arXiv:2304.03634v2 [math.PR] 5 Sep 2024

带碰撞的多组分慢边界弱非对称简单排斥过程的流体动力学极限

OSLENNE ARAÚJO、PATRÍCIA GONÇALVES 和 ALEXANDRE B. SIMAS

摘要。本文研究一种随机相互作用粒子系统的流体动力学极限。该系统的动力学由多种动力学叠加而成：排斥规则规定，每个格点上具有相同速度的粒子至多只能有一个；碰撞动力学规定，同一格点上的粒子可以发生碰撞，并产生具有新速度的粒子，同时保持线性动量守恒；边界动力学则向系统中注入和移除粒子。最后一种动力学破坏了守恒定律，其强度由参数 θ 调节。本文旨在推导流体动力学极限，而边界条件会随 θ 的取值发生显著变化。

1. 引言

随机相互作用粒子系统（SIPS）是概率论的一个分支，致力于对受约束的连续时间随机游走模型的集体行为进行数学分析。这类系统源于统计物理学、生物学及许多其他科学领域，由 Spitzer (1970年) 提出。在这一领域，一个经典问题是：考虑由粒子构成的微观动力学，粒子按照某种既定的随机规律运动，推导给定物理系统中热力学量的宏观定律。这些宏观定律由偏微分方程（PDE）或随机偏微分方程描述，具体取决于研究的是向均值的收敛，还是围绕该均值的涨落。向均值的收敛是一种标度极限，称为 流体动力学极限 ，它由一个偏微分方程（称为流体动力学方程）的解描述，参见 Kipnis 和 Landim(1998年)。

为了使阅读尽可能愉快，我们将非正式地概述本文所研究的模型，首先考虑维数为 $d = 1$ 的情形（见图 1.1 和 1.2），但我们的结果也适用于任意维数 d。我们考虑粒子模型在离散格点集 $\{1, \dots, N-1\}$上演化，并将其称为体区。现在考虑一个有限可能速度集 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$，并固定一个速度 $v \in \mathcal{V}$。在任意给定时刻 t，体区中的每个格点要么为空，要么被一个速度为 v 的粒子占据；每个粒子都试图以弱不对称速率跳向具有相同速度的某个相邻格点。为防止同一速度的多个粒子占据同一格点 v，我们引入排斥规则：若目标格点已被具有给定速度的粒子占据，则禁止跳跃 v。边界动力学由格点 1 或 $N-1$ 处的以下生灭过程给出：如果格点 1 为空，则以速率 $\frac{\alpha_v}{N^\theta}$ 向系统ˆ中注入一个粒子；而如果格点 1 已被占据，则以速率 $\frac{1-\hat{}\alpha_v}{N^\theta}$ 从该处移除一个粒子。另一方面，在格点 $N-1$ 处，如果格点 $N-1$ 为空，则可以以ˆ速率 $\frac{\beta_v}{N^\theta}$ 向系统中注入一个粒子；同时，可以以速率 $\frac{\hat{}1-\beta_v}{N^\theta}$ 从格点 $N-1$ 移除一个粒子。关于速率 $\hat{}\alpha_v$ 和 $\hat{}\ \beta_v$ 的定义，参见（2.14）。在这些动力学之上，还存在一个碰撞过程：同一格点处的粒子交换其速度，使动量守恒。图 1.1 展示了我们的动力学：体区中的粒子为灰色，而两个储库中的粒子为蓝色。注意，如果格点 x 上速度为 v 的粒子试图跳向已被速度为 v 的粒子占据的格点 y ，

2020年数学主题分类。60K35、82C22、35K59。关键词和短语。流体动力学极限、随机储库、边界条件、排斥过程。

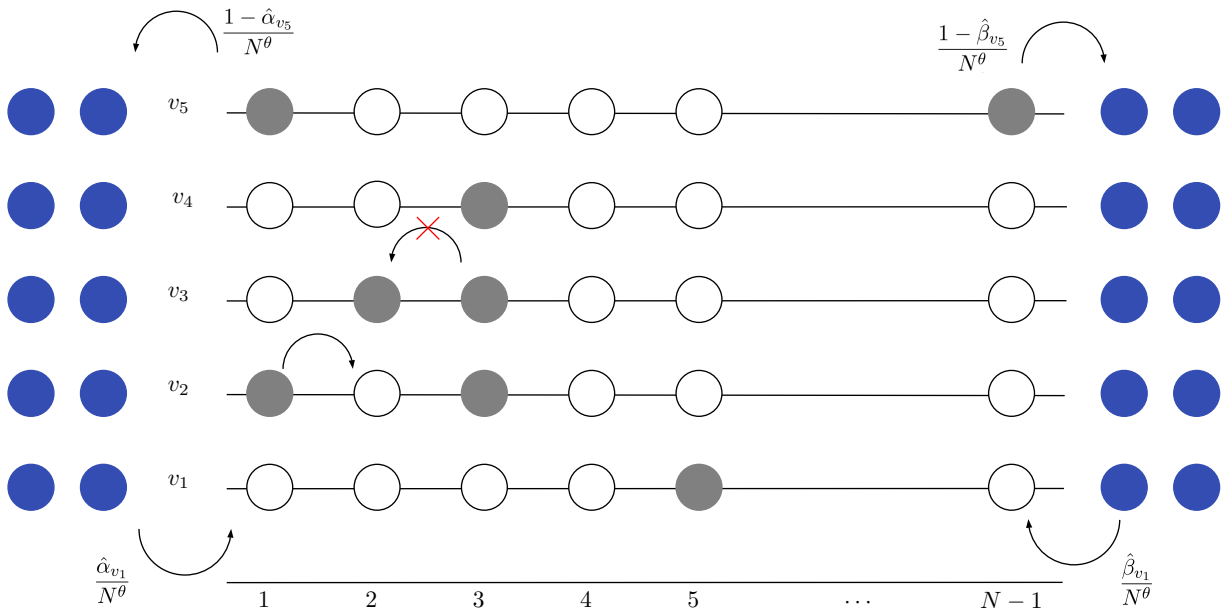

图1.1. 动力学示意图

则该跳跃不被允许。在这种情况下，粒子不会移动。例如，在图 1.1 中，格点 3 上速度为 v_3 的粒子不能跳到格点 2，因为格点 2 上已经有一个速度为 v_3 的粒子。另一方面，如果目标格点为空，则执行跳跃。例如，在图 1.1 中，格点 1 上速度为 v_2 的粒子可以跳到格点 2，同时保持相同的速度 v_2。假设与最左侧储库相关联的时钟响起。由于格点 1 上不存在速度为 v_1 的粒子，因此可以以速率 $\frac{\alpha_{v_1}}{N^\theta}$ 将一个速度为 v_1 的粒子注入ˆ系统的格点 1。此外，如果与格点 1 上速度为 v_5 的粒子相关联的时钟响起，该粒子将以速率 $1-\hat{}\frac{\alpha_{v_5}}{N^\theta}$ 离开系统（见图 1.1）。类似地，假设与最右侧储库相关联的时钟响起。由于格点 $N-1$ 上没有速度为 v_1 的粒子，因此可以以ˆ速率 $\frac{\beta_{v_1}}{N^\theta}$ 将一个速度为 v_1 的粒子注入系统的格点 $N-1$。此外，如果与格点 $N-1$ 上速度为 v_5 的粒子相关联的时钟响起，该粒子将以速率 $\frac{1-\beta_{v_5}}{N^\theta}$ 离开ˆ系统（见图 1.1）。现在，假设与 x_k 相关联的时钟响起（见图 1.2）。如果 x_k 处有两个粒子，一个速度为 v_2，另一个速度为v_4，那么它们以速率 1 发生碰撞，并在同一格点 x_k 产生两个粒子，其速度为v_1 和 v_5，满足 $v_2+v_4=v_1+v_5$，即动量守恒。

我们的目标是证明，该系统的守恒量可以用一个流体动力学方程来描述。为此，固定一个有限的时间范围 $[0,T]$，并考察在此时间区间内经验密度和动量的动态行为。当系统处于扩散标度极限时，经验密度和动量的大数定律（流体动力学极限）由如下形式的一组抛物型演化方程给出

$$\partial_t(\rho,\varrho)+\sum_{v\in\mathcal{V}}\tilde{v}[v\cdot\nabla F(\rho,\varrho)]=\frac{1}{2}\Delta(\rho,\varrho), \tag{1.1}$$

其中 $\tilde{v}=(1,v_1,\ldots,v_d)$ 表示密度，$\varrho=(\varrho_1,\ldots,\varrho_d)$ 表示线性动量。这里，F 是一个由动力学的遍历性质决定的热力学量。

现在我们简要介绍证明思路。我们首先采用 Guo 等人提出的熵方法Guo 等人(1988年)，并且该方法也被 Bonorino 等人(2020年)、Baldasso 等人(2017等人使用。为此，

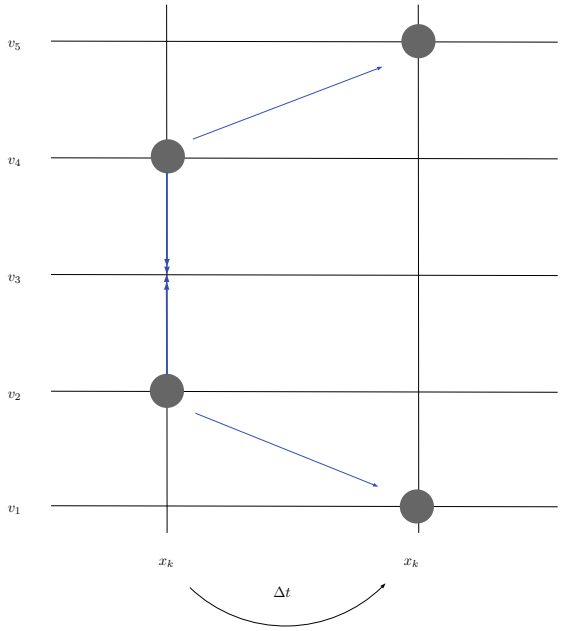

图 1.2. 碰撞动力学示意图

我们证明经验测度序列在 Mitoma (1983年) 的意义下是紧的，然后唯一地刻画其极限点。对于后者，由于我们的速率是弱非对称的，且系统与慢速储库相接触，因此我们需要若干技术性的替换引理，以便写出每个水动力学方程的弱解概念。

本文的结构如下：在第 2 节中，我们介绍本文采用的记号，并陈述一些有用的结果和我们的主要定理，其证明将推迟到第3 节和4 节。在第 5 节中，我们证明流体动力学极限证明所需的替换引理。在附录 A 中，我们证明水动力学方程弱解的唯一性；而在附录 B 中，我们证明一个辅助结果。

2. 结果陈述

我们首先介绍本文中将要使用的一些记号。令 $\mathbb{T}_N^d = \{0,\dots,N-1\}^d = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ 表示 d 维离散环面，并令 D_N^d 表示 S_N 与 $\mathbb{T}_N^{d-1}$ 的笛卡尔积，$D_N^d = S_N \times \mathbb{T}_N^{d-1}$，下文将其称为 体区，其中 $S_N = \{1,\dots,N-1\}$。此外，令$\mathbb{T}^d = [0,1)^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ 表示 d 维环面，并令 $D^d = [0,1] \times \mathbb{T}^{d-1}$。

假设2.1。 设 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有限的速度集合 $v = (v_1,\dots,v_d)$，满足：

(1) 至少存在一个 $j \in \{1,\cdots,d\}$ 满足 $v_j \neq 0$；(2) $\mathcal{V}$在坐标的反射和置换下保持不变，即，对于任意 $(v_1,\dots,v_d) \in \mathcal{V}$，我们有 $(v_1,\dots,-v_j,v_{j+1},\dots,v_d)$ 和 $(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(d)})$ 对所有 $j \in \{1,\cdots,d\}$均属于 $\mathcal{V}$，以及 $\{1,\dots,d\}$的所有置换 σ。

动力学的设定方式保证，在 D_N^d 的每个格点上，每种速度至多允许一个粒子。我们令 $\eta(x,v) \in \{0,1\}$ 表示格点 $x \in D_N^d$ 上速度为 $v \in \mathcal{V}$ 的粒子数； $\eta_x = \{\eta(x,v);\ v \in \mathcal{V}\}$ 表示格点 x 上速度为 v 的粒子数；而$\eta = \{\eta_x;\ x \in D_N^d\}$ 表示一个构型。最后，我们令 $X_N = (\{0,1\}^{\mathcal{V}})^{D_N^d}$表示粒子构型的集合。

在区域 D_N^d 的内部，动力学由两部分组成：

（1）体区中的粒子按照最近邻弱非对称随机游走演化，相同速度的粒子之间存在排斥；（2）不同速度的粒子之间发生二元碰撞，并保持线性动量。

2.1. **模型**。我们的主要目标是研究由生成元 $\mathcal{L}_N$ 所诱导的随机晶格气体模型，该生成元是不同速度粒子之间的 Glauber 动力学与碰撞，以及排斥动力学的叠加（见 Simas(2010年）和 Beltrán和 Landim (2008））：

$$\mathcal{L}_{N,\theta} = N^2\{\mathcal{L}^b_{N,\theta} + \mathcal{L}^c_N + \mathcal{L}^{ex}_N\}, \tag{2.1}$$

其中 $\theta \geq 0$ 是一个与 Glauber 动力学相关的参数。在 (2.1) 中，$\mathcal{L}^b_{N,\theta}$ 表示 Glauber 动力学的生成元，用于模拟粒子的插入或移除；$\mathcal{L}^c_N$ 表示模拟动力学中碰撞部分的生成元；最后，$\mathcal{L}^{ex}_N$ 模拟动力学中的排斥部分。注意，在 (2.1) 中，由于因子 N^2，时间已按扩散尺度加速。

跳跃律和等待时间的选取使得：速度为 v 的粒子从格点 x 跳至格点 $x+y$、且速度保持为 v 的跳跃速率为

$$P_N(y,v) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(\delta_{y,e_j} + \delta_{y,-e_j}) + \frac{1}{N}p(y,v), \tag{2.2}$$

其中 $\delta_{x,y}$ 表示克罗内克 delta，当 $x = y$ 时其值为 1，否则为 0；$\{e_1,\ldots,e_d\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的标准基。上文的 $p(x,v)$ 是一个不可约的有限程转移概率，其平均速度为 v，即 $\forall v \in \mathcal{V}$，$0 \leq p(x,v) \leq 1$, 且 $\sum p(x,v) = 1$. 此外，$\exists \mathfrak{K} \in \mathbb{N}$：$\|x\| > \mathfrak{K}$[1] 蕴含 $p(x,v) = 0$，并且

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} xp(x,v) = v.$$

注意，由于速度只有有限种，我们可以选择一个适用于所有 $v \in \mathcal{V}$ 的 $\mathfrak{K}$。

动力学中排斥部分的生成元 $\mathcal{L}^{ex}_N$ 作用于 $f: X_N \to \mathbb{R}$ a s

$$(\mathcal{L}^{ex}_N f)(\eta) = \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x,z\in D_N^d} \eta(x,v)(1-\eta(z,v))P_N(z-x,v)[f(\eta^{x,z,v}) - f(\eta)],$$

其中

$$\eta^{x,y,v}(z,w) = \begin{cases} \eta(y,v), & \text{if } w = v \text{ and } z = x, \\ \eta(x,v), & \text{if } w = v \text{ and } z = y, \\ \eta(z,w), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

鉴于（2.2），我们将 $\mathcal{L}^{ex}_N = \mathcal{L}^{ex,1}_N + \mathcal{L}^{ex,2}_N$ 写成生成元的对称部分和弱非对称部分之和，其中对于 $f: X_N \to \mathbb{R}$ 成立

$$(\mathcal{L}^{ex,1}_N f)(\eta) = \frac{1}{2}\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{\substack{x,z\in D_N^d \\ |z-x|=1}} \eta(x,v)(1-\eta(z,v))[f(\eta^{x,z,v}) - f(\eta)],$$

$$(\mathcal{L}^{ex,2}_N f)(\eta) = \frac{1}{N}\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x,z\in D_N^d} \eta(x,v)(1-\eta(z,v))p(z-x,v)[f(\eta^{x,z,v}) - f(\eta)].$$

动力学中碰撞部分的生成元 $\mathcal{L}^c_N$，作用于 f 时为：$X_N \to \mathbb{R}$

$$(\mathcal{L}^c_N f)(\eta) = \sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q} p_c(y,q,\eta)[f(\eta^{y,q}) - f(\eta)],$$

[1] $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的欧几里得范数。

wh其中 Q 是所有保持线性动量的可能碰撞的集合，即 .,

$$Q = \{q = (v, w, v', w') \in \mathcal{V}^4 : v + w = v' + w'\}. \tag{2.4}$$

速率 $p_c(y, q, \eta)$ 由下式给出

$$p_c(y, q, \eta) = \eta(y, v)\eta(y, w)[1 - \eta(y, v')][1 - \eta(y, w')], \tag{2.5}$$

以及对于 $q = (v_0, v_1, v_2, v_3)$，碰撞后的构型 $\eta^{y,q}$ 定义为

$$\eta^{y,q}(z, u) = \begin{cases} \eta(y, v_{i+2}) & \text{if } z = y \text{ and } u = v_i \text{ for some } 0 \le i \le 3, \\ \eta(z, u) & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.6}$$

其中， v_{i+2} 的索引应按模4计算。在同一格点上，速度为 v 和 w 的粒子以速率1 发生碰撞，并在同一格点上产生两个速度为 v' 和 w' 的粒子，但这些速度满足恒等式 $v + w = v' + w'$。

Fin最后，参数 $\theta \ge 0$ 下 Glauber 动力学的生成元为

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^b_{N,\theta} f)(\eta) = \frac{1}{2N^\theta} \sum_{\substack{x \in D^d_N \\ x_1 = 1}} \sum_{v \in \mathcal{V}} \left(\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)(1 - \eta(x, v)) + (1 - \hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right))\eta(x, v)\right)[f(\sigma^{x,v}\eta) - f(\eta)] \\ + \frac{1}{2N^\theta} \sum_{\substack{x \in D^d_N \\ x_1 = N-1}} \sum_{v \in \mathcal{V}} \left(\hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)(1 - \eta(x, v)) + (1 - \hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right))\eta(x, v)\right)[f(\sigma^{x,v}\eta) - f(\eta)],\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $x = (x_1, \tilde{x})$ 与 $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_d)$，以及

$$\sigma^{x,v}\eta(y, w) = \begin{cases} 1 - \eta(x, v), & \text{if } w = v \text{ and } y = x, \\ \eta(y, w), & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.8}$$

对于每个 $v \in \mathcal{V}$、$\hat{}\alpha_v$、$\hat{}\beta_v \in C^2(\mathbb{T}^{d-1})$。我们还假设，对于每个 $v \in \mathcal{V}$，函数$\hat{}\alpha_v$ 和 $\hat{}\,\beta_v$、$\hat{}$ 的取值属于 $(0, 1)$ 的一个紧子集，这意味着 $\hat{}\alpha_v(\cdot)$ 和 $\beta_v(\cdot)$与 0 和1 保持正距离。不过，在 $\theta \ge 1$ 的情况下，这些条件可以放宽。函数$\hat{}\hat{}\alpha_v(\cdot)$ 和 $\beta_v(\cdot)$表示储库中的密度。速率 $\hat{}\alpha_v$ 和 $\hat{}\beta_v$ 的精确定义将在下一小节中给出。参数 θ 控制 D^d 边界处粒子的流动。这一直观将在定理 2.7 中得到严格说明。

在正文中，有时写成.....会更方便。

$$\begin{aligned} r^N_x(\eta, \alpha) &= \hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)(1 - \eta(x, v)) + (1 - \hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right))\eta(x, v), \\ r^N_x(\eta, \beta) &= \hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)(1 - \eta(x, v)) + (1 - \hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right))\eta(x, v). \end{aligned} \tag{2.9}$$

令 $\{\eta_{t,\theta} : \ t \ge 0\}$ 为具有生成元$\mathcal{L}_{N,\,\theta}$ 的马尔可夫过程，并记与$\mathcal{L}_{N,\,\theta}$关联的半群为 $\{S^{N,\theta}_t, t \ge 0\}$ 。令 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \ X_N)$ 表示取值于 X_N、配备一致拓扑的右连续且有左极限的函数的集合。对于 X_N上的概率测度 μ ，记由 $\{\eta_{t,\theta} : \ t \ge 0\}$ 及初始测度 μ诱导的路径空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \ X_N)$ 上的概率测度为 $\mathbb{P}_{\mu,\,\theta}$。关于 $\mathbb{P}_{\mu,\,\theta}$ 的期望记为 $\mathbb{E}_{\mu,\,\theta}$。

2.2. 不变测度。 在本小节中，我们考虑具有相同速度的粒子之间的弱非对称排斥过程，以及不同速度的粒子之间的碰撞；该过程演化于 d 维离散环面 $\mathbb{T}^d_N$ 上，即满足周期边界条件。

对于每个构型 $\eta \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$以及对于 $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$，令

$$I_k(\eta) = \sum_{v \in \mathcal{V}} v_k \eta(v), \tag{2.10}$$

其中我们采用如下约定： $v_0 = 1$，因此 $I_0(\eta)$ 表示 η 的质量，而对于 $k \in \{1, \dots, d\}$，$I_k(\eta)$ 表示 η 的第 k 个动量。令 $\mathbf{I}(\eta)$: $=(I_0(\eta) \dots, I_d(\eta))$。固定 $L \geq 1$ 和一个构型 η。令 $\mathbf{I}^L(x, \eta)$ $=(I_0^L(x) \dots,$ $I_d^L(x))$表示以 x为中心、边长为L 的立方体中守恒量的平均值：

$$\mathbf{I}^L(x, \eta) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{z \in x + \Lambda_L} \mathbf{I}(\eta_z), \tag{2.11}$$

其中 $\Lambda_L = \{-L, \dots, L\}^d$和 $|\Lambda_L| = (2L+1)^d$是盒子 Λ_L的离散体积。

假设速度集合的选取方式使得上述随机游走动力学唯一的守恒量为质量和动量： $\sum_{x \in D_N^d} \mathbf{I}(\eta_x)$。Esposito 等人Esposito 等人(1996年) 提出了满足这些条件的速度集合的以下示例：

> **模型 I:** 记 $\mathcal{E} = \{e = \pm e_j$，其中 $j \in \{1, \dots, d\}\}$，并令 $\mathcal{V} = \mathcal{E}$。在这些选择下，唯一可能的碰撞为 $q = (v,\ w,\ v',\ w')$，满足 $v + w = 0$ 且 $v' + w' = 0$。因此，我们有 $\mathcal{V} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$。

> **模型 II:** 令 $d = 3$，并令 σ 表示 $\mathcal{J}$中的任意元素，即 $\{1, 2, 3\}$的置换群。令 $\mathcal{V} = \{v$: $\sigma v = \varpi$，其中某个 $\sigma \in \mathcal{J}\}$成立，且 ϖ 是 $\varpi^4 - 6\varpi^2 - 1 = 0$的正解。

仅有的碰撞不变量是总质量和动量，这一结论的证明也是遍历定理的一部分，该定理同样在Esposito 等人（1996年）中得到了证明。

对于每个化学势 $\lambda = (\lambda_0$、……、 $\lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$，令 m_λ 表示定义在 $\xi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$ 上的概率测度，即

$$m_\lambda(\xi) = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp\{\lambda \cdot \mathbf{I}(\xi)\}, \tag{2.12}$$

其中 $Z(\lambda)$ 是一个归一化常数。注意， m_λ 是 $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$ 上的乘积测度，即变量 $\{\eta(v)$: $v \in \mathcal{V}\}$ 在 m_λ 下相互独立。

令 μ_λ^N 表示定义在 X_N 上的乘积测度，其边缘分布为

$$\mu_\lambda^N\{\eta : \eta(x, \cdot) = \xi\} = m_\lambda(\xi),$$

对于每个 $\xi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$和 $x \in D_N^d$。注意，在 μ_λ^N 下， $\{\eta(x,\ v)$: $x \in D_N^d$， $v \in \mathcal{V}\}$是相互独立的随机变量；此外，当采用周期边界条件时，测度 μ_λ^N 对该过程是不变的，即生成元为 $\mathcal{L}_N = N^2\{\mathcal{L}_N^c + \mathcal{L}_N^{ex}\}$。在 μ_λ^N 下，质量和 k 阶动量的期望分别为

$$\rho(\lambda) := E_{\mu_\lambda^N}[I_0(\eta_x)] = \sum_{v \in \mathcal{V}} \theta_v(\lambda) \quad \text{and} \quad \varrho_j(\lambda) := E_{\mu_\lambda^N}[I_j(\eta_x)] = \sum_{v \in \mathcal{V}} v_j \theta_v(\lambda),\ j \in \{1, \dots, d\}.$$

在最后一个公式中， $\theta_v(\lambda)$ 表示在 m_λ 下，速度为 v 的粒子密度的期望值：

$$\theta_v(\lambda) := E_{m_\lambda}[\xi(v)] = \frac{\exp\left\{\lambda_0 + \sum_{j=1}^d \lambda_j v_j\right\}}{1 + \exp\left\{\lambda_0 + \sum_{j=1}^d \lambda_j v_j\right\}}. \tag{2.13}$$

令$(\rho, \varrho)(\lambda) := (\rho(\lambda)\ \varrho_1(\lambda). .., \varrho_d(\lambda))$ 为将化学势与密度和动量向量相关联的映射。我们在附录 B 中证明，在假设2.1下，映射 (ρ, ϱ)是到 $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^{d+1}$上的微分同胚，其中 $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是 $\{I(\xi)\ \ \xi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\}$ 的凸包的内部。记 $\Lambda = (\Lambda_0, \dots, \Lambda_d)$: $\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^{d+1}$ 为 (ρ, ϱ) 的逆映射。这一对应关系使得一

通过密度和动量对不变状态进行参数化：对于每个 $(\rho, \varrho) \in \mathfrak{U}$，我们有一个乘积测度$\nu_\rho^N$，$_\varrho = \mu^N_{\Lambda(\rho,\varrho)}$ 在 X_N 上。

可以证明，经过漫长而繁琐的计算，对于模型I以及每个 $v \in \mathcal{V}$，由 $\Phi_v(\rho, \varrho) = \chi(\theta_v(\Lambda(\rho, \varrho)))$ 给出的函数 $\Phi_v\colon \mathfrak{U} \to (0, 1)$ 是利普希茨的，其中 $\chi(a) = a(1 - a)$ 是静态可压缩率。具体细节可参见 Farfan 等（2024）。

假设 2.2。 在下文中，我们始终假设速度集合 $\mathcal{V}$ 满足：对于任意 $v \in \mathcal{V}$，函数 $\Phi_v(\cdot)$ 是利普希茨的。

备注 2.1。请注意，前面的讨论仅限于考虑在环面上演化的模型。对于我们的模型，由于Glauber动力学，这些乘积测度不再是不变测度。然而，我们仍然引入了它们并回顾了其定义，因为它们将在替换引理的证明中发挥关键作用：它们将被用作接近系统（未知）不变测度的参考测度（见第 5节）。

ˆ 现在我们可以恰当地定义 ˆ$\alpha_v(\cdot)$ 和 $\beta_v(\cdot)$，$v \in \mathcal{V}$。事实上，对每个 $v \in \mathcal{V}$，令$\alpha_v(\cdot)$ $\beta_v(\cdot) \in C^2(\mathbb{T}^{d-1})$，并且

$$\alpha(\tilde{u}) := \sum_{v\in\mathcal{V}} \tilde{v}\alpha_v(\tilde{u}) \quad \text{and} \quad \beta(\tilde{u}) := \sum_{v\in\mathcal{V}} \tilde{v}\beta_v(\tilde{u}),$$

其中 $\tilde{u} \in \mathbb{T}^{d-1}$，$\tilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_d)$ 并且 v_0 已在（2.10）之后定义。然后，我们定义

$$\hat{\alpha}_v(\tilde{u}) := \theta_v(\Lambda(\alpha(\tilde{u}))) \text{ and } \hat{\beta}_v(\tilde{u}) := \theta_v(\Lambda(\beta(\tilde{u}))), \quad \tilde{u} \in \mathbb{T}^{d-1}, v \in \mathcal{V}. \tag{2.14}$$

注意，根据 $\Lambda(\cdot)$ 的定义，

$$\begin{aligned} &\sum_{v\in\mathcal{V}} \hat{\alpha}_v(\tilde{u}) = \sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_v(\tilde{u}), \quad \sum_{v\in\mathcal{V}} v_j\hat{\alpha}_v(\tilde{u}) = \sum_{v\in\mathcal{V}} v_j\alpha_v(\tilde{u}), \\ &\sum_{v\in\mathcal{V}} \hat{\beta}_v(\tilde{u}) = \sum_{v\in\mathcal{V}} \beta_v(\tilde{u}) \text{ and } \sum_{v\in\mathcal{V}} v_j\hat{\beta}_v(\tilde{u}) = \sum_{v\in\mathcal{V}} v_j\beta_v(\tilde{u}), \tilde{u} \in \mathbb{T}^{d-1}, j = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3. 水动力学方程。回顾一下，我们固定了一个有限的时间范围 $[0, T]$。令 $C^{m,n}([0, T]\times D^d)$ 表示定义在 $[0, T] \times D^d$ 上的函数集合，这些函数关于第一变量（时间变量）连续可微 m 次，关于第二变量（空间变量）连续可微 n 次。对于函数 $G := G(t, u) \in C^{m,n}([0, T] \times D^d)$，我们用 $\partial_t G$ 表示其关于时间变量 t 的导数，用 $\partial_{u_i} G$ 表示其关于空间变量u_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$的导数。为简化记号，我们令 $\Delta G := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 G}{\partial {u_i}^2}$，并且 $\nabla G = (\partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_d})$ 分别表示函数 G 的拉普拉斯算子和广义梯度。最后，$C^{m,n}_0([0, T] \times D^d)$ 表示函数集合 $G \in C^{m,n}([0, T] \times D^d)$，其中对于任意时间 t，函数 G_t 在 D^d 的边界处为零，也就是说，$G_t(0, \tilde{u}) = G_t(1, \tilde{u}) = 0$，其中 $u \in D^d$ 分解为 $(u_1, \tilde{u})$，且 $\tilde{u} \in \mathbb{T}^{d-1}$。

设 $(B, \|\cdot\|_B)$ 为可分巴拿赫空间。令 $L^2([0, T], B)$ 为可测函数 $U\colon [0, T] \to B$ 构成的巴拿赫空间，其中 $\|U\|^2_{L^2([0,T],B)} = \int_0^T \|U_t\|^2_B\, dt < \infty$. 此外，令 $\mathcal{H}^1(D^d)$ 为 $L^2(D^d)$ 中具有 $L^2(D^d)$ 广义导数的可测函数所构成的索博列夫空间。

现在我们可以定义具有不同边界条件的偏微分方程组，以及在我们模型的流体动力学极限中出现的相应弱解概念。我们首先介绍流体动力学方程：

定义 2.2. 设 $\mathfrak{C} \in \{0, 1, +\infty\}$. 为可测函数 $\rho_0 : D^d \to \mathbb{R}_+$, $\varrho_0 : D^d \to \mathbb{R}^d$，使得 $(\rho_0, \varrho_0)(u) \in \mathfrak{U}$。以下抛物型偏微分方程组是

与生成元为 (2.1)、边界速率为 (2.14) 的随机晶格气体模型相关的流体力学方程：

$$
\begin{cases}
\partial_t(\rho,\varrho)+\displaystyle\sum_{v\in\mathcal{V}}\tilde{v}[v\cdot\nabla\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))]=\frac{1}{2}\Delta(\rho,\varrho),\\
\Big(\dfrac{\partial(\rho,\varrho)}{\partial u_1}(t,0,\tilde{u})-2\displaystyle\sum_{v\in\mathcal{V}}\tilde{v}[v_1\,\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))]\Big)=\mathfrak{C}\Big((\rho,\varrho)(t,0,\tilde{u})-\alpha(\tilde{u})\Big),\\
\Big(\dfrac{\partial(\rho,\varrho)}{\partial u_1}(t,1,\tilde{u})-2\displaystyle\sum_{v\in\mathcal{V}}\tilde{v}[v_1\,\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))]\Big)=\mathfrak{C}\Big(\beta(\tilde{u})-(\rho,\varrho)(t,1,\tilde{u})\Big),\\
(\rho,\varrho)(0,u)=(\rho_0,\varrho_0)(u),
\end{cases}
\tag{2.16}
$$

其中 $t\in(0,\ T]$，$\tilde{u}\in\mathbb{T}^{d-1}$，$u\in D^d$，$\chi(a)=a(1-a)$ 是系统的静态可压缩率；对于每个速度 $v=(v_1,\ \ldots,\ v_d)$，我们记 $\tilde{v}=(v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_d)$，其中 $v_0=1$。

现在我们给出系统 (2.16) 的弱解的精确定义：

定义 2.3。令 $\mathfrak{C}\in\{0,1,+\infty\}$. 取可测函数 $\rho_0:\ D^d\to\mathbb{R}_+$，$\varrho_0:\ D^d\to\mathbb{R}^d$ 使得 $(\rho_0,\ \varrho_0)(u)\in\mathfrak{U}$。我们称 $(\rho,\ \varrho):[0,T]\times D^d\to\mathbb{R}_+\times\mathfrak{U}$ 是抛物型偏微分方程组 (2.16) 的弱解，如果满足以下两个条件：

(1) $(\rho,\varrho)\in L^2([0,T],\mathcal{H}^1(D^d))$; (2) (ρ,ϱ) 满足弱形式：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}((\rho,\varrho),t,G):=&\int_{D^d}(\rho,\varrho)(T,u)G(T,u)\,du-\int_{D^d}(\rho,\varrho)(0,u)G(0,u)\,du\\
&-\int_0^T\int_{D^d}(\rho,\varrho)(t,u)\left(\partial_tG(t,u)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2G}{\partial u_i^2}(t,u)\right)du\,dt\\
&-\int_0^T\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}\tilde{v}\,\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(t,u)\,du\,dt\\
&-\frac{\tilde{C}(\mathfrak{C})}{2}\int_0^T\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}(\beta(\tilde{u})-(\rho,\varrho)(t,1,\tilde{u}))\,G(t,1,\tilde{u})\,dS\,dt\\
&+\frac{\tilde{C}(\mathfrak{C})}{2}\int_0^T\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}((\rho,\varrho)(t,0,\tilde{u})-\alpha(\tilde{u}))\,G(t,0,\tilde{u})\,dS\,dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\Big\{(\rho,\varrho)(t,1,\tilde{u})\mathbb{1}_{\{\mathfrak{C}=0,1\}}+\beta(\tilde{u})\mathbb{1}_{\{\mathfrak{C}=+\infty\}}\Big\}\frac{\partial G}{\partial u_1}(t,1,\tilde{u})\,dS\,dt\\
&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\Big\{(\rho,\varrho)(t,0,\tilde{u})\mathbb{1}_{\{\mathfrak{C}=0,1\}}+\alpha(\tilde{u})\mathbb{1}_{\{\mathfrak{C}=+\infty\}}\Big\}\frac{\partial G}{\partial u_1}(t,0,\tilde{u})\,dS\,dt=0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

对所有 $t\in[0,T]$ 以及任意函数 $G:\ [0,T]\times D^d\to\mathbb{R}^{d+1}$ 属于 $C(\mathfrak{C})$，其中

$$
C(\mathfrak{C}):=\mathbb{1}_{\{0,1\}}(\mathfrak{C})C^{1,2}([0,T]\times D^d)+\mathbb{1}_{\{+\infty\}}(\mathfrak{C})C_0^{1,2}([0,T]\times D^d)\text{ and }\tilde{C}(\mathfrak{C})=\begin{cases}0,&\text{if }\mathfrak{C}=+\infty,\\1,&\text{if }\mathfrak{C}=1,\\0,&\text{if }\mathfrak{C}=0.\end{cases}
$$

上文中，对于 $u=(u_1,\tilde{u})\in\{0,1\}\times\mathbb{T}^{d-1}$，而 S 表示 $\mathbb{T}^{d-1}\cong[0,1)^{d-1}$ 上的勒贝格测度。注 2.4。在定义 2.3 中，若 $\mathfrak{C}=0$，则称 (ρ,ϱ) 满足 Neumann 边界条件；若 $\mathfrak{C}=1$，则称 (ρ,ϱ) 满足罗宾边界条件；若 $\mathfrak{C}=+\infty$，则称 (ρ,ϱ) 满足狄利克雷边界条件，我们将其解释为 $(\rho,\varrho)(t,u)=\begin{cases}\alpha\end{cases}$

$(\tilde{u})$；若 $u_1=0,\beta\ \tilde{u}\ ,\quad u_1=1.$ ( ) 如果我们注意到

然而，在狄利克雷情形下，这些边界处的等式是以算子的迹的意义成立的，因为上文定义2.3 中的条件 **(1)** 是有效的。

我们的证明归结为仔细应用由 Guo 等人 （1988年）提出的熵方法。为此，我们需要证明我们的水动力学方程的弱解的唯一性。我们无法涵盖所有情形，但请读者参阅附录 A 中的证明。

2.4.流体动力学极限。 令 $\mathcal{M}_+$ 是 D^d 上的有限正测度空间，并赋予弱拓扑；令 $\mathcal{M}$ 是 D^d 上的有界变差符号测度空间，并赋予弱拓扑。令 $\mathcal{M}_+ \times \mathcal{M}^d$ 是这些空间的笛卡尔积，并赋予积拓扑。由于定义在 D^d上的连续函数空间（记为 $C(D^d)$）是可分的，该拓扑可度量化；根据 Riesz-Markov 定理，有 $C(D^d)^* = \mathcal{M}$。

令 $\theta \geq 0$ ，并回顾 $\{\eta_{t,\theta}\}_{t\geq 0}$ 是具有生成元 $\mathcal{L}_{N,\theta}$ 的马尔可夫过程。为简化记号，对于 $k \in \{0,\dots,d\}$，我们考虑 $\varrho^0 = \rho$ 和 $\varrho = (\varrho^1,\dots,\varrho^d)$，并令 $\pi^{k,N}_{t,\theta}$，表示与第 k 个关注量相关的经验测度：

$$\pi^{k,N}_{t,\theta}(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x\in D^d_N} I_k(\eta_{t,\theta}(x))\delta_{\frac{x}{N}}(du), \tag{2.18}$$

其中 $\delta_u(du)$ 表示集中于 $u \in D^d$ 的狄拉克测度。我们令 $\langle \pi^{k,N}_{t,\theta}, G\rangle$ 表示测试函数 G 关于经验测度 $\pi^{k,N}_{t,\theta}$ 的积分；对于测度ν属于 X_N和 $f,g \in L^2(D^d,\nu)$，符号 $\langle f,g\rangle_\nu$表示 $L^2(D^d,\nu)$ 中的内积，即$\langle f,g\rangle_\nu = \int_{D^d} fg\,d\nu$.

令 $\mathcal{D}([0,T],\mathcal{M}_+\times\mathcal{M}^d)$ 表示取值于$\mathcal{M}_+\times\mathcal{M}^d$ 且赋予一致拓扑的右连续且有左极限的函数集合。我们考虑概率- 测度序列 $(\mathbb{Q}_N,\theta)_{N\geq 1}$，其定义在 $\mathcal{D}([0,T],\mathcal{M}_+\times\mathcal{M}^d)$ 上，对应于从概率测度 μ^N 出发的马尔可夫过程 $\pi^N_{t,\theta} = (\pi^{0,N}_{t,\theta},\dots,\pi^{d,N}_{t,\theta})$。此时，我们需要固定初始可测剖面$\rho_0\colon D^d \to \mathbb{R}_+$ 和 $\varrho_0\colon D^d \to \mathbb{R}^d$，其中 $\varrho_0 = (\varrho_{0,1},\dots,\varrho_{0,d})$，以及$X_N$上的初始分布 $(\mu^N)_N$。在介绍主要结果之前，让我们先定义一些将在下文中发挥重要作用的概念。

定义 2.5 （有限能量）。 如果 $(\rho,\ \varrho) \in L^2([0,T],\ (L^2(D^d))^{d+1})$ 的各分量都属于 $L^2([0,T],\ \mathcal{H}^1(D^d))$，则称其具有有限能量；也就是说，若 $\nabla\rho$和 $\nabla\varrho$是可测函数，使得对于$k \in \{0,1,\dots,d\}$

$$\int_0^T ds\left(\int_{D^d} \|\nabla\varrho^k(s,u)\|^2 du\right) < \infty.$$

定义 2.6. 若概率测度序列 $(\mu^N)_N$ 定义在 X_N 上，且与密度剖面 ρ_0 和动量剖面 ϱ_0相关联，其中 $Im((\rho_0,\ \varrho_0)) \subset \mathfrak{U}$，则称该序列与这两个剖面相关联；若对于每个$G \in C(D^d)$以及每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mu^N\left[\eta : \left|\frac{1}{N^d}\sum_{x\in D^d_N} G\left(\tfrac{x}{N}\right) I_k(\eta(x)) - \int_{D^d} G(u)\varrho^k_0(u)du\right| > \delta\right] = 0,$$

对于每个 $k \in \{0,1,\dots,d\}$。

定理 2.7。 固定一个满足假设 $\mathcal{V}$ 的速度集合 *2.1* 和 *2.2*。设 ρ_0 和 ϱ_0 为可测函数，并设 $(\mu^N)_N$ 为定义在 X_N 上的一列概率测度，与剖面(ρ_0,ϱ_0)相关联。那么，对于每个 $t \in [0,T]$、每个函数 $G \in C(D^d)$以及每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left[\eta_\cdot \in \mathcal{D}([0,T],X_N) : \left|\frac{1}{N^d}\sum_{x\in D^d_N} G\left(\tfrac{x}{N}\right) I_k(\eta_{t,\theta}(x)) - \int_{D^d} G(u)\varrho^k(t,u)\,du\right| > \delta\right] = 0,$$

对于 $k \in \{0,1,\dots,d\}$ 其中 (ρ,ϱ) 具有有限能量（见定义 2.5），且它是定义 (2.16) 中所给出的唯一弱解（见定义 2.3），其中 $\mathfrak{C}=+\infty$，若 $0\le\theta<1$；$\mathfrak{C}=1$，若 $\theta=1$ 且 $d=1$；或者 $\mathfrak{C}=0$，若 $\theta>1$。

注记 2.8. 在 $\theta<0$ 的情形下，可以采用定理2.7 证明中的相同论证，但取 $C^{1,2}_c([0,T]\times D^d)$ 中的测试函数，即时间上属于 C^1 类、空间上属于C^2 类且具有紧支撑的函数。不过，由于测试函数空间过小，我们需要在弱解的定义中加入额外条件 (3)；为保证唯一性，该条件要求解几乎处处在时间上满足狄利克雷条件。这可以用与Bernardin 等人 (2019) 中类似的方法来实现。细节留给读者。

为证明定理 2.7，我们首先在第 3 节证明一个紧性结果，更准确地说，我们证明序列 $(\mathbb{Q}_{N,\theta})_{N\ge1}$ 的紧性。然后，我们在第 4 节证明 $(\mathbb{Q}_{N,\theta})_{N\ge1}$ 的所有极限点都集中在相对于勒贝格测度绝对连续的测度上，且其拉东-尼科迪姆导数是方程 (2.16) 的弱解。为此，我们需要第 5 节和第 6 节中给出的一些辅助结果。最后，在附录 A 中证明弱解的唯一性，进而得到 $(\mathbb{Q}_{N,\theta})_{N\ge1}$ 弱收敛且依概率收敛到 $\mathbb{Q}^*_\theta$，当 $N\to\infty$ 时，其中测度 $\mathbb{Q}^*_\theta$ 是集中在 $(\rho,\varrho)du$ 上的狄拉克测度，而 (ρ,ϱ) 是方程 (2.16) 的唯一弱解。

3. 紧性

在本节中，我们证明概率测度序列 $(\mathbb{Q}_{N,\,\theta})_N$ 在 Skorohod 空间 $\mathcal{D}([0,T],\ \mathcal{M}_+\times\mathcal{M}^d)$ 中是紧的。为此，我们采用 Aldous 判据。根据（Kipnis 和 Landim，1998年，第 4 章，命题 1.7），只需证明：对于关于一致拓扑的 $C(D^d)$ 的一个稠密子集中的每个函数 G，与实值过程 $\langle\pi^{k,N}_{t,\theta},G\rangle$ 对应的测度序列对每个 $k\in\{0,1,\dots,d\}$ 都是紧的。为此，我们需要证明两件事。第一：

$$\lim_{A\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(|\langle\pi^{k,N}_{t,\theta},G\rangle|>A\Big)=0,\ \text{for each } k\in\{0,1,\dots,d\}. \tag{3.1}$$

但这可由切比雪夫不等式以及以下事实推出：对于排斥型动力学，在每个固定速度下，每个格点的粒子数至多为一个。其次，我们需要证明，对于所有 $\varepsilon>0$ 以及稠密子集 $C(D^d)$ 中关于一致拓扑的任意函数 G：

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{N\to+\infty}\sup_{\substack{\tau\in\mathfrak{T}_T\\ t\le\delta}}\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta:|\langle\pi^{k,N}_{\tau+t,\theta},G\rangle-\langle\pi^{k,N}_{t,\theta},G\rangle|>\varepsilon\Big)=0, \tag{3.2}$$

其中，$\mathfrak{T}_T$ 表示相对于由 T界定的典则滤过的停时集合。回顾一下，只需证明对于函数 G（它们属于 $C(D^d)$中关于一致拓扑的稠密子集）该断言成立即可。我们将证明分成两种情况：第一种针对 $\theta\ge1$，第二种针对 $0\le\theta<1$。

根据 Dynkin 公式，例如参见（Kipnis 和 Landim，1998年，附录 A1，引理 5.1），对于每个 $k\in\{0,1,\dots,d\}$

$$M^{N,k}_{t,\theta}(G)=\langle\pi^{k,N}_{t,\theta},G\rangle-\langle\pi^{k,N}_{0,\theta},G\rangle-\int_0^t(\mathcal{L}_{N,\theta}+\partial_s)\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds \tag{3.3}$$

是关于自然滤过 $\mathcal{F}_{t,\theta}=\sigma(\eta_{s,\theta},s\le t)$ 的鞅。然后，给定 $\tau\in\mathfrak{T}_T$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta:\Big|\langle\pi^{k,N}_{\tau+t,\theta},G\rangle-\langle\pi^{k,N}_{\tau,\theta},G\rangle\Big|>\varepsilon\Big)\\=&\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta:|M^{N,k}_{\tau,\theta}(G)-M^{N,k}_{\tau+t,\theta}(G)+\int_\tau^{\tau+t}\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds\Big|>\varepsilon\Big)\\\le&\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta:|M^{N,k}_{\tau,\theta}(G)-M^{N,k}_{\tau+t,\theta}(G)\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)+\mathbb{P}_{\mu^N}\Big(\eta:\Big|\int_\tau^{\tau+t}\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big).\end{aligned}$$

对最后一个不等式右端的第一项（分别是第二项）应用切比雪夫不等式（分别是马尔可夫不等式），可将前面的表达式上界为

$$\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\Big(M^{N,k}_{\tau,\theta}(G)-M^{N,k}_{\tau+t,\theta}(G)\Big)^2\right]+\frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\Big|\int_\tau^{\tau+t}\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds\Big|\right].$$

因此，为了证明（3.2），只需证明

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{N\to+\infty}\sup_{\substack{\tau\in\mathfrak{T}_T\\t\le\delta}}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\Big|\int_\tau^{\tau+t}\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds\Big|\right]=0,\ \text{and}\tag{3.4}$$

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{N\to+\infty}\sup_{\substack{\tau\in\mathfrak{T}_T\\t\le\delta}}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\Big(M^{N,k}_{\tau,\theta}(G)-M^{N,k}_{\tau+t,\theta}(G)\Big)^2\right]=0.\tag{3.5}$$

我们先证明函数 $G\in C^2(D^d)$ 满足（3.4），因为通过标准的 L^1 方法，很容易将其推广到函数 $G\in C(D^d)$。现在，我们将证明存在一个常数 C，使得$\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\le C$对任意 $s\le T$ 均成立。为此，注意到

$$|\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|\le|N^2\mathcal{L}^{ex,1}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|+|N^2\mathcal{L}^{ex,2}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|+|N^2\mathcal{L}^{c}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|+|N^2\mathcal{L}^{b}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|.$$

Let us bound this separately. Note that,

$$\begin{aligned}|N^2\mathcal{L}^{ex,1}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|\le&\Big|\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},\frac{1}{2}\Delta_NG\rangle\Big|+\Big|\frac{N}{2N^d}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x},v)\partial^{N,+}_{x_1}G\left(\tfrac{0}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\Big|\\&+\Big|\frac{N}{2N^d}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\x_1=N-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x},v)\partial^{N,-}_{x_1}G\left(\tfrac{N}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\Big|\\\le&\frac{C}{2}\|G''\|_\infty+\frac{CNN^{d-1}}{2N^d}\|G'\|_\infty+\frac{CNN^{d-1}}{2N^d}\|G'\|_\infty=\frac{C}{2}\|G''\|_\infty+C\|G'\|_\infty,\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned}\partial^{N,+}_{x_1}G\left(\tfrac{0}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)&=N\left[G\left(\tfrac{1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-G\left(\tfrac{0}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right],\\\partial^{N,-}_{x_1}G\left(\tfrac{N}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)&=-N\left[G\left(\tfrac{N-1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-G\left(\tfrac{N}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right].\end{aligned}$$

同样，利用 p 具有有限程这一事实，我们得到天天爱彩票

$$\begin{aligned}|N^2\mathcal{L}^{ex,2}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|\le&\Big|\frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^d\sum_{x\in D^d_N}(\partial^N_{x_j}G)\left(\tfrac{x}{N}\right)\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p(z,v)z_j\eta_{s,\theta}(x,v)(1-\eta_{s,\theta}(x+z,v))\Big|\\\le&\frac{\tilde{C}N^d\|G'\|_\infty}{N^d}=\tilde{C}\|G'\|_\infty.\end{aligned}\tag{3.7}$$

另外，

$$
\begin{aligned}
|N^2\mathcal{L}^b_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle| &\le \Big|\frac{N^2}{2N^dN^\theta}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k G\left(\tfrac{1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x},v)\right]\Big| \\
&\quad+\Big|\frac{N^2}{2N^dN^\theta}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=N-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k G\left(\tfrac{N-1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x},v)\right]\Big| \qquad (3.8)\\
&\le \frac{CN^2N^{d-1}}{2N^dN^\theta}\|G\|_\infty+\frac{CN^2N^{d-1}}{N^dN^\theta}\|G\|_\infty = CN^{1-\theta}\|G\|_\infty.
\end{aligned}
$$

现在注意到，

$$
N^2\mathcal{L}^c_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle=\frac{N^2}{N^d}\sum_{x\in D^d_N}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k G\left(\tfrac{x}{N}\right)\mathcal{L}^c_N(\eta_{s,\theta}(x,v)).
$$

由于该算子是线性的，我们只需计算 $\mathcal{L}^c_N(\eta_{s,\theta}(x,v))$。对于 $f(\eta)=\eta(x,v)$，我们有

$$
(\mathcal{L}^c_N f)(\eta)=\sum_{y\in D^d_N}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)[f(\eta^{y,q})-f(\eta)]=\sum_{q\in Q}p_c(x,q,\eta)[\eta(x,v_{i+2})-\eta(x,v)]=0.
$$

因此，

$$
N^2\mathcal{L}^c_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle=0. \qquad (3.9)
$$

现在，我们将情况限制为 $\theta\ge 1$。由（3.6）、（3.7）、（3.8）和（3.9）可得

$$
|\mathcal{L}_{N,\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle|\le C
$$

这就证明了（3.4）。

在这种情况下，$0\le\theta<1$，如果我们尝试采用用于 $\theta\ge 1$ 的相同策略，那么在试图控制 $\int_0^t N^2\mathcal{L}^b_{N\text{的连续模时}\theta}\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle\,ds$时会遇到困难，因为（3.8）中的表达式可能在 $N\to\infty$时爆炸。我们首先将对函数 $G\in C^2_c(D^d)$ 证明（L^1），然后通过下文所解释的 $G\in C^1(D^d)$ 近似过程，将其推广到函数。在这种情况下，有

$$
\begin{aligned}
|N^2\mathcal{L}^{ex,1}_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle| &\le |\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},\frac{1}{2}\Delta_N G\rangle|+\Big|\frac{N}{2N^d}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x},v)\partial^{N,+}_{x_1}G(0,\tilde{x})\Big| \\
&\quad+\Big|\frac{N}{2N^d}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=N-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x},v)\partial^{N,-}_{x_1}G(1,\tilde{x})\Big|\le\frac{1}{2}\|G''\|_\infty.
\end{aligned} \qquad (3.10)
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
|N^2\mathcal{L}^b_N\langle\pi^{k,N}_{s,\theta},G\rangle| &\le \Big|\frac{N^2}{2N^dN^\theta}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k G\left(\tfrac{1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x},v)\right]\Big| \\
&\quad+\Big|\frac{N^2}{2N^dN^\theta}\sum_{\substack{x\in D^d_N\\ x_1=N-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k G\left(\tfrac{N-1}{N},\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\hat{\beta}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)-\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x},v)\right]\Big| \qquad (3.11)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

对于 N 足够大时。这是因为函数 G 在 D^d内部具有紧支集。利用（3.7）、（3.9）、（3.10）和（3.11），即可完成对任意$\theta \geq 0$的（3.4）的证明。

现在我们将证明（3.5）。由于

$$\left(M_{\tau,\theta}^{N,k}(G) - M_{\tau+t,\theta}^{N,k}(G)\right)^2 - \int_\tau^{\tau+t} \mathcal{L}_{N,\theta}[\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle]^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle ds$$

是一个均值为零的鞅，我们得到

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left(M_{\tau,\theta}^{N,k}(G) - M_{\tau+t,\theta}^{N,k}(G)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{\mu^N}\left[\int_\tau^{\tau+t} \mathcal{L}_{N,\theta}[\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle]^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle ds\right].$$

注意，（3.5）成立的条件是我们证明

$$\int_\tau^{\tau+t} \mathcal{L}_{N,\theta}[\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle]^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle ds,$$

当 $N \to \infty$时，在 $t \in [0,T]$上一致收敛于零。简单但冗长的计算表明

$$\begin{aligned}
&N^2\mathcal{L}_N^{ex,1}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle N^2\mathcal{L}_N^{ex,1}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \\
&= \frac{1}{2N^{2d}} \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{j=1}^d v_k^2 \left[\eta_{s,\theta}(x,v) - \eta_{s,\theta}(x+e_j,v)\right]^2 [\partial_{x_j}^N G\left(\tfrac{x}{N}\right)]^2 \leq \frac{C}{N^d}\|G'\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
&N^2\mathcal{L}_N^{ex,2}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle N^2\mathcal{L}_N^{ex,2}\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \\
&= \frac{1}{N^{2d+1}} \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} v_k^2\, \eta_{s,\theta}(x,v)(1-\eta_{s,\theta}(x+w,v))p(w,v)w_j^2 [\partial_{x_j}^N G\left(\tfrac{x}{N}\right)]^2 \leq \frac{\tilde{C}}{N^{d+1}}\|G'\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}
&N^2\mathcal{L}_{N,\theta}^b\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle N^2\mathcal{L}_{N,\theta}^b\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle \\
&= \frac{N^2}{2N^{2d}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1=1}} \sum_{v\in\mathcal{V}} \left[\frac{\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N})(1-\eta_{s,\theta}(x,v)) + (1-\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N}))\eta_{s,\theta}(x,v)}{N^\theta}\right] v_k^2 \left[G\left(\tfrac{1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right]^2 \\
&+ \frac{N^2}{2N^{2d}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1=N-1}} \sum_{v\in\mathcal{V}} \left[\frac{\hat{\beta}_v(\frac{\tilde{x}}{N})(1-\eta_{s,\theta}(x,v)) + (1-\hat{\beta}_v(\frac{\tilde{x}}{N}))\eta_{s,\theta}(x,v)}{N^\theta}\right] v_k^2 \left[G\left(\tfrac{N-1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right]^2 \leq \frac{\tilde{C}}{N^{d-1}}\|G\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

经过一番冗长但简单的计算，我们可以证明

$$N^2\mathcal{L}_N^c\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle^2 - 2\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle N^2\mathcal{L}_N^c\langle \pi_{s,\theta}^{k,N}, G\rangle = 0.$$

这就完成了任意 $\theta \geq 0$ 的紧性证明。

4. 极限点刻画

本节讨论 $(\mathbb{Q}_{N,\theta})_N$ 在 $\theta \geq 0$ 下的点的极限刻画。为简便起见，我们将证明分为三个不同的情形。

4.1. $\theta \in [0,1$ **的极限点的刻画).**

命题4.1. 若 $\mathbb{Q}_\theta^*$ 是$(\mathbb{Q}_{N,\theta})_{N\geq 1}$的极限点，则

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi = (\rho,\varrho)du \text{ and } \mathfrak{F}_{+\infty}((\rho,\varrho),t,G) = 0\right] = 1,$$

对所有 $t \in [0,T]$, $\forall G \in C^{1,\,2\,0}$ $([0,T]\times D^d)$ 以及 $\theta \in [0,1)$，其中泛函 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ 定义于（2.17）。

证明。只需验证，对于 $\delta > 0$ 和 $G \in C^{1,\,2\,0}([0,T]\times D^d)$ 固定，

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi^k = \varrho^k\,du \text{ and } \sup_{0\leq t\leq T}|\mathfrak{F}^k_{+\infty}((\rho,\varrho),t,G)| > \delta\right] = 0, \tag{4.1}$$

其中 $\mathfrak{F}^k_{\mathfrak{C}}$对应于 k阶演化方程，见 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$（2.17）中定义的 $k \in \{0,1,\dots,d\}$。首先，注意到

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi^k = \varrho^k\,du\right] = 1,$$

对于 $k \in \{0,1,\dots,d\}$。现在，我们需要将术语 $\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\ \varrho)))$ 在 (2.17) 中替换为经验测度的泛函。为此，对于每个 $\varepsilon > 0$，令 $j_\varepsilon(\cdot)$，我们将用其获得点估值的近似，定义为

$$j_\varepsilon(x) = (2\varepsilon)^{-d}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d}(x), \quad x \in D^d.$$

现在，令 $(\rho,\varrho) * j_\varepsilon(\cdot) = (\rho * j_\varepsilon(\cdot)\ \varrho_1 * j_\varepsilon(\cdot)\dots,\varrho_d * j_\varepsilon(\cdot))$。我们有 $(\rho,\varrho) * j_\varepsilon(\cdot) \to (\rho,\varrho)(\cdot)$，其在 $L^1(D^d)$ 中满足 $\varepsilon \to 0$。由于 $\chi(\theta_v(\Lambda(\cdot)))$ 是利普希茨的，因此我们有 $\chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho) * j_\varepsilon(\cdot))))\ \to \chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho)(\cdot))))$，其在 $L^1(D^d)$ 中满足 $\mathbb{Q}_\theta^*$。几乎必然地，对每个 $v \in \mathcal{V}$，

$$\int_0^t\int_{D^d}\tilde{v}\,\chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho)*j_\varepsilon)))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr \to \int_0^t\int_{D^d}\tilde{v}\,\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr,$$

其中 $\varepsilon \to 0$。现在，令 $\mathfrak{F}^\varepsilon_{\mathfrak{C}}((\rho,\varrho)\ t,G)$ 为将 (2.17) 中的 $\chi(\theta_v(\Lambda(\rho,\varrho)))$ 替换为 $\chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho)\ * j_\varepsilon)))$ 后所得的表达式。因此，只需证明下式，(4.1) 即可成立：

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi^k = \varrho^k\,du \text{ and } \sup_{0\leq t\leq T}|\mathfrak{F}^{\varepsilon,k}_{+\infty}((\rho,\varrho),t,G)| > \delta\right] = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\mathfrak{F}^{\varepsilon,\ k}_{\mathfrak{C}}$对应于上文定义的 k的第 $\mathfrak{F}^\varepsilon_{\mathfrak{C}}$投影，对每个 $k \in \{0,1,\dots,d\}$均成立。根据（Kipnis 和 Landim，1998年，第77页）中的相同论证，我们有

$$\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(x,\eta) = C_{N,\varepsilon}(\pi^N_\theta * j_\varepsilon)\left(\frac{x}{N}\right),$$

其中 $\pi^N_\theta * j_\varepsilon(\cdot) = \left(\pi^{0,N}_\theta * j_\varepsilon(\cdot)\ \pi^{1}_{,\theta} * j_\varepsilon(\cdot)\dots,\pi^{d}_{,\theta} * j_\varepsilon(\cdot)\right)$ 和 $C_{N,\varepsilon} = 1 + O(N^{-1})$。由于 (4.2) 中所考虑的集合是关于 $\mathcal{D}([0,T],\mathcal{M}_+\times\mathcal{M}^d)$ 上 Skorohod 拓扑的开集，我们可以直接使用 Portmanteau 定理，将 (4.2) 中的概率界定为

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\liminf_{N\to\infty}\mathbb{Q}_{N,\theta}\left[\pi_\cdot : \sup_{0\leq t\leq T}\left|\langle\pi^{k,N}_t,G_t\rangle - \langle\pi^{k,N}_0,G_0\rangle - \int_0^t\left\langle\pi^{k,N}_r,\left(\partial_r G(r,u)+\frac{1}{2}\Delta G_r\right)\right\rangle dr\right.\right.\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v(\tilde{u})\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde{u})\,dS\,dr - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v(\tilde{u})\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde{u})\,dS\,dr\\
&\left.\left.-\int_0^t\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\,\chi(\theta_v(\Lambda(\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(u,\eta))))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr\right| > \delta\right],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于每个 $k \in \{0,1,\dots,d\}$。将 $\int_0^t \mathcal{L}_N、_\theta\langle \pi^k、_r{}^N、 G\rangle\, dr$ 代入（4.3）中上确界内的表达式并进行加减，我们可以将其界定为以下各项之和

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\left[\eta_\cdot : \sup_{0\le t\le T} |M_t^{N,k}(G)| > \frac{\delta}{2}\right] \text{ and}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg[\eta_\cdot : \sup_{0\le t\le T}\Bigg| & \int_0^t \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_r^{k,N}, G_r\rangle\, dr - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \pi_r^{k,N}, \Delta G_r\rangle\, dr \\
& - \int_0^t \int_{D^d} \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k\, \chi(\theta_v(\Lambda(\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(u,\eta)))) \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\, du\, dr \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde{u}) \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \hat{\beta}_v(\tilde{u})\, dS\, dr \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde{u}) \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \hat{\alpha}_v(\tilde{u})\, dS\, dr\Bigg| > \frac{\delta}{2}\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

经过大量计算，我们得到：

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_r^{k,N}, G_r\rangle\, dr = & \frac{1}{2}\int_0^t \langle \pi_r^{k,N}, \Delta_N G_r\rangle\, dr \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = N-1}} I_k(\eta_r(N-1,\tilde{x}))\partial_{x_1}^{N,-} G_r\left(\tfrac{N}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) dr \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = 1}} I_k(\eta_r(1,\tilde{x}))\partial_{x_1}^{N,+} G_r\left(\tfrac{0}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) dr \\
& + \int_0^t \frac{1}{N^d} \sum_{j=1}^d \sum_{x\in D_N^d} \left(\partial_{x_j}^N G_r\right)\left(\tfrac{x}{N}\right) \tau_x W_{j,k}^{N,\eta_r}\, dr \\
& + \int_0^t \frac{N^2}{2N^{d+\theta}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = 1}} G_r\left(\tfrac{1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\Big[\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \hat{\alpha}_v(\tfrac{\tilde{x}}{N}) - I_k(\eta_r(1,\tilde{x}))\Big] dr \\
& + \int_0^t \frac{N^2}{2N^{d+\theta}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = N-1}} G_r\left(\tfrac{N-1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\Big[\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \hat{\beta}_v(\tfrac{\tilde{x}}{N}) - I_k(\eta_r(N-1,\tilde{x}))\Big] dr,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 τ_x 表示由 $x \in D_N^d$ 进行的平移，因此 $(\tau_x\eta)(y,v) = \eta(x+y,v)\mathbb{1}_{\{x+y\in D_N^d\}}$ 对所有 $y\in\mathbb{Z}^d, v\in\mathcal{V}$，以及 $W^{N}{}_{,j\,k}{}^{\eta_r}$, 均由下式给出：

$$W_{j,k}^{N,\eta_r} = \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p(z,v) z_j \eta_r(0,v)[1-\eta_r(z,v)],$$

其中我们回顾 $v_0 = 1$ 以及 $\pi^{k,\,t\,N}$ 是定义于（2.18）。现在，将（4.5）限制到情形 $G \in C^{1,\,2\,0}$（$[0,T]\times D^d$），我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_r^{k,N}, G_r\rangle\, dr &= \frac{1}{2}\int_0^t \langle \pi_r^{k,N}, \Delta_N G_r\rangle\, dr \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = N-1}} I_k(\eta_r(N-1,\tilde{x}))\partial_{x_1}^{N,-} G_r\left(\tfrac{N}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) dr \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = 1}} I_k(\eta_r(1,\tilde{x}))\partial_{x_1}^{N,+} G_r\left(\tfrac{0}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) dr \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^d \sum_{x\in D_N^d} (\partial_{x_j}^N G_r)\left(\tfrac{x}{N}\right)\tau_x W_{j,k}^{N,\eta_r}\, dr\end{aligned} \tag{4.6}$$

利用表达式(4.6) 在(4.4)中，我们将方程(4.4) 中概率内的表达式界定为以下各项之和

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \Big[\frac{1}{2N^d}\sum_{x\in D_N^d} I_k(\eta_r(x))\Delta_N G_r\left(\tfrac{x}{N}\right) - \frac{1}{2N^d}\sum_{x\in D_N^d} I_k(\eta_r(x))\Delta G_r\left(\tfrac{x}{N}\right)\Big]\, dr\right|, \tag{4.7a}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \frac{1}{2N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = N-1}} I_k(\eta_r(N-1,\tilde{x}))\Big[\partial_{x_1}^{N,-} G_r\left(\tfrac{N}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) - \partial_{x_1} G_r(\tfrac{1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N})\Big]\, dr\right|, \tag{4.7b}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = N-1}} \partial_{u_1} G_r(\tfrac{1}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N})\Big[I_k(\eta_r(N-1,\tilde{x})) - \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \beta_v(\tfrac{\tilde{x}}{N})\Big]\, dr\right|, \tag{4.7c}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \frac{1}{2N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = 1}} I_k(\eta_r(1,\tilde{x}))\Big[\partial_{x_1}^{N,+} G_r\left(\tfrac{0}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N}\right) - \partial_{x_1} G_r(\tfrac{0}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N})\Big]\, dr\right|, \tag{4.7d}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{N^{d-1}} \sum_{\substack{x\in D_N^d \\ x_1 = 1}} \partial_{u_1} G_r(\tfrac{0}{N}, \tfrac{\tilde{x}}{N})\Big[I_k(\eta_r(1,\tilde{x})) - \sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \alpha_v(\tfrac{\tilde{x}}{N})\Big]\, dr\right|, \tag{4.7e}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \Big[\frac{1}{N^d}\sum_{j=1}^d \sum_{x\in D_N^d} (\partial_{x_j}^N G_r)(\tfrac{x}{N})\tau_x W_{j,k} - \int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k\, \chi(\theta_v(\Lambda(\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(\tfrac{x}{N},\eta))))\sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial G_r}{\partial u_i}\, dx\Big] dr\right| \tag{4.7f}$$

利用泰勒展开，我们得到 (4.7a)、(4.7b) 和 (4.7d) 随着 $N\to\infty$收敛到零。由替换引理（分别是命题 5.9 和引理5.12）可知，(4.7c)、(4.7e) 和 (4.7f) 在 $N\to+\infty$ 时趋于零，继而 $\varepsilon\to 0$。证毕。□

4.2. 极限点刻画 $\theta = 1$。我们首先固定本小节中使用的一些记号。对于 $k\in\{0,1,\cdots,d\}$，我们记

$$\overrightarrow{\eta}^{k,\ell}(x_1,\tilde{x},v) := \frac{1}{\ell}\sum_{y\in\overrightarrow{\Lambda}_{x_1}^{\ell}} I_k(\eta_s(y,\tilde{x},v)) \quad \text{and} \quad \overleftarrow{\eta}^{k,\ell}(x_1,\tilde{x},v) := \frac{1}{\ell}\sum_{y\in\overleftarrow{\Lambda}_{x_1}^{\ell}} I_k(\eta_s(y,\tilde{x},v)), \tag{4.8}$$

其中 $\overleftarrow{\Lambda}_{x_1}^{\ell} := \{x_1-\ell+1,\ldots,x_1\}$（分别为 $\overrightarrow{\Lambda}_{x_1}^{\ell} := \{x_1,\ldots,x_1+\ell-1\}$）。

命题4.2。 若 $\mathbb{Q}_\theta^*$ 是$(\mathbb{Q}_{N,\theta})_{N\geq 1}$的极限点，则

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi = (\rho,\varrho)du \text{ and } \mathfrak{F}_1((\rho,\varrho),t,G) = 0\right] = 1,$$

对于所有 $t\in[0,T]$, $\forall G\in C^{1,2}([0,T]\times D^d)$ 以及 $\theta = 1$。

证明。 只需验证，对于 $\delta>0$和 $G\in C^{1,\ 2}([0,T]\times D^d)$ 固定时，

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot : \pi^k = \varrho^k\,du \text{ and } \sup_{0\leq t\leq T}\left|\mathfrak{F}_1^k((\rho,\varrho),t,G)\right| > \delta\right] = 0,$$

对所有 $k\in\{0,1,\cdots,d\}$。由于 $\mathbb{Q}_\theta^*\Big[\pi_\cdot :\ \pi^k = \varrho^k\,du\Big] = 1$，沿用情形$\theta\in[0,1)$的相同策略，我们得到只需证明

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{Q}_\theta^*\Bigg[\pi_\cdot : \sup_{0\leq t\leq T}\Bigg|\int_{D^d}\varrho^k(t,u)G(t,u)\,du - \int_{D^d}\varrho^k(0,u)G(0,u)\,du\\
&-\int_0^t\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\,\chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho)*j_\varepsilon))))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr\\
&-\int_0^t\int_{D^d}\varrho^k(r,u)\left(\partial_r G(r,u)+\frac{1}{2}\Delta G_r\right)du\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,1,\tilde{u})\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v(\tilde{u})\,dS\,dr - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,0,\tilde{u})\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v(\tilde{u})\,dS\,dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\varrho^k(r,1,\tilde{u})\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde{u})+G(r,1,\tilde{u})\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\varrho^k(r,0,\tilde{u})\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde{u})-G(r,0,\tilde{u})\right]dS\,dr\Bigg|>\delta\Bigg] = 0.
\end{aligned}\tag{4.9}$$

此时，我们希望在概率$\mathbb{Q}_N$中应用 *Portmanteau* 定理，θ正如我们在前一种情形中所做的那样。但是，在这里我们遇到了一个问题。遗憾的是，上述概率中的集合相对于 Skorohod拓扑并不是开集。为了避免这个问题，我们固定$\varepsilon>0$ （这与 ε 在（4.9）中使用的相同），并考虑两个恒等映射的逼近，对于固定的 $u_1\in[0,1]$ 它们在 $w\in[0,1]$ 上由下式给出

$$\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon(w) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[0,\varepsilon)}(w) \quad\text{and}\quad \overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon(w) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(1-\varepsilon,1]}(w).$$

我们使用记号 $\langle\pi^k_r,\ \overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle = \langle\varrho^k_r,\ \overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle$ 以及 $\langle\pi^k_r,\ \overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle = \langle\varrho^k_r,\ \overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle$，从而

$$\langle\pi^k_r,\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle(\tilde{u}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\varrho^k_r(w,\tilde{u})\,dw \quad\text{and}\quad \langle\pi^k_r,\overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle(\tilde{u}) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1\varrho^k_r(w,\tilde{u})\,dw.$$

通过求和　并减去适当的项后，我们将（4.9）中的概率从上界估计为

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathbb{Q}^*_\theta\Bigg[\pi_\cdot:\sup_{0\le t\le T}\Bigg|\int_{D^d}\varrho^k(t,u)G(t,u)\,du-\int_{D^d}\varrho^k(0,u)G(0,u)\,du\\
&-\int_0^t\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\chi(\theta_v(\Lambda((\rho,\varrho)*j_\varepsilon)))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\Big[\varrho^k(r,1,\tilde u)-\langle\pi^k_r,\overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle(\tilde u)\Big]\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde u)+G(r,1,\tilde u)\right]dS\,dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\langle\pi^k_r,\overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle(\tilde u)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde u)+G(r,1,\tilde u)\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\Big[\varrho^k(r,0,\tilde u)-\langle\pi^k_r,\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle(\tilde u)\Big]\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde u)-G(r,0,\tilde u)\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}\langle\pi^k_r,\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle(\tilde u)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde u)-G(r,0,\tilde u)\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,1,\tilde u)\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v(\tilde u)\,dS\,dr-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,0,\tilde u)\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v(\tilde u)\,dS\,dr\\
&-\int_0^t\int_{D^d}\varrho^k(r,u)\left(\partial_rG(r,u)+\frac{1}{2}\Delta G_r\right)du\,dr\Bigg|>\delta\Bigg]=0.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

由勒贝格微分定理可知，注意到

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\varrho^k(r,0,\tilde u)-\langle\pi^k_r,\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon\rangle(\tilde u)\Big|=0\quad\text{and}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\varrho^k(r,1,\tilde u)-\langle\pi^k_r,\overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon\rangle(\tilde u)\Big|=0.
$$

由于函数 $\overrightarrow{\imath}^0_\varepsilon$ 和 $\overleftarrow{\imath}^1_\varepsilon$ 并非连续函数，我们无法使用 Portmanteau 定理。不过，我们可以用连续函数分别逼近这些函数，使得误差随 $\varepsilon\to 0$趋于零。然后，由于概率 (4.10) 中的集合相对于Skorohod拓扑是开集，我们可以使用Portmanteau 定理，并将其从上方界定为

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\liminf_{N\to\infty}\mathbb{Q}_{N,\theta}\Bigg[\pi_\cdot:\sup_{0\le t\le T}\Bigg|\langle\pi^k_t,G_t\rangle-\langle\pi^k_0,G_0\rangle-\int_0^t\langle\pi^k_r,(\partial_r+\frac{1}{2}\Delta)G_r\rangle\,dr\\
&-\int_0^t\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\,\chi(\theta_v(\Lambda(\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(u,\eta))))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,1,\tilde u)\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v(\tilde u)\,dS\,dr-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,0,\tilde u)\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v(\tilde u)\,dS\,dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{\substack{u\in D^d_N\\ u_1=N-1}}\overleftarrow{\eta}^{k,\varepsilon N}_r(N-1,\tilde u,v)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde u)+G(r,1,\tilde u)\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{\substack{u\in D^d_N\\ u_1=1}}\overrightarrow{\eta}^{k,\varepsilon N}_r(1,\tilde u,v)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde u)-G(r,0,\tilde u)\right]dS\,dr\Bigg|>\frac{\delta}{2}\Bigg]=0.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

将 $\int_0^t \mathcal{L}_N$、$_\theta\langle \pi^k$、$_r{}^N$、$G_r\rangle\, dr$ 分别相加并相减于（4.11）中上确界内的方程，我们可以将其上界估计为以下各项之和

$$\mathbb{P}_{\mu^N}\left[\sup_{0\le t\le T}|M_t^{N,k}(G)|>\frac{\delta}{4}\right]\ \text{and} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\mu^N}\Bigg[\sup_{0\le t\le T}\Bigg|\int_0^t \mathcal{L}_{N,\theta}\langle \pi_r^{k,N}, G_r\rangle\, dr-\int_0^t\int_{D^d}\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k\,\chi(\theta_v(\Lambda(\mathbf{I}^{[N\varepsilon]}(u,\eta))))\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial G}{\partial u_i}(r,u)\,du\,dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{\substack{u\in D_N^d\\ u_1=N-1}}\overleftarrow{\eta}_r^{k,\varepsilon N}(N-1,\tilde{u},v)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,1,\tilde{u})+G(r,1,\tilde{u})\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{\substack{u\in D_N^d\\ u_1=1}}\overrightarrow{\eta}_r^{k,\varepsilon N}(1,\tilde{u},v)\left[\frac{\partial G}{\partial u_1}(r,0,\tilde{u})-G(r,0,\tilde{u})\right]dS\,dr\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{1\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,1,\tilde{u})\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v(\tilde{u})\,dS\,dr-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\{0\}\times\mathbb{T}^{d-1}}G(r,0,\tilde{u})\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v(\tilde{u})\,dS\,dr\\
&-\int_0^t\langle\pi_r^k,\frac{1}{2}\Delta G_r\rangle\,dr\Bigg|>\frac{\delta}{4}\Bigg]=0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

由Doob 不等式，方程（4.12）趋于零，因为 $N\to\infty$。另一方面，利用$\int_0^t \mathcal{L}_{N}$的值，$_\theta\langle \pi^k$，$_r{}^N$，$G_r\rangle\, dr$ （见（4.5））， 运用上一小节中的相同论证，我们可以将上一个显示式从上面界定为（4.7a）、（4.7f）之和，此外加上我们之前已经得到的这些项，将有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\frac{1}{2N^{d-1}}\left[I_k(\eta_r(1,\tilde{u}))-\overrightarrow{\eta}_r^{k,\varepsilon N}(1,\tilde{u},v)\right]\tilde{G}(r,\tilde{u})\,dr\right|\ \text{and}\\
&\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\frac{1}{2N^{d-1}}\left[I_k(\eta_r(N-1,\tilde{u}))-\overleftarrow{\eta}_r^{k,\varepsilon N}(N-1,\tilde{u},v)\right]\tilde{G}(r,\tilde{u})\,dr\right|.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

利用替换引理，很容易看出方程（4.14）趋于零，当 $N\to\infty$且 $\varepsilon\to 0$。证明至此完成。 □

4.3. $\theta>1$ **时极限点刻画。**

命题 4.3。 如果 $\mathbb{Q}_\theta^*$ 是 $\{\mathbb{Q}_{N,\theta}\}_{N\ge1}$的极限点，那么

$$\mathbb{Q}_\theta^*\left[\pi_\cdot:\pi=(\rho,\varrho)du\ \textit{and}\ \mathfrak{F}_0((\rho,\varrho),t,G)=0\right]=1,$$

对所有 $t\in[0,T]$, $\forall G\in C^{1,\,2}([0,T]\times D^d)$ 以及 $\theta>1$。

证明。 证明过程与前面命题 4.1和4.2 的证明所采用的推理相同，故此处略去。 □

5. 替换引理

我们需要以下辅助函数 h ，以便获得一些对于证明流体动力学极限至关重要的熵估计。对于每个 $v\in\mathcal{V}$，考虑函数h_k^v: $D^d\to(0,\ 1)$，其中 $k\in\{0,\dots,d\}$。

注记 5.1. 对于函数 $h=\sum_{v\in\mathcal{V}}(h_0^v,\ v_1h_1^v,\ \dots\dots,\ v_dh_d^v)$，我们将考虑两种情况：

(1) 当 $\theta \in [0,1)$ 时，我们将假设对于每个 $k \in \{0,\dots,d\}$， h_k^v 都是光滑函数，并且存在 $\delta > 0$，使得 h 在 $[0,\delta) \times \mathbb{T}^{d-1}$ 上的限制等于向量值函数 $\alpha(\tilde{u})$，而 h 在 $(1-\delta, 1] \times \mathbb{T}^{d-1}$ 上的限制等于向量值函数 $\beta(\tilde{u})$。

(2) 当 $\theta \geq 1$ 时，我们假设 h 是一个常函数。

于是，我们将 ν_h^N视为定义在 X_N 上的乘积测度，其边缘测度为

$$\nu_h^N\{\eta : \eta(x,\cdot) = \xi\} = m_{\Lambda(h(x/N))}(\xi), \tag{5.1}$$

其中 $m_\lambda(\cdot)$ 在（2.12）中定义。

我们注意到，对于满足上述 **(1)** 的 h，当 N 充分大时，有

$$\begin{aligned} \nu_h^N(\eta : \eta(1,\tilde{x},v) = 1) &= m_{\Lambda(h(x/N))}(1) = \hat{\alpha}_v(\tilde{x}/N) \\ \nu_h^N(\eta : \eta(N-1,\tilde{x},v) = 1) &= m_{\Lambda(h(x/N))}(0) = \hat{\beta}_v(\tilde{x}/N). \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1. Dirichlet 型的估计。 令 $f\colon X_N \to \mathbb{R}$为一个局部函数。注意，$\langle \mathcal{L}_N,\ \theta\sqrt{f},\ \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$并不总有闭式。为了估计 $\langle \mathcal{L}_N,\ \theta\sqrt{f},\ \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$，令

$$D^\theta_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) = D^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) + D^c_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) + D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}),$$

with

$$D^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) = \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta) \int [\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}]^2 d\nu_h^N,$$

其中 $c_{(x,z,v)}(\eta) = \eta(x,v)(1-\eta(z,v))P_N(z-x,v)$,

$$D^c_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) = \sum_{q\in\mathcal{Q}} \sum_{x\in D_N^d} \int p_c(x,q,\eta)[\sqrt{f(\eta^{x,q})} - \sqrt{f(\eta)}]^2 d\nu_h^N$$

其中 $\mathcal{Q}$和 $p_c(x,q,\eta)$ 分别在（2.4）和（2.5）中定义，且

$$\begin{aligned} D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) = &\sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in\{1\}\times\mathbb{T}_N^{d-1}} \int \frac{r_x^N(\eta,\alpha)}{2N^\theta}[\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)} - \sqrt{f(\eta)}]^2 d\nu_h^N \\ &+ \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in\{N-1\}\times\mathbb{T}_N^{d-1}} \int \frac{r_x^N(\eta,\beta)}{2N^\theta}[\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)} - \sqrt{f(\eta)}]^2 d\nu_h^N := D^{b,\theta,\alpha}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) + D^{b,\theta,\beta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}), \end{aligned}$$

其中 $r_x^N(\eta,\alpha)$ 和 $r_x^N(\eta,\beta)$ 在（2.9）中定义。为证明本节的主要结果，我们需要一些中间结果。为此，我们改编自Bernardin 等人 (2019)的以下引理:

引理 5.2. 设 $T:\ \eta \in X_N \to T(\eta) \in X_N$ 是构型空间中的一个变换，且$c:\ \eta \in X_N \to c(\eta)$ 是一个正的局部函数。设 f 是关于概率测度 ν_h^N（定义在 X_N 上）的密度。那么，

$$\begin{aligned} \langle c(\eta)[\sqrt{f(T(\eta))} - \sqrt{f(\eta)}], \sqrt{f(\eta)}\rangle_{\nu_h^N} \leq &-\frac{1}{4}\int c(\eta)\left(\sqrt{f(T(\eta))} - \sqrt{f(\eta)}\right)^2 d\nu_h^N \\ &+ \frac{1}{16}\int \frac{1}{c(\eta)}\left[c(\eta) - c(T(\eta))\frac{\nu_h^N(T(\eta))}{\nu_h^N(\eta)}\right]^2 \left(\sqrt{f(T(\eta))} + \sqrt{f(\eta)}\right)^2 d\nu_h^N. \end{aligned}$$

引理 5.3。 设 f 是关于 X_N 上的概率测度 ν_h^N 的密度。那么，

$$\sup_{x\neq y}\int f(\eta^{x,y,v})d\nu_h^N \leq C, \quad \sup_x \int f(\eta^{x,q})d\nu_h^N \leq C \quad and \quad \sup_x \int f(\sigma^{x,v}\eta)d\nu_h^N \leq C,$$

其中 $\eta^{x,y,v}$ 、 $\eta^{x,y,q}$ 以及 $\sigma^{x,y,v}\eta$，分别定义于 (2.3)、(2.6)和 (2.8)，分别 $ely.$

注记 5.4. 请注意，在Bernardin 等人（2019）中，引理 5.3的证明针对以下情形进行： $T(\eta) = \eta^{x,y,v}$ 和$T(\eta) = \sigma^{x,y,v}\eta$。对于情形 $T(\eta) = \eta^{x,y,q}$，证明可由其他情形的论证得出。

由引理 5.2 和 5.3，我们得出

推论 5.5. 设 h 是满足注记 5.1中假设的函数之一。设 $f : X_N \to \mathbb{R}$ 是关于测度 ν_h^N的密度。那么，

(1)若 h是常函数， $N^2\langle \mathcal{L}_N^{ex}\sqrt{f}, \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N} = -\frac{N^2}{2} D_{\nu_h^N}^{ex}(\sqrt{f})$;(2)若 h是光滑函数， $N^2\langle \mathcal{L}_N^{ex}\sqrt{f}, \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N} = -\frac{N^2}{4} D_{\nu_h^N}^{ex}(\sqrt{f}) + \mathcal{R}_N(h)$其中$|\mathcal{R}_N(h)| \le CN^d$。

证明。 首先注意到

$$
\begin{aligned}
N^2\langle \mathcal{L}_N^{ex}\sqrt{f}, \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N} &= N^2 \int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta)}\, d\nu_h^N \\
&\quad + \frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\, d\nu_h^N \\
&\quad - \frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\, d\nu_h^N,
\end{aligned}
$$

其中 $c_{(x,z,v)}(\eta) = \eta(x,v)(1-\eta(z,v))P_N(z-x,v)$。合并若干项并进行变量代换，可得上一个公式等于

$$
\begin{aligned}
&-\frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)^2 d\nu_h^N \\
&+\frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\, d\nu_h^N \\
&-\frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(z,x,v)}(\eta)\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} d\nu_h^N.
\end{aligned}
$$

上一个公式等于

$$
\begin{aligned}
&-\frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right)^2 d\nu_h^N \\
&+\frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(1 - \frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right) d\nu_h^N.
\end{aligned}
$$

因此， $N^2\langle \mathcal{L}_N^{ex}\sqrt{f}, \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N} = -\frac{N^2}{2} D_{\nu_h^N}^{ex}(\sqrt{f}) + g_N(h)$，其中

$$
g_N(h) = \frac{N^2}{2}\int \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{x\in D_N^d} \sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(1 - \frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})} - \sqrt{f(\eta)}\right) d\nu_h^N.
$$

为处理 $g_N(h)$，我们首先观察到 $\left|1-\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right| = \left|1-\frac{\gamma_{z,v}}{\gamma_{x,v}}\right|$ 其中

$$\gamma_{x,v} = \frac{\theta_v(\Lambda(h(x/N)))}{1-\theta_v(\Lambda(h(x/N)))}. \tag{5.3}$$

因此，若 h 为常数，则 $g_N(h) = 0$。

另一方面，假设 h 不是常数，我们需要重新分析 $g_N(h)$。应用初等不等式，可得 $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ 在 $g_N(h)$ 中，其中

$$a = \frac{N}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta(x,v)(1-\eta(z,v)P_N(z-x,v))}\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}-\sqrt{f(\eta)}\right)$$

and

$$b = \frac{N}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta(x,v)(1-\eta(z,v)P_N(z-x,v))}\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}\left(1-\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right),$$

我们可以将 $g_N(h)$ 上界估计为

$$\frac{N^2}{4}\int \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x\in D_N^d}\sum_{z\in D_N^d}\eta(x,v)(1-\eta(z,v))P_N(z-x,v)\left(\sqrt{f(\eta^{x,z,v})}-\sqrt{f(\eta)}\right)^2 d\nu_h^N$$

$$+\frac{N^2}{4}\int \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x\in D_N^d}\sum_{z\in D_N^d}\eta(x,v)(1-\eta(z,v))P_N(z-x,v)\left(1-\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right)^2 f(\eta^{x,z,v})\,d\nu_h^N.$$

因此 $|g_N(h)| \le \frac{N^2}{4} D^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) + \mathcal{R}_N(h)$，其中

$$\mathcal{R}_N(h) := \frac{N^2}{4}\int \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x\in D_N^d}\sum_{z\in D_N^d} c_{(x,z,v)}(\eta)\left(1-\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right)^2 f(\eta^{x,z,v})\,d\nu_h^N.$$

再次进行变量代换 $\eta^{x,z,v} = \xi$，得到

$$\mathcal{R}_N(h) = \frac{N^2}{4}\int \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{x\in D_N^d}\sum_{z\in D_N^d} c_{(z,x,v)}(\eta)\left|1-\frac{\nu_h^N(\eta)}{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}\right|^2 \frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)} f(\eta)\,d\nu_h^N.$$

现在，注意到

$$\left|1-\frac{\nu_h^N(\eta)}{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}\right| = \left(1-\frac{\gamma_{x,v}}{\gamma_{z,v}}\right) \le \tilde{c}\|\gamma'\|_\infty \frac{1}{N}, \tag{5.4}$$

由于 γ 远离零，参见（5.3），并且

$$\left|\frac{\nu_h^N(\eta^{x,z,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right| \le C.$$

还要注意， f 是相对于 ν_h^N的密度，因此，

$$|\mathcal{R}_N(h)| \le CN^d.$$

这就完成了推论 5.5的证明。 □

推论 5.6。 对于 h 为满足注*5.1* 假设的函数之一，并且对于密度 f，关于测度 ν_h^N，有

$$N^2\langle \mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N} = -\frac{N^2}{2}D^c_{\nu_h^N}(\sqrt{f}). \tag{5.5}$$

证明。 令 $q=(v,\ w,\ v',\ w')$ 和 $\tilde{q}=(v',\ w',\ v,\ w)$，回顾（2.5）。我们有

$$\begin{aligned}N^2\langle\mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}=&N^2\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta)}\,d\nu_h^N\\&+\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{y,q})}\,d\nu_h^N\\&-\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{y,q})}\,d\nu_h^N.\end{aligned}$$

由变量代换

$$\begin{aligned}N^2\langle\mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}=&-\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N\\&+\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{y,q})}\,d\nu_h^N\\&-\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{y,q})}\,\frac{\nu_h^N(\eta^{y,q})}{\nu_h^N(\eta)}\,d\nu_h^N.\end{aligned}$$

合并一些项，可得

$$\begin{aligned}N^2\langle\mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}=&-\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N\\&+\frac{N^2}{2}\int\sum_{y\in D_N^d}\sum_{q\in Q}p_c(y,q,\eta)\left(\sqrt{f(\eta^{y,q})}-\sqrt{f(\eta)}\right)\sqrt{f(\eta^{y,q})}\left[1-\frac{\nu_h^N(\eta^{y,q})}{\nu_h^N(\eta)}\right]d\nu_h^N.\end{aligned}$$

由于 $v+w=v'+w'$，我们观察到 $\nu_h^N(\eta^{y,q})\nu_h^N(\eta)=\frac{\gamma_{y,\ v'}\gamma_{y\ w',,,w}}{\gamma_{y\ v}\gamma_{y}}=1$，因此，$N^2\langle\mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}=-\frac{N^2}{2}D_{\nu_h^N}^c(\sqrt{f})$，并且对于满足备注 5.1 中假设的函数，此恒等式成立。□

推论 5.7。 对于满足注 h 中的某一项假设的函数 5.1以及密度f 相对于测度 ν_h^N，有

$$N^2\langle\mathcal{L}_{N,\theta}^b\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}=-\frac{N^2}{2}D_{\nu_h^N}^{b,\theta}(\sqrt{f})+\mathcal{R}_{N,\theta}^{\vartheta}(h),\tag{5.6}$$

当 $|\mathcal{R}_{N,\theta}^{\vartheta}(h)|\lesssim\frac{N^{d+1}}{N^{\theta}}$ 时成立，而当 $\theta\geq1$ 时，若 $\mathcal{R}_{N,\theta}^{\vartheta}(h)=0$，则对于充分大的 Ns，若 $\theta\in[0,1)$。如上所述$\vartheta\in\{\ell,r\}$。

证明。 我们给出左边界的证明，另一种情况的证明类似。回顾（2.7）。将（5.6）左侧的积分（关于左边界动力学）拆分为在集合 $A_0=\{\eta:\ \eta((1,\tilde{x})\ v)=0\}$ 和 $A_1=\{\eta:\ \eta((1,\tilde{x})\ v)=1\}$上的积分后，可写为

如下

$$\frac{N^2}{2N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}-\sqrt{f(\eta)}\right]\sqrt{f(\eta)}\,d\nu_h^N$$
$$+\frac{N^2}{2N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\left[\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}-\sqrt{f(\eta)}\right]\sqrt{f(\eta)}\,d\nu_h^N.$$

上式最后一个展示式可改写为

$$\frac{N^2}{2N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left(\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}\sqrt{f(\eta)}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{f(\eta)}\right)^2\right)d\nu_h^N$$
$$+\frac{N^2}{2N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\left(\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}\sqrt{f(\eta)}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{f(\eta)}\right)^2\right)d\nu_h^N$$
$$-\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left(\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N$$
$$-\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\left(\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N.$$

将最后一个显示式中完成平方所需的项加上并减去，我们得到$N^2\langle\mathcal{L}^b_{N,\,\theta}\sqrt{f},\ \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$等于

$$-\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left(\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}-\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N$$
$$-\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\left(\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}-\sqrt{f(\eta)}\right)^2d\nu_h^N$$
$$+\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left([\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}]^2-[\sqrt{f(\eta)}]^2\right)d\nu_h^N$$
$$+\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}(1-\hat{\alpha}_v)\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left([\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}]^2-[\sqrt{f(\eta)}]^2\right)d\nu_h^N.$$

对上述最后两项进行变量代换，并对一般函数 $h(\cdot)$，我们得到，涉及$N^2\langle\mathcal{L}^b_{N,\theta}\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$的左边界动力学的部分等于

$$-\frac{N^2}{4}D^{b,\theta,\alpha}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})+\mathcal{R}^\alpha_{N,\theta}(h)$$

其中

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{N,\theta}(h) = -\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_1}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\left[\frac{1-m_{\Lambda(h(x/N))}(1)}{m_{\Lambda(h(x/N))}(1)}-\frac{1-\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N})}{\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N})}\right][\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}]^2\,d\nu_h^N$$
$$-\frac{N^2}{4N^\theta}\int_{A_0}\sum_{\substack{x\in D_N^d\\ x_1=1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\left[\frac{m_{\Lambda(h(x/N))}(0)}{1-m_{\Lambda(h(x/N))}(0)}-\frac{\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N})}{1-\hat{\alpha}_v(\frac{\tilde{x}}{N})}\right][\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}]^2\,d\nu_h^N.$$

由（5.2）可知，且由于 f 是一个密度，对于 $\theta\in[0,1)$，当 N 充分大时，最后一个等式为零；而对于 $\theta\geq 1$，它有界于 $\frac{CN^{d+1}}{N^\theta}$。 ——— □

注5.8。 如果 $H(\mu^N|\nu_h^N)$ 是测度 μ^N 相对于ν_h^N的相对熵，见（5.1），则存在一个常数 C_h使得 $H(\mu^N|\nu_h^N)\leq C_hN^d$。证明如下，注意根据熵的定义，

$$H(\mu^N|\nu_h^N)=\int\log\left(\frac{\mu^N(\eta)}{\nu_h^N(\eta)}\right)\mu^N(\eta)\leq\int\log\left(\frac{1}{\nu_h^N(\eta)}\right)\mu^N(\eta).$$

由于测度 ν_h^N是边缘测度为 $\nu_h^N\{\eta$ 的乘积测度：$\eta(x,\cdot)=\xi\}=^{m_{\Lambda(h(x/N))}(\xi)}$，其中 $m_\lambda(\cdot)$ 在（2.12）中定义，因此我们得到上一个显示式的上界为

$$\begin{aligned}&\int\log\left(\frac{1}{\inf\limits_{x\in D^d}(m_{\Lambda(h(x/N))}(1))\wedge(1-m_{\Lambda(h(x/N))}(1))}\right)^{N^d}\mu^N(\eta)\\ =&N^d\log\left(\frac{1}{\inf\limits_{x\in D^d}(m_{\Lambda(h(x/N))}(1))\wedge(1-m_{\Lambda(h(x/N))}(1))}\right).\end{aligned}\tag{5.7}$$

由于函数 h_k^v（定义见备注5.1）是连续的，因此每个 h_k^v 的像都是一个与 0 和1保持正距离的紧集。因此，根据测度 m的定义，我们有 $m_{\Lambda(h(x/N))}(1)>0$以及 $m_{\Lambda(h(x/N))}(1)<1$。常数可以取为

$$C_h:=\log\left(\frac{1}{\inf\limits_{x\in D^d}m_{\Lambda(h(x/N))}(1)\wedge(1-m_{\Lambda(h(x/N))}(1))}\right).$$

5.2. **边界替换引理**。固定 $k \in \{0,\dots,d\}$，一个连续函数 $G:[0,T]\times\mathbb{T}^{d-1}\to\mathbb{R}^{d+1}$，并对每个 k 考虑以下量

$$V_k^{1,\ell}(\eta_{s,\theta},G)=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}G_k(s,\tfrac{\tilde{x}}{N})\left(I_k(\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x}))-\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\alpha_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right),$$

$$V_k^{1,r}(\eta_{s,\theta},G)=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}G_k(s,\tfrac{\tilde{x}}{N})\left(I_k(\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x}))-\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\beta_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right),$$

$$V_k^{2,\ell}(\eta_{s,\theta},G,\varepsilon)=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}G_k(s,\tfrac{\tilde{x}}{N})\left(I_k(\eta_{s,\theta}(1,\tilde{x}))-\frac{1}{\lfloor\varepsilon N\rfloor}\sum_{x_1=1}^{\lfloor\varepsilon N\rfloor+1}I_k(\eta_{s,\theta}(x_1,\tilde{x}))\right),$$

$$V_k^{2,r}(\eta_{s,\theta},G,\varepsilon)=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}G_k(s,\tfrac{\tilde{x}}{N})\left(I_k(\eta_{s,\theta}(N-1,\tilde{x}))-\frac{1}{\lfloor\varepsilon N\rfloor}\sum_{x_1=N-1-\lfloor\varepsilon N\rfloor}^{N-1}I_k(\eta_{s,\theta}(x_1,\tilde{x}))\right),$$

其中，$s\in[0,T]$ 是函数 G 的分量，G_k 是 r 的整数部分，而 $\lfloor r\rfloor$。本节的主要结果是以下命题：

命题 5.9（边界替换引理）。对于每个 $0\le t\le T$，$k\in\{0,\dots,d\}$ 和$G\in C(D^d)$，均有：

（1）对于 $\theta\in[0,1)$：

$$\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|\int_0^t ds\,V_k^{1,\vartheta}(\eta_{s,\theta},G)\right|\right]=0 \tag{5.8}$$

（2）对于 $\theta\ge 1$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\left|\int_0^t ds\,V_k^{2,\vartheta}(\eta_{s,\theta},G,\varepsilon)\right|\right]=0. \tag{5.9}$$

上式中 $\vartheta\in\{\ell,r\}$。

证明。我们给出 $V^{1,}{}_k{}^{\vartheta}$ 的证明，另一种情况类似。由熵不等式和詹森不等式，对于任意 $A>0$，命题中所述的期望有如下上界：

$$\frac{H(\mu^N|\nu_h^N)}{AN^d}+\frac{1}{AN^d}\log\mathbb{E}_{\nu_h^N}\left[\exp\left\{\left|\int_0^t ds\,AN^dV_k^{1,\vartheta}(\eta_{s,\theta},G)\right|\right\}\right]. \tag{5.10}$$

由注 5.8，上一个公式中最左侧的项有如下上界：$\frac{C_h}{A}$，因此我们只需证明最右侧的项在 $N\to\infty$ 时趋于零。由于 $e^{|x|}\le e^x+e^{-x}$ 且

$$\limsup_{N\to\infty}N^{-d}\log\{a_N+b_N\}\le\max\{\limsup_{N\to\infty}N^{-d}\log(a_N),\limsup_{N\to\infty}N^{-d}\log(b_N)\},$$

我们可以去掉表达式（5.10）中的绝对值。根据 Feynman-Kac 公式（例如参见 Kipnis 和 Landim (1998年），（5.10）有如下上界：

$$\frac{C_h}{A}+t\sup_f\left\{\int V_k^{1,\vartheta}(\eta,G)f(\eta)\,d\nu_h^N+\frac{\langle\mathcal{L}_{N,\theta}\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}}{AN^d}\right\},$$

其中上确界取遍所有密度函数 f 相对于 ν_h^N而言。由于 $\theta\in[0,1)$，根据推论 5.5、5.6 和 5.7，上一个公式中最右侧的项可由上界估计为

$$-\frac{1}{4AN^{d-2}}D^{\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) \tag{5.11}$$

因此 利用下一个引理，我们可以将上面上确界中的积分项估计为

$$\frac{C\varepsilon N^{\theta}}{4}+\frac{C'}{4\varepsilon N^{d-1}}D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}),$$

且 C， C' 为常数。取 $\varepsilon = \frac{AC'}{N}$ ，我们将上述上确界估计为

$$\frac{C_h}{A}+t\Big(\frac{CC'AN^{\theta-1}}{4}+\tilde{R}_N\Big).$$

最后取 $A = N^{1-\theta}$ 并注意到，当 N 充分大时， R_N 趋于零，证明得证。

□

引理 5.10. 设 f 是关于 ν_h^N的密度函数。对于任意 $B > 0$，对每个 $k \in\{0,\dots,d\}$以及每个 $G \in C([0,T]\times\mathbb{T}^{d-1})$，存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\langle V_k^{1,\vartheta}(\eta,G),f(\eta)\rangle_{\nu_h^N}\le\frac{C\varepsilon N^{\theta}}{4}+\frac{C'}{4\varepsilon N^{d-1}}D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})+\tilde{R}_N,$$

其中， $\vartheta\in\{\ell,r\}$、 C、 C' 是常数，并且当 N 足够大时， R_N 趋于零。

证明。 我们对 $\vartheta=\ell$进行证明，因为对于 $\vartheta = r$ ，证明完全类似。首先请注意，由于 G 是连续的，且其定义域 $[0,T]\times D^d$ 是紧集，只需在$G = 1$的情况下证明结论。注意，由（2.15）可得，

$$\begin{aligned}\langle V_k^{1,\ell}(\eta,G),f(\eta)\rangle_{\nu_h^N}=&\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\int f(\eta)\left(I_k(\eta_s(1,\tilde{x}))-\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)d\nu_h^N\\=&\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\int f(\eta)\left(I_k(\eta_s(1,\tilde{x}))-\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)d\nu_h^N\\=&\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\eta)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)d\nu_h^N.\end{aligned}\tag{5.12}$$

通过加上并减去一个适当的项，最后一项等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int\left(f(\eta)-f(\sigma^{x,v}\eta)\right)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)d\nu_h^N\Big|\\+&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int\left(f(\eta)+f(\sigma^{x,v}\eta)\right)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)d\nu_h^N\Big|,\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中 $x = (1,\tilde{x})$。对上一个公式中的第一项应用杨氏不等式 $ab\le\frac{\varepsilon N^{\theta}a^2}{2}+\frac{b^2}{2\varepsilon N^{\theta}}$，可将其上界估计为

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon N^{\theta}}{4}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int\left(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}\right)^2\frac{\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)^2}{r_x^N(\eta,\alpha)}d\nu_h^N\Big|\\+&\frac{1}{4\varepsilon}\Big|\frac{1}{N^{d-1+\theta}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int\left(\sqrt{f(\eta)}-\sqrt{f(\sigma^{x,v}\eta)}\right)^2r_x^N(\eta,\alpha)\,d\nu_h^N\Big|\end{aligned}\tag{5.14}$$

其中 $r_x^N(\eta,\ \alpha)$ 在（2.9）中定义，且对任意 $\varepsilon>0$均成立。由于 $\left(\eta(1,\ \tilde{x},\ v)-\hat{}\alpha_v\left(\frac{\tilde{x}}{N}\right)\right)^2\leq 1$, r_x^N与零和一之间均有正距离，因此（5.14）的上界为

$$\frac{C\varepsilon N^\theta}{4}+\frac{C'}{4\varepsilon N^{d-1}}D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f}),$$

其中 C 以及 C' 常数。现在，我们分析（5.13）。注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int\left(f(\eta)+f(\sigma^{x,v}\eta)\right)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N\Big|\\
=&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\eta)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N\Big|\\
+&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\sigma^{x,v}\eta)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N\Big|.
\end{aligned}$$

回顾推论的证明5.7。将最后两个积分分别在集合 $A_0=\{\eta:\ \eta((1,\ \tilde{x})\ v)=0\}$和 $A_1=\{\eta:\ \ \eta((1,\ \tilde{x})\ v)=1\}$中分开，最后一个显示式变为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\Big(\int_{A_0}f(0,\tilde{\eta})\left(-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N+\int_{A_1}f(1,\tilde{\eta})\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N\Big)\Big|\\
+&\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\Big(\int_{A_0}f(1,\tilde{\eta})\left(-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N+\int_{A_1}f(0,\tilde{\eta})\left(1-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\,d\nu_h^N\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

经过简单计算，最后一个显示式变为

$$\tilde{R}_N:=\frac{1}{2N^{d-1}}\Big|\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\sum_{\tilde{\eta}}\Big(f(0,\tilde{\eta})+f(1,\tilde{\eta})\Big)\left(m_{\Lambda(h(1/N,\tilde{x}/N))}(1)-\hat{\alpha}_v\left(\tfrac{\tilde{x}}{N}\right)\right)\nu_h^N(\tilde{\eta})\Big|.$$

利用 f 是一个密度，并且函数 h 满足备注 5.1 中的 **(1)**，且根据 **(5.2)**，˜再结合集合 V 是有限的这一事实，我们得出 R_N 在 N 充分大时消失。证明完毕。

□

引理 5.11。 对于每个 $k\in\{0,\dots,d\}$，以及每个 $G\in C([0,T]\times D^d)$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty}\langle V_k^{2,\vartheta}(\eta,\zeta,G),f(\eta)\rangle_{\nu_h^N}=0,$$

其中， $\vartheta\in\{\ell,r\}$ 和 h 为常数。

证明。 首先请注意，由于 G连续且其定义域 $[0,T]\times D^d$是紧集，只需在 $G=\mathbf{1}$的条件下证明该结果。我们只证明 $\vartheta=\ell$的情形，因为 $\vartheta=r$ 的证明完全类似。注意到

$$\begin{aligned}
\langle V_k^{2,\ell}(\eta,\zeta,\mathbf{1}),f(\eta)\rangle_{\nu_h^N}&=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\int f(\eta)\left(I_k(\eta(1,\tilde{x}))-\frac{1}{\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}I_k(\eta(x_1,\tilde{x}))\right)\,d\nu_h^N\\
&=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\eta)\left(\eta(1,\tilde{x},v)-\frac{1}{\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}\eta(x_1,\tilde{x},v)\right)\,d\nu_h^N\\
&=\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\eta)\left(\frac{1}{\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}[\eta(1,\tilde{x},v)-\eta(x_1,\tilde{x},v)]\right)\,d\nu_h^N.
\end{aligned}$$

将项 $\frac{1}{\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}[\eta(\mathbf{1},\tilde{x},v)-\eta(x_1,\tilde{x},v)]$ 写成望远镜求和后，可得最后一项等于

$$\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\int f(\eta)\left(\frac{1}{\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}\sum_{y=1}^{x_1-1}\{\eta(y,\tilde{x},v)-\eta(y+1,\tilde{x},v)\}\right)d\nu_h^N.$$

将这个和写成其一半的两倍，进行变量代换，并注意到 h 是常数，我们得到上式最后一行等于

$$\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\frac{1}{2\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}\sum_{y=1}^{x_1-1}\int\left(f(\eta)-f(\eta^{y,y+1,v})\right)\left(\eta(y,\tilde{x},v)-\eta(y+1,\tilde{x},v)\right)d\nu_h^N. \quad (5.15)$$

将 $f(\eta)-f(\eta^{y,y+1,v})$ 重写为 $\left(\sqrt{f(\eta)}-\sqrt{f(\eta^{y,y+1,v})}\right)\left(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{y,y+1,v})}\right)$，并使用杨氏不等式，对于所有 $B>0$，我们得到 (5.15) 的上界为

$$\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\frac{B}{2\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}\sum_{y=1}^{x_1-1}\int\left(\sqrt{f(\eta)}-\sqrt{f(\eta^{y,y+1,v})}\right)^2d\nu_h^N$$

$$+\frac{1}{N^{d-1}}\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{T}_N^{d-1}}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\frac{1}{2B\varepsilon N}\sum_{x_1=1+1}^{\varepsilon N+1}\sum_{y=1}^{x_1-1}\int\left(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{y,y+1,v})}\right)^2(\eta(y,\tilde{x},v)-\eta(y+1,\tilde{x},v))^2\,d\nu_h^N.$$

利用 f 是 ν_h^N的一个密度，上一公式中的第二项可由 $C_B^{\varepsilon N}$ 界定。令 y中的求和从 1到 $N-1$，则上一公式中的第一项可由 $BD^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})$界定。根据推论5.5，由于 h 是一个常函数，我们得到

$$D^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})=-\langle\mathcal{L}_N^{ex}\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}.$$

由于 $0\le D^c_{\nu_h^N}(\sqrt{f})=-\langle\mathcal{L}_N^c\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$且 $0\le D^b_{\nu_h^N}(\sqrt{f})$，利用推论 5.7，我们有$D^{b,\theta}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})=-\langle\mathcal{L}^b_{N,\theta}\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}$。因此，

$$D^{ex}_{\nu_h^N}(\sqrt{f})\le -B\langle\mathcal{L}_{N,\theta}\sqrt{f},\sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}.$$

□

5.3. **体区替换引理**。 在陈述体区替换引理之前，我们先引入一些记号。该引理将帮助我们证明，极限点 $\mathbb{Q}^*_\theta$ 集中于偏微分方程组（1.1）的弱解上。回忆一下 $\mathbf{I}^L$ 在（2.11）中的定义。

引理 5.12（体区 替换引理）。 对于所有 $\delta>0$, $j\in\{1,\dots,d\}$ 以及 $k\in\{0,\dots,d\}$ ：

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}_{\mu^N}\left[\int_0^T\frac{1}{N^d}\sum_{x\in D_N^d}\tau_xV^{j,k}_{\varepsilon N}(\eta_{s,\theta})\,ds\ge\delta\right]=0,$$

其中

$$V^{j,k}_\ell(\eta)=\left|\frac{1}{(2\ell+1)^d}\sum_{y\in\Lambda_\ell}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}p(z,v)z_j\tau_y[\eta(0,v)(1-\eta(z,v))]-\sum_{v\in\mathcal{V}}v_jv_k\chi(\theta_v(\Lambda(\boldsymbol{I}^\ell(0,\eta))))\right|.$$

注意，对于所有 $j \in \{1,\dots,d\}$ 和 $k \in \{0,1,\dots,d\}$， $V^{j,k}_{\varepsilon N}$ 当 N 足够大时， $p(\cdot, v)$ 由于是有限程，因而定义良好。现在我们注意到，推论 5.5 和 5.6 允许我们利用不含生成元边界部分的过程，证明边界驱动排斥过程的前述替换引理（更多细节见 Kipnis 和 Landim (1998年)）。引理 5.12的证明见 Simas(2010年)。

6. 能量估计

现在我们定义一些量，以证明向量解的每个分量实际上都属于 $L^2([0,T],\mathcal{H})$。令能量 $\mathcal{E}\colon \mathcal{D}([0,T],\mathcal{M}) \to [0,\infty]$ 定义为

$$\mathcal{E}(\pi) = \sum_{i=1}^{d} \mathcal{E}_i(\pi),$$

其中 $\mathcal{E}_i(\pi) = \sup_{G\in C_c^\infty(\Omega_T)} \left\{ 2\int_0^T dt\, \langle \pi_t, \partial_{u_i} G_t\rangle - \int_0^T dt \int_{D^d} du\, G(t,u)^2 \right\}$, 其中 $\Omega_T = (0,T) \times D^d$，而 $C_c^\infty(\Omega_T)$ 表示其紧支集包含于 Ω_T 中的无穷可微函数集合（关于时间和空间）。对于任意 $G \in C_c^\infty(\Omega_T)$ $1 \le i \le d$ 和 $C \ge 0$，令泛函 $\mathcal{E}^G_{i,C}\colon \mathcal{D}([0,T],\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{E}^G_{i,C}(\pi) = \int_0^T ds\, \langle \pi_s, \partial_{u_i} G_s\rangle - C\int_0^T ds \int_{D^d} du\, G(s,u)^2.$$

注意，

$$\sup_{G\in C_c^\infty(\Omega_T)} \{\mathcal{E}^G_{i,C}\} = \frac{\mathcal{E}_i(\pi)}{4C}. \tag{6.1}$$

众所周知，当且仅当 π 存在广义梯度 $\nabla\pi = (\{v5, \dots\dots, \partial_{u_d}\pi)$，且该梯度是可测函数时， $\mathcal{E}(\pi)$ 有限，并且

$$\tilde{\mathcal{E}}(\pi) = \int_0^T ds \int_{D^d} du\, \|\nabla\pi_t(u)\|^2 < \infty,$$

~在这种情况下， $\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}(\pi)$。回顾第3 节，序列 $(\{v8, \theta)_N$ 是紧的。我们有：

命题 6.1。设 $\mathbb{Q}^*_\theta$ 是测度序列 $(\mathbb{Q}_N, \theta)_N$ 的任意极限点。那么，

$$E_{\mathbb{Q}^*_\theta}\left[\int_0^T ds \left(\int_{D^d} \|\nabla\varrho^k(s,u)\|^2\, du\right)\right] < \infty,$$

对于 $k \in \{0,1,\dots,d\}$.

命题6.1的证明将在以下引理之后给出。

引理 6.2. 对于 所有 $\theta \ge 0$，并且对每个 $i \in \{1,\dots,d\}$，存在一个正常数 $C > 0$，使得 t

$$E_{\mathbb{Q}^*_\theta}\left[\sup_G \left\{\int_0^T \int_{D^d} \partial_{u_i} G(s,u)\varrho^k(s,u)du\, ds - C\int_0^T ds \int_{D^d} du\, G(s,u)^2\right\}\right] < \infty,$$

对于 $k \in \{0,1,\dots,d\}$，其中上确界取遍所有函数 $G \in C^\infty$（Ω_T）以及 $\varrho^0 = \rho$.

证明。令 $\{G^m\colon m \ge 1\}$ 为 $L^2(\Omega_T)$中稠密的 $C_c^\infty(\Omega_T)$函数序列。因此，只需证明，对于每个 $r \ge 1$,

$$E_{\mathbb{Q}^*_\theta}\left[\max_{1\le m\le r}\left\{\mathcal{E}^{G^m}_{i,C}(\pi^k)\right\}\right] \le \tilde{C}, \tag{6.2}$$

对于某个常数 $\mathcal{C} > 0$，与.....无关 r。等式（6.2）左端的表达式等于

$$\lim_{N\to\infty} E_{\mu^N}\left[\max_{1\le m\le r}\left\{\int_0^T \langle \partial_{u_i} G^m(s,u), \pi^{k,N}_{s,\theta}\rangle ds - C\int_0^T ds\int_{D^d} du\, G^m(s,u)^2\right\}\right]. \tag{6.3}$$

根据相对熵界（参见备注 5.8）、詹森不等式以及 $\exp\{\max_{1\le j\le k} a_j\} \le \sum_{1\le j\le k} \exp^{a_j}$，（6.3）中的期望上界为

$$\frac{H(\mu^N|\nu_h^N)}{N^d} + \frac{1}{N^d}\log \sum_{1\le m\le r} E_{\nu_h^N}\left[\exp\left\{\int_0^T N\langle \partial_{u_i} G^m(s,u), \pi^{k,N}_{s,\theta}\rangle ds - C\int_0^T ds\int_{D^d} du\, G^m(s,u)^2\right\}\right],$$

其中函数 h 与备注 5.1 第 4节中相同。

我们可以用 C_h给上述求和中的第一项作出界。只需证明，对于一个固定函数G，有

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d}\log E_{\nu_h^N}\left[\exp\left\{\int_0^T N\langle \partial_{u_i} G(s,u), \pi^{k,N}_{s,\theta}\rangle ds - C\int_0^T ds\int_{D^d} du\, G(s,u)^2\right\}\right] \le \tilde{c}$$

对于某个与 G 无关的常数 $\tilde{c}$ 。由下一个引理及经验测度的定义，即可得到结论。□

引理 6.3。 存在常数 $C_0 = C_0(h) > 0$，使得对于每个 $i = 1,\dots,d$ 每个$k \in \{0,\dots,d\}$ 以及每个函数 $G \in C_c^\infty(\Omega_T)$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d}\log E_{\nu_h^N}\left[\exp\{N^d \mathcal{E}^G_{i,C_0}(\pi^{k,N}_\theta)\}\right] \le C_0.$$

证明。 记 $\partial_{u_i} G_s\left(\frac{x}{N}\right) = N\left[G_s\left(\frac{x+e_i}{N}\right) - G_s\left(\frac{x}{N}\right)\right] + O(N^{-1})$并进行分部求和（ G 的紧支集确保边界项消失），应用 Feynman-Kac 公式，并采用引理 5.9证明中的相同论证，可得

$$\frac{1}{N^d}\log E_{\nu_h^N}\left[\exp\left\{N\int_0^T ds \sum_{x\in D_N^d} \left(I_k(\eta_{s,\theta}(x)) - I_k(\eta_{s,\theta}(x-e_i))\right) G\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\right\}\right] \le \frac{1}{N^d}\int_0^T \lambda_s^N\, ds,$$

其中 λ_s^N等于

$$\sup_f \left\{\left\langle N\sum_{x\in D_N^d} \left((I_k(\eta_{s,\theta}(x)) - I_k(\eta_{s,\theta}(x-e_i)))G\left(s,\tfrac{x}{N}\right), f\right\rangle_{\nu_h^N} + N^2\langle \mathcal{L}_{N,\theta}\sqrt{f}, \sqrt{f}\rangle_{\nu_h^N}\right\}, \tag{6.4}$$

其中上确界取遍所有密度函数 f 关于 ν_h^N。现在我们将考虑两种情况：如果 h 是常函数，那么根据推论 5.5、 5.6 和 5.7，方括号内的表达式从上方被界定为

$$-\frac{N^2}{2} D_{\nu_h^N}(\sqrt{f}) + \sum_{x\in D_N^d}\left\{NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int [I_k(\eta_{s,\theta}(x)) - I_k(\eta_{s,\theta}(x-e_i))] f(\eta) d\nu_h^N\right\}.$$

现在我们将方括号内的项改写为

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} v_k \sum_{x\in D_N^d}\left\{\int NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)[\eta(x,v) - \eta(x-e_i,v)] f(\eta) d\nu_h^N\right\}. \tag{6.5}$$

经过简单计算，我们可以将上述表达式方括号内的各项改写为

$$\begin{aligned}
&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int[\eta(x,v)-\eta(x-e_i,v)]f(\eta)d\nu_h^N\\
=&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)f(\eta)\,d\nu_h^N-NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)f(\eta^{x-e_i,x,v})\frac{\nu_h^N(\eta^{x,x-e_i,v})}{\nu_h^N(\eta)}d\nu_h^N\\
=&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)[f(\eta)-f(\eta^{x-e_i,x,v})]d\nu_h^N.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

利用 $f(\eta)-f(\eta^{x-e_i,x,v})=\left(\sqrt{f(\eta)}-\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}\right)\left(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}\right)$，并应用杨氏不等式，方程 (6.6) 的上界为

$$\frac{N^2}{2}\int[\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}-\sqrt{f(\eta)}]^2d\nu_h^N+2G\left(s,\tfrac{x}{N}\right)^2\int\eta(x,v)(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})})^2d\nu_h^N.$$

利用上述估计（6.5）显然可得上界 $\frac{N^2}{2}D_{\nu_h^N}(\sqrt{f})+CG\left(s,\frac{x}{N}\right)^2$，其中 C 是一个正数。因此，令 $C_0=C$，引理的结论成立。

现在分析 h 为光滑函数的情形。由推论 5.5、5.6 和 5.7，式（6.4）中括号内的表达式上界为

$$CN^d-\frac{N^2}{4}D_{\nu_h^N}(\sqrt{f})+\sum_{x\in D_N^d}\left\{NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int[I_k(\eta_x(s))-I_k(\eta_{x-e_i}(s))]f(\eta)d\nu_h^N\right\}.$$

将上面的项重写后，我们将分析该表达式。

$$\sum_{x\in D_N^d}\sum_{v\in\mathcal{V}}v_k\left\{NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int[\eta(x,v)-\eta(x-e_i,v)]f(\eta)d\nu_h^N\right\}.\tag{6.7}$$

现在将方括号内的项改写为

$$\begin{aligned}
&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int[\eta(x,v)-\eta(x-e_i,v)]f(\eta)d\nu_h^N\\
=&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)f(\eta)d\nu_h^N-NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)f(\eta^{x-e_i,x,v})\tfrac{\nu_h^N(\eta^{x,x-e_i,v})}{\nu_h^N(\eta)}d\nu_h^N\\
=&NG\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)[f(\eta)-f(\eta^{x-e_i,x,v})]d\nu_h^N\\
&+G\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\int\eta(x,v)f(\eta^{x-e_i,x,v})N\left[1-\tfrac{\nu_h^N(\eta^{x,x-e_i,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right]d\nu_h^N.
\end{aligned}$$

由于 $f(\eta)-f(\eta^{x-e_i,x,v})=\left(\sqrt{f(\eta)}-\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}\right)\left(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}\right)$ 并应用杨氏不等式，该表达式的上界为

$$\begin{aligned}
&N^2\int\frac{1}{2}[\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})}-\sqrt{f(\eta)}]^2d\nu_h^N+2G\left(s,\tfrac{x}{N}\right)^2\int\eta(x,v)(\sqrt{f(\eta)}+\sqrt{f(\eta^{x-e_i,x,v})})^2d\nu_h^N\\
&+G\left(s,\tfrac{x}{N}\right)^2\int f(\eta^{x-e_i,x,v})d\nu_h^N+\frac{1}{4}\int\eta(x,v)f(\eta^{x-e_i,x,v})\left[N\left(1-\frac{\nu_h^N(\eta^{x,x-e_i,v})}{\nu_h^N(\eta)}\right)\right]^2d\nu_h^N.
\end{aligned}$$

利用上述估计，(6.7) 显然可由 $C_1+C_1G\left(s,\frac{x}{N}\right)^2$ 以及某个正常数 $C_1=C_1(h)$ 控制，利用估计式 (5.4) 以及 f 是相对于 ν_h^N 的密度这一事实。因此，令 $C_0=C+C_1$，引理的结论即得。□

命题 6.1 的证明。令 $\{G_m : 1 \le m \le r\}$ 是 $C_c^\infty(\Omega_T)$ 中的一列函数，且在 $L^2(\Omega_T)$ 中稠密。根据熵不等式，见注 5.8，存在常数 $C_h > 0$ 使得

$$E_{\mu^N}\left[\max_{1\le m\le r}\left\{\mathcal{E}_{i,C_0}^{G_m}(\pi^{k,N})\right\}\right] \le C_h + \frac{1}{N^d}\log E_{\nu_h^N}\left[\exp\left\{N^d \max_{1\le m\le r}\{\mathcal{E}_{i,C_0}^{G_m}(\pi^{k,N})\}\right\}\right],$$

与 $i \in \{1,\dots,d\}$，以及 $k \in \{0,\dots,d\}$。因此，利用引理 6.3 以及初等不等式

$$\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log(a_N + b_N) \le \limsup_{N\to\infty}\max\left\{\limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log(a_N), \limsup_{N\to\infty} N^{-d}\log(b_N)\right\}$$

and

$$\exp\{\max\{x_1,\dots,x_n\}\} \le \exp(x_1) + \cdots + \exp(x_n)$$

我们设

$$E_{\mathbb{Q}^*}\left[\max_{1\le m\le r}\left\{\mathcal{E}_{i,C_0}^{G_m}(\pi^{k,N})\right\}\right] = \lim_{N\to\infty} E_{\mu^N}\left[\max_{1\le m\le r}\left\{\mathcal{E}_{i,C_0}^{G_m}(\pi^{k,N})\right\}\right] \le C_h + C_0.$$

利用这一点、方程（6.1）以及单调收敛定理，我们得到了所需的结果。□

Appendix A. Uniqueness of Weak Solutions

为了完成流体动力学极限的证明，还需证明（2.16）弱解的唯一性。下文中，设 $\mathfrak{C} = +\infty$ 以及（ρ^1，ϱ^1）、（ρ^2，ϱ^2）是（2.16）的两个具有相同初始条件的弱解。记它们的差为（$\bar\rho$，$\bar\varrho$）=（$\rho^1-\rho^2$，$\varrho^1-\varrho^2$）。注意到（$\bar\rho$，$\bar\varrho$）$=\bar\varrho^k = 0$ 当且仅当每个分量都等于零，这意味着对于每个 $k \in \{0,1,\dots,d\}$，都有 $\bar\varrho^k = 0$。令 $\{\psi_z\}_z$ 由 $\psi_z(u) = \sqrt{2}\sin(\pi z\cdot u)$ 给出，其中 $\|z\| \ge 1$，并令 $\psi_0(u) = 1$，它是 $L^2(D^d)$ 的一个正交归一基。令

$$V_k(t) = \sum_{z\ge 0}\frac{1}{2a_z}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle^2$$

其中 $a_z = \|z\|^2\pi^2 + 1$。我们断言，$V_k'(t) \le CV_k(t)$，其中 C 为正常数。由于$V_k(0) = 0$，$\forall k \in \{0,1,\dots,d\}$，由 Gronwall 不等式可得 $V_k(t) \le 0$，但根据定义我们知道 $V_k(t) \ge 0$，故结论成立。现在我们需要证明该断言。注意，

$$V_k'(t) = \sum_{z\ge 0}\frac{1}{a_z}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle\frac{d}{dt}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle,$$

并且根据积分形式（2.16），我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle =& \langle\frac{d}{dt}\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle + \langle\bar\varrho_t^k, \frac{d}{dt}\psi_z\rangle\\ =& \frac{1}{2}\langle\bar\varrho_t^k, \Delta\psi_z\rangle + \langle\chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2))), \partial_u\psi_z\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\psi_z(u) = -\pi z\cdot u\,\psi_z$，$\partial_u\psi_z(0) = \sqrt{2}\pi\|z\|\cos(\cdot)$以及 $\Delta\psi_z(\cdot) = (\|z\|\pi)^2\sqrt{2}\sin(\cdot)(\cdot)$，则

$$V_k'(t) = \sum_{z\ge 0}\frac{-(\|z\|\pi)^2}{2a_z}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle^2 + \sum_{z\ge 0}\frac{1}{a_z}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle\langle\chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2))), \partial_u\psi_z\rangle.$$

对上一个等式右侧的第二项应用杨氏不等式，可将该项上界为

$$\frac{1}{2A}\sum_{z\ge 0}\frac{1}{a_z}\langle\bar\varrho_t^k, \psi_z\rangle^2 + \frac{A}{2}\sum_{z\ge 0}\frac{1}{a_z}\langle\chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2))), \partial_u\psi_z\rangle^2, \forall A > 0.$$

注意，$\partial_u \psi_z = \|z\|\pi\phi_z(u)$，其中 $\phi_z(u) = \sqrt{2}\cos(\pi \bar{z} \cdot u)$，适用于 $\|z\| \geq 1$，且 $\phi_0(u) = 1$。因此，上一行右侧的第二项可改写为

$$\begin{aligned}&\frac{A}{2}\sum_{z\geq 0}\frac{(\|z\|\pi)^2}{a_z}\langle \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2))), \phi_z\rangle^2\\ \leq &\frac{A}{2}\sum_{z\geq 0}\langle \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2))), \phi_z\rangle^2\end{aligned}$$

因为对 a_z的选择。注意，由于 $\{\phi_z\}_z$ 是 $L^2(D^d)$的一个标准正交基，我们可以将上一个显示式改写为

$$\frac{A}{2}\int_0^1 \left(\chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^1,\varrho_t^1))) - \chi(\theta_v(\Lambda(\rho_t^2,\varrho_t^2)))\right)^2 du.$$

由于 $\chi(\theta_v(\Lambda(\cdot)))$ 是利普希茨函数，最后一个公式的上界为 $\frac{A}{2}\|\bar{\varrho}_t\|_2^2$。综合以上各点，我们得出

$$V_k'(t) \leq \sum_{z\geq 0}\left(\frac{-(\|z\|\pi)^2}{2a_z} + \frac{1}{2Aa_z} + \frac{A}{2}\right)\langle \bar{\varrho}_t^k, \psi_z\rangle^2.$$

取 $A = 1$，我们得到

$$V_k'(t) \leq \sum_{z\geq 0}\left(\frac{1}{2a_z} + \frac{1}{2}\right)\langle \bar{\varrho}_t^k, \psi_z\rangle^2 = \frac{1+a_z}{2a_z}\langle \bar{\varrho}_t^k, \psi_z\rangle^2 = C\, V_k(t).$$

关于（2.16）的弱解唯一性的证明，在 $\mathfrak{C} = 0$ 的情形下与前一个证明类似，只需考虑正交归一基 ϕ_z（u）$= \sqrt{2}\cos(\pi z \cdot u)$，它属于 L^2（D^d）$^-$。此处省略细节。需要指出的是，将上述证明调整到 $\mathfrak{C} = 1$ 的情形不再奏效，因为我们可以使用 L^2（D^d）的正交归一基，该基由 sin项和 cos项的线性组合给出，但问题在于，当我们推导出这个基时，所得集合不再是正交归一的，因此该论证无法继续。幸运的是，对于 1维情形的唯一性，我们已经有了答案，可以将Franco 等人（2022年）中所采用的策略调整到我们的情形。对于更高维情形，证明尚未解决。

附录 B. 辅助结果

在本附录中，我们证明在假设 2.1 下，映射 (ρ, ϱ) 是到其像上的微分同胚。

首先注意到，映射 (ρ, ϱ) 是函数 $F(\lambda) := \log(Z(\lambda))$ 的梯度，其中$Z(\lambda)$ 是式 (2.12) 中给出的归一化常数。因此，只需证明 $F(\cdot)$ 的海森矩阵严格正定，结论便可得出。事实上，由于 $F(\cdot)$ 的海森矩阵是 $\nabla F(\cdot)$ 的导数，这也表明 $\nabla F(\cdot)$ 的导数处处非零，因此根据逆函数定理，$(\rho, \varrho)(\cdot) = \nabla F(\cdot)$ 是局部微分同胚。此外，这还意味着 $F(\cdot)$ 是严格凸函数；众所周知，凸定义域上严格凸函数的梯度是单射，这表明 $(\rho, \varrho)(\cdot) = \nabla F(\cdot)$ 实际上是到其像上的全局微分同胚。

现在我们证明，F的海森矩阵，即 $H(\lambda)$，是严格正定的。为此，令$\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ 并注意到

$$\begin{aligned}\langle \alpha, H(\lambda)\alpha\rangle &= \sum_{k,j=1}^{d+1}\sum_{v\in\mathcal{V}} \alpha_k \vartheta_k(v)\vartheta_j(v)\alpha_j\\ &= \sum_{v\in\mathcal{V}}\left(\langle \alpha, \vartheta(v)\rangle\right)^2,\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的标准内积， $\vartheta(v):=(\vartheta_1(v)\dots,\vartheta_{d+1}(v))$，且 $\vartheta_j(v) =v_{j-1}\exp\{0.5\langle\lambda,\widetilde{v}\rangle\}/(1+\exp\{\langle\lambda,\widetilde{v}\rangle\})$ $j=1,\dots,d+1,\widetilde{v}=(1,v)$ $v\in\mathcal{V}$，我们定义 $v_0=1$。因此，

$$\langle\alpha,H(\lambda)\alpha\rangle=0\Longleftrightarrow\forall v\in\mathcal{V},\alpha\perp\vartheta(v).$$

此外，这意味着

$$\forall v\in\mathcal{V},\sum_{k=1}^{d+1}\alpha_k v_{k-1}\exp\{0.5\langle\lambda,\widetilde{v}\rangle\}/(1+\exp\{\langle\lambda,\widetilde{v}\rangle\})=0,$$

因此，对于任意 $v\in\mathcal{V}$,

$$\alpha\perp\vartheta(v)\Longleftrightarrow\alpha\perp\widetilde{v}.$$

因此，海森矩阵， 当且仅当满足以下条件时，$H(\cdot)$ 将是严格正定的 s

$$\alpha\perp\widetilde{v}\text{ for all }v\in\mathcal{V}\Rightarrow\alpha=0.$$

请注意，我们只需满足上述条件。现在我们证明假设2.1 是充分的。为此，令 $\alpha\in\mathbb{R}^{d+1}$ 满足

$$\forall v\in\mathcal{V},\langle\alpha,\widetilde{v}\rangle=0.$$

取任意 $v\in\mathcal{V}$，使得存在 j 满足 $v_j\neq0$。由置换不变性，存在某个 $v\in\mathcal{V}$ 使得 $v_1\neq0$。因此，

$$\alpha_2=-\alpha_1/v_1-\alpha_3v_2/v_1-\cdots-\alpha_{d+1}v_d/v_1.$$

由反射不变性，我们得到

$$\alpha_2=-\alpha_2\Rightarrow\alpha_2=0.$$

对 $v_2,\dots,v_d$ 重复同样的论证，并利用置换不变性确保对于每个 $j=2,\dots,d$，都存在 $v\in\mathcal{V}$ 使得 $v_j\neq0$，我们得到

$$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_{d+1}=0.$$

最后，我们再使用一次 $\langle\alpha,\widetilde{v}\rangle=0$，从而得出 $\alpha_1=0$，这表明 $\alpha=0$，并完成证明。

致谢

O.A. 感谢高等教育人员提升协调机构(CAPES) – 财务代码001。O.A. 获得科英布拉大学数学中心的部分资助（该中心由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 资助，DOI 10.54499/UIDB/00324/2020, DOI 10.54499/UIDP/00324/2020）。P.G. 感谢科学技术基金会 FCT/葡萄牙通过项目 UIDB/04459/2020 和 UIDP/04459/2020 提供的经费支持。作者感谢审稿人帮助提升了本文的可读性。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号 715734）下的资助。

参考文献

Baldasso, R.、Menezes, O.、Neumann, A. 和 Souza, R. R. 具有慢边界的排斥过程。统计物理学杂志, **167** (5), 1112–1142 (2017)。Beltrán, J. 和 Landim, C. 不可压缩纳维–斯托克斯方程的晶格气体模型。*IHP*概率与统计年刊, **44** (5), 886–914 (2008)。Bernardin, C.、Goncalves, P. 和 Jimenez, B. O. 具有长程跳跃的对称排斥过程的从慢到快的无限延伸储库。 马尔可夫过程及相关领域, **5** (2), 217–274 (2019)。

Bonorino, L.、De Paula, R.、Gonçalves, P.和 Neumann,A. 慢速储库多孔介质模型的流体动力学。统计物理学杂志，**179年** (3)，748–788（2020年）。Esposito, R.、Marra,R. 和 Yau, H.格点上随机粒子系统的纳维–斯托克斯方程。数学物理通讯，**182年** (2)，395–455（1996年）。Farfan, J.、Simas,A.B. 和Valentim, F.J. 具有多个守恒量的边界驱动随机格气模型的静态大偏差（2024年）。未发表。Franco, T.、Gonçalves,P.、Landim,C. 和Neumann, A. 具有罗宾边界条件的边界驱动对称排斥过程的动力学大偏差。*ALEA* 拉丁美洲概率与数理统计杂志，**19年**(2)，1497–1546（2022年）。Guo, M.、Papanicolaou, G. C.和Varadhan, S. S. 具有最近邻相互作用的系统的非线性扩散极限。数学物理通讯，**118年**(1)，31–59（1988年）。Kipnis,C. 和Landim, C. 相互作用粒子系统的标度极限，第320卷。施普林格科学与商业媒体（1998年）。Mitoma, I. C($[0,\ 1]$; y') 和 D ($[0,\ 1]$;y') 上概率测度的紧性。概率年刊，第989–999页（1983年）。Simas,A. B. 具有多个守恒量的边界驱动随机格气模型的流体动力学极限。统计物理学杂志，**139年**，219–251（2010年）。Spitzer, F. 马尔可夫过程的相互作用。数学进展，**5年**，246–290（1970年）。帕拉伊巴联邦大学 -UFPB，数学系，若昂佩索阿 - PB，58059- 900，巴西邮箱地址：oslenne.araujo@gmail.com 高等技术学院，数学系，Av. Rovisco Pais 1，1049-001，里斯本邮箱地址：pgoncalves@tecnico.ulisboa.pt 统计学项目，计算机、电气与数学科学及工程部，阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）邮箱地址：alexandre.simas@kaust.edu.sa