $Q_i^{(j)} \subset U$ 都必须与一个平行四边形$P^j \subset \mathbf{P}_M^{(j)}$相交，且满足 $P^j \cap \operatorname{int}(U) \neq \varnothing$。还要注意，竖直对齐时，至多有 3 个自适应正方形 $Q_i^{(j)}$ 能与同一个 P^j 相交。因此，

$$\mu(U) \leq 3\, N(U)\, \frac{r(U)}{r_j}\, h(r_j). \tag{3.21}$$

设 x_U 为 U 右侧的 x 坐标，并设 I 为区间的内部

$$U|_{x_U} \cup \big(U|_{x_U} + r(U)\big).$$

由于每个 P^j 的斜率都介于 0 和 1 之间，我们有

$$N(U) \leq N_{x_U}(I). \tag{3.22}$$

另一方面，由命题 3.5（见注 3.6（i））,

$$N_{x_U}(I) \le 8 \frac{\frac{2r(U)}{r_j}}{\log \frac{2r(U)}{r_j}}. \tag{3.23}$$

结合 (3.21)、(3.22) 和 (3.23)，我们得到

$$\mu(U) \le 48\, r(U)^2 \frac{\log \frac{1}{r_j}}{\log \frac{2r(U)}{r_j}}. \tag{3.24}$$

特别地，当 $r(U) \le \sqrt{r_j}$ 时，(3.24) 给出

$$\mu(U) \le 96\, r(U)^2 \log \frac{1}{r(U)} = 96\, h(U)$$

（使用$\log R \ge 1$）；当 $r(U) \ge \sqrt{r_j}$ 时，(3.24) 给出

$$\mu(U) \le 96\, r(U)^2 = 96\, |U| \tag{3.25}$$

（使用 $\log \frac{2r_{(U)}}{r_j} \ge \log \frac{1}{\sqrt{r_j}}$）。

我们转而对 $\mu(5U)$ 给出一个下界。固定 $(x_Q, y_Q) \in \mathrm{int}(Q^{(j)}) \cap \mathbf{E}_M^{(j)}$.令 I 为长度为 $r(U)$ 且以 y_Q为中心的开区间。注意，每个与 $\{x_Q\} \times I$ 相交的平行四边形 P^j 都必须完全包含在 $5U$ 中（即，P^j与 $5U$的顶部和底部均不相交）。因此,

$$\mu(5U) \ge N_{x_Q}(I) \frac{r(U)}{r_j} h(r_j).$$

另一方面，根据命题 3.5（见备注 3.6（ii）），我们有

$$N_{x_Q}(I) \ge \frac{1}{24} \frac{\frac{r(U)}{r_j}}{\log \frac{r(U)}{r_j}}.$$

结合最后两个界，我们得到

$$\mu(5U) \ge \frac{1}{24} r(U)^2 \frac{\log \frac{1}{r_j}}{\log \frac{r(U)}{r_j}} \ge \frac{1}{24} |U|, \tag{3.26}$$

其中我们使用了 $r(U) \le 1$。这就证明了在 $r(U) \le \frac{1}{M}$ 的情形下的 (*ii*)。

现在我们考虑 $r(U) > \frac{1}{M}$的情形。在这种情况下，只需证明部分 (*b*)，因为 $r(U) \le \sqrt{r_j} (\le \frac{1}{M})$ 的情形在上文已经覆盖。对于第一个界，我们进行分解

$$U = \bigcup_k U_k$$

其中，每个 U_k 都是边长为 $\frac{1}{M}$ 的二进方形。注意，根据定义，

$$\mu(U) = \sum_k \mu(U_k). \tag{3.27}$$

将 (3.25) 应用于每个满足 $\mu(U_k) \neq 0$ 的 U_k。我们有

$$\mu(U_k) \leq 96\,|U_k|.$$

因此，结合（3.27），我们得到

$$\mu(U) \leq 96 \sum_k |U_k| = 96\,|U|,$$

正如所要证明的。

第二个界的证明与上述情形 $r(U) \leq \frac{1}{M}$ 类似。像之前一样固定 (x_Q, y_Q)，并固定一条穿过 (x_Q, y_Q) 的线段 $l \subset \mathbf{E}_M$。分解

$$\begin{aligned} 7U &= \bigcup_j [x_j, x_{j-1}] \times (7U)|_{x_Q} \\ &=: \bigcup_j R_j. \end{aligned}$$

对于每个 j，固定点 $(x_{Q_j}, y_{Q_j}) \in l \cap \mathrm{int}(R_j)$。令 I_j 为以 y_{Q_j} 为中心、长度为 $r(U)$ 的开区间。那么，每个与 $\{x_{Q_j}\} \times I_j$ 相交的平行四边形 $P^j \subset \mathbf{P}_M^{(j)}$ 都必须完全包含于 R_j 中。因此，根据命题 3.5，我们有

$$\begin{aligned} \mu(R_j) &\geq N_{x_{Q_j}}(I_j)\,\frac{1/M}{r_j}\,h(r_j) \\ &\geq \frac{1}{24}\,\frac{\frac{r(U)}{r_j}}{\log \frac{r(U)}{r_j}}\,\frac{1/M}{r_j}\,h(r_j) \\ &= \frac{1}{24}\,\frac{r(U)}{M}\,\frac{\log \frac{1}{r_j}}{\log \frac{r(U)}{r_j}} \\ &\geq \frac{1}{24}\,\frac{r(U)}{M}. \end{aligned}$$

对 j 求和，得到

$$\begin{aligned} \mu(7U) &= \sum_j \mu(R_j) \\ &\geq \frac{1}{24}\,\frac{r(U)}{M}\,\frac{r(U)}{1/M} \\ &= \frac{1}{24}|U|. \end{aligned}$$

[{"id":0,"output":"这证明了 (ii)，命题 3.9 的证明也就完成了。"}] □

注 3.10。 *(i)* 由于 $|U| \leq h(U)$，由命题*3.9(ii)*可得

$$\mu(U) \leq 96\,h(U)$$

对所有二进方形 $U \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R}$， $r(U) \geq r_j$ 均成立。*(ii)* 由命题 *3.9(ii)* 的 *(b)* 部分可得

$$\mu(U) \leq 96\,|U|$$

对所有满足 $r(U) \geq \frac{1}{M}$ 的二进方形 U 均成立。

(iii) 将命题 *3.9* 中的最后一个界应用于 $U = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$，可得 $\mu(\mathbf{E}_M) \geq \frac{1}{384}$。事实上，更细致的计算可得

$$\frac{5}{32} < \mu(\mathbf{E}_M) \leq \frac{3}{4}.$$

利用命题3.9，我们现在可以应用质量分布原理，从下方估计 h-测度$\mathbf{E}_M$。为简便起见，记

$$c_0 = \inf_{M \geq 2} \mu(\mathbf{E}_M). \tag{3.28}$$

定理 3.11。对于任意 $\delta \in (0,1)$，我们有

$$\mathcal{M}_\delta(\mathbf{E}_M; h) \geq \frac{c_0}{960}.$$

证明。情形 $M = 2$ 很容易由 $|\mathbf{E}_2| = \frac{1}{16}$ 和

$$\mathcal{M}_\delta(\mathbf{E}_M; h) \geq |\mathbf{E}_M|.$$

因此，我们假设下文中 $M \geq 4$。回顾第 2 节可知，

$$\mathcal{M}_\delta(\mathbf{E}_M; h) = \sum_i h(Q_i^{opt}), \tag{3.29}$$

其中，$\{Q_i^{opt}\}$ 是相对于 h而言$\mathbf{E}_M$ 的任意一个（固定的）最优 δ覆盖。注意，由于 $\{Q_i^{opt}\}$的最优性，每个正方形 Q_i^{opt} 都满足

$$\mathrm{int}(Q_i^{opt}) \cap \mathbf{E}_M \neq \varnothing$$

（否则，利用$\mathbf{E}_M$的实心性， Q_i^{opt} 可以从覆盖中移除）。因此，我们可以将 Q_i^{opt} 分为两种情况：

$$\begin{cases} \text{Case 1: } r(Q_i^{opt}) > \frac{1}{M}, \text{ or} \\ \qquad\quad Q_i^{opt} \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R}, \quad r(Q_i^{opt}) \geq r_j, \quad \text{where } \frac{M}{4} < j \leq \frac{M}{2}; \\ \text{Case 2: } Q_i^{opt} \subset [x_j, x_{j-1}] \times \mathbb{R}, \quad r(Q_i^{opt}) < r_j, \quad \text{where } \frac{M}{4} < j \leq \frac{M}{2}. \end{cases}$$

为了与自适应覆盖 $\{Q_i^{adp}\}$进行比较，我们将 $Q^{adp} \in \{Q_i^{adp}\}$ 分为两种情况：

$$\begin{cases} \text{Case A: } Q^{adp} \subset Q_i^{opt}, \text{ for some } Q_i^{opt} \in \text{Case 1}; \\ \text{Case B: } Q^{adp} \supset Q_i^{opt}, \text{ for some } Q_i^{opt} \in \text{Case 2}. \end{cases}$$

将命题 3.9（ii）（见注 3.10（i）、（ii））应用于情形 1 中的每个 Q_i^{opt}，可得

$$\sum_{Q_i^{opt} \in \text{Case 1}} h(Q_i^{opt}) \geq \frac{1}{96} \sum_{Q_i^{opt} \in \text{Case 1}} \mu(Q_i^{opt}). \tag{3.30}$$

由于情形 1 中的每个 Q_i^{opt} 都是次自适应的，由（3.18）可得

$$\begin{aligned}\sum_{Q_i^{opt}\in \text{Case 1}} \mu(Q_i^{opt}) &= \sum_{Q_i^{opt}\in \text{Case 1}} \sum_{Q^{adp}\subset Q_i^{opt}} h(Q^{adp}) \\ &= \sum_{Q^{adp}\in \text{Case A}} h(Q^{adp}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

另一方面，对于 Q_i^{opt} 属于情形 2，我们可以写作

$$\sum_{Q_i^{opt}\in \text{Case 2}} h(Q_i^{opt}) = \sum_{Q^{adp}\in \text{Case B}} \sum_{Q_i^{opt}\subset Q^{adp}} h(Q_i^{opt}). \tag{3.32}$$

结合（3.30）、（3.31）和（3.32），我们看到

$$\begin{aligned}\sum_i h(Q_i^{opt}) &= \sum_{\text{Case 1}} h(Q_i^{opt}) + \sum_{\text{Case 2}} h(Q_i^{opt}) \\ &\geq \frac{1}{96} \sum_{\text{Case A}} \tilde{\mu}(Q^{adp}) + \sum_{\text{Case B}} \tilde{\mu}(Q^{adp}) \\ &\geq \frac{1}{96} \sum_{Q^{adp}} \tilde{\mu}(Q^{adp}), \end{aligned} \tag{3.33}$$

其中

$$\tilde{\mu}(Q^{adp}) = \begin{cases} h(Q^{adp}), & \text{if } Q^{adp}\in \text{Case A}; \\ \displaystyle\sum_{Q_i^{opt}\subset Q^{adp}} h(Q_i^{opt}), & \text{if } Q^{adp}\in \text{Case B}. \end{cases} \tag{3.34}$$

现在，写出

$$\tilde{\mu}(F) = \sum_{\substack{Q^{adp}: \\ \text{int}(Q^{adp})\cap F\neq\varnothing}} \tilde{\mu}(Q^{adp}), \tag{3.35}$$

由命题 3.9（i），我们有

$$\begin{aligned}\sum_{Q^{adp}} \tilde{\mu}(Q^{adp}) &\geq \frac{1}{5} \sum_{Q^{adp}} \tilde{\mu}(5Q^{adp}) \\ &\geq \frac{1}{10} \sum_{Q^{adp}} \mu(Q^{adp}) \\ &= \frac{1}{10}\, \mu(\mathbf{E}_M). \end{aligned} \tag{3.36}$$

结合 (3.29)、(3.33) 和 (3.36)，我们得到

$$\mathcal{M}_\delta(\mathbf{E}_M) \geq \frac{1}{960}\, \mu(\mathbf{E}_M) \geq \frac{c_0}{960}.$$

这就完成了定理 3.11 的证明。 □

定理A的证明依赖于定理 3.11 的以下（局部）版本，该版本对$\mathbf{E}_M$的“适度”膨胀副本成立。为方便记号，我们将轴平行矩形 R 的高度记为$r(R)$。

命题 3.12. 假设

$$\frac{1}{M} \le \delta \le \frac{1}{8}.$$

设 $l(x) = ax + b$ 为一条斜率为 $a \in [0,1)$ 的直线。设 $U \subset [x_j, x_{j-1}] \times [-1,1]$ 为一个二进方形，满足 $r(\widetilde{U}) = \frac{1}{M}$，其中心 $c(\widetilde{U}) \in \mathrm{cov}(\delta.\mathbf{E}_M + l)$。那么，对于任意 $\delta_1 \in (0,1)$，都有

$$\mathcal{M}_{\delta_1}\big(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap (\delta.\mathbf{E}_M + l); h\big) \ge c_1 |\widetilde{U}|,$$

其中 $c_1 = \frac{1}{960} \cdot \frac{1}{24^{24}}$。

证明。 应用引理 2.6 和引理 2.5，我们有

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{\delta_1}\big(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap (\delta.\mathbf{E}_M + l); h\big) \\ \ge &\frac{1}{3} \cdot \mathcal{M}_{\delta_1}\big(\mathrm{int}(\widetilde{U} - l) \cap \delta.\mathbf{E}_M; h\big) \\ \ge &\frac{1}{3}\,\delta \cdot \mathcal{M}_{\delta_1}\big(\mathrm{int}(\delta^{-1}.(\widetilde{U} - l)) \cap \mathbf{E}_M; h\big). \end{aligned} \tag{3.37}$$

令 $\widetilde{S}$ 为与 $\widetilde{U} - l$ 同心、边长为 $r(\widetilde{S}) = \frac{1}{2} r(\widetilde{U})$ 的正方形（注意 $\widetilde{S}$，S 不一定是二进制的）。于是 $S \subset \mathrm{int}(\overline{U - l})$。因此，

$$(3.37) \ge \frac{1}{3}\,\delta \cdot \mathcal{M}_{\delta_1}\big((\delta^{-1}.\widetilde{S}) \cap \mathbf{E}_M; h\big). \tag{3.38}$$

如上文定理 3.11 的证明中所示，记

$$\mathcal{M}_{\delta_1}\big((\delta^{-1}.\widetilde{S}) \cap \mathbf{E}_M; h\big) = \sum_i h(Q_i^{opt}), \tag{3.39}$$

其中 $\{Q_i^{opt}\}$ 是相对于 h 的 $(\delta^{-1}.\widetilde{S}) \cap \mathbf{E}_M$ 的最优 δ_1-覆盖。无 w
将 Q_i^{opt} 分类为两种情况：

$$\begin{cases} \text{Case 1: } r(Q_i^{opt}) \ge r_j; \\ \text{Case 2: } r(Q_i^{opt}) < r_j, \end{cases}$$

并相应地，将 $Q^{adp} \in \{Q_i^{adp} : \ Q_i^{adp} \subset \delta^{-1}.\widetilde{S}\}$ 分类为

$$\begin{cases} \text{Case A: } Q^{adp} \subset Q_i^{opt}, \text{ for some } Q_i^{opt} \in \text{Case 1}; \\ \text{Case B: } Q^{adp} \supset Q_i^{opt}, \text{ for some } Q_i^{opt} \in \text{Case 2}. \end{cases}$$

应用命题3.9 (ii)和 (3.18)于 $Q_i^{opt} \in$ 情形 1。我们有

$$\sum_{Q_i^{opt} \in \text{Case 1}} h(Q_i^{opt}) \ge \frac{1}{96} \sum_{Q^{adp} \in \text{Case A}} h(Q^{adp}). \tag{3.40}$$

另一方面，

$$\sum_{Q_i^{opt}\in \text{Case 2}} h(Q_i^{opt}) \geq \sum_{Q^{adp}\in \text{Case B}} \sum_{Q_i^{opt}\subset Q^{adp}} h(Q_i^{opt}). \tag{3.41}$$

因此，将 $\tilde{\mu}(Q^{adp})$ 按照 (3.34) 书写，并结合 (3.40) 和 (3.41)，我们得到

$$\sum_i h(Q_i^{opt}) \geq \frac{1}{96} \sum_{Q^{adp}\subset \delta^{-1}.\widetilde{S}} \tilde{\mu}(Q^{adp}). \tag{3.42}$$

令 $\widetilde{R}$为与 $\delta^{-1}.\widetilde{S}$同心的矩形，其底边为 $r(\widetilde{S})$，高度

$$r(\widetilde{R}) = \delta^{-1} r(\widetilde{S}) - 4r_j.$$

然后，按照（3.35）将 $\tilde{\mu}(F)$ 写成，

$$\begin{aligned}\sum_{Q^{adp}\subset \delta^{-1}.\widetilde{S}} \tilde{\mu}(Q^{adp}) &\geq \frac{1}{5} \sum_{Q^{adp}\subset \widetilde{R}} \tilde{\mu}(5Q^{adp}) \\ &\geq \frac{1}{10} \sum_{Q^{adp}\subset \widetilde{R}} \mu(Q^{adp}),\end{aligned} \tag{3.43}$$

其中第二个不等式中使用了命题3.9(i)。为从下方估计$\widetilde{\ }$(3.43)，记 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 为 R的中心。根据假设$\widetilde{\ }$，即 $c(U) \in \text{cov}(\delta.\mathbf{E}_M + l)$，我们有$(\tilde{x},\tilde{y}) \in \text{cov}(\mathbf{E}_M)$。因此，根据注 3.3 ($i$)，我们可以找到 $(\tilde{x},\hat{}y) \in \mathbf{E}_M$，使得 $|\hat{}y - \underline{\tilde{y}}| \leq \frac{1}{2M}$。令 I 为以 $\hat{}y$ 为中心的区间，其

$$|I| = \delta^{-1} r(\widetilde{S}) - 8r_j - \frac{3}{2M}.$$

然后，按照 (3.26) 的证明中的论证，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{Q^{adp}\subset \widetilde{R}} \mu(Q^{adp}) &= \#\{Q^{adp} : Q^{adp} \subset \widetilde{R}\} \cdot h(r_j) \\ &\geq N_{\tilde{x}}(I)\, \frac{r(\widetilde{S})}{r_j}\, h(r_j) \\ &\geq \frac{1}{24} \cdot \frac{\delta^{-1}|\widetilde{U}|}{8},\end{aligned} \tag{3.44}$$

其中我们用到了 $|I| \geq \frac{1}{2}\delta^{-1}r(\widetilde{S})$。结合 (3.38)、(3.39)、(3.42)、(3.43) 和 (3.44)，我们得到

$$\mathcal{M}_{\delta_1}\big(\text{int}(\widetilde{U}) \cap (\delta.\mathbf{E}_M + l); h\big) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{960} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} \cdot |\widetilde{U}|.$$

这就完成了命题 3.12 的证明。 □

4. Construction of $E_{\{M_n\}}$

如上一节所述（见 (3.19)），只需考虑包含长度至少为$1\ 4$ 、斜率介于 0 和 1 之间的线段的集合 E 。更具体地说，下文将紧集 $^{-}E \subset \mathbb{R}^2$称为 Besicovitch 集，如果

$$E \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \mathbb{R},$$

$|E| = 0$，而 E 包含如下形式的线段

$$y = ax + b(a), \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}$$

对于每个斜率 $a \in [0, 1]$。

4.1. 构造。 本节中，我们基于上一节构造的 Kakeya 型集 $\mathbf{E}_M$ ，构造一族 Besicovitch 集。该构造基于 [4], [21], [14], 和 [25], 中的思想，但作了一些改进。

给定一个正整数的非递减序列 $\{m_n : \ n \ge 1\}$，其中$m_n \to \infty$。记作 $M_n = 2^{m_n}$，我们将使用 $\{\mathbf{E}_{M_n} : \ n \ge 1\}$ 来归纳构造一个 Kakeya 型集序列 $\{\mathbf{F}_n : \ n \ge 1\}$ ，其极限将成为一个 Besicovitch 集。该 Besicovitch 集由序列 $\{M_n\}$ 确定，并记为 $E_{\{M_n\}}$。具有如上 $\{M_n\}$ 的 $E_{\{M_n\}}$ 将记为 $\mathcal{K}$。

为了描述这一构造，我们需要一些记号。回想一下，$\mathbf{E}_M$ 包含一族线段。 (4.1)

$$\mathbb{E}_M := \Big\{ \ell_\alpha(x) = \alpha x + \beta,\ 0 \le x \le 1 : \\ \alpha = \sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \ \ (\varepsilon_k = 0, 1), \ \ \beta = -\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \frac{(k-1)\varepsilon_k}{2^k} \Big\}. \tag{4.1}$$

对于 $P^j(\alpha) \subset \mathbf{P}_M^{(j)}$ ，定义

$$\mathbb{E}_M^{(\alpha)} = \big\{ \ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_M : \ell_{\alpha'} \cap P^j(\alpha) \ne \varnothing \big\}. \tag{4.2}$$

由命题 3.2 可知，显然的是

$$\mathbb{E}_M = \bigcup_{\alpha:\, P^j(\alpha) \subset \mathbf{P}_M^{(j)}} \mathbb{E}_M^{(\alpha)}, \quad j = 1, \cdots, M.$$

注意，等价地，我们有（见（3.6））

$$\mathbb{E}_M^{(\alpha)} = \{ \ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_M : \alpha - \epsilon_j \le \alpha' < \alpha + \epsilon_j \}.$$

特别地，当 $2 \le j \le M$ 时，我们有

$$\mathbb{E}_M^{(\alpha)} = \bigcup_{\pm} \mathbb{E}_M^{(\alpha \pm \epsilon_{j-1})} \tag{4.3}$$

（注意到 $\epsilon_{j-1} = \epsilon_j/2$）。

定义 4.1。 设 $l(x) = ax + b\ (0 \le x \le 1)$ 是一条线段，并设$\delta > 0$。定义三角形 δ-邻域： l

$$T_\delta^-(l) = \big\{(x,y):\ l(x) + \delta(x-1) \le y \le l(x),\ 0 \le x \le 1\big\},$$
$$T_\delta^+(l) = \big\{(x,y):\ l(x) \le y \le l(x) + \delta x,\ 0 \le x \le 1\big\},$$

and $T_\delta(l) = T_\delta^-(l) \cup T_\delta^+(l)$。

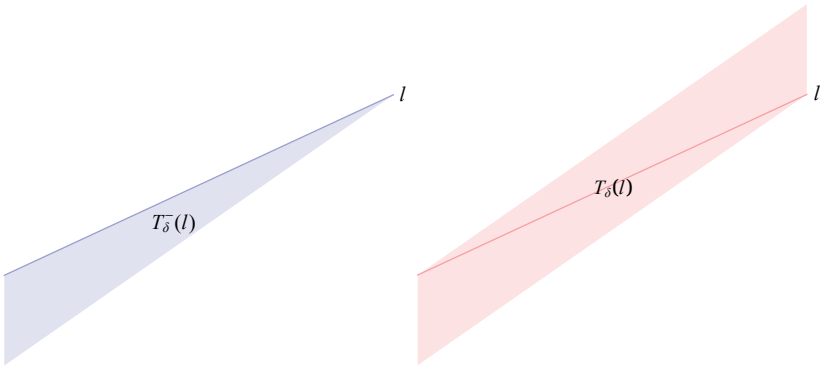


FIGURE 7. l的三角形邻域 δ

注意，对于 $\delta = 2^{-M}$，我们有 $T_i = T_\delta^-(\ell_{\alpha_i})$（见 (3.4)），因此

$$\mathbf{E}_M = \bigcup_{\ell \in \mathbb{E}_M} T_\delta^-(\ell). \tag{4.4}$$

类似地，对于 $\delta = 2^{-M}$，我们定义

$$\mathbf{E}_M^+ = \bigcup_{\ell \in \mathbb{E}_M} T_\delta^+(\ell), \tag{4.5}$$

并根据 (3.7)，定义

$$\mathring{\mathbf{E}}_M = \bigcup_{j=1}^{\frac{M}{2}} \mathring{\mathbf{E}}_M^{(j)} := \bigcup_{j=1}^{\frac{M}{2}} \bigcup_{i=1}^{2^{M-j}} \mathring{P}_i^j \tag{4.6}$$

其中

$$\mathring{P}_i^j := P_i^j \cap \big(P_i^j - \delta(x-1)\big) \tag{4.7}$$

（见 (2.6)）。注意 $\mathbf{E}_M^{\circ} \not\subset \mathbf{E}_M$。

定义 4.2。 (i) 令 $\mathbb{F}$ 为具有有限斜率的直线族。定义

$$T_\delta(\mathbb{F}) = \bigcup_{l \in \mathbb{F}} T_\delta(l).$$

(ii) 令 $\mathbb{E}$ 与 $\mathbb{F}$ 为两个具有有限斜率的直线族。定义

$$\mathbb{F} + \delta.\mathbb{E} = \{l(x) + \delta \cdot \ell(x) : l \in \mathbb{F},\ \ell \in \mathbb{E}\}.$$

现在我们可以给出 $E_{\{M_n\}}$ 的构造。假设该序列

$$\{M_n = 2^{m_n} : n \geq 1\}$$

已给出。Kakeya 型集 $\mathbf{F}_n$ 具有如下形式

$$\mathbf{F}_n = T_{\delta_n}(\mathbb{F}_n), \tag{4.8}$$

其中， $\mathbb{F}_n$ 是通过以下方式归纳定义的直线族

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{n-1} + \delta_{n-1}.\mathbb{E}_{M_n}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{4.9}$$

其中 $\mathbb{F}_0 = \{0\}$ 和 $\delta_n = (\#\mathbb{F}_n)^{-1}$。因此， $\delta_0 = 1, \mathbb{F}_1 = \mathbb{E}_{M_1}$,

$$\#\mathbb{F}_n = 2^{M_1} \cdots 2^{M_n},$$

and

$$\delta_n = 2^{-M_1} \cdots 2^{-M_n}. \tag{4.10}$$

注意， $\mathbb{F}_n$ 中包含的斜率由下式给出

$$j\delta_n = \frac{j}{\#\mathbb{F}_n}, \quad j = 0, 1, \cdots, (\#\mathbb{F}_n) - 1.$$

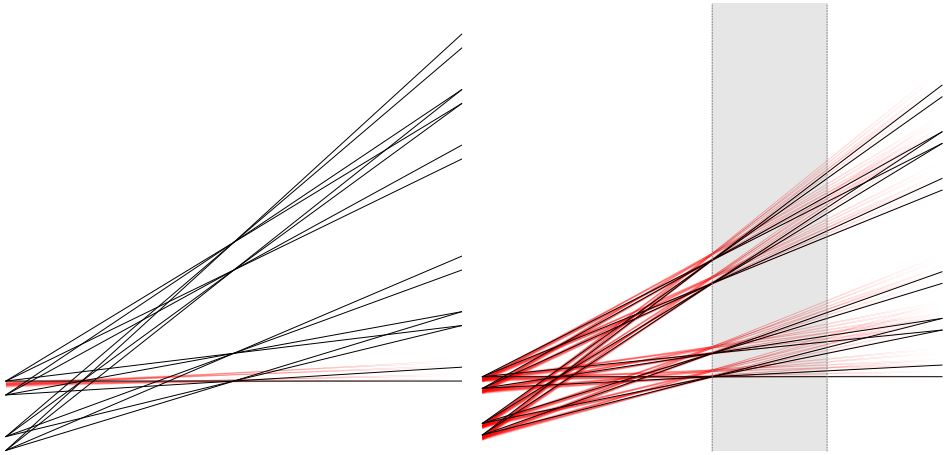
另请注意，由于 $0 \in \mathbb{E}_M$，我们有

$$\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{F}_n \subset \cdots. \tag{4.11}$$

现在由（4.8）定义$\mathbf{F}_n$ ，并令

$$E_{\{M_n\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n \tag{4.12}$$

（这显然是一个紧集）。至此， $E_{\{M_n\}}$ 的构造完成。



(a) $\mathbb{F}_3^{(0)} = $ — $^{\frac{1}{16}.\mathbb{E}_4}$ (红色)

(b) $\mathbb{F}_3 = \bigcup_{j=0}^{15} \mathbb{F}_3^{(j/16)}$

FIGURE 8. $\mathbb{F}_2$ (黑色)，且当.....时 $\mathbb{F}_3$ (红色)
$M_1 = M_2 = 2$, $M_3 = 4$

请注意， $E_{\{M_n\}}$ 最初定义在 $x=0$ 和 $x=1$之间。不过，为了简便起见，我们将其定义范围限制为 $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\times\mathbb{R}$（见图8.(b)），正如我们在第 3 节（见 (3.19)）中对 $\mathbf{E}_M$ 所做的那样。

我们对构造作一些说明，并引入更多记号。设 $l_a := ax+b \in \mathbb{F}_n$ 是通过以下方式得到的

$$l_a(x) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j-1}\cdot \ell_{\alpha_j}(x),$$

其中 $\ell_{\alpha_j} = \alpha_j x + \beta_j \in \mathbb{E}_{M_j\circ}$ 于是

$$a = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j-1}\alpha_j, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j-1}\beta_j. \tag{4.13}$$

根据 (4.11)，这为所有二进有理数$a\in[0,1)$ 定义了一个函数 $b = b(a)$。当 $a=1$，或当 $a\in[0,1)$ 不是二进有理数时，我们记作

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j-1}\alpha_j \quad \text{(uniquely)}$$

并定义

$$b(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j-1}\beta_j. \tag{4.14}$$

˜也定义 $b(0)=0$ 以及

$$\tilde{b}(a) = \lim_{\tilde{a}\to a^-} b(\tilde{a}), \quad a\in(0,1]. \tag{4.15}$$

˜ ˜容易验证， $b(a)$定义良好，并且当 a不是(0,1)中的二进有理数时，满足 $b(a)=b(a)$。[1] 因此，我们得到一个直线族

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_\infty :=& \big\{ l_a := ax+b(a) : a\in[0,1]\big\}\\ &\cup \big\{ \tilde{l}_a := ax+\tilde{b}(a) : a\in[0,1]\big\}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

对于 $l_a\in\mathbb{F}_{n-1}$，我们记作（参见图8 (a)）

$$\mathbb{F}_n^{(a)} = \{l_a\} + \delta_{n-1}.\mathbb{E}_{M_n} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_n^{(a)} = T_{\delta_n}(\mathbb{F}_n^{(a)}).$$

根据定义，我们有

$$\mathbb{F}_n = \bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_{n-1}} \mathbb{F}_n^{(a)}, \quad \mathbf{F}_n = \bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_{n-1}} \mathbf{F}_n^{(a)}. \tag{4.17}$$

注意，根据定义 4.1 和仿射变换，

$$\mathbf{F}_n^{(a)} = \delta_{n-1}.(\mathbf{E}_{M_n}\cup\mathbf{E}_{M_n}^{+}) + l_a. \tag{4.18}$$

我们还将考虑（见（4.6））

$$\mathring{\mathbf{F}}_n := \bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_{n-1}} \mathring{\mathbf{F}}_n^{(a)}, \quad \text{where } \mathring{\mathbf{F}}_n^{(a)} := \delta_{n-1}.\mathring{\mathbf{E}}_{M_n} + l_a, \tag{4.19}$$

[1] Theorem 6.1 (iii) below shows that $\tilde{b}(a)\neq b(a)$, when a is a dyadic rational in $(0,1)$.

and

$$\partial \mathbf{F}_n := \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} \partial \mathbf{F}_n^{(a)}, \quad \text{where } \partial \mathbf{F}_n^{(a)} := \delta_{n-1}.\mathrm{bdry}(\mathbf{E}_{M_n}) + l_a. \tag{4.20}$$

注意，$\overset{\circ}{\mathbf{F}}_n \subset \mathbf{F}_n$，因为 $\overset{\circ}{\mathbf{E}}_M \subset \mathbf{E}_M \cup \mathbf{E}_M^+$。

设 $\mathbb{F}$ 是一族有限斜率的直线。当上下文明确时，我们常用相同的记号表示直线集

$$\bigcup_{l \in \mathbb{F}} \big\{(x, l(x)) : 0 \le x \le 1\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

有鉴于此，我们定义

$$\overline{\mathbf{E}}_M = \mathrm{cov}(\mathbb{E}_M). \tag{4.21}$$

注意，对于 $P_i^j = P^j(\alpha) \subset \mathbf{P}_M^{(j)}$，我们有（见（4.7））

$$\mathring{P}_i^j = cov\big(\mathbb{E}_M^{(\alpha)}\big), \quad x_j \le x \le x_{j-1}, \tag{4.22}$$

或者，更简洁地说，

$$\mathring{P}_i^j = cov\big(\{\ell_{\alpha-\delta}, \ell_\alpha\}\big), \tag{4.23}$$

其中 $\delta = 2^{-M}$ 和 $\ell_{\alpha-\delta}$（分别是 ℓ_α）是 $\mathbb{E}_M^{(\alpha)}$ 中斜率为 $\alpha - \delta$（分别为 α）的直线。特别地，由（4.6）可知，这意味着 $\overline{\mathbf{E}_M} \subset \mathbf{E}_M$。另定义

$$\overline{\mathbf{F}}_n = \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} \overline{\mathbf{F}}_n^{(a)}, \quad \text{with } \overline{\mathbf{F}}_n^{(a)} := \delta_{n-1}.\overline{\mathbf{E}}_{M_n} + l_a. \tag{4.24}$$

注意 ösd

$$\overline{\mathbf{F}}_n^{(a)} = \mathrm{cov}(\mathbb{F}_n^{(a)}). \tag{4.25}$$

由 (4.19) 和 (4.17)，我们有

$$\mathring{\mathbf{F}}_n \subset \overline{\mathbf{F}}_n \subset \mathbf{F}_{n-1}, \quad n \ge 1.$$

4.2. F 的性质$_n$ 和 $E_{\{M_n\}}$。 $E_{\{M_n\}}$ 的定义在下面的命题中得到了阐明。

命题 4.3。令$\mathbf{F}_n$ 和 $E_{\{M_n\}}$ 如上。则以下结论成立。(*i*) $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{F}_n \supset \cdots$。(*ii*) $E_{\{M_n\}} = \mathbb{F}_\infty$。特别地，$E_{\{M_n\}}$ 是一个直线集。(*iii*) 如果 $\{M_n\}$ 严格递增，则

$$\mathcal{N}_{\delta_n}(E_{\{M_n\}}) \cdot \delta_n^2 \log \frac{1}{\delta_n} \le \frac{1}{2} + o(1), \quad as\ n \to \infty.$$

证明。(*i*) 令 $\delta = 2^{-M}$。根据 (4.1)，由凸性可容易验证，每个 $\ell \in \mathbb{E}_M$ 都满足

$$x - 1 \le \ell(x) + \delta(x - 1)$$

and

$$\ell(x) + \delta x \le x$$

当 $0 \le x \le 1$ 时。根据定义，这意味着

$$T_\delta(\mathbb{E}_M) \subset T_1(y=0). \tag{4.26}$$

经过仿射变换后可知，对每个 $l_a \in \mathbb{F}_{n-1}$，都有

$$T_{\delta_n}(\mathbb{F}_n^{(a)}) \subset T_{\delta_{n-1}}(l_a). \tag{4.27}$$

因此，由 (4.17) 和 (4.8) 可得

$$\mathbf{F}_n = \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} \mathbf{F}_n^{(a)} \subset \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} T_{\delta_{n-1}}(l_a) = \mathbf{F}_{n-1}.$$

这就证明了 (i)。
(ii) 由于 $\mathbb{F}_n \subset \mathbb{F}_{n+1}$ and $\mathbb{F}_{n+k} \subset \mathbf{F}^{n+k} (k = 1, 2, \cdots)$，由 (4.12) 可得 $\mathbb{F}_n \subset E_{\{M_n\}}, n = 1, 2, \cdots$。因此，记

$$\mathbb{F}_{dya} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n,$$

我们有 $\mathbb{F}_{dya} \subset E_{\{M_n\}}$。由 $E_{\{M_n\}}$ 的紧性可知，这意味着 cl($\mathbb{F}_{dya}$) $\subset E_{\{M_n\}}$。另一方面，从 (4.16) 中 $\mathbb{F}_\infty$ 的定义容易看出，$\mathbb{F}_\infty \subset$cl($\mathbb{F}_{dya}$)。因此

$$\mathbb{F}_\infty \subset \mathrm{cl}(\mathbb{F}_{dya}) \subset E_{\{M_n\}}.$$

反过来，设 $x \in E_{\{M_n\}}$。注意到 $T_\delta(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}(\delta)$，我们有

$$x \in \mathbf{F}_n \subset \mathbb{F}_n(\delta_n) \subset \mathbb{F}_{dya}(\delta_n), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

取 $n \to \infty$。这意味着 $x \in$cl($\mathbb{F}_{dya}$)。因此 $E_{\{M_n\}} \subset$ cl($\mathbb{F}_{dya}$)。剩下要证明 cl($\mathbb{F}_{dya}$) $\subset \mathbb{F}_\infty$。由 (4.13)，我们有 $\mathbb{F}_{dya} \subset \mathbb{F}_\infty$。另一方面，由 (4.14)、(4.15) 以及标准紧性论证（参见 [11, 第 3.1 节(3)]），$\mathbb{F}_\infty$ 构成一个闭集。因此 cl($\mathbb{F}_{dya}$) $\subset \mathbb{F}_\infty$。这就证明了 (ii)。(iii) 该证明是对 [14, 引理 1.1] 的改进。固定 $l_a \in \mathbb{F}_{n-1}$。鉴于 (4.18) 和分解 (3.7)，j 带中的 $\mathbf{F}_n^{(a)}$每个（扩展的）平行四边形的垂直宽度都小于

$$\delta_{n-1} \frac{1}{M_n\, 2^{M_n - j}} + \delta_n,$$

因此至多可以用以下数量覆盖

$$\frac{\frac{1}{M_n}}{\delta_n} \times \left(\frac{\delta_{n-1} \frac{1}{M_n\, 2^{M_n-j}} + \delta_n}{\delta_n} + 3 \right) = \frac{1}{\delta_n^2\, M_n} \Big(\frac{\delta_{n-1}}{M_n\, 2^{M_n-j}} + 4\delta_n \Big)$$

许多 $\delta_n \times \delta_n$ 正方形。由于有 2^{M_n-j} 许多这样的平行四边形（$\frac{M_n}{4} < j \le \frac{M_n}{2}$），因此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n^{(a)}) &\le \sum_{j=\frac{M_n}{4}+1}^{\frac{M_n}{2}} \frac{1}{\delta_n^2 M_n}\Big(\frac{\delta_{n-1}}{M_n} + 4\delta_n 2^{M_n-j}\Big) \\ &\le \frac{1}{\delta_n^2 M_n}\Big(\frac{\delta_{n-1}}{4} + 4\delta_n 2^{3M_n/4}\Big).\end{aligned}$$

因此，由(4.12)和(4.17)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\delta_n}(E_{\{M_n\}}) &\le \frac{1}{\delta_{n-1}} \cdot \frac{1}{\delta_n^2 M_n}\Big(\frac{\delta_{n-1}}{4} + 4\delta_n 2^{3M_n/4}\Big) \\ &\le \frac{1}{\delta_n^2 M_n}\Big(\frac{1}{4} + 4 \cdot 2^{-M_n/4}\Big),\end{aligned}$$

或者等价地，

$$\mathcal{N}_{\delta_n}(E_{\{M_n\}}) \cdot \delta_n^2 M_n \le \frac{1}{4} + 4 \cdot 2^{-M_n/4}. \tag{4.28}$$

另一方面，由于 $\{M_n\}$ 严格递增，我们有

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n \le 2M_n, \tag{4.29}$$

因此 $\log \frac{1}{\delta_n} \le 2M_n$. 将此与 (4.28) 结合，我们得到

$$\mathcal{N}_{\delta_n}(E_{\{M_n\}}) \cdot \delta_n^2 \log\frac{1}{\delta_n} \le \frac{1}{2} + 8 \cdot 2^{-M_n/4}.$$

这就证明了 (iii)，命题 4.3 的证明也就完成了。 □

注 4.4. 上述命题 *4.3 (iii)* 的证明还给出了

$$\mathcal{N}_{\delta_n}(\partial\mathbf{F}_n) \cdot \delta_n^2 M_n \le 7 \cdot 2^{-M_n/4}, \quad n \ge 1. \tag{4.30}$$

$\mathbf{F}_n$ 的进一步性质总结于以下引理中。它们将在下一节定理 5.1 的证明中使用。与之前一样，我们将 $\mathbf{F}_n$、 $\mathring{\mathbf{F}}_n$ 和 $\overline{\mathbf{F}}_n$ 的定义限制在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times \mathbb{R}$ 上。

引理 4.5。 对于 $n \ge 1$，以下结论成立。

(i) ($\mathbf{F}_{n+1}$ 在$\mathbf{F}_n$中的稠密性)

$$\mathring{\mathbf{F}}_n \subset \overline{\mathbf{F}}_{n+1}. \tag{4.31}$$

(ii) $\mathbf{F}_{n+1}$ 在$\mathbf{F}_n$中的多孔性)

$$\mathring{\mathbf{F}}_n \subset \mathbf{F}_{n+1}\Big(\frac{\delta_n}{2M_{n+1}}\Big).$$

(iii) (边界厚度)

$$\mathbf{F}_n \backslash \mathring{\mathbf{F}}_n \subset (\partial\mathbf{F}_n)(\delta_n).$$

证明。 (*i*) 当 $\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{M_n}$ 时，证明更加微妙；当 $x \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{M_n}$ 时，则相对简单。下面我们给出一个统一的证明。

由 (4.19)，我们有

$$\mathring{\mathbf{F}}_n = \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} \left(\delta_{n-1}.\mathring{\mathbf{E}}_{M_n} + l_a\right). \tag{4.32}$$

另一方面，由 (4.24) 可知，

$$\overline{\mathbf{F}}_{n+1} = \bigcup_{l_{a'} \in \mathbb{F}_n} \left(\delta_n.\overline{\mathbf{E}}_{M_{n+1}} + l_{a'}\right).$$

利用 (4.9)，我们还可以进一步写成

$$\overline{\mathbf{F}}_{n+1} = \bigcup_{l_a \in \mathbb{F}_{n-1}} \bigcup_{\ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_{M_n}} \left(\delta_n.\overline{\mathbf{E}}_{M_{n+1}} + \delta_{n-1} \cdot \ell_{\alpha'} + l_a\right). \tag{4.33}$$

比较（4.32）和（4.33）可知，只需证明

$$\mathring{\mathbf{E}}_{M_n} \subset \bigcup_{\ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_{M_n}} \left(2^{-M_n}.\overline{\mathbf{E}}_{M_{n+1}} + \ell_{\alpha'}\right). \tag{4.34}$$

注意，这本质上是带有 $n = 1$ 的 (4.31)，因为 $\mathbb{F}_1 = \mathbb{E}_{M_1}$, $\delta_1 = 2^{-M_1}$。不失一般性，我们证明 $n = 1$ 情形下的 (4.34)，假设

$$2 \le M_1 \le M_2, \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}.$$

$M_1 = 2$ 的情形相对简单，可以直接验证。因此，我们假设 $M_1 \ge 4$。为简便起见，记 $\delta_2 = 2^{-M_2}$。根据定义（见 (4.6)），

$$\mathring{\mathbf{E}}_{M_1} = \bigcup_{j=1}^{\frac{M_1}{2}} \bigcup_{i=1}^{2^{M_1-j}} \mathring{P}_i^j,$$

其中 $P_i^j (i = 1, \cdots, 2^{M_1-j})$ 是 $\mathbf{P}_{M_1}^{(j)}$ 中的平行四边形。因此，记 $P_i^j = P^j(\alpha)$，只需证明

$$\mathring{P}^j(\alpha) \subset \bigcup_{\ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}} \left(\delta_1.\overline{\mathbf{E}}_{M_2} + \ell_{\alpha'}\right), \quad \frac{M_1}{4} < j \le \frac{M_1}{2}. \tag{4.35}$$

我们通过截面证明（4.35）。固定

$$x \in [x_j, x_{j-1}] := \left[1 - \frac{j}{M_1}, 1 - \frac{j-1}{M_1}\right].$$

记作

$$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x) = \left\{\ell_{\alpha'}(x) : \ell_{\alpha'} \in \mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

由 (4.22)，可得

$$\mathring{P}^j(\alpha)\big|_x = co\left(\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)\right).$$

另一方面，

$$\bigcup_{\ell_{\alpha'}\in\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}}\left(\delta_1.\overline{\mathbf{E}}_{M_2}+\ell_{\alpha'}\right)\big|_x=\bigcup_{\ell_{\alpha'}\in\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}}\left(\delta_1\cdot\overline{\mathbf{E}}_{M_2}\big|_x+\ell_{\alpha'}(x)\right)\tag{4.36}$$

是由将 $\delta_1\cdot\mathbf{E}_{M_2}\big|_x$ 平移 $\ell_{\alpha'}(x)$ 得到的区间之并。注意，当 $0\in\mathbb{E}_{M_2}$ 时，$\overline{0}\in\mathbf{E}_{M_2}|_{x\circ}$ 因此，$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)$ 包含于并集 (4.36) 中。要证明 $co\big(\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)\big)$ 也满足同样的结论，只需证明并集 (4.36) 是连通的。根据定义 2.8，这等价于：

$$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)\ \text{ is }\ \delta_1\big|\overline{\mathbf{E}}_{M_2}|_x\big|\text{-dense.}\tag{4.37}$$

为证明 (4.37)，我们将用 $\mathbf{E}_{M_2}$ 的子集 cov($\{0,\ell_{1-\delta_2}\}$) 取代它（其中$\ell_{1-\delta_2}$ 是 $\mathbb{E}_{M_2}$ 中斜率为 $1-\delta_2$ 的线段），并证明事实上，

$$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)\ \text{ is }\ \delta_1\ell_{1-\delta_2}(x)\text{-dense.}\tag{4.38}$$

注意，由 (3.4) 可知，

$$\ell_{1-\delta_2}(x)=(1-\delta_2)x-\frac{1}{M_2}+\frac{\delta_2}{M_2}+\delta_2.\tag{4.39}$$

因此，确实有，

$$\ell_{1-\delta_2}(x)\geq\ell_{1-\delta_2}(1/2)>0,\quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1.$$

另请注意，由 (4.39) 可知，

$$0\leq x-\ell_{1-\delta_2}(x)<\frac{1}{M_2},\quad 0\leq x\leq 1.\tag{4.40}$$

因此，鉴于 (3.5) 和 (4.26)，$[0,\ell_{1-\delta_2}(x)]$ 从 $\mathbf{E}_{M_2}|_x$ 两侧各缩短了不到 $\overline{1}/M_2$ 。

现在由 (4.3)，我们可以写成

$$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha)}(x)=\bigcup_{\pm}\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha\pm\epsilon_{j-1})}(x),\quad\text{with}\quad\epsilon_{j-1}=\frac{1}{2^{M_1-j+2}}.\tag{4.41}$$

由命题 3.2，$\mathbb{E}^{(\alpha\pm\epsilon_{j-1})}{}_{M_1}(x)$ 由这些区间的上端点组成（见（3.12）和（4.4））

$$\left\{T_i^x:T_i\cap P^{j-1}(\alpha\pm\epsilon_{j-1})\neq\varnothing\right\},$$

其中，T_i 是$\mathbf{E}^{M_1}$中的三角形。根据注 3.4，这些区间构成一个$\frac{\delta_1}{M_1}$-连通族。因此，根据定义 2.10，

$$\mathbb{E}_{M_1}^{(\alpha\pm\epsilon_{j-1})}(x)\ \text{ is }\ \Big(\delta_1(1-x)-\frac{\delta_1}{M_1}\Big)\text{-dense}\tag{4.42}$$

（注意 $|T_i^x| = \delta_1(1-x)$）。另一方面，由 (4.40),

$$\begin{aligned}\delta_1 \ell_{1-\delta_2}(x) &> \delta_1\Big(x - \frac{1}{M_2}\Big)\\ &\geq \delta_1(1-x) - \frac{\delta_1}{M_1}, \qquad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

结合 (4.42)，可知 $\mathbb{E}^{(\alpha-\epsilon_{j-1})}{}_{M_1}(x)$ 和 $\mathbb{E}^{(\alpha+\epsilon_{j-1})}{}_{M_1}(x)$ 都是 $\delta_1\ell_{1-\delta_2}(x)$-稠密的。

要对 $\mathbb{E}^{(\alpha)}_{M_1}(x)$ 得到相同结论，我们使用 (4.41) 和引理 2.9。更具体地说，考虑这些直线

$$\ell_{\alpha-\delta_1},\, \ell_{\alpha-\epsilon_{j-1}} \in \mathbb{E}^{(\alpha-\epsilon_{j-1})}_{M_1},$$

and

$$\ell_{\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1},\, \ell_{\alpha} \in \mathbb{E}^{(\alpha+\epsilon_{j-1})}_{M_1}.$$

由 (4.23)，可得

$$\ell_{\alpha-\delta_1}(x) \leq \ell_{\alpha-\epsilon_{j-1}}(x),\, \ell_{\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1}(x) \leq \ell_{\alpha}(x), \quad x_j \leq x \leq x_{j-1}.$$

因此，由引理 2.9，只需证明中间的直线满足

$$\ell_{\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1}(x) - \ell_{\alpha-\epsilon_{j-1}}(x) \leq \delta_1\ell_{1-\delta_2}(x), \quad x_j \leq x \leq x_{j-1}. \tag{4.43}$$

注意，(4.43) 两侧直线的斜率满足

$$(\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1) - (\alpha-\epsilon_{j-1}) > \delta_1(1-\delta_2).$$

因此，只需证明 (4.43) 在$x = x_{j-1}$处成立。事实上，可以利用直线 $\ell_{\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1}$ 和 $\ell_{\alpha-\epsilon_{j-1}}$ 找出三角形$A_i^j \subset \mathbf{P}^{M_1}$ 在$x = x_{j-1}$ 处的垂直底边（见图 2）。结合命题 3.1(iv)，即可得出

$$\ell_{\alpha+\epsilon_{j-1}-\delta_1}(x_{j-1}) - \ell_{\alpha-\epsilon_{j-1}}(x_{j-1}) = \frac{\delta_1}{M_1} + \delta_1(1-x_{j-1}). \tag{4.44}$$

另一方面，利用 $2 \leq M_1 \leq M_2$，很容易验证 менам

$$\frac{1}{M_1} + (1-x) < \ell_{1-\delta_2}(x), \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{M_1} \leq x \leq 1. \tag{4.45}$$

特别地，取$x = x_{j-1}$，(4.45) 给出

$$\frac{\delta_1}{M_1} + \delta_1(1-x_{j-1}) < \delta_1\ell_{1-\delta_2}(x_{j-1}). \tag{4.46}$$

结合(4.44) 和(4.46)现在表明 (4.43) 在 $x = x_{j-1}$ 处成立。这就完成了 (i) 的证明。

由（i），只需证明

$$\overline{\mathbf{F}}_{n+1} \subset \mathbf{F}_{n+1}\Big(\frac{\delta_n}{2M_{n+1}}\Big).$$

根据注 3.3（i），$\delta_n.\mathbf{E}^{M_{n+1}}$中的垂直间隙小于$^{\delta_n}_{M_{n+1}}$。因此，根据（4.18），对于每个 $l_a \in \mathbb{F}_n$，$\mathbf{F}^{(a)}_{n+1}$也具有相同的性质。由于$\mathbb{F}^{(a)}_{n+1} \subset \mathbf{F}^{(a)}_{n+1}$，可得

$$cov\big(\mathbb{F}^{(a)}_{n+1}\big) \subset \mathbf{F}^{(a)}_{n+1}\Big(\frac{\delta_n}{2M_{n+1}}\Big).$$

对 l_a取并集，由 (4.25)、(4.24) 和 (4.17)，我们得到

$$\overline{\mathbf{F}}_{n+1} = \bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_n} \overline{\mathbf{F}}^{(a)}_{n+1} \subset \bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_n} \mathbf{F}^{(a)}_{n+1}\Big(\frac{\delta_n}{2M_{n+1}}\Big) = \mathbf{F}_{n+1}\Big(\frac{\delta_n}{2M_{n+1}}\Big).$$

这证明了（ii）。

(*iii*) 写作 $\delta = 2^{-M}$。利用分解式 (3.7)，很容易验证，

$$(\mathbf{E}_M \cup \mathbf{E}^+_M)\backslash\mathring{\mathbf{E}}_M \subset (\mathrm{bdry}(\mathbf{E}_M))(\delta), \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}.$$

由 (4.18)、(4.19) 和 (4.20) 可知，这意味着

$$\mathbf{F}^{(a)}_n\backslash\mathring{\mathbf{F}}^{(a)}_n \subset \big(\partial\mathbf{F}^{(a)}_n\big)(\delta_n), \quad l_a \in \mathbb{F}_{n-1}.$$

对 l_a取并集，由(4.17)、(4.19)和(4.20)，我们得到

$$\mathbf{F}_n\backslash\mathring{\mathbf{F}}_n \subset (\partial\mathbf{F}_n)(\delta_n).$$

这证明了 (*iii*)，引理 4.5 的证明完毕。 □

5. Generalized Hausdorff dimension of $E_{\{M_n\}}$

在本节中，我们证明定理 A。取 $\phi(r) = \log\log\log(1/r)$（例如）即可得到这一稍微更一般结果的直接推论。注意，命题 4.3(*iii*) 蕴含 $E_{\{M_n\}}$关于 $h(r) = r^2\log(1/r)$ 具有有限豪斯多夫测度。

定理 5.1。令 $\phi:\ (0,1] \to (0,\infty)$ 为一个递减的、连续函数，其满足 $\lim_{r\to 0}\phi(r) = \infty$ 且

$$\phi(r) \le \log(1/r), \quad 0 < r \le 1. \tag{5.1}$$

那么 $E_{\{M_n\}}$ 相对于该测度函数具有正的豪斯多夫测度

$$h_1(r) := r^2\log(1/r)\,\phi(r),$$

前提是

$$\phi\big(\frac{1}{M_{n+1}}\big) \ge \frac{1}{c_1}\log\big(\frac{1}{\delta_n}\big)\,\phi(\delta_n) \tag{5.2}$$

当 n 足够大时成立（其中 c_1 如命题 *3.12* 中所述）。

由于豪斯多夫测度关于测度函数具有单调性，条件 (5.1) 并非必要，它只是为了规整 $\phi(r)$ 在 $r \to 0$ 时的增长。不过请注意，由于 $\delta_n \approx 2^{-M_n}$ (见 (4.10) 和 (4.29))，条件 (5.2) 对序列 $\{M_n\}$ 施加了严格的增长条件。

回顾第 4 节， $E_{\{M_n\}} = \bigcap_{n\geq 1}\mathbf{F}_n$。定理 5.1 的证明将通过说明：当 M_{n+1} 足够大、使得 (5.2) 成立时，$\mathbf{F}_{n+1}$ 的 $[\delta_{n+1},1]$-受限 h_1-测度相比 $\mathbf{F}_n$ 的 $[\delta_n,1]$-受限 h_1-测度仅略有下降。根据构造,

$$\mathbb{F}_{n+1} = \mathbb{F}_n + \delta_n.\mathbb{E}_{M_{n+1}},$$

证明在很大程度上依赖于第 3 节中研究的 $\mathbf{E}_M$ 的性质。

固定一个充分大的整数 $n_0 \geq 1$。以下假设

$$M_1 < \cdots < M_n$$

给定 $(n \geq n_0)$，并将 M_{n+1} 记为 M。

我们先给出尺度为 $\frac{1}{M}$ 时 $\mathbf{F}_{n+1}$ 的 h_1-测度的一个局部下界。 —

引理 5.2. 假设 $M = M_{n+1}$ 满足

$$\frac{1}{M} < \delta_n. \tag{5.3}$$

那么，对于任意满足 $r(\widetilde{U}) = \frac{1}{M}$ 且 $c(\widetilde{U}) \in \mathbf{F}_{n+1}$ 的二进方形 $\widetilde{U}$，我们有

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap \mathbf{F}_{n+1}; h_1) \geq c_1|\widetilde{U}|\,\phi\big(\frac{1}{M}\big), \tag{5.4}$$

其中 c_1 与命题 *3.12* 中的相同。

~证明。 由于 $c(\overline{U}) \in \mathbf{F}_{n+1}$，由 (4.24)，存在 $l_a \in \mathbb{F}_n$ 使得

$$c(\widetilde{U}) \in \mathrm{cov}(\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a).$$

固定这样的 l_a。将命题 3.12 应用于 $\delta = \delta_n$、$\delta_1 = \delta_{n+1}$ 和 $l = l_a$，我们得到

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}\big(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap (\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a); h\big) \geq c_1|\widetilde{U}|. \tag{5.5}$$

由于（见 (4.17)、(4.18)）

$$\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a \subset \mathbf{F}_{n+1},$$

由此可由 (5.5) 得出

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap \mathbf{F}_{n+1}; h_1) &\geq \mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap \mathbf{F}_{n+1}; h) \cdot \phi\big(\frac{1}{M}\big)\\ &\geq \mathcal{M}_{\delta_{n+1}}\big(\mathrm{int}(\widetilde{U}) \cap (\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a); h\big) \cdot \phi\big(\frac{1}{M}\big)\\ &\geq c_1|\widetilde{U}|\,\phi\big(\frac{1}{M}\big),\end{aligned}$$

其中，第一个不等式用到了 ϕ 的单调性，第二个不等式用到了尺度限制测度的单调性。至此，引理 5.2 的证明完成。□

注 5.3。(i) 对不同尺度所作的更为仔细的分析（类似于命题 *3.12* 的证明）表明，只要 ϕ 满足，就可以将(5.4) 中的因子 $\phi\big(\frac{1}{M}\big)$改进为 $\phi\big(2^{-M}\big)$ —

$$\phi(r^2) \leq \phi(r) + C, \quad 0 < r \leq 1$$

对于某个绝对常数 C。
(ii) 上述证明也表明[2]

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a) \gtrsim \delta_n\,\phi\big(\frac{1}{M}\big), \quad l_a \in \mathbb{F}_n. \tag{5.6}$$

相比之下，覆盖 $\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a$ 的 $\delta_n \times \delta_n$ 正方形给出

$$\mathcal{M}_{\delta_n}(\delta_n.\mathbf{E}_M + l_a) \lesssim \delta_n \log\big(\frac{1}{\delta_n}\big)\,\phi(\delta_n). \tag{5.7}$$

注意，(5.7) 在 $\frac{1}{M} \ll \delta_n$ 时严格小于(5.6) 。

接下来，我们应用引理 5.2，在尺度 δ_n 下建立$\mathbf{F}^{n+1}$ 测度的局部下界。注意，条件 (5.2) 蕴含$\frac{1}{M} < \delta_n$。

引理 5.4。 假设 $M = M_{n+1}$ 满足 (5.2)。那么，对于任意二进正方形 $Q \subset \mathbf{F}^n$ 满足 $r(Q) = \delta_n$，我们有

$$\mathcal{M}^{\delta_n}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{Q}) \cap \mathbf{F}_{n+1}) = h_1(\widetilde{Q}).$$

证明。 由 (2.10) 可知，大小规律

$$\mathcal{M}^{\delta_n}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{Q}) \cap \mathbf{F}_{n+1}) \le \mathcal{M}^{\delta_n}_{\delta_{n+1}}(\widetilde{Q}) = h_1(\widetilde{Q}). \tag{5.8}$$

为证明下界，令 $\{U_k\} \cup \{Q_i\}$ 为一个最优的 $[\delta_{n+1}, \delta_n]$-覆盖$\widetilde{\mathrm{int}(Q)} \cap \mathbf{F}^{n+1}$，其相对于 h_1，其中

$$\delta_{n+1} \le r(U_k) \le \frac{1}{M} < r(Q_i) \le \delta_n.$$

现在进行分解

$$\widetilde{Q} = \Big(\bigcup_i \widetilde{U}_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_i Q_i\Big), \tag{5.9}$$

其中每个 $\widetilde{U}_i$ 都是一个具有 $r(\widetilde{U}_i) = \frac{1}{M}$ 的二进方形。请注意，

$$\big\{U_k : U_k \subset \widetilde{U}_i\big\}$$

构成 $\mathrm{int}(\widetilde{U}_i)$ 的$[\delta_{n+1}, \frac{1}{M}]$-覆盖$\cap \mathbf{F}^{n+1}$。因此，根据定义2.1，

$$\sum_{k:\, U_k \subset \widetilde{U}_i} h_1(U_k) \ge \mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{U}_i) \cap \mathbf{F}_{n+1}). \tag{5.10}$$

另一方面，根据引理 4.5（i）和假设 $Q \subset \mathbf{F}^n$，我们有

$Q \subset \mathbf{F}^{n+1}$。因此，我们可以对每个 U_i 应用引理 5.2，得到

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{M}}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{U}_i) \cap \mathbf{F}_{n+1}) \ge c_1 |\widetilde{U}_i|\,\phi\big(\frac{1}{M}\big). \tag{5.11}$$

[2]因此，为简单起见，我们将对于 h_1 的测度与相对于 $\mathcal{M}$ 和 E 的 h_1 测度均相等。

结合（5.10）和（5.11），我们看到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}^{\delta_n}(\mathrm{int}(\widetilde{Q})\cap\mathbf{F}_{n+1}) &= \sum_k h_1(U_k)+\sum_i h_1(Q_i)\\ &= \sum_i \sum_{k:\,U_k\subset\widetilde{U}_i} h_1(U_k)+\sum_i h_1(Q_i)\\ &\geq c_1\sum_i |\widetilde{U}_i|\,\phi\big(\frac{1}{M}\big)+\sum_i |Q_i|\,\varphi\big(r(Q_i)\big), \qquad (5.12)\end{aligned}$$

其中 $\varphi(r) = \log(\frac{1}{r})\ \phi(r)$。将条件 (5.2) 应用于第一项求和，并将 φ 的单调性应用于第二项求和（注意到 $r(Q_i)\leq\delta_n$），我们得到

$$\begin{aligned}(5.12) &\geq \Big(\sum_i |\widetilde{U}_i|+\sum_i |Q_i|\Big)\varphi(\delta_n)\\ &= |\widetilde{Q}|\,\varphi(\delta_n)\\ &= h_1(\widetilde{Q}), \qquad (5.13)\end{aligned}$$

其中第二行用到了 (5.9)。结合 (5.8)、(5.12) 和 (5.13)，引理 5.4 的证明至此完成。□

注5.5. 利用引理 *4.5(ii)* 和引理*2.12* 可以通过类似的论证证明，在相同条件下，

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}^{r(\widetilde{Q})}(\mathrm{int}(\widetilde{Q})\cap\mathbf{F}_{n+1}) = h_1(\widetilde{Q})$$

~ 。 ~对任意二进方形 $Q\subset\mathbf{F}_n$ 满足 $r(Q)\geq\delta_n$。

下面的引理给出了 $\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1})$ 的初步下界。它将与引理 5.8 一起使用，以推导出 $\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)$ 的一致下界（见下方推论5.10）。

引理5.6. 假设 $M = M_{n+1}$ 满足(5.3)。则有

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1}) > \frac{\phi(1)}{8}\frac{1}{M^2}.$$

证明. 由定义2.1以及 ϕ的单调性，我们有

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1}) \geq \phi(1)|\mathbf{F}_{n+1}|. \qquad (5.14)$$

根据(4.17)和(4.18),

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}_{n+1}| &\geq |\delta_n.\mathbf{E}_M + l_0|\\ &= \delta_n|\mathbf{E}_M|\\ &> \frac{1}{M}|\mathbf{E}_M| \qquad (5.15)\end{aligned}$$

（其中最后一行用到了条件 (5.3)）。另一方面，利用 (3.7) 很容易验证

$$|\mathbf{E}_M| > \frac{1}{8M}. \qquad (5.16)$$

因此，结合 (5.14)、(5.15) 和 (5.16)，我们得到

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1}) > \frac{\phi(1)}{8}\frac{1}{M^2}.$$

这就完成了引理5.6的证明。 □

备注 5.7。 或者，也可以使用 [14, 定理 2]中的论证，无条件地证明 $|\mathbf{F}_{n+1}| \approx \frac{1}{M}$。

现在我们比较 $\mathbf{F}_{n+1}$ 的 $[\delta_{n+1}, 1]$-限制 h_1-测度与 $\mathbf{F}_n$ 的 $[\delta_n, 1]$-限制 h_1-测度。

引理 5.8。 假设 $M = M_{n+1}$ 满足 (5.2)。那么我们有

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1}) \geq \mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n) - CM_n\, 2^{-M_n/4}, \tag{5.17}$$

其中 $C = 196$。

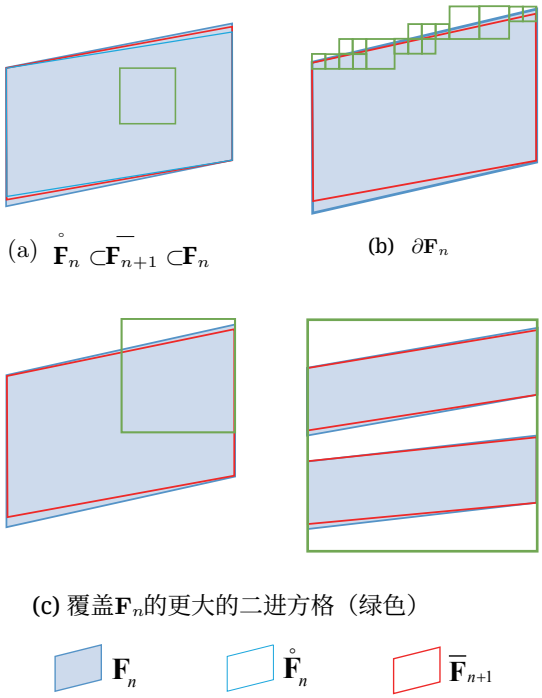


FIGURE 9. 引理 5.8 的证明示意图

证明。 设 $\mathcal{Q}_n$ 为二进方形的集合 $Q \subset \mathbf{F}_n$，其中 $r(Q) = \delta_n$。令

$$\dot{\mathbf{F}}_n = \bigcup_{\widetilde{Q}\in\mathcal{Q}_n} \widetilde{Q}.$$

由单调性可知，我们有

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1}) \geq \mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\dot{\mathbf{F}}_n \cap \mathbf{F}_{n+1}). \tag{5.18}$$

与引理 5.4 的证明中一样，设 $\{U_k\}\cup\{Q_i\}$ 是关于 h_1 的$\mathbf{F}_n\cap\mathbf{F}^{n+1}$ 的最优 $\dot{\delta}_{n+1}$- 覆盖，其中

$$\delta_{n+1}\le r(U_k)\le\delta_n<r(Q_i)\le 1.$$

不失一般性，假设 $\{U_k\}\prec\mathcal{Q}_n$ （见注记 2.2）。令

$$\{\widetilde{Q}_i\}=\{\widetilde{Q}\in\mathcal{Q}_n:\exists\, k \text{ such that } U_k\subset\widetilde{Q}\}.$$

˜那么对每个 Q_i,

$$\{U_k:\,U_k\subset\widetilde{Q}_i\}$$

˜构成 $\mathrm{int}(Q_i)\cap\mathbf{F}^{n+1}$ 的一个 $[\delta_{n+1},\delta_n]$-覆盖。因此，由引理 5.4,

$$\sum_{k:\,U_k\subset\widetilde{Q}_i}h_1(U_k)\ge\mathcal{M}^{\delta_n}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{int}(\widetilde{Q}_i)\cap\mathbf{F}_{n+1})=h_1(\widetilde{Q}_i).\tag{5.19}$$

另一方面，再次使用引理 5.4，可得

$$\mathcal{Q}_n\prec\{\widetilde{Q}_i\}\cup\{Q_i\}.$$

˜因此，$\{Q_i\}\cup\{Q_i\}$ 构成 $\mathbf{F}_n$ 的一个 $[\delta_n,1]$-$\dot{}$覆盖，于是

$$\begin{aligned}\sum_i h_1(\widetilde{Q}_i)+\sum_i h_1(Q_i)&\ge\mathcal{M}_{\delta_n}(\dot{\mathbf{F}}_n)\\&\ge\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)-\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n),\end{aligned}\tag{5.20}$$

其中最后一行用到了尺度限制测度的次可加性。结合 (5.18)、(5.19) 和 (5.20)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1})&\ge\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\dot{\mathbf{F}}_n\cap\mathbf{F}_{n+1})\\&=\sum_k h_1(U_k)+\sum_i h_1(Q_i)\\&=\sum_i\sum_{k:\,U_k\subset\widetilde{Q}_i}h_1(U_k)+\sum_i h_1(Q_i)\\&\ge\sum_i h_1(\widetilde{Q}_i)+\sum_i h_1(Q_i)\\&\ge\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)-\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n).\end{aligned}$$

还需证明

$$\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n)\le 196\,M_n\,2^{-M_n/4}.\tag{5.21}$$

事实上，由 (4.19)、(4.6) 和 (4.20)，我们有

$$\begin{aligned}\mathring{\mathbf{F}}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n&=\bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_{n-1}}(\delta_{n-1}.\mathring{\mathbf{E}}_{M_n}+l_a)\backslash\dot{\mathbf{F}}_n\\&\subset\bigcup_{l_a\in\mathbb{F}_{n-1}}\big(\delta_{n-1}.\mathrm{bdry}(\mathbf{E}_{M_n})+l_a\big)(3\delta_n)\\&=(\partial\mathbf{F}_n)(3\delta_n).\end{aligned}$$

结合命题 4.5（iii），这意味着

$$\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n = (\mathbf{F}_n\backslash\mathring{\mathbf{F}}_n)\cup(\mathring{\mathbf{F}}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n)\subset(\partial\mathbf{F}_n)(3\delta_n). \tag{5.22}$$

另一方面，根据注 4.4，我们有

$$\mathcal{N}_{\delta_n}\big((\partial\mathbf{F}_n)(3\delta_n)\big)\le 7\,\mathcal{N}_{\delta_n}(\partial\mathbf{F}_n)\le\frac{49}{\delta_n^2\,M_n}\,2^{-M_n/4}. \tag{5.23}$$

因此，结合 (5.22) 和 (5.23)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n)&\le\mathcal{N}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n\backslash\dot{\mathbf{F}}_n)\cdot h_1(\delta_n)\\&\le\mathcal{N}_{\delta_n}\big((\partial\mathbf{F}_n)(3\delta_n)\big)\cdot\delta_n^2\Big(\log\frac{1}{\delta_n}\Big)\phi(\delta_n)\\&\le\frac{49}{M_n}\Big(\log\frac{1}{\delta_n}\Big)^2\,2^{-M_n/4}\\&\le 49\cdot 4\,M_n\,2^{-M_n/4},\end{aligned}$$

其中，第三行使用了条件 (5.1)，最后一行使用了 $\log\frac{1}{\delta_n}\le 2M_n$（见 (4.29)）。这就证明了 (5.21)，引理 5.8 的证明也完成了。□

注 5.9。 或者，也可以使用引理 *2.4* 来追踪最优 δ_n-覆盖中正方形如何分解成更小的正方形，从而形成 $\mathbf{F}_n$ 的最优 δ_{n+1}-覆盖，并建立如下形式的估计

$$\mathcal{M}_{\delta_{n+1}}(\mathbf{F}_{n+1})\ge(1-\eta_n)\,\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)$$

其中 η_n 是一个快速递减序列。

结合引理5.6和引理5.8，我们得到如下结论。

推论5.10。 假设对所有 $n\ge n_0$，(5.2) 都成立。那么我们有

$$\inf_{n\ge1}\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)>0. \tag{5.24}$$

证明。 令 $n_1>n_0$ 为一个充分大的整数，使得

$$2\,CM_{n_1}2^{-M_{n_1}/4}<\frac{\phi(1)}{8}\frac{1}{M_{n_1}^2}, \tag{5.25}$$

其中 C 与引理5.8中的定义相同。然后，对(5.17)进行迭代，得到

$$\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)\ge\mathcal{M}_{\delta_{n_1}}(\mathbf{F}_{n_1})-2\,CM_{n_1}2^{-M_{n_1}/4},\quad n\ge n_1. \tag{5.26}$$

将引理5.6应用于 $n+1=n_1$。我们有

$$\mathcal{M}_{\delta_{n_1}}(\mathbf{F}_{n_1})\ge\frac{\phi(1)}{8}\frac{1}{M_{n_1}^2}. \tag{5.27}$$

因此，结合 (5.26)、(5.27) 和 (5.25)，我们得到

$$\inf_{n\ge n_1}\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)>\frac{\phi(1)}{8}\frac{1}{M_{n_1}^2}-2\,CM_{n_1}2^{-M_{n_1}/4}>0.$$

另一方面，根据 (5.14)，我们有

$$\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n) \geq \phi(1)|\mathbf{F}_n| > 0, \quad n = 1, \cdots, n_1 - 1.$$

结合最后两个界可得（5.24），推论5.10的证明至此完成。□

定理 5.1 由推论5.10和以下命题立即得出。

命题 5.11。 $E_{\{M_n\}}$ 关于h_1 的豪斯多夫测度为正，当且仅当（5.24）成立。

证明。 回忆一下， $E \subset \mathbb{R}^2$ 关于测度函数 h 的豪斯多夫测度定义为（参见 [10, 第 2.5]节）

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(E) &= \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^h_\delta(E) \\ &:= \lim_{\delta \to 0} \Big(\inf_{\{S_i\}} \sum_i h(S_i) \Big),\end{aligned}$$

其中，下确界取遍所有由开正方形 S_i覆盖 E 的可能方式（不一定是二进制的），其边长为 $r\,(S_i) \leq \delta$。

写作 $E = E_{\{M_n\}}$。 由于 E 是紧的，根据标准的紧性和倍增论证（参见 [10, §2.4]），我们有

$$\mathcal{H}^{h_1}(E) > 0 \iff \lim_{\delta \to 0} \mathcal{M}_\delta(E) > 0.$$

根据单调性，最后一个不等式等价于

$$\inf_{n \geq 1} \mathcal{M}_{\delta_n}(E) > 0. \tag{5.28}$$

由于 $E \subset \mathbf{F}_n$，我们有 $\mathcal{M}_{\delta_n}(E) \leq \mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n)$。因此 (5.28) $\Rightarrow$ (5.24) 成立。

为证明 (5.24) $\Rightarrow$ (5.28)，只需证明

$$\mathcal{M}_{\delta_n}(\mathbf{F}_n) \leq 3\,\mathcal{M}_{\delta_n}(E). \tag{5.29}$$

事实上，令 $\{Q_i\}$ 为关于 h_1的 E 的一个最优 δ_n-覆盖。那么，由于

$$\mathbf{F}_n \subset \mathbb{F}_n(\delta_n) \subset E(\delta_n)$$

（参见命题 4.3 (ii) 的证明），我们有

$$\mathbf{F}_n \subset \bigcup_i 3Q_i,$$

其中 $3Q_i$ 如(3.20)所示。根据定义2.1，可得

$$M_{\delta_n}(\mathbf{F}_n) \leq 3 \sum_i h_1(Q_i) = 3\,\mathcal{M}_{\delta_n}(E).$$

这证明了（5.29），命题5.11的证明完毕。 □

注 5.12。上述对定理 *5.1*的证明似乎不适用于豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^h$（$E_{\{M_n\}}$），其中 h（r） $= r^2\log(1/r)$。特别是，以下问题仍未解决:

(i) 当 $\{M_n\}$ 增长得足够快时， $\mathcal{H}^h(E_{\{M_n\}}) > 0$ 是否成立？(ii) 是否有 $\mathcal{H}^h(E_{\{2^n\}}) = 0$?

6. Minimality of $E_{\{M_n\}}$

在本节中我们证明定理 B。通过旋转，以下更精确的陈述立即可得。

定理 6.1。 对于每个 $E_{\{M_n\}} \in \mathcal{K}$，以下陈述成立。
(i) 如果 $a > 1$或 $a < 0$，那么每条斜率为 a 的直线 l 都满足 $\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}}) = 0$。 *(ii)* 如果 $a = 0$、*1* 或 $a \in$ *(0, 1)* 不是二进有理数，那么 $l_a = ax + b$*(a)* 是唯一一条斜率为 a的直线，使得 $\mathcal{H}^1(l_a \cap E_{\{M_n\}}) > 0$。[3]*(iii)* 如果 $a \in$ *(0, 1)* 是二进有理数，那么恰有两条直线 $l = l_a$和 $l = \tilde{l}_a$ 的斜率为 a，使得 $\mathcal{H}^1(l \cap E_{\{M_n\}}) > 0$。

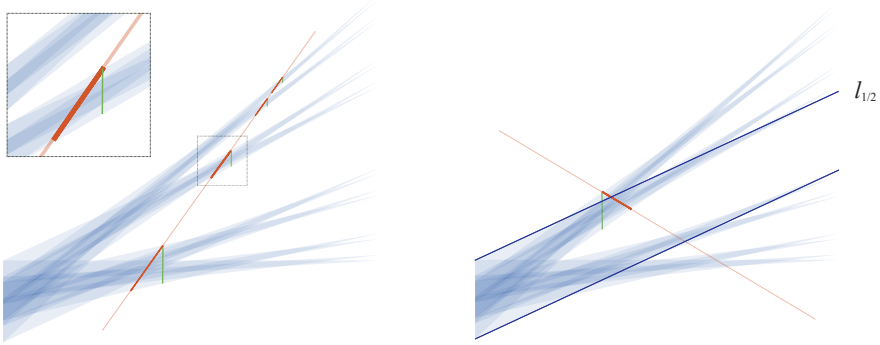


Figure 10. 斜率为 $a > 1$ 或 $a < 0$ 的每条直线与 $\mathbf{E}_M$ 的交集均为空，如 $M \to \infty$

定理 6.1 的证明基于以下命题，该命题可视为 (3.13) 的推广。

命题 6.2. 对于每条满足 $|a| \geq 2$ 的直线 $l = ax + b$，有

$$\mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{E}_M) \leq \frac{2\sqrt{5}}{M}.$$

证明。 由 (3.9)，有

$$\mathbf{E}_M \subset \mathbf{P}_M = \bigcup_{j=1}^{M} \bigcup_{i=1}^{2^{M-j}} P_i^j.$$

[3]此处及下文中， l_a 和 $\tilde{l}_a$ 指的是（4.16）中定义的直线。

因此，

$$\mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{E}_M) \le \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{2^{M-j}} \mathcal{H}^1(l \cap P_i^j). \tag{6.1}$$

由于 P_i^j 的垂直宽度小于 r_j（见 (3.15)），斜率属于 $[0,1],$，且由于 $|a| \ge 2$，我们有

$$\mathcal{H}^1(l \cap P_i^j) \le \sqrt{5}\, r_j.$$

因此，由 (6.1) 得，

$$\mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{E}_M) \le \sqrt{5} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i:\, l \cap P_i^j \neq \varnothing} r_j. \tag{6.2}$$

将相应的垂直区间（长度为 r_j）沿着 Perron 树 $\mathbf{P}_M$ 平移至 $x=0$。平移后的区间构成 $[-1/M, 0]$ 的二进制子区间，重叠重数至多为 2（这是由于条件 $|a| \ge 2$）。由此以及 (6.2) 可得

$$\mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{E}_M) \le \frac{2\sqrt{5}}{M}.$$

命题 6.2 的证明至此完成。 □

为了应用命题 6.2，我们还需要以下推广。

命题 6.3. 设 $l = ax + b$ 和 $l_0 = a_0 x + b_0$ 是两条直线，满足$|a - a_0| \ge 2\delta$ 和 $a_0 \in [0,1]$。则有

$$\mathcal{H}^1\big(l \cap (\delta.\mathbf{E}_M + l_0)\big) \le \Big(1 + \frac{1}{|a - a_0|}\Big) \cdot \delta \cdot \frac{10}{M}, \tag{6.3}$$

证明。 由于 $|a_0| \le 1$，将仿射变换 $y \mapsto y + a_0 x + b$ 应用于 $(l - l_0) \cap \delta.\mathbf{E}_M$的覆盖，可得

$$\mathcal{H}^1\big(l \cap (\delta.\mathbf{E}_M + l_0)\big) \le \sqrt{5}\, \mathcal{H}^1\big((l - l_0) \cap \delta.\mathbf{E}_M\big). \tag{6.4}$$

注意， $l - l_0$的斜率为 $a - a_0$。由于 $|a - a_0| \ge 2\delta$，应用另一个仿射变换 $y \mapsto \delta y$，可得

$$\mathcal{H}^1\big((l - l_0) \cap \delta.\mathbf{E}_M\big) \le \Big(1 + \frac{1}{|a - a_0|}\Big) \cdot \delta \cdot \mathcal{H}^1\big(\delta^{-1}(l - l_0) \cap \mathbf{E}_M\big). \tag{6.5}$$

现在由命题 6.2，得

$$\mathcal{H}^1\big(\delta^{-1}(l - l_0) \cap \mathbf{E}_M\big) \le \frac{2\sqrt{5}}{M}.$$

将此结果与 (6.4) 和 (6.5) 结合，得到 (6.3)，证毕。 □

现在我们已经准备好证明定理 6.1。

定理 *6.1* 的证明。(i) 由 (4.12)，我们有

$$\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})\le \mathcal{H}^1(l\cap \mathbf{F}_{n+1}),\quad n=0,1,\cdots.$$

令 $n_0\ge 1$ 为满足 $\min(|a-1|,|a|)\ge 2\delta_{n_0}$ 的最小指标。固定 $n\ge n_0$。由 (4.17)，

$$\mathbf{F}_{n+1}=\bigcup_{0\le j<\delta_n^{-1}}\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}. \tag{6.6}$$

利用 (4.18)，我们可以写成

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}=\left(\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}\cup\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}^{+}\right)+l_{j\delta_n}, \tag{6.7}$$

其中 $l_{j\delta_n}$ 是 $\mathbb{F}_n$ 中斜率为 $j\delta_n$ 的直线。由于我们将范围限制在 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}$，由 (4.5) 容易验证，$\mathbf{E}_M^+$ 可以由 $\mathbf{E}_M$ 的三个垂直平移覆盖。更准确地说，这里有

$$\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}^{+}\subset\bigcup_{k=1}^{3}\left(\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}+k\frac{\delta_{n+1}}{4}\right),$$

因此，由 (6.7)，

$$\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}\subset\bigcup_{k=0}^{3}\left(\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}+l_{j\delta_n}+k\frac{\delta_{n+1}}{4}\right). \tag{6.8}$$

由于

$$|a-j\delta_n|\ge\min(|a-1|,|a|)\ge 2\delta_{n_0}\ge 2\delta_n,$$

由命题 6.3 可得，对于 $0\le k\le 3$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1\left(l\cap\left(\delta_n.\mathbf{E}_{M_{n+1}}+l_{j\delta_n}+k\frac{\delta_{n+1}}{4}\right)\right)&\le\left(1+\frac{1}{2\delta_{n_0}}\right)\cdot\delta_n\cdot\frac{10}{M_{n+1}}\\&\le\frac{\delta_n}{\delta_{n_0}}\frac{10}{M_{n+1}}.\end{aligned}$$

因此，由 (6.8) 得，

$$\mathcal{H}^1(l\cap\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)})\le\frac{\delta_n}{\delta_{n_0}}\frac{40}{M_{n+1}}.$$

对 j 求和，结合 (6.6)，可得

$$\mathcal{H}^1(l\cap\mathbf{F}_{n+1})\le\frac{1}{\delta_{n_0}}\frac{40}{M_{n+1}}.$$

取 $n\to\infty$，由于 $M_n\to\infty$，我们可以得出。

$$\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})\le\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}^1(l\cap\mathbf{F}_{n+1})=0.$$

这证明了 (i)。

(ii) 为简单起见，我们仅考虑 $a\in(0,1)$ 不是二进有理数的情形（ $a=0$ 和 $a=1$ 的情形类似；另请参见下文 (iii) 的证明）。根据命题 4.3 (ii)，当 $l=l_a$ 时，我们有 $\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})>0$。因此，我们需要证明当 $l\ne l_a$ 时， $\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})=0$。

固定这样一条直线 $l=ax+b$，其中 $b\neq b(a)$。令 $n_0\geq 1$ 为满足 $|b-b(a)|>\delta_{n_0}$ 的最小指标，并令 j_0 为这样的整数。

$$a\in\big(j_0\delta_{n_0},(j_0+1)\delta_{n_0}\big).$$

对 (4.27) 进行归纳应用，我们对任意 $n\geq n_0$ 有

$$\bigcup_{j\delta_n\in[j_0\delta_{n_0},(j_0+1)\delta_{n_0})}\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}\subset T_{\delta_{n_0}}(l_{j_0\delta_{n_0}}). \tag{6.9}$$

特别地，限制于 $0\leq x\leq 1$，有 $l_a\subset T_{\delta_{n_0}}(l_{j_0\delta_{n_0}})$，这进而意味着

$$l\cap T_{\delta_{n_0}}(l_{j_0\delta_{n_0}})=\varnothing, \tag{6.10}$$

由于 $|b-b(a)|>\delta_{n_0}$。

现在令 $n_1\geq n_0$ 为最小指标，使得

$$\min\big(a-j_0\delta_{n_0},(j_0+1)\delta_{n_0}-a\big)\geq 2\delta_{n_1}.$$

固定 $n\geq n_1$。记作

$$\mathbf{F}'_{n+1}=\bigcup_{j\delta_n\notin[j_0\delta_{n_0},(j_0+1)\delta_{n_0})}\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}.$$

由 (6.9) 和 (6.10)，我们得到

$$l\cap\mathbf{F}_{n+1}=l\cap\mathbf{F}'_{n+1}.$$

另一方面，仿照上述（i）的证明，我们有

$$\mathcal{H}^1(l\cap\mathbf{F}'_{n+1})\leq\frac{1}{\delta_{n_1}}\frac{40}{M_{n+1}}.$$

取 $n\to\infty$，我们看到 国产成人

$$\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})\leq\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}^1(l\cap\mathbf{F}'_{n+1})=0.$$

这就证明了（ii）。

首先，我们证明，当 $l\neq l_a,\tilde{l}_a$（即，$l=ax+\tilde{b}$，其中 $b\neq b(a)$ $b(a)$）时，$\mathcal{H}^1(l\cap E_{\{M_n\}})=0$。令 n_0 为满足 $l_a\in\mathbb{F}_{n_0}$ 的最小指标，并令 $n_1\geq n_0$ 为满足

$$\min\big(|b-b(a)|,|b-\widetilde{b}(a)|\big)>\delta_{n_1}. \tag{6.11}$$

那么，对于任意 $n\geq n_1$，我们有

$$\bigcup_{j\delta_n\in[a,a+\delta_{n_1})}\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}\subset T_{\delta_{n_1}}(l_a),\qquad\bigcup_{j\delta_n\in[a-\delta_{n_1},a)}\mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}\subset T_{\delta_{n_1}}(l_{a-\delta_{n_1}}). \tag{6.12}$$

因此，限制在 $0\leq x\leq 1$ 上，我们有 $l_a\subset T_{\delta_{n_1}}(l_a)$（显然）以及 $l_a\subset T_{\delta_{n_1}}(l_{a-\delta_{n_1}})$（由 (4.27) 得出）。由 (6.11) 可知

$$l\cap T_{\delta_{n_1}}(l_a)=\varnothing,\quad l\cap T_{\delta_{n_1}}(l_{a-\delta_{n_1}})=\varnothing. \tag{6.13}$$

现在固定 $n > n_1$。记作

$$\mathbf{F}'_{n+1} = \bigcup_{j\delta_n \notin [a-\delta_{n_1}, a+\delta_{n_1})} \mathbf{F}_{n+1}^{(j\delta_n)}.$$

由 (6.12) 和 (6.13)，我们有 $l \cap \mathbf{F}_{n+1} = l \cap \mathbf{F}'_{n+1}$. 按照上文 (ii) 的证明进行推理（注意 $\delta_{n_1} \geq 2\delta_n$），可得

$$\mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{F}'_{n+1}) \leq \frac{2}{\delta_{n_1}} \frac{40}{M_{n+1}}.$$

取 $n \to \infty$，得到

$$\mathcal{H}^1(l \cap E_{\{M_n\}}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(l \cap \mathbf{F}'_{n+1}) = 0,$$

如所需。

接下来，我们证明确实有 $l_a \neq l_a$ （即 $b(a) \neq b(a)$）。证明基于证明 $|l_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0)| \neq |l_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0)|$，并依赖于一个算术观察。更确切地说，由于 M 是偶数，将 (3.11) 应用于 $\delta_{n_0-1}.\mathbf{E}_{M_{n_0}} + l_{a_0}$（假设 $l_a \in \mathbb{F}^{(a_0)_{n_0}}$），可得

$$|l_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0)| \geq \delta_{n_0-1} \frac{1}{M_{n_0}\, 2^{M_{n_0}}} = \frac{\delta_{n_0}}{M_{n_0}}. \tag{6.14}$$

另一方面，将（3.5）应用于 $\delta_{n_0}.\mathbf{E}_{M_{n_0+1}} + l_{a-\delta_{n_0}}$，可得

$$-\frac{\delta_{n_0}}{M_{n_0+1}} < \tilde{l}_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0) \leq 0. \tag{6.15}$$

由于 $M_{n_0+1} \geq M_{n_0}$，由（6.14）和（6.15）可得

$$|l_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0)| > |\tilde{l}_a(0) - l_{a-\delta_{n_0}}(0)|.$$

因此 $l_a(0) \neq l_a(0)$。这就证明了（iii），定理 6.1 的证明也就完成了。□

致谢。本研究部分得到中国国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1005700）和国家自然科学基金（编号：12371105）的资助。作者感谢 Sanghyuk Lee 对本文早期版本提出的宝贵意见。

References

[1] R. Alexander. 与 Kakeya 问题相关的随机紧集。 *Proc. Amer.*, ( ): – 。[2] Y. Babichenko、Y. Peres、R. Peretz、P. Sousi 和 P. Winkler。猎人、躲避追捕的兔子与最优 Kakeya 集。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(10):5567–5586, 2014。[3] A. S. Besicovitch. 关于函数可积性的两个问题。 *J. Soc. Phys.-*, , : – 。[4] A. S. Besicovitch. 关于 Kakeya 问题及一个类似问题。 *Math. Z.*, 27 320, 1928 1 312( ): – 。[5] A. S. Besicovitch. 关于平面直线集的基本几何性质。 *J. London*, : – 。

Math. Perm 2 105 123, 1919

Math. Soc. 53 2 415 419, 1975

Math. Soc. 39 441 448, 1964

[6] C. J. Bishop 和 Y. Peres。 *Fractals in probability and analysis* 162 *Cam-* ，卷 。 *bridge Studies in Advanced Mathematics* 剑桥大学出版社，剑桥，2017。[7] J. Bourgain. Besicovitch 型极大算子及其在傅里叶分析中的应用。*Geom. Funct. Anal.*，1(2):147–187，1991。[8] A. Cordoba. Kakeya 极大函数与球面求和乘子。*Amer. J. Math.*，99(1):1–22，1977。[9] R. O. Davies. 关于 Kakeya 问题的一些评论。 *Proc. Cambridge Philos. Soc.*，69 417 421，1971 : – 。[10] K. Falconer。 *Fractal geometry*。 John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，第二版，2003。数学基础与应用。[11] J. E. Hutchinson. 分形与自相似性。 *Indiana Univ. Math. J.*，30 747，1981 5 713( ): – 。[12] J.-P. Kahane. 关于完美线˝性集的三则札记。 *Enseign. Math. (2)*，15 185 192，1969 : – 。[13] T. K´atay. 典型 Besicovitch 集与直线的交。 *Real Anal. Exchange*，45 2 453 463，2020 ( ): – 。[14] U. Keich. 关于 L^p R^2 中 Kakeya 极大函数的界与闵可夫斯基维数。 *Bull. London Math. Soc.*，31(2):213–221，1999。[15] T. W. K¨orner. 通过贝尔范畴定理构造 Besicovitch 集。 *Studia Math.*，158(1):65–78，2003。[16] S. Lee、K. M. Rogers 和 A. Seeger. 关于 Schr¨ odinger 算子的时空估计。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，99(1):62–85，2013。[17] P. Mattila。 *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* 44 *Cam-* ，卷 。剑 *bridge Studies in Advanced Mathematics* 桥大学出版社，剑桥，1995。分形与可整性。[18] P. Mattila。 *Fourier analysis and Hausdorff dimension* 150 *Cambridge Stud-* ，卷 。剑 *ies in Advanced Mathematics* 2015 桥大学出版社，剑桥，。[19] O. Perron. ¨关于 Besicovitsch 的一个定理。 *Math. Z.*，28(1):383–386，1928。[20] H. Rademacher. 关于 Besicovitch 的一个定理，载于 *Studies in mathematical analysis and related topics* 294 296 1962 ，第 – 页。

斯坦福大学出版社，斯坦福，加利福尼亚州，。[21] E. Sawyer. 平面曲线族及其平移包含于零测集中的情形。 *Mathematika* 34 1 69 76, 1987 ，( ): – 。

[22] I. J. Schoenberg. 关于与 Besicovitch-Kakeya 问题相关的某些极小值。*Mathematica (Cluj)*，4(27):145–148，1962。[23] I. J. Schoenberg. 关于 Kakeya 问题的 Besicovitch-Perron 解。载于 *ies in mathematical analysis and related topics* 359 363 *Stud-* ，第 – 页。斯坦福大学出版社，斯坦福，加利福尼亚州，1962。[24] T. Tao. 从旋转针到波的稳定性：组合学、分析与偏微分方程之间的新兴联系。 *Notices Amer. Math. Soc.*，48(3):294–303，2001。[25] T. Wolff. Kakeya 问题相关的近期研究。载于 *Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996)* 129 162 ，第 – 页。

美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。

Xianghong Chen, Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275, P.R. China*Email address*: chenxiangh@mail.sysu.edu.cn

Lixin Yan, Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275, P.R. China*Email address*: mcsylx@mail.sysu.edu.cn

Yue Zhong, Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275, P.R. China*Email address*: zhongy69@mail3.sysu.edu.cn