arXiv:2304.03656v1 [math.DG] 7 Apr 2023

正里奇曲率 G-流形中的等变极小-极大超曲面

TONGRUI WANG

Abstract. 本文研究具有正里奇曲率的连通、可定向闭黎曼流形M^{n+1}。设 G 是一个紧李群，通过等距变换作用于 M，且对所有 $p \in M$，都有 $3 \leq \text{codim}(G \cdot p) \leq 7$。那么我们证明，与基本类 $[M]$ 对应的等变极小-极大 G-超曲面 Σ 是一个重数为一的极小 G-超曲面，其具有一个 G-不变的单位法向量，且其 G-等变指标为一。作为应用，在满足 $n+1=3$ 且 G 的作用保持定向的条件下，我们建立了 Σ的亏格界，控制了 Σ/G的奇点，并给出了 M的（第一） G-宽度的上界。

1. Introduction

给定一个连通、可定向的闭黎曼流形 (M^{n+1}, g_M)，在一个非平凡同调类中最小化面积，是构造极小超曲面的一种自然方法（参见 [11][33]）。然而，如果 M 具有正里奇曲率，则由稳定性不等式可知，这种极小化方法无法应用。20 世纪 60 年代，Almgren [1][2]提出了极大极小理论，以在最一般的情形下寻找极小子流形。随后，Pitts [27] ($n \leq 5$) 和 Schoen-Simon [31] ($n = 6$) 改进了极大极小超曲面的正则性。事实上，对于 $n \geq 7$，他们证明了极大极小极小超曲面是光滑嵌入的，奇异集的余维数为 7。

由于 Almgren-Pitts极小-极大理论具有普遍性和抽象性，直到最近，人们才逐渐理解极小-极大超曲面的许多几何性质。例如，在具有正里奇曲率的闭流形中，一系列研究开始刻画由单参数族生成的极小-极大超曲面。具体而言，Marques-Neves [18] 利用 Heegaard 分解研究了某些3-流形中极小-极大超曲面的指标和亏格。此外，他们还得到了关于宽度的尖锐估计和刚性结果。在具有正里奇曲率的高维流形 M^{n+1} 中，Zhou确定了 [39]（对于 $3 \leq n+1 \leq 7$）和 [40]（对于 $n \geq 7$）中的极小-极大超曲面的莫尔斯指标和重数。随后，Ketover-Marques-Neves [15]通过利用悬链面估计，证明了极小-极大超曲面的可定向性，从而改进了 Zhou 在维数 $3 \leq n+1 \leq 7$ 中的结果。特别地，极小-极大超曲面是一个莫尔斯指标为一的可定向闭极小超曲面，并且在所有可定向闭极小超曲面中具有最小面积。此外，在没有任何曲率假设的情况下，[18][39] 中的构造也被 Mazet-Rosenberg [23] 用于证明：最小面积极小超曲面要么是稳定的，要么是莫尔斯指标为一的极小-极大超曲面。

给定一个3-流形 M 且有一个有限群 G 通过等距变换作用，Pitts-Rubinstein [28][29] 首先断言存在一个 G-不变的极小曲面，并对其指标和亏格给出估计。在光滑情形下，Ketover [14] 最近利用等变极小极大确认了极小 G-不变曲面的存在性与正则性（缩写为 G-曲面）。更一般地，设 M^{n+1} 是一个闭的黎曼流形，具有一个

紧李群 G 通过等距变换作用，使得 $3 \leq$ 余维$(G \cdot p) \leq 7, \forall p \in M$。Liu 在光滑情形下 [17] 以及作者 [34][35] 在 Almgren-Pitts情形下，也将等变极小极大理论推广到了这一一般情形。特别地，作者在 [34, 定理9], 中证明了 $H_{n+1}(M; \mathbb{Z}_2)$与 $\pi_1(\mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2))$ 之间的一个同构，其中 $\mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 是 G-不变 n-循环的空间。随后，按照 Almgren-Pitts [27] 的构-造，基本类 $[M] \in H_{n+1}(M; \mathbb{Z}_2)$ 对应于 $W^G(M) > 0$的等变极小极大宽度，该宽度可以由某些带有重数的极小 G-不变超曲面的面积来实现（简称为 G-超曲面）。因此，现在看来研究等变极小-极大超曲面的几何特征是合理的，例如其面积、重数、指标和拓扑。

本文的主要结果将极小-极大超曲面的刻画推广到了等变版本（见定理 5.1）。

定理1.1.设(M^{n+1}, g_M) 是一个具有正里奇曲率的连通可定向闭的黎曼流形，且 G 是一个紧李群，通过等距变换作用于 M，使得$3 \leq$ 对所有 $p \in M$都有余维$(G \cdot p) \leq 7$。那么，与基本类 $[M] \in H_{n+1}(M; \mathbb{Z}_2)$相对应的等变极小-极大超曲面 Σ是一个重数为一的极小G-超曲面，从而

(i) Σ具有一个 G-不变的单位法向量场；(ii) Σ （定义4.1）的等变莫尔斯指标为一；(iii)在所有具有 G-不变单位法向量场的闭嵌入极小 G-超曲面中， Σ具有最小面积。

注 1.2. 关于上述定理，我们作如下几点说明:

(i) 如果 M 具有连通分支$\{M_i\}_{i=1}^m$，我们可以取一个连通分支 M_i 以及李子群 $G_i := \{g \in G : g \cdot M_i = M_i\}$。通过将上述定理应用于$M_i$ 和 G_i，我们得到一个重数为一的极小 G_i-不变超曲面 Σ_i 。此外，很容易验证， $G \cdot \Sigma_i \subset G \cdot M_i$ 是一个极小的 G-超曲面，并且以 $G \cdot M_i$ 代替 M时满足定理1.1 中的 (i)-(iii)。（ii）在没有正里奇曲率假设的情况下，我们可以结合定理 1.1的证明和 [23] 中的构造，证明在所有极小G-超曲面中，存在一个面积最小的（按重数计）极小G-超曲面。详细内容将在即将发表的另一篇论文中讨论。

存在一个 G-不变的单位法向量，有助于区分极小-极大 G- 超曲面 Σ 以及某些 $\mathbb{Z}_2$ 作用下的不动点集。例如，考虑一个正里奇曲率三维椭球 M，其长轴（在 x_1上）足够长，而其他主轴均被2 所界定。于是，经典的极小-极大理论将给出长轴上的赤道 $\Gamma = \{x_1 = 0\} \cap M$ 作为极小-极大超曲面。尽管 Γ也在 $\mathbb{Z}_2$-反射（x_1、 x'） $\mapsto$ （$-x_1$、 x'）下保持不变，但它不可能是极小-极大$\mathbb{Z}_2$-超曲面，因为其单位法向量不是 $\mathbb{Z}_2$-不变的。一个有趣的问题是，在这种情况下极小-极大 $\mathbb{Z}_2$-超曲面究竟是什么，以及它与 2-极小-极大极小超曲面有何关系?

极小极大超曲面的莫尔斯指标和重数的刻画对于极小极大理论的研究至关重要。例如，Marques-Neves [19] 对威尔莫尔猜想的证明的一个关键部分，是证明由五参数极小极大族在 $\mathbb{S}^3$ 中构造的极小曲面具有莫尔斯指标5。此外，通过一般性地指定极小极大超曲面的重数（[41]）和指标（[20][22]），

多参数极小极大理论被用于建立面积泛函的莫尔斯理论。在等变情形下，作者 [36] 还证明了来自多参数族的等变极小-极大超曲面的G-指标（定义 4.1）的一般上界。因此，鉴于定理 1.1，[41], 我们猜想，对于一般的 G-不变黎曼度量，由等变极小极大中的 k-参数族构造的极小 G-超曲面应具有重数为一、 G-指标为 k，以及一个 G-不变的单位法向量。

此外，许多研究发现，极小曲面的莫尔斯指标与其拓扑有关。例如，在具有正里奇曲率的闭流形中，Choi-Schoen [7] 证明，闭极小曲面的面积可由其亏格界定。因此，根据 Ejiri-Micallef [10, 定理 4.3], ，此类极小曲面的指标也可由其亏格界定。此外，Yau 利用共形体积（参见 [32,第 VIII 章第 4] 节）得到了正里奇曲率流形中指标为一的极小曲面的亏格界。更一般地，在具有非负里奇曲率的可定向三维流形中，由 Ros [30, 定理 15] 的锐利估计可知，指标为一的闭可定向极小曲面的亏格必须为 ≤ 3。对于 $\mathbb{R}^3$中的完备双侧极小曲面，Chodosh-Maximo 在 [5] 中证明，其亏格和端的数量给出了其指标的一个下界。关于更多相关研究，请参见 [6][24] 。

因此，作为一项应用，我们在轨道空间中使用 Li-Yau [16] 提出的共形体积，证明正里奇曲率 3-流形中等变极小极大曲面的一个一般性亏格界；这进一步给出了 G-宽度的上界，以及 Σ/G 奇点的界（见定理 5.2）。

定理1.3. 设 (M^3, g_M) 是一个具有正里奇曲率的闭连通可定向黎曼三维流形，且 G 是作用于 M 上的保持定向等距变换有限群。那么，与基本类 $[M]$ 相对应的等变极小-极大超曲面 Σ是一个连通的重数为一的极小 G-超曲面，且

$$\mathrm{genus}(\Sigma) \leq 4K, \qquad W^G(M) = \mathrm{Area}(\Sigma) \leq \frac{8\pi K}{c_M},$$

其中 $K := \max_{p\in M} \#G \cdot p \leq \#G$ 是 M的一个主轨道中的点数，且 $\mathrm{Ric}_M \geq c_M > 0$。此外，商空间 $\pi(\Sigma) = \Sigma/G$ 是一个可定向曲面，具有有限多个阶为 $\{n_i\}_{i=1}^k$ 的锥奇点，使得 $\sum_{i=1}^k(1 - \frac{1}{n_i}) \leq 4$ 且 $\mathrm{genus}(\pi(\Sigma)) \leq 3$。特别地，若 $\Sigma \subset M^{prin}$，则 $\mathrm{genus}(\Sigma) \leq 1 + 2K$。

共形方法已被用于许多关于体积谱的研究，即宽度的多参数版本。对于体积谱中的第一个宽度 $W(M)$，Glynn-Adey-Liokumovich [12] 给出了利用环境流形的最小共形体积的上界。特别地，如果 M是一个闭曲面，他们证明了第一个宽度 $W(M)$可以由 M的亏格和面积加以界定。此外，Wang 在 [37]中证明了体积谱的共形上界。

定理 1.1 的主要思路如下。对于定理 1.1 中的闭流形 M 和李群 G ，我们可以任取一个闭的嵌入极小 G-超曲面 Σ，它位于 M 中，并利用其第一特征向量场的变分，在 Σ 的 G-邻域内构造叶状分解。借助等变极小极大理论的半空间版本（定理 3.11），我们用反证法证明，这个局部的 G-等变叶状分解可以延拓为 M 的连续G-扫掠，其质量不超过 $\mathrm{Area}(\Sigma)$（若 Σ 具有一个 G-不变的单位法向量）或 $2\mathrm{Area}(\Sigma)$。因此，由等变极小极大理论 [34, 定理 8]（另见 [35, 定理 4.20]）可知，等变极小极大超曲面是极小

G-超曲面，且按照 (5.1) 的意义具有最小面积。此外，如果等变极小极大超曲面不允许存在一个 G-不变的单位法向量，那么根据等变极小极大构造（定理 3.8），它的重数必为偶数。然而，在这种情况下，我们可以进一步利用 Ketover-Marques-Neves 的悬链面估计 [15]，在 G-扫掠中加入小的 G-不变圆柱（命题 4.7），从而严格降低质量并导出矛盾。

上述思想与 [39] 中的思想具有相同的精神。然而，由于等变极小极大理论已经在连续版本中建立起来了 [34, 定理 8], 因此，我们不需要像 [39, 第 2], 节中那样调用极小极大理论的光滑框架（参见 [9]），而是在半空间中给出一种更加自包含的等变极小极大构造（定理 3.11）。与此同时，我们无需像 [39, 定理 5.8], 中那样使用离散化定理，而是可以更加容易地确定，G-等变叶状结构的延拓是一个 G-扫掠。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们汇总李群作用和几何测度论中的一些记号与定义。特别地，我们还利用 $\pi_1(\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2))$ 与 $H_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2)$ 之间的同构映射，以连续版本介绍 G-等变扫掠和 G-宽度 M。然后，在第 3 节中，我们介绍作者在 [34][35] 中基于 Almgren-Pitts 框架并经过一些修改而发展的等变极小极大理论。在第 4 节中，我们将从给定的极小 G-超曲面生成一个具有良好性质的连续 G-扫掠。最后，在第 5 节中给出主定理的证明及其应用。

致谢。作者谨向 Gang Tian 教授致以谢意，感谢他一直以来的鼓励。作者也感谢 Xin Zhou、Zhichao Wang 和 Linsheng Wang 提供的有益讨论。本研究的部分工作是在作者访问康奈尔大学数学系期间完成的，期间获得中国博士后科学基金 2022M722844 的资助。作者感谢该系的热情接待，并为其提供了良好的学术环境。

资助。本项目获中国博士后科学基金资助，项目编号为2022M722844。

2. Preliminary

设 (M^{n+1}, g_M) 是一个可定向的连通紧致黎曼 $(n+1)$ 维流形，G 是作用于 M 的紧李群，且该作用是等距的。记 μ 为 G 上的双不变 Haar 测度，并将其归一化为 $\mu(G) = 1$。对于 $\partial M \neq \emptyset$ 的情形，由 [35, 引理 A.1] 可知，M 可以等变且等距地扩张为一个闭黎曼流形 (N, g_N)，其中 G 通过等距变换作用于 N。因此，我们可以假设 M 是闭黎曼 G 维流形 N 的一个紧致区域。

2.1. 李群作用。

首先，我们汇总一些李群作用的定义，其中大多数参考自 [3][4]。

由 [26] 可知，存在一个正交表示 $\rho: G \to O(L)$ 以及一个等距嵌入 $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^L$，其中 $L \in \mathbb{N}$，使得 i是等变的，即 $i \circ g = \rho(g) \circ i$。为简便起见，我们将 M 视为 $\mathbb{R}^L$ 的子集，并将 $g \in G$在 $x \in \mathbb{R}^L$ 上的正交作用记为 $g \cdot x$。如果对于所有 $g \in G$，$g \cdot A = A$，我们称子集（超曲面）$A \subset M$ 为 G-子集（G-超曲面）。

对于任意 $p \in M$，令 $G \cdot p := \{g \cdot p : g \in G\}$ 表示包含 p 的轨道，$G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$ 表示 p的各向同性群。注意，$G \cdot p$是 M的闭子流形，且 G_p是 G的李子群。于是我们称 p 具有 (G_p) 轨道类型，其中 (G_p) 是 G_p在 G中的共轭类。根据 [3, 命题 2.2，存在一个（唯一的）最小各向同性群共轭类 (P)。

群，使得$M^{prin} = M_{(P)} := \{p \in M : (G_p) = (P)\}$是 M 的一个开稠密 G-子集。我们将任何 $G\cdot p \subset M^{prin}$称为 M的主轨道，并用Cohom(G) 表示主轨道的余维数，该余维数称为 G作用的余维数。

令 M/G 为商空间，即轨道空间，并令 π 为投影 $\pi : M \to M/G,\ p \mapsto [p]$。众所周知，$M/G$ 是一个具有诱导度量的豪斯多夫度量空间，度量为 $\mathrm{dist}^{M/G}([p],[q]) := \mathrm{dist}_M(G\cdot p, G\cdot q)$。

分别用 $B_r(p)$、 $B_r([p])$和 $\mathbb{B}^k_r(p)$ 表示 M 中的测地球（如果 $\partial M \neq \emptyset$，则在 N 中）、M/G 中的度量球以及 $\mathbb{R}^k$ 中的欧氏球。下面使用如下记号：

- $\mathfrak{X}(M)$ $\mathfrak{X}(U)$：在 M 或 $U \subset M$ 中具有紧支撑的光滑向量场空间；
- $\mathfrak{X}^G(M)$ $\mathfrak{X}^G(U)$： G-向量场 X在 M 或 U 中的空间，即 $g_*X = X$、$\forall g \in G$；
- $B^G_\rho(p)$：半径为 ρ、围绕 M 中轨道 $G\cdot p$ 的开测地管（若 $\partial M \neq \emptyset$，则在 N 中）；
- $\mathrm{An}^G(p,s,t)$：开管状邻域 $B^G_t(p) \setminus \overline{B}^G_s(p)$。

对于任意闭的 G-超曲面 $\Sigma \subset M$，记NΣ 为其法丛，其中 G 通过 $g\cdot v$ 作用于其上：$= g_*v$ 对所有 $g \in G$， $v \in \mathrm{N}\Sigma$。令 $\exp^\perp_\Sigma : \mathrm{N}\Sigma \to M$ 为 Σ的法指数映射。注意，$\exp^\perp_\Sigma$ 是 G-等变微分同胚，在 Σ 的一个邻域内成立。

2.2. 几何测度论。以下定义参见 [11][27][33] ：

- $\mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2)$： k维模2平坦链的空间，这些链位于 $\mathbb{R}^L$ 中且其支撑集包含于 M；
- $\mathcal{Z}_n(M;\mathbb{Z}_2)$：具有某个 $U \in \mathrm{I}_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2)$ 的 $T \in \mathrm{I}_n(M;\mathbb{Z}_2)$ 空间，即模 2 n-循环的边界型；
- $\mathcal{V}_k(M)$： $\mathbb{R}^L$ 中支撑集包含于 M的 k维可求长变多重折叠空间的弱拓扑闭包。

令 $\mathcal{F}$和 $\mathbf{M}$ 为 $\mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2)$ ([11, 4.2.26]) 中的平坦（半）范数和质量范数。按照 [27, 第 66] 页中的定义，在 $\mathcal{V}_k(M)$ 上定义 F度量。然后，F 在任意质量有界子集 $\{V \in \mathcal{V}_k(M)$ 上诱导弱拓扑： $\|V\|(M) \le C\}$，其中 $C > 0$和 $\|V\|$是由 V 在 M 上诱导的 Radon测度。

对于任意 $T \in \mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2)$，我们将 $|T|$和 $\|T\|$ 分别记为由 T诱导的整 varifold 和 Radon测度。然后，我们在 $\mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2)$ 上定义 F度量为

$$\mathbf{F}(S,T) := \mathcal{F}(S-T) + \mathbf{F}(|S|,|T|), \quad \forall S,T \in \mathbf{I}_k(M;\mathbb{Z}_2).$$

由 [27, 第 68] 页可知，对于任意 $T, \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_n(M;\mathbb{Z}_2)$,

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{F}(T_i,T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(T_i,T) = 0 \text{ and } \lim_{i\to\infty} \mathbf{M}(T_i) = \mathbf{M}(T). \tag{2.1}$$

对于 v $=$M、F、 $\mathcal{F}$，令 $\mathrm{I}_k(M;\mathrm{v};\mathbb{Z}_2)$、 $\mathcal{Z}_n(M;\mathrm{v};\mathbb{Z}_2)$ 为赋予由 v 诱导的拓扑的空间。若对所有$g \in G$, $g_\# T = T (g_\# V = V)$，则称 $T \in \mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2)$（或 $V \in \mathcal{V}_k(M)$）是 G-不变的。于是，我们有以下由 G-不变元素构成的子空间：

- $\mathrm{I}^G_k(M;\mathbb{Z}_2) := \{T \in \mathrm{I}_k(M;\mathbb{Z}_2) : g_\# T = T,\ \forall g \in G\}$;
- $\mathcal{Z}^G_n(M;\mathbb{Z}_2) := \{T \in \mathcal{Z}_n(M;\mathbb{Z}_2) :\ T = \partial U$，其中某个 $U \in \mathrm{I}^G_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2)\}$;
- $\mathcal{V}^G_k(M) := \{V \in \mathcal{V}_k(M) : g_\# V = V,\ \forall g \in G\}$.

注意 $\mathcal{Z}^G_n(M;\mathbb{Z}_2) \subset \{T \in \mathcal{Z}_n(M;\mathbb{Z}_2) :\ g_\# T = T,\ \forall g \in G\}$。由于 G 通过等距变换作用，$\mathrm{I}^G_k(M;\mathbb{Z}_2)$、 $\mathcal{Z}^G_n(M;\mathbb{Z}_2)$ 和 $\mathcal{V}^G_k(M)$ 是带有诱导度量 $\mathbf{M}$ $\mathcal{F}$, F 的闭子空间。此外，我们有以下等周引理（参见 [34, 引理 5]），当 $\partial M \neq \emptyset$ 时该引理同样成立。

引理 2.1. 存在常数 $\epsilon_M > 0$, $C_M > 1$，使得对于任意满足 $\partial T_1 = \partial T_2 = 0$ 的 $T_1, T_2 \in \mathrm{I}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$，以及

$$\mathcal{F}(T_1 - T_2) < \epsilon_M,$$

存在唯一的 $Q \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$，称为 T_1, T_2 的等周选择，满足

(i) $\partial Q = T_1 - T_2$, (ii)
$\mathbf{M}(Q) \leq C_M \cdot \mathcal{F}(T_1 - T_2)$.

对于任意 $V \in \mathcal{V}_n(M)$ 和 $X \in \mathfrak{X}(M)$， V沿 X的第一变分为

$$\delta V(X) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|(F_t)_\# V\|(M) = \int_{G_n(M)} \mathrm{div}_S(X)(p) dV(p, S),$$

其中 $\{F_t\}$ 是由 X生成的微分同胚， $G_n(M)$ 是 M 上无定向 n-平面的格拉斯曼丛。假设 $V \in \mathcal{V}_n^G(M)$ 是 G-不变的，且 $U \subset M$ 是一个开 G-子集，则称

- 若对于所有 $X \in \mathfrak{X}(U)$， $\delta V(X) = 0$，则称 V在 U 中是驻定的;
- V在 U中是 G-驻定的，如果对于所有 $X \in \mathfrak{X}^G$（U）， δV（X）$= 0$。

显然，一个驻定的 G-变分簇必定是 G-驻定的。同时，对于任意 $X \in \mathfrak{X}(U)$，令

$$X_G := \int_G (g^{-1})_* X d\mu(g). \tag{2.2}$$

直接计算表明 $X_G \in \mathfrak{X}^G(U)$和 $\delta V(X) = \delta V(X_G)$ 对任意 $V \in \mathcal{V}_n^G(M)$ 都成立（参见 [17,引理 2.2]）。因此，我们有:

$$V \in \mathcal{V}_n^G(M) \text{ is stationary in } U \text{ if and only if it is } G\text{-stationary in } U. \tag{2.3}$$

2.3. G-扫掠与 G-宽度。为了定义等变扫掠和宽度，我们需要引入一个技术性假设:

定义 2.2. 对任意 $\mathcal{F}$-连续映射 $\Phi\colon [0,1] \to \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$，定义

$$\mathbf{m}^G(\Phi, r) := \sup\{\|\Phi(x)\|(B_r^G(p)) : x \in [0,1], p \in M\},$$

其中， $B_r^G(p)$是 $G\cdot p$在 M 中的测地 r-邻域（如果 $M \subset N$具有非空边界，则是在 N 中）。如果$\lim_{r\to 0} \mathbf{m}^G(\Phi, r) = 0$，则称 Φ 在轨道上无质量集中。

由 (2.1) 和连续性论证，我们得到以下引理（参见 [34, 引理 8]），它在第 3 节中相当有用。

引理 2.3. 若 $\Phi\colon [0,1] \to \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 是 F-连续的，则 Φ 在轨道上无质量集中，且 $\sup_{x\in[0,1]} \mathbf{M}(\Phi(x)) < \infty$。

2.3.1. 闭流形。

在此情形下， $\partial M = \emptyset$。那么，对于任意 $\mathcal{F}$-连续闭曲线 $\Phi\colon [0,1] \to \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$，$\Phi(0) = \Phi(1)$，我们可以取 $a_j = \frac{j}{3^k}$, $j = 0, 1, \ldots, 3^k$，使 $k \in \mathbb{N}$ 足够大，从而

$$\mathcal{F}(\Phi(x) - \Phi(y)) \leq \epsilon_M, \quad \forall x, y \in [a_j, a_{j+1}], \tag{2.4}$$

其中 $\epsilon_M > 0$由引理 2.1 给出。由引理 2.1，存在 $Q_j \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$，使得$\partial Q_j = \Phi(a_{j+1}) - \Phi(a_j)$，且 $\mathbf{M}(Q_j) \leq C_M \mathcal{F}(\Phi(a_{j+1}) - \Phi(a_j))$， $j = 0, 1, \ldots, 3^k - 1$。因此，$Q := \sum_{j=0}^{3^k-1} Q_j \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 满足 $\partial Q = 0$，这表明 $Q = [[M]]$或 0（由常值定理 [33, 26.27]）。因此，我们可以将 Φ 对应到一个同调类:

$$F_M(\Phi) := [Q] \in H_{n+1}(M^{n+1}; \mathbb{Z}_2). \tag{2.5}$$

根据常值定理， $F_M(\Phi)$ 不依赖于 k的选取。此外，由 [34,注 2] 以及 [1], 中的论证可知，对于任意与 Φ 在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$中同伦的闭曲线 Φ'，都有 $F_M(\Phi)=F_M(\Phi')$，并且 F_M诱导一个同构（[34, 定理 9]）：

$$F_M:\pi_1(\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2))\to H_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2).$$

在上述同构中，我们无需指定 $\pi_1(\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2))$ 的基点。这是因为 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 是 $\mathrm{I}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)\cap\mathcal{Z}_n(M;\mathbb{Z}_2)$ 中包含 0 的 $\mathcal{F}$-路径连通分支（根据引理 2.1 以及 [22, Claim 5.3] 中的收缩论证）。

定义2.4（G-扫掠）。闭的 $\mathcal{F}$-连续曲线 $\Phi:\ S^1\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 被称为 M 的 G-扫掠，若 $F_M(\Phi)=[M]\neq 0$。

注 2.5. 由于 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 是 $\mathcal{F}$-路径连通的，任意两个 G-扫掠在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$ 中彼此同伦。因此， M 的 G-扫掠恰好是 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中闭曲线的非平凡同伦类。

接下来，我们引入 M 的极小极大 G-宽度，它可以根据（2.3）视为面积泛函在所有变分下的一个临界值。

定义 2.6（G-宽度）。设 $\mathcal{P}^G(M)$ 为 M 上不存在轨道质量集中现象的 G-扫掠集合。则我们将 M 的 G-宽度定义为

$$W^G(M):=\inf_{\Phi\in\mathcal{P}^G(M)}\sup_{x\in S^1}\mathbf{M}(\Phi(x)).$$

2.3.2. 带边界的紧流形。

现在我们考虑 $\partial M\neq\emptyset$ 的情形，并将 M 视为闭的黎曼 G 流形 N中的一个紧致区域。令 F_N 由 (2.5)给出，并令 $\nu_{\partial M}$ 为 ∂M的指向内部的单位法向量 M。于是，当 $\eta>0$ 足够小时，定义

$$M_\eta:=M\setminus\exp^\perp_{\partial M}([0,\eta)\cdot\nu_{\partial M})=\{p\in M:\mathrm{dist}_M(p,\partial M)\geq\eta\}. \tag{2.6}$$

令 $\Phi_i:\ [0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M;\ \mathbb{Z}_2)$、 $i=1$、2 为两条 $\mathcal{F}$-连续曲线，使得 $\Phi_i(0)=[[\partial M]]$且 $\Phi_i(1)=0$。如同（2.4）中的构造，我们可以将 Φ_i与 $Q_i\in\mathrm{I}_{n+1}^G(M;\ \mathbb{Z}_2)$ 关联起来，并且 $\partial Q_i=[[\partial M]]$。于是常值定理推出 $Q_i=[[M]]$。因此，曲线乘积（联合曲线） $\Phi_2^{-1}\cdot\Phi_1$ 满足 $F_N(\Phi_2^{-1}\cdot\Phi_1)=0$，从而 $\Phi_2^{-1}\cdot\Phi_1$ 在 $\mathcal{Z}_n^G(N;\ \mathcal{F};\ \mathbb{Z}_2)$ 中同伦于 0。由于对于所有 $x\in[0,1]$ 和 $i=1$、2，$\mathrm{spt}(\Phi_i(x))\subset M$，我们可以在 [22, 定理 5.1] 中应用双覆盖论证，以引理 2.1 替代 [1, 推论 1.14],，并看到 $\Phi_2^{-1}\cdot\Phi_1$ 与 0 之间的同伦映射可以取在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\ \mathcal{F};\ \mathbb{Z}_2)$ 中。因此，Φ_1 和 Φ_2 在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\ \mathcal{F};\ \mathbb{Z}_2)$ 中彼此同伦。

接下来，我们为具有非空边界的 G-流形介绍以下定义，该定义由光滑极小极大框架 [39, 定义 2.1, 2.5]推广而来。

定义 2.7. 假设 M 是一个带边界 $\partial M\neq\emptyset$ 的紧黎曼 G-流形。那么，我们称 $\mathcal{F}$-连续曲线 $\Phi:\ [0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 为 $(M,\partial M)$ 的 G-扫掠，若

(i) $\Phi(0)=[[\partial M]]$, $\Phi(1)=0$; (ii) 存在 $\epsilon>0$ 和一个光滑的 G-不变函数 $w:\ [0,\epsilon]\times\partial M\to[0,\infty)$，使得$w(0,\cdot)\equiv 0$ 且 $\frac{\partial}{\partial x}w(0,\cdot)>0$，从而 $\Phi(x)$，$x\in[0,\epsilon]$, 是由光滑的G-超曲面 $\exp^\perp_{\partial M}(w(x,\cdot)\nu_{\partial M})$诱导的；(iii) 对任意 $x_0\in(0,1],$，存在 $\eta>0$，使得对所有 $x\in[x_0,1]$，$\mathrm{spt}(\Phi(x))\subset\subset M_\eta$。

将 $\mathcal{P}^G(M,\partial M)$记为 $(M,\partial M)$ 的 G-扫掠集合，且在轨道上无质量集中。然后，我们将 $(M,\partial M)$ 的 G- 宽度定义为

$$W^G(M,\partial M) := \inf_{\Phi\in\mathcal{P}^G(M,\partial M)} \sup_{x\in[0,1]} \mathbf{M}(\Phi(x)).$$

备注 2.8。正如我们之前提到的，任意两个 G-扫掠 Φ_1,Φ_2 的 $(M,\partial M)$必须在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$ 中彼此同伦。此外，通过重新参数化， $\Phi_i,\ i=1,2$的叶状部分可通过 $v_t:=(1-t)w_1+tw_2$同伦，其中 $t\in[0,1]$ 和$w_1,w_2\colon[0,\frac{1}{3}]\times\partial M\to[0,\infty)$由定义 2.7给出。非叶状部分 $\Phi_i\llcorner[\frac{1}{3},1]$和 $\exp^{\perp}_{\partial M}(v_t(1\ 3\ ,\cdot)\nu_{\partial M})$ 都在某个 M_η中，因此，对于某个 $\eta>0$，这些部分之间的同伦可以取在 $\mathcal{Z}_n^G(M_\eta;\mathcal{F};\overline{\mathbb{Z}}_2)$中（参见 $[22,$定理5.1$]$与引理 2.1 中的构造）。因此，我们可以取一个同伦映射 $H\colon[0,1]\times[0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$，使得 $H(0,\cdot)=\Phi_1, H(1,\cdot)=\Phi_2$，并且对于每个 $t\in[0,1]$，$H(t,\cdot)$ 都是 $(M,\partial M)$ 的 G-扫掠。

3. Equivariant min-max theory

本节中，我们介绍 $[34]$ 中的等变极小极大构造（修正版见 $[35][36]$）。主要目的是找到一个积分 G-变体 $V\in\mathcal{V}_n^G$（M），它由光滑嵌入的极小 G-超曲面诱导，使得 $\|V\|$（M）$=W^G$（M）（若 $\partial M\neq\emptyset$，则为W^G（$M,\partial M$））。由于我们的定义与 $[34][35]$, 中的略有不同，为完整起见，我们将概述其中的关键步骤。

在本节中，根据 ∂M 是否为空，令 $\mathcal{P}^G=\mathcal{P}^G$（$M$）或 $\mathcal{P}^G$（$M,\partial M$），$W^G=W^G$（M）或 W^G（$M,\partial M$）。经过重新参数化，我们总是假设 $\Phi\in\mathcal{P}^G$ 的定义域为 $I=[0,1]$; 若 $\partial M\neq\emptyset$，则 $\Phi\llcorner[0,1/3]$ 是定义 2.7(ii) 中所述的光滑 G-超曲面。

对于任意序列 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}^G$，定义 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的宽度为

$$\mathbf{L}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) := \limsup_{i\to\infty}\sup_{x\in I}\mathbf{M}(\Phi_i(x)),$$

那么，如果 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足以下条件，我们称其为极小极大序列:

$$\mathbf{L}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = W^G.$$

$\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的像集定义为

$$\mathbf{\Lambda}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) := \{V\in\mathcal{V}_n^G(M) : V=\lim_{j\to\infty}|\Phi_{i_j}(x_{i_j})| \text{ for some } i_j\to\infty, x_{i_j}\in I\}.$$

此外，我们将 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的临界集定义为

$$\mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) := \{V\in\mathbf{\Lambda}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) : ||V||(M)=\mathbf{L}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}})\}.$$

3.1. 离散极小极大设置。为应用$[34][35],$中的等变极小极大构造，我们需要以下离散记号。由于我们只考虑 $\mathcal{Z}_n^G$（M；$\mathbb{Z}_2$）中的曲线，因此我们将记号限定于单参数情形。

记 I 为 $=[0,1]$。对于任意 $j\in\mathbb{N}$，令 $I(1,j)$为定义在 I 上的立方复形，其 1-胞腔和 0-胞腔（顶点）如下:

$$I(1,j)_1 := \{[0,3^{-j}],[3^{-j},2\cdot3^{-j}],\dots,[1-3^{-j},1]\},\qquad I(1,j)_0 := \{[0],[3^{-j}],\dots,[1]\}.$$

边界同胚 ∂ 由 $\partial[a,b]=[b]-[a]$定义。然后，我们用$I(2,j)=I(1,j)\otimes I(1,j)$表示 $I^2=I\times I$ 上的胞腔复形。对于任意 $\alpha=\alpha_1\otimes\alpha_2\in I(2,j)$，如果$\dim(\alpha_1)+\dim(\alpha_2)=p$，我们称 α 为一个 p-胞腔。那么，$I(2,j)$的 p-胞腔集合记为$I(2,j)_p$，而 $\alpha\in I(i,j)_q$中的 p-胞腔集合记为 α_p。

设 $J:=[1/3,1]$。于是，我们将包含 $I(1,j)$ 中所有支撑集包含于 J的胞腔的立方子复形记为 $J(1,j)$。类似地， $J(1,j)$ 的 p-胞腔集合记为 $J(1,j)_p$。

给定任意两个顶点 $x,y\in I(m,j)_0,$，定义距离 $\mathbf{d}(x,y):=3^j\sum_{i=1}^m|x_i-y_i|$。对于任意映射 $\phi\colon I(1,j)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，我们将 ϕ 的 M-细度定义为

$$\mathbf{f_M}(\phi):=\sup\{\mathbf{M}(\phi(x)-\phi(y)):\mathbf{d}(x,y)=1,\ x,y\in I(1,j)_0\}.$$

假设 $S=\{\varphi\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是映射序列 $\varphi_i\colon I(1,k_i)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，满足 $k_i\to\infty$ 且当 $i\to\infty$ 时 $\mathbf{f_M}(\varphi_i)\to 0$。那么我们使用以下记号:

- $\mathbf{L}(S):=\limsup_{i\to\infty}\max_{x\in I(1,k_i)_0}\mathbf{M}(\varphi_i(x))$;
- $\mathbf{\Lambda}(S):=\{V\in\mathcal{V}_n^G(M):V=\lim_{j\to\infty}|\varphi_{i_j}(x_{i_j})|\text{ for some } i_j\to\infty, x_{i_j}\in I(1,k_i)_0\}$;
- $\mathbf{C}(S):=\{V\in\mathbf{\Lambda}(S):||V||(M)=\mathbf{L}(S)\}$.

对于任意 $i,j\in\mathbb{N}$，令 $\mathbf{n}(i,j)\colon I(1,i)_0\to I(1,j)_0$ 为最近投影，即

$$\mathbf{d}(x,\mathbf{n}(i,j)(x))=\inf\{\mathbf{d}(x,y):y\in I(m,j)_0\}.$$

接下来我们定义离散同伦:

定义 3.1. 给定 $\phi_i\colon I(1,k_i)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，$i=1,2$，若 ϕ_1和 ϕ_2在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中以 δ 为 M-细度 1-同伦，则称它们 1-

$$\psi:I(1,k)_0\times I(1,k)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$$

对于某个 $k\geq\max\{k_1,k_2\}$，使得 $\mathbf{f_M}(\psi)<\delta$且 $\psi([i-1],x)=\phi_i(\mathbf{n}(k,k_i)(x))$，对于 $i\in\{1,2\}$和 $x\in I(1,k)_0$。

定义 3.2. 映射序列 $S=\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}},\phi_i\colon I(1,k_i)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，是 a

$$(1,\mathbf{M})\text{-}homotopy\ sequence\ of\ mappings\ into\ \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2),$$

如果 ϕ_i和 ϕ_{i+1}在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中以 δ_i 为 M-细度 1-同伦，使得

(i) $\lim_{i\to\infty}\delta_i=0$;
(ii) $\sup\{\mathbf{M}(\phi_i(x)):x\in I(1,k_i)_0,\ i\in\mathbb{N}\}<+\infty$.

定义 3.3. 设 $S^j=\{\phi_i^j\}_{i\in\mathbb{N}},j=1,2,$是两个映射到 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中的 (1, M)-同伦序列。那么，如果存在一个序列$\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 S^1和 S^2在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中同伦

(i) ϕ_i^1 is 1-homotopic to ϕ_i^2 in $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ with $\mathbf{M}$-fineness δ_i;
(ii) $\lim_{i\to\infty}\delta_i=0$.

根据下述 [34, 定理 2], 中的离散化定理，我们可以从任意 $\Phi\in\mathcal{P}^G$生成一个映射到 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 中的 (1, M)-同伦序列。

定理 3.4（离散化定理）。设 $\Phi\colon I\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 是一个关于平坦拓扑的连续映射，满足 $\sup_{x\in I}\mathbf{M}(\Phi(x))<\infty$，且 Φ 在轨道上无质量集中。那么，存在一个映射序列

$$\phi_i:I(1,j_i)_0\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2),$$

其中 $j_i<j_{i+1}$，以及一个收敛到零的正数序列 $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 t

(i) $S=\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是映入 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 的 (1, M)-同伦映射序列，其 M-细度为 $\mathbf{f_M}(\phi_i)<\delta_i$;

(ii) 存在某个序列 $k_i \to +\infty$，使得对所有 $x \in I(1, j_i)_0$,

$$\mathbf{M}(\phi_i(x)) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(y)) : \alpha \in I(1, k_i)_1, x, y \in \alpha\} + \delta_i,$$

这意味着 $\mathbf{L}(S) \leq \sup_{x \in I}\mathbf{M}(\Phi(x))$; (iii) $\sup\{\mathcal{F}(\phi_i(x) - \Phi(x)) : x \in I(1, j_i)_0\} \leq \delta_i$; (iv) $\Phi(0) = \phi_i([0]) = \psi_i(\cdot, [0])$, $\Phi(1) = \phi_i([1]) = \psi(\cdot, [1])$, 其中 ψ_i 是由 (i) 给出的 ϕ_i 和 ϕ_{i+1} 的离散同伦映射，且满足 $\psi_i([0], \mathbf{n}(\cdot)) = \phi_i$, $\psi_i([1], \mathbf{n}(\cdot)) = \phi_{i+1}$。

此外，设 $K \subset M$ 是一个具有光滑边界的紧致 G-不变区域。则对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in I(1, j)_1$, , 如果 $\mathrm{spt}(\Phi(x)) \subset K$ 对所有 $x \in \alpha$均成立，那么我们还可以使 $\mathrm{spt}(\phi_i(x)) \subset K$ 对所有 $x \in \alpha \cap I(1, j_i)_0$均成立。

证明。(i)-(iii) 中的结论直接由 [34, 定理 2] 得出。注意，[34, 定理 2] 的证明基本上采用了 [19, 定理 13.1] 中的组合方法，只是将引理 2.1 替换为 [1, 推论 1.14]，并将 $\mathrm{dist}(G \cdot p, \cdot)$ 替换为 $\mathrm{dist}(p, \cdot)$。同时，由于这些映射定义在一维立方复形上，(iv) 可由 [19, 命题 13.5(ii)] 以及 [19, 定理 13.1(iv)] 中的组合构造得出。此外，这些论证在 $\partial M \neq \emptyset$ 的情形下同样适用，因此当 M 有边界时，(i)-(iv) 仍然成立。最后，若按最后一条陈述给定 K 和 $\alpha \in I(1, j)$，则我们可以分别将上述离散化结果应用于 $\Phi \llcorner \alpha$ 中的 K 和 M 中的 $\Phi \llcorner (I \setminus \mathrm{int}(\alpha))$。注意，根据 (iv)，边界值保持不变。因此，定义在 α 和 $I \setminus \mathrm{int}(\alpha)$ 上的离散映射可以连接起来，从而得到最后一条陈述。□

下面的插值定理（参见 [34, 定理 3]）表明，可以由一个 M-细度较小的离散映射生成一个映入 $\mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 的 M-连续映射。

定理 3.5（插值定理）。对于 $m = 1,2$，存在一个正数常数$C_0 = C_0(M, G, m)$，使得若 $\phi : I(m, k)_0 \to \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 满足 $\mathbf{f}_{\mathbf{M}}(\phi) < \epsilon_M$，且 $\epsilon_M > 0$ 由引理 2.1 给出，则存在一个映射

$$\Phi : I^m \to \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$$

在 M-拓扑下连续，并满足：

(i) $\Phi(x) = \phi(x)$ 对所有 $x \in I(m, k)_0$ 均成立；(ii) 若 α 是 $I(m, k)$ 中的某个 j-胞腔，则 Φ 限制在 α 上仅取决于 α的顶点上的值ϕ；(iii) $\sup\{\mathbf{M}(\Phi(x) - \Phi(y)) : x, y$ 位于 $I(m, k)\} \leq C_0$ 的同一个胞腔中$\mathbf{M}\mathbf{f}(\phi)_{\mathbf{M}}$；(iv) 对任意 $\alpha \in I(m, k)j$，若 $\phi \llcorner \alpha_0 \equiv T \in \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 是常数，则 $\Phi \llcorner \alpha \equiv T$。

我们将定理 3.5 中的映射 Φ 称为 ϕ 的 Almgren G-扩张。

证明。(i)-(iii) 中的结论直接由 [34, 定理 3] 得出。若 $\partial M \neq \emptyset$，则将 $\mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 和引理 2.1 分别代替 $\mathcal{Z}_n^G(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$ 和 [35,引理 3.10]，定理 4.13] 中的构造即可照搬。如果对于某个 j-胞腔 α，$\phi \llcorner \alpha_0 \equiv T \in \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 是常数，那么对于任意 1-胞腔 $\gamma_1 = [a, b] \in \alpha_1$，$\phi(a)$ 和 $\phi(b)$ 的等周选择 $Q(\gamma_1)$（引理 2.1）必为 0。因此，对于任意胞腔 $\beta \subset \alpha$，定理 4.13] 中构造的映射 h_β 为 0，这意味着 $\Phi \llcorner \alpha \equiv T$ 由 [1, 4.5] 得出。□

利用离散化/插值定理 3.4 和 3.5，我们得到以下推论（参见 [34,推论 1]）：

推论 3.6. 设 $\Phi\colon I \to \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 是一个在轨道上无质量集中的 $\mathcal{F}$-连续映射，且 $\sup_{x\in I}$ M$(\Phi(x)) < \infty$。假设 $S = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是将定理 3.4 应用于 Φ所得，并且 Φ_i 是由定理 3.5 针对充分大的 i 给出的 ϕ_i 的 Almgren G-延拓。那么

(i) 对于每个 i足够大的，都存在一个相对同伦映射 $H_i\colon I^2 \to \mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$，使得 $H_i(0,\cdot) = \Phi$, $H_i(1,\cdot) = \Phi_i$, $H_i(\cdot,0) \equiv \Phi(0) = \Phi_i(0)$，并且 $H_i(\cdot,1) \equiv \Phi(1) = \Phi_i(1)$；(ii)L$(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ =L$(S) \le \sup_{x\in I}$ M$(\Phi(x))$。

证明。利用定理 3.5 和 Almgren 的论证，我们看到定理 8 在我们的不变设定下仍然成立（即使可能非空）。因此，将定理 3.4 和 3.5 替代定理 3.6、3. 后，推论 3. 的证明也可照搬。于是，对于足够大的， 同伦于在（；；）中，且 (ii) 成立。此外，由定理 3.4 和 3.5 的 (iv)，对于所有足够大的，我们有 (0) () (0) 以及 (1) () (1)。因此，结合定理 3.4 和 3.5 的 (iv) 与命题 3.3、3. 中的同伦构造，容易验证和的同伦映射是相对于边界值的。

设 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G$ 为任意一个极小极大序列。如果 $\partial M = \emptyset$，那么我们可以对每个 Φ_i 应用推论 3.6，并得到一个 M-连续曲线序列 $\{\Phi_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$，其在 $\mathcal{Z}_n^G(M;\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$ 中与 Φ_i 相对同伦，且L$(\{\Phi_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}) \le \sup_{x\in I}M(\Phi_i(x))$。选择 $j(i)$ 足够大，使得 $\sup_{x\in I}$M$(\Phi_{j(i)}^i(x)) \le \sup_{x\in I}M(\Phi_i(x)) + \frac{1}{i}$。因此，我们有 $\{\Phi_{j(i)}^i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M)$是一个在 M-拓扑中连续、因而也在 F-拓扑中连续的极小极大序列。

对于情形 $\partial M \neq \emptyset$，我们可以将上述论证应用于由定义 2.7(iii) 给出的、满足 $x_0 = \frac{1}{3}$ 的 a G-子流形中的每个 $\Phi_i \llcorner J$，并得到满足以下条件的 $\Phi_{j(i)}^i\colon J \to \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};$ M$;\mathbb{Z}_2)$。

- $\Phi_{j(i)}^i$ is relative homotopic to $\Phi_i \llcorner J$ in $\mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$,
- $\sup_{x\in J}\mathbf{M}(\Phi_{j(i)}^i(x)) \le \sup_{x\in J}\mathbf{M}(\Phi_i(x)) + \frac{1}{i}$.

由于 $\Phi_{j(i)}^i$ 和 $\Phi_i \llcorner J$ 的同伦映射是相对于边界值的，我们可以定义 $\Phi_{j(i)}^i \llcorner [0,\frac{1}{3}] = \Phi_i \llcorner [0,\frac{1}{3}]$，并看到 $\{\Phi_{j(i)}^i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M,\partial M)$ 是一个 F-连续极小极大序列的序列。

因此，上述论证得出以下推论，这意味着我们只需考虑 F-连续的 G-扫掠。

推论 3.7。定义 2.6 和 2.7 中定义的 G-宽度满足

$$W^G = \inf\{\sup_{x\in I}\mathbf{M}(\Phi(x)) : \Phi \in \mathcal{P}^G \ is\ \mathbf{F}\text{-}continuous\}.$$

3.2. 极小极大定理。现在我们使用极小极大方法构造一个极小的 G 超曲面（带重数），使得宽度 W^G 由其面积实现。

3.2.1. 闭流形。

当 M 是闭的时，由备注 2.5 和推论 3.7 可知， $\mathbf{\Pi}$:=$\{\Phi \in \mathcal{P}^G(M)$ 是 F-连续的，$\}$ 是意义下的连续 G-同伦类， $[34,$ 定义 $5],$，而 $W^G(M)$ =L$(\mathbf{\Pi})$ 则符合 $[34,$ 定义 $6]$。因此，由 $[34,$ 定理 $8]$ 可得以下极小极大定理。（注意， $M\setminus M^{prin}$ 上的假设可通过 $[35],$ 中的修改从 $[34,$ 定理$8]$ 中移除，且维数假设在 $[36,$ 定理 5.1] 中有所修改。）

定理 3.8。假设 M 是闭的，即 $\partial M = \emptyset$，并且 $3 \leq$ 余维(G $\cdot$ p) ≤ 7 对所有 $p \in M$均成立。那么存在一个整 G-变分簇 $V \in \mathcal{V}_n^G(M)$，使得

$$\|V\|(M) = W^G(M), \quad \text{and} \quad V = \sum_{i=1}^{m} n_i |\Sigma_i|,$$

其中， m、 $n_i \in \mathbb{N}$、 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^m$ 是两两不交的 G-连通光滑嵌入闭极小 G-超曲面。此外，如果 Σ_i 不允许存在 G-不变的单位法向量场，那么 n_i 是偶数。

证明。由于 V的存在性和正则性已由 [34, 定理 8] 给出（另见 [36, 定理 5.1]），我们只需证明最后一个结论。注意，极小极大变体V 在边界型环带中是（G， $\mathbb{Z}_2$）-几乎极小的，其含义见 [34, 定义10,11]。因此，对每个 Σ_i，我们可以取一个以 $G \cdot p \subset \Sigma_i$ 为中心的小 G-管状邻域 $B_{5r}^G(p)$，并令$r \in$ 属于 (0, $\text{inj}(G\cdot p)$ 2)，使得

- V 在 $B_{2r}^G(p)$中是（G， $\mathbb{Z}_2$）-边界型几乎极小的；
- $B_t^G(p)$ 对所有 $t \in (0, 2r)$ 都具有平均凸边界；
- $B_{2r}^G(p) \cap \text{spt}(\|V\|) \subset \Sigma_i$，且 $\partial B_r^G(p)$ 与 Σ_i 横截。

于是，根据 G-替换的构造（[34, 命题 2, 3]）及其一致性（[36, 命题 4.19]），存在一个序列 $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$，使得
(1) $T_j = \partial Q_j$在 $B_r^G(p)$ 中是局部质量极小的，且 $Q_j \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$；(2) $|T_i| \to V$在变体的意义下。
由紧致性，取 $T_j \to T = \partial Q$ 在平坦拓扑下收敛，且 $Q \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$。因此，我们有 $\text{spt}(T) \subset \text{spt}(V) = \cup_{i=1}^m \Sigma_i$，由常值定理可知，对于某个 $n_i' \in \mathbb{Z}_2$，有 $T = \sum_{i=1}^m n_i'[[\Sigma_i]]$。作为 $Q \in \mathrm{I}_{n+1}^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 的边界，如果 Σ_i 不存在 G-不变的单位法向量，我们必有 $n_i' = 0$。现在可以运用切片理论（[33, 28.5]）取 $s \in (r/2, r)$，使得 $\mathbf{M}(\partial(T_j \llcorner B_s^G(p)))$ 一致有界，因此 $T_j \llcorner B_s^G(p)$ 收敛到一个子序列。最后，由于 (1)， [38, 定理 1.1] 表明 $n_i \equiv n_i'$ 模 2，因此，对于不存在 G-不变单位法向量的 Σ_i，重数 n_i 必为偶数。□

3.2.2. 带边界的紧流形。

现在我们考虑 $\partial M \neq \emptyset$ 的情形。在这种情况下，我们作出如下假设

$$H_{\partial M} > 0, \quad \text{and} \quad W^G(M, \partial M) > \text{Area}(\partial M), \tag{3.1}$$

其中， $H_{\partial M}$ 是相对于指向内部的单位法向量 $\nu_{\partial M}$的 ∂M 的平均曲率。根据推论 3.7，我们可以取一个在 F-拓扑中连续的极小极大序列$\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M, \partial M)$。策略是利用以下命题将 $\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ 变形为一个新的 F-连续极小极大序列，使得每个 $V \in \mathbf{C}(\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}})$都支撑在一个$G$-不变子域 $M_a \subset\subset M$中。借助这一点，极小极大构造可以限制在 M 的内部，从而构造一个实现宽度$W^G(M, \partial M)$的闭的极小 G-超曲面。这种变形方法基于引理 2.2] 的思想；为完整起见，我们在此列出详细过程。

命题 3.9. 假设 $\partial M \neq \emptyset$ 满足 (3.1)。那么存在常数 $a > 0$ 以及一个在 F-拓扑中连续的极小极大序列 $\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M, \partial M)$，使得
- 若 $\mathbf{M}(\Phi_i^*(x)) \geq W^G(M, \partial M) - \delta$满足 $\delta = \frac{1}{4}(W^G(M, \partial M) -$面积$(\partial M))$，则 $\text{spt}(\Phi_i^*(x)) \subset\subset M_a := \{p \in M : \text{dist}_M(p, \partial M) \geq a\}$。

证明。取足够小的 $a>0$，使得 $d:=\mathrm{dist}_M(\partial M,\cdot)$ 在 ∂M 的某个 $4a$ 邻域内是一个 G 不变的光滑函数。由 (3.1)，我们可以进一步减小 $a>0$，使得对于任意 $r\in[0,3a]$，$\partial M_r=d^{-1}(r)$ 关于内侧单位法向量∇d具有正平均曲率 H_r。记 ∂M_r 的第二基本形式为 A_r，并令 $c=\sup_{r\in[0,3a],\ p\in\partial M_r}|A_r|(p)$。然后我们取 $\phi\geq 0$，如引理 2.2] 中所述，使得

$$\phi'+c\phi\leq 0,\qquad \phi(r)>0 \text{ for } r<2a,\qquad \phi(r)=0 \text{ for } r\geq 2a.$$

对于任意 $p\in\mathrm{int}(M)\setminus M_{3a}$ 以及 n-子空间 $S\subset T_pM$，令 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 S的一组标准正交基，并令 $P\colon T_pM\to T_p\partial M_{d(p)}$ 为投影。由于 $\dim(S\cap T_p\partial M_{d(p)})\geq n-1$，我们可以假设 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}\cup\{e^*\}$ 给出 $T_p\partial M_{d(p)}$的一组标准正交基，其中 e^* 满足$\langle e^*,P(e_n)\rangle=|P(e_n)|$。注意到 $\nabla d\perp T_p\partial M_{d(p)}$ 和 $\nabla_{\nabla d}\nabla d=0$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_S(\phi\nabla d) &= \phi'(d(p))\cdot\langle e_n,\nabla d\rangle^2+\phi(d(p))\cdot\sum_{i=1}^n\langle\nabla_{e_i}\nabla d,e_i\rangle\\
&= \phi'\langle e_n,\nabla d\rangle^2-\phi\sum_{i=1}^n A_{d(p)}(P(e_i),P(e_i))\\
&= (\phi'+\phi A_{d(p)}(e^*,e^*))\langle e_n,\nabla d\rangle^2-\phi H_{d(p)}\\
&\leq (\phi'+c\phi)\langle e_n,\nabla d\rangle^2-\phi H_{d(p)}\leq 0.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

根据推论 3.7，我们可以取任意在 F度量中连续的极小极大序列 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}^G(M,\partial M)$。然后，对于每个 Φ_i，存在 $\epsilon_i>0$ 和 $\eta_i\in(0,\frac{a}{8})$，使得

(1) $\Phi_i\llcorner[0,4\epsilon_i]$ 是光滑的 G超曲面，且 $\mathbf{M}(\Phi_i(x))\leq$面积$(\partial M)+\delta,\forall x\in[0,4\epsilon_i]$; (2) $\mathrm{spt}(\Phi_i(x))\subset\subset M_{2\eta_i}$ 对所有 $x\in[\epsilon_i,1]$均成立。

令 κ_i 为一个截断函数，使得对 $r\leq\eta_i$，$\kappa_i(r)=0$，并且对 $r\geq 2\eta_i$，$\kappa_i(r)=1$。那么，G向量场 $X_i:=\kappa_i(d)\phi(d)\nabla d$生成 G-等变微分同胚 $\{F_t^i\}$。根据 (2) 和 (3.2)，对于任意 $x\in[\epsilon_i,1]$ 和 $t_0\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\mathbf{M}((F_t^i)_\#\Phi_i(x)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\|(F_t^i)_\#(F_{t_0}^i)_\#\Phi_i(x)\|(M)\\
&= \int\mathrm{div}_S(X_i)dV_{t_0,x}=\int\mathrm{div}_S(\phi\nabla d)dV_{t_0,x}\leq 0,
\end{aligned}$$

其中 $V_{t_0,\ x}:=|(F_{t_0}^i)_\#\Phi_i(x)|\in\mathcal{V}_n^G(M_{2\eta_i})$。因此，

$$\mathbf{M}((F_t^i)_\#\Phi_i(x))\leq\mathbf{M}(\Phi_i(x)),\quad\forall x\in[\epsilon_i,1],\ t\geq 0.\tag{3.3}$$

由于 $M_{2\eta_i}\setminus M_{2a}\subset\mathrm{spt}(X_i)\subset M_{\eta_i}\setminus\mathrm{int}(M_{2a})$，我们看到 $\lim_{t\to\infty}F_t^i(p)\in\partial M_{2a}$ 对任意 $p\in M_{2\eta_i}\setminus M_{2a}$，因此 $F_{T_i}^i(M_{2\eta_i})\subset M_a$ 对某个 $T_i>0$。取一个光滑函数 $h_i\colon[0,1]\to[0,T_i]$，满足 $h_i\llcorner[0,\epsilon_i]=0$, $h_i\llcorner[2\epsilon_i,1]=T_i$。那么 $\Phi_i^*(x):=(F_{h_i(x)}^i)_\#\Phi_i(x)$ 满足：

(a) $\Phi_i^*(x)=\Phi_i(x)$对于 $x\in[0,\epsilon_i]$ (由于 $h_i=0$);(b) $\mathbf{M}(\Phi_i^*(x))\leq\mathbf{M}(\Phi_i(x))$ 对所有 $x\in[\epsilon_i,1]$ (根据(3.3)); (c) $\mathrm{spt}(\Phi_i^*(x))\subset\subset M_a$ 对所有 $x\in[2\epsilon_i,1]$ (根据 (2) 以及 T_i、h_i 的定义)。

显然，$\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}^G(M,\partial M)$ 也是一个 F-连续极小极大序列。此外，如果 $\mathbf{M}(\Phi_i^*(x))\geq W^G(M,\partial M)-\delta\geq$Area$(\partial M)+\delta$，那么 $x\in(4\epsilon_i,1]$ 由 (1)(a)(b) 得出，因此 $\mathrm{spt}(\Phi_i^*(x))\subset\subset M_a$ 由 (c) 得出。□

接下来，我们使用拉紧论证，使每个 $V\in\mathbf{C}(\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}})$ 在 M 中驻定。根据命题 3.9，拉紧过程可以限制在 G-子集 $\mathrm{int}(M_a)$ 中。

命题 3.10. 假设 $\partial M \neq \emptyset$ 满足 (3.1)，且 $\delta := \frac{1}{4}(W^G(M,\partial M) - \text{面积}(\partial M))$。设 $a > 0$ 和 $\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M,\partial M)$ 由命题 3.9 给出。那么存在一个 F-连续极小极大序列 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M,\partial M)$，满足

(i) $\mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \mathbf{C}(\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}) \cap \mathcal{V}_n^G(M_a)$; (ii) 每个 G-varifold $V \in \mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ 在 M 中都是驻定的；(iii) 如果 $\mathbf{M}(\Phi_i(x)) \geq W^G(M,\partial M) - \delta$，那么 $\mathrm{spt}(\Phi_i(x)) \subset\subset M_{\frac{a}{2}}$。

证明。设 $C := \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} \mathbf{M}(\Phi_i^*(x)) < \infty$ 且 $M_{\frac{a}{2}} := \mathrm{int}(M_{\frac{a}{2}})$ 是 G-不变的 M的开集。于是定义 $A := \{V \in \mathcal{V}_n^G(M) : \|V\|(M) \leq C\}$ 且

$$A_0 := \{V \in A : V \text{ is stationary in } \mathring{M}_{\frac{a}{2}}\}.$$

由于 G 通过等距变换作用， A 和 A_0 是 $\mathcal{V}_n^G(M)$的紧子集。此外，对于任意$V \in A$，由(2.2)可知， $V \in A_0$ 当且仅当 $\delta V(X) = 0$， $\forall X \in \mathfrak{X}^G(\mathring{M}_{\frac{a}{2}})$。因此，我们可以遵循 [19, 第 765] 页（或 [27, 第 153]页），用 $\mathfrak{X}^G(\mathring{M}_{\frac{a}{2}})$代替 $\mathfrak{X}(M)$，来定义一个连续映射 $X\colon A \to \mathfrak{X}^G(\mathring{M}_{\frac{a}{2}})$和一个连续函数 $\eta\colon A \to [0,1]$，满足

- $X(V) = 0$ 和 $\eta(V) = 0$，若 $V \in A_0$;
- $\delta V(X(V)) < 0$ 和 $\eta(V) > 0$，若 $V \in A \setminus A_0$;
- $\|(f_t^{X(V)})_\# V\|(M) < \|(f_s^{X(V)})_\# V\|(M)$ 对所有 $V \in A$ 和 $0 \leq s < t \leq \eta(V)$,

其中 $\{f^{X(V)}{}_t\}$ 是由 $X(V)$ 生成的等变微分同胚。于是定义

$$\begin{aligned} H : I \times \{T \in \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbf{F};\mathbb{Z}_2) : \mathbf{M}(T) \leq C\} &\to \{T \in \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbf{F};\mathbb{Z}_2) : \mathbf{M}(T) \leq C\}, \\ H(t,T) &:= \left(f^{X(|T|)}_{\eta(|T|)t}\right)_\# T. \end{aligned}$$

容易验证，对于所有满足 $\mathbf{M}(T) \leq C$的 $T \in \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$， $H(0,T) = T$，并且

- 若 $|T|$ 在 $M_{\frac{a}{2}}$中驻定，则对于所有 $t \in [0,1]$， $H(t,T) = T$；。
- 如果 $|T|$ 在$M_{\frac{a}{2}}$中不是驻定的，那么 $\mathbf{M}(H(1,T)) < \mathbf{M}(T)$。

定义 $\Phi_i := H(1,\Phi_i^*)$。注意， $X(V)$ 在 $\mathring{M}_{\frac{a}{2}}$ 中具有紧支撑，且 $f^{X}{}_{(V)t} \llcorner (M \setminus \mathring{M}_{\frac{a}{2}}) = id$。因此， Φ_i 也是 $(M,\partial M)$ 的一个 G-扫掠。除此之外，根据上述构造，很容易验证 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M;\partial M)$ 是一个在 F-拓扑下连续的极小极大序列，且 $\mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \mathbf{C}(\{\Phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}) \cap A_0$。此外，由命题 3.9 可得 $\mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \mathcal{V}_n^G(M_a) \cap A_0$，这意味着每个 $V \in \mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ 都在 M 中驻定。最后，由于变形 $f_t^{X}{}_{(V)}$ 被限制在 $\mathring{M}_{\frac{a}{2}}$ 中，最后一条直接由命题 3.9 和上述构造得出。□

最后，我们现在可以证明满足 (3.1) 的紧致流形 M带边界 ∂M 的等变极小极大定理。证明总体上采用 [20, 定理 3.8], 中的方法，下面列出一些必要的修改。

定理 3.11. 假设 $\partial M \neq \emptyset$ 满足 (3.1)，并且对所有 $p \in M$都有 $3 \leq \mathrm{codim}(G\cdot p) \leq 7$。则存在一个整 G-丛流 $V \in \mathcal{V}_n^G(M)$，使得 $\|V\|(M) = W^G(M,\partial M)$，并且$V = \sum_{i=1}^m n_i|\Sigma_i|$，其中 m、 $n_i \in \mathbb{N}$、 $\{\Sigma_i\}_{i=1}^m$ 是 M内部两两不交的光滑嵌入闭极小G-超曲面。

证明。设 $a > 0$和 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^G(M,\partial M)$由命题 3.10 给出，使得每个$V \in \mathbf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}})$在 M中都是驻定的，并且对于 $a_0 = \frac{a}{2}$，在 $\mathrm{int}(M_{a_0})$ 中具有紧支撑集。令

$\delta = \frac{1}{4}(W^G(M,\partial M) - \text{面积}(\partial M)) > 0$。然后通过重新参数化，我们假设 $\Phi_i\llcorner[0,\frac{1}{3}]$铺满了 ∂M 的一个邻域，使得

$$\mathbf{M}(\Phi_i(x)) \le \mathrm{Area}(\partial M) + \delta = W^G(M,\partial M) - 3\delta, \quad \forall x \in [0,1/3]. \tag{3.4}$$

记

$$\Phi_i' := \Phi_i\llcorner J.$$

根据定义 2.7，存在 $\eta_i \in (0,a_0)$，使得对所有 $x \in J$，$\mathrm{spt}(\Phi_i'(x)) \subset\subset M_{\eta_i}$。此外，由于映射 $x \mapsto \mathbf{M}(\Phi_i'(x))$ 连续（由 (2.1) 可知），我们可以取足够大的 $k_i \in \mathbb{N}$，使得对任意属于 $J(1,k_i)$ 同一个 1-胞腔的 x、y，都有 $|\mathbf{M}(\Phi_i'(x)) - \mathbf{M}(\Phi_i'(y))| \le \delta/4$。记 U_i 为 $\alpha \in J(1,k_i)_1$ 中 1- 胞腔的并，使得对所有 $x \in \alpha$，$\mathbf{M}(\Phi_i'(x)) \le W^G(M,\partial M) - 3\delta/4$，且 $V_i := J \setminus U_i$。因此，根据命题 3.10(iii)，我们有

$$\mathbf{M}(\Phi_i'(x)) \ge W^G(M,\partial M) - \delta, \quad \text{and} \quad \mathrm{spt}(\Phi_i'(x)) \subset M_{a_0}, \quad \forall x \in V_i.$$

根据引理2.3，我们可以将定理 3.4 应用于每个 Φ_i'，在 G-子流形 M_{η_i} 中得到一个映射序列 ϕ_j^i：$J(1,k_j^i)_0 \to \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\mathbb{Z}_2)$，满足 $k_j^i < k_{j+1}^i$, $j \in \mathbb{N}$。定理 3.4 的最后一条陈述表明，$\{\phi_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ 可以选取为使得 $\mathrm{spt}(\phi_j^i(x)) \subset M_{a_0}$ 对所有 $x \in V_i \cap J(1,k_j^i)_0$ 成立。此外，我们声称以下结果：

断言 1. 对于 j足够大，如果 $\mathbf{M}(\phi_j^i(x)) \ge W^G(M,\partial M) - \delta/2$则 $\mathrm{spt}(\phi_j^i(x)) \subset M_{a_0}$.

断言 1 的证明。由 $x \mapsto \mathbf{M}(\Phi_i'(x))$ 的连续性以及定理 3.4(ii)，若 $\mathbf{M}(\phi_j^i(x)) \ge W^G(M,\partial M) - \delta/2$，则对足够大的 j，有 $\mathbf{M}(\Phi_i'(x)) > W^G(M,\partial M) - 3\delta/4$。因此，这样的顶点 x 必须属于 V_i，故 $\mathrm{spt}(\phi_j^i(x)) \subset M_{a_0}$。□

此外，由于质量的下半连续性、$x \mapsto \mathbf{M}(\Phi_i'(x))$ 的连续性以及定理 3.4(ii)(iii)，我们还有以下等式：

$$\lim_{j\to\infty} \sup\{\mathbf{F}(\phi_j^i(x),\Phi_i'(x)) : x \in J(1,k_j^i)_0\} = 0. \tag{3.5}$$

令 Φ_j^i：$J \to \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\mathbf{M};\mathbb{Z}_2)$ 为定理 3.5 给出的 ϕ_j^i 的 Almgren G-扩张，其中 j 充分大。由推论 3.6，Φ_j^i 和 Φ_i' 在 $\mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\mathcal{F};\mathbb{Z}_2)$ 中相对同伦。因此，

$$\widetilde{\Phi}_i^j(x) := \begin{cases} \Phi_i(x), & x \in [0,1/3], \\ \Phi_i^j(x), & x \in J = [1/3,1], \end{cases}$$

对每个 $i \in \mathbb{N}$ 和充分大的 j，它都是 $(M,\partial M)$ 的良定义的 F-连续 G-扫掠，因此

$$\begin{aligned} W^G(M,\partial M) &\le \mathbf{L}(\{\widetilde{\Phi}_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}) = \mathbf{L}(\{\Phi_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}) \\ &= \mathbf{L}(\{\phi_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}) \le \sup\{\mathbf{M}(\Phi_i(x)) : x \in I\} \to W^G(M,\partial M), \end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (3.4) 和推论 3.6 得出。

现在，我们取一个子序列 $j(i) \to \infty$，并定义 $\widetilde{\Phi}_i = \widetilde{\Phi}_{j(i)}^i$, $S = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\varphi_i := \phi_{j(i)}^i$, 使得 $\mathbf{f}_{\mathbf{M}}(\varphi_i) \to 0$ 且

(1) $C_i\mathbf{f}_{\mathbf{M}}(\varphi_i) \to 0$当 $i \to \infty$时，其中 $C_i = C_0(M_{\eta_i},G,1)$ 由定理 3.5 给出；(2) 若 $\mathbf{M}(\varphi_i(x)) \ge W^G(M,\partial M) - \delta/2$，则 $\mathrm{spt}(\varphi_i(x)) \subset M_{a_0}$（由断言 1）；(3) $W^G(M,\partial M) = \mathbf{L}(\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}})$（由 (3.6)）；(4) $\lim_{i\to\infty} \sup\{\mathbf{F}(\varphi_i(x),\Phi_i(x)) : x \in J(1,k_{j(i)}^i)_0\} = 0$（由 (3.5)）；(5) $\lim_{i\to\infty} \sup\{\mathbf{F}(\Phi_i(x),\Phi_i(y)) : x,y \in \alpha, \alpha \in I(1,k_{j(i)}^i)\} = 0$（由 F-连续性）。

将 (3)(4)(5) 与 (3.4) 结合，可得 $\mathsf{C}(S) = \mathsf{C}(\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \subset \mathcal{V}_n^G(M_{2a_0})$，且每个 $V \in \mathsf{C}(S)$ 都在 M 中驻定。

断言 2. 存在 $V \in \mathsf{C}(S)$，它在环带中（边界型）按照 [34,Definition 11] 的意义是 $(G,\mathbb{Z}_2)$-几乎极小的。

断言 2 的证明. 假设所有 $V \in \mathsf{C}(S)$ 都不是按照 [34, Definition 11] 的意义在环带中 $(G,\mathbb{Z}_2)$-几乎极小的。那么存在一个新的映射序列 $S^* = \{\varphi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ of mappingsφ_i^*: $J(1,l_i)_0 \to \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\ \mathbb{Z}_2)$，其中某个 $l_i \geq k^i_{j(i)} \to \infty$as $i \to \infty$，使得

(i) $\mathbf{L}(S^*) < \mathbf{L}(S) = W^G(M,\partial M)$; (ii) φ_i and φ_i^*在 $\mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\ \mathbb{Z}_2)$ 中是 1-同伦的，且 M-细度趋于零，（具体而言，存在一个映射 ψ_i: $I(1,l_i)_0 \times J(1,l_i)_0 \to \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\ \mathbb{Z}_2)$，使得 $\mathbf{f_M}(\psi_i) \to 0$，当 $i\to\infty$, $\psi_i([0],\cdot) = \varphi_i \circ \mathbf{n}_i$ 时，且 $\psi_i([1],\cdot) = \varphi_i^*$，其中 $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}(l_i,\ k^i_{j(i)})$）；(iii) $\mathrm{spt}(\psi_i(t,x) - \varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)) \subset\subset M_{a_0}$，对任意 $t \in I(1,l_i)_0$和 $x \in J(1,l_i)_0$; (iv) 对任意 $x \in J(1,l_i)_0$,，若 $\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)) < W^G(M,\partial M) - \delta/4$，则 $\psi_i(\cdot,x) \equiv \varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)$ 是在 x 处的常值离散同伦。

事实上，由于每个 $V \in \mathsf{C}(S)$的支撑集都包含于 M_{2a_0} 中，我们可以取 G-环带 $\{\mathbf{An}^G(p(V)\ r_i - s_i,\ r_i + s_i)\}_{i=1}^{27}$ 于 M_{a_0} 中，如 [27, 定理 4.10、部分 1], 所示，这意味着所有变形都将限制在 M_{a_0} 中。利用 [35, 定理 3.14] 以及 $\mathrm{dist}_M(G\cdot p,\cdot)$，我们可以在 [27, 定理 4.10、部分2-9] 中使用 G-不变对象进行构造。然后，[27, 定理4.10] 中的其余部分纯粹是组合的，将 M_{a_0} 替换为 M 后仍然成立。这就得到(i)-(iii)。此外，通过取 [27, 中 ϵ_2 定理4.10、部分 3] 的常数小于 $\delta/8$，当 $\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)) < W^G(M,\partial M) - \delta/4$时，我们有 $\psi_i(\cdot,x) \equiv \varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)$（参见 [27,定理 4.10] 中的第 10(c)、14 和 18 部分）。

接下来，我们可以将 $\Phi_i = \mathbf{P}(M,\partial M,\varphi_i$使得对于较大的 i）扩展为一个 $\mathbf{B}$-连续映射 $\Phi_i \llcorner [0,1/3] = \Phi_i \llcorner [0,1/3]$。实际上，任取一个 1-胞腔 $\alpha = [x_0,x_1] \in J(1,l_i)_1$,，我们将在两种情况下分别构造延拓 $\Phi_i^* \llcorner \alpha$。

情形 1：$\max\{\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x_0)),\ \mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x_1))\} < W^G(M,\partial M) - \delta/4$。

由(ii)(iv)作为边界，我们可以定义 $\widetilde{\Phi}_i^*$其中 f_α: $\alpha = [x_0,x_1] \to [\mathbf{n}_i(x_0),\ \mathbf{n}_i(x_1)]$ 是一个仿射变换。因此，在这种情况下，我们有

$$\widetilde{\Phi}_i^* \llcorner \alpha \subset \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\mathbb{Z}_2), \quad \text{and} \quad \widetilde{\Phi}_i^*(x) = \widetilde{\Phi}_i(\mathbf{n}_i(x))\ \forall x \in \alpha_0 = \{x_0,x_1\}. \tag{3.7}$$

特别地，$\widetilde{\Phi}_i^*(1) = \widetilde{\Phi}_i(1) = 0$假设 $\mathbf{f_M}(\psi_i) < W^G(M,\partial M) - \delta/4$，这对$i$-大的情形成立。此外，由 (1)、定理 3.5(i)(iii) 以及 α 的选择可得

$$\begin{aligned} \sup\{\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}_i^*(x)) : x \in \alpha\} &= \sup\{\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}_i(x)) : x \in f_\alpha(\alpha)\} \\ &\leq \sup\{\mathbf{M}(\varphi_i(x)) : x \in \partial f_\alpha(\alpha)\} + C_i \mathbf{f_M}(\varphi_i) \\ &< W^G(M,\partial M) - \delta/4 + C_i \mathbf{f_M}(\varphi_i) \\ &\leq W^G(M,\partial M) - \delta/5, \quad \text{for } i\text{-large}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，$C_i = C_0(M_{\eta_i},G,1)$ 由定理 3.5 给出。

情形 2：$\max\{\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x_0)),\ \mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x_1))\} \geq W^G(M,\partial M) - \delta/4$。

记 $A_i \subset J$为该情形中 $J(1,l_i)_1$内所有 1-胞腔的并集。取 i充分大，使得 $\mathbf{f_M}(\psi_i) < \delta/4$（由(ii)）。于是，对于所有$x \in J(1,l_i)_0 \cap A_i$，$\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)) \geq W^G(M,\partial M) - \delta/2$。由 (2) 和 (iii)，我们有 $\varphi_i^*(x) = \psi_i^*([1],x)$对所有$x \in J(1,l_i)_0 \cap A_i$都支撑在 M_{a_0}中。将定理3.5应用于 $\varphi_i^* \llcorner [J(1,l_i)_0 \cap A_i]$，在 M_{a_0}中（对 i-大），将得到

一个 M-连续延拓 $\widetilde{\Phi}_i^*$: $A_i \to \mathcal{Z}_n^G(M_{a_0};\ \mathbb{Z}_2)$，使得

$$\sup\{\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}_i^*(x)) : x \in A_i\} \le \sup\{\mathbf{M}(\varphi_i^*(x)) : x \in J(1,l_i)_0 \cap A_i\} + C_0\mathbf{f}_{\mathbf{M}}(\psi_i), \tag{3.9}$$

其中 $C_0 = C_0(M_{a_0}, G, 1) \ge 1$ 是一个一致常数。注意，对于任意 $x \in \partial A_i$，必有 $\mathbf{M}(\varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x)) < W^G(M,\partial M) - \delta/4$。因此，根据 (iv) 和定理 3.5(i),

$$\widetilde{\Phi}_i^*(x) = \varphi_i^*(x) = \varphi_i \circ \mathbf{n}_i(x) = \widetilde{\Phi}_i(\mathbf{n}_i(x)) \quad \forall x \in \partial A_i. \tag{3.10}$$

由 (3.7)(3.10) 立即可知，$\widetilde{\Phi}_i^*$: $I \to \mathcal{Z}_n^G(M;\ \mathbb{Z}_2)$ 是一个定义良好的 F-连续映射，使得 $\widetilde{\Phi}_i^*\llcorner[0,1/3] = \widetilde{\Phi}_{i\llcorner}[0,1/3] = \Phi_{i\llcorner}[0,1/3]$, $\widetilde{\Phi}_i^*(1) = 0$，且 $\widetilde{\Phi}_i^*\llcorner J \subset \mathcal{Z}_n^G(M_{\eta_i};\ \mathbb{Z}_2)$，这意味着 $\widetilde{\Phi}_i^* \in \mathcal{P}^G(M,\partial M)$。因此，根据 (3.4)(3.8)(3.9)(i)(ii),

$$W^G(M,\partial M) \le \mathbf{L}(\{\widetilde{\Phi}_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}) \le \max\{W^G(M,\partial M) - \delta/5,\ \mathbf{L}(\{\varphi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}})\} < W^G(M,\partial M),$$

这就产生了矛盾。 □

因此，必定存在 $V \in \mathbf{C}(S)$，按照 [34, 定义 11]的意义，它在（边界型）环带中是（G, $\mathbb{Z}_2$）-几乎极小的。由于 $\mathbf{C}(S) \subset \mathcal{V}_n^G(M_{2a_0})$，内部正则性结果 [34, 定理 7] （在 [36, 定理 4.18] 中作了修改）表明， V 是由闭光滑嵌入极小 G- 超曲面所诱导的整数 G- 变分流。□

4. G-sweepouts in positive Ricci curvature G-manifolds

本节中，我们始终假设 (M^{n+1}, g_M) 是一个正里奇曲率 $\mathrm{Ric}_M > 0$ 的闭连通可定向黎曼流形，并且 G 是一个在M上等距作用的紧李群，使得对于所有 $p \in M$，均有 $3 \le$ 余维 $(G\cdot p) \le 7$。我们的目标是为 M中的每个闭极小 G-超曲面关联一个 F-连续的 G-扫掠族。

首先，我们汇总一些关于极小超曲面的记号和经典结果。设 $\Sigma \subset M$ 是一个闭的光滑嵌入极小超曲面。回顾一下，面积泛函的 Σ 二阶变分为

$$\delta^2\Sigma(X) := \frac{d^2}{d^2t}\Big|_{t=0}\mathrm{Area}(F_t(\Sigma)) = -\int_\Sigma \langle L_\Sigma(X^\perp), X^\perp\rangle, \tag{4.1}$$

其中， L_Σ : $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma) \to \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ 是 Σ 的 Jacobi 算子， $\{F_t\}$ 是由 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 生成的微分同胚。于是我们记为

Index(Σ): Σ 的莫尔斯指标，即 L_Σ 的负特征值（按重数计）的数量；

- $\mu_1(\Sigma)$: L_Σ的第一特征值。

如果 $\mathrm{Index}(\Sigma) = 0$，或者等价地， $\mu_1(\Sigma) \ge 0$，那么我们称 Σ 是稳定的。

对于 $\Sigma \subset M$ 是 G-不变极小超曲面的情况，对于所有 $X \in \mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$，我们有 $L_\Sigma(X) \in \mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$，其中 $\mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$ 是 Σ 上的法向 G-向量场空间。将 L_Σ 限制在 $\mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$ 上，我们作如下定义：

定义 4.1。设 $\Sigma \subset M$ 是一个闭的光滑嵌入极小 G-超曲面。等变莫尔斯指标（或为简便起见称为 G-指标）$\mathrm{Index}_G(\Sigma)$ 定义为 $L_{\Sigma\llcorner}\mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$ 的负特征值（按重数计）的数量。此外，我们将 $\mu_1^G(\Sigma)$ 记为 $L_{\Sigma\llcorner}\mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$ 的第一特征值。

假设 Σ 是一个闭的极小 G-超曲面，具有一个 G-不变的单位法向量 ν，且 u_1是 L_Σ的第一特征函数。那么，对于任意 $g \in G$， Σ 和 ν 的 G-不变性表明，$u_1 \circ g$ 也是 L_Σ的第一特征函数。众所周知，$\mu_1(\Sigma)$的重数为一

并且第一特征函数 u_1 不变号。因此，对于所有 $g \in G$，$u_1 \circ g = u_1$，这意味着 $u_1\nu \in \mathfrak{X}^{\perp,\,G}(\Sigma)$ 以及以下引理：

引理 4.2. 若 Σ 是闭的极小 G-超曲面，且具有一个 G-不变的单位法向量 ν，则 L_Σ 的第一特征函数 $u_1 > 0$ 是 G-不变的，并且 $\mu_1(\Sigma) = \mu_1^G(\Sigma)$。

由于我们主要考虑具有正里奇曲率的环境流形，因此收集以下专家们熟知的有用结果（参见 [40, 第 2] 节）。

引理 4.3. 假设 (M^{n+1}, g_M) 是一个闭连通可定向黎曼流形。设 $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset M$ 是闭的嵌入超曲面，则有

(i) 若 Σ 连通，则 Σ 可定向当且仅当它是双侧的（即 Σ 具有单位法向量场）；
(ii) 若 Σ 连通且分离 M，即 $M \setminus \Sigma$ 有两个连通分支，则 Σ 可定向。

此外，假设 M 具有正里奇曲率。那么我们有

(iii) 如果 Σ 连通且可定向，则 Σ 将 M 分隔开；(iv) 如果 Σ 是极小且双侧的，则它不可能稳定，即 $\mu_1(\Sigma) < 0$；(v) 如果 Σ_1, Σ_2 是极小超曲面，则 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$；

考虑 G的作用后，某个 G-超曲面 Σ 的一个连通分支可能不是 G-不变的。因此，我们引入以下等变连通性的概念。

定义 4.4. 设 $U \subset M$ 是一个 G-不变子集，其连通分支为 $\{U_i\}_{i=1}^m$。那么，如果对于任意 i、$j \in \{1, \cdots, m\}$，都存在 $g_{ij} \in G$ 使得 $g_{ij} \cdot U_j = U_i$，我们称 U 是 G-连通的。此外，如果 U' 具有 $\cup_{j=1}^l U_{i(j)}$ 的形式且是 G-连通的，我们称 $U' \subset U$ 是 U 的一个 G-连通分支（为简便起见，也称为 G-分支）。

注意，任意 G-子集 U of M 都可以分解为若干个 G-连通分支。此外，根据上述命题，很容易证明以下结果：

引理 4.5. 假设 (M^{n+1}, g_M) 是一个具有正里奇曲率的闭连通可定向黎曼流形，且 G 是一个等距作用于 M 上的紧李群。设 $\Sigma \subset M$ 是一个闭嵌入极小 G-超曲面。那么 Σ 是连通的，并且

- 若 Σ 具有一个 G-不变的单位法向量，则 Σ 将 M 分成两个 G-连通分支 $ts.$
- 若 Σ 不存在 G-不变的单位法向量，则 $M \setminus \Sigma$ 是 G-连通的。

证明。由引理 4.3(v) 可知 Σ 是连通的。若 Σ 具有一个 G-不变的单位法向量 ν，则由引理 4.3(i)(iii)，$M \setminus \Sigma$ 有两个连通分支 M_1、M_2，其中 ν 指向 M_1 内部。由于 ν 和 $M_1 \cup M_2$ 是 G- 不变的，对于所有 $g \in G$ 和 $i \in \{1, 2\}$，都有 $g_*\nu = \nu$ 和 $g \cdot M_i = M_i$，这表明每个 M_i 都是 G-连通的。若单位法向量 ν 存在但不是 G-不变的，则存在 $g \in G$，使得 $g_*\nu = -\nu$ 指向 M_2 内部，这意味着 $g \cdot M_1 = M_2$，因此 $M_1 \cup M_2$ 是 G-连通的。若 Σ 不存在单位法向量，则 $M \setminus \Sigma$ 只有一个连通分支，且该分支也是 G-连通的。□

回顾一下，在 [39], Zhou 构造了 M 的扫掠，将其分为可定向和不可定向极小超曲面。由 [39, 引理3.3] 可知，连通闭超曲面的可定向性等价于其单位法丛的不连通性。因此，在纳入 G的作用后，我们将根据极小 G-超曲面的单位法丛的G-连通性（定义 4.4）来区分这些构造。

因此，我们记

$$\mathcal{S}^G(M) := \left\{ \Sigma^n \subset M^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Sigma \text{ is a closed smooth embedded} \\ \text{minimal } G\text{-hypersurface in } (M, g_M) \end{array} \right\}. \tag{4.2}$$

By 定理 3.8, $\mathcal{S}^G(M) \neq \emptyset$若 $3 \leq$余维$(G \cdot p) \leq 7, \forall p \in M$。定义该 n

$$\mathcal{S}^G_+(M) := \{\Sigma \in \mathcal{S}^G(M) : \Sigma \text{ has a } G\text{-invariant unit normal}\},$$

以及 $\mathcal{S}^G_-(M) := \mathcal{S}^G(M) \setminus \mathcal{S}^G_+(M)$。由引理 4.5 可直接得到

$$\Sigma \in \mathcal{S}^G_-(M) \;\Leftrightarrow\; S\Sigma \text{ is } G\text{-connected} \;\Leftrightarrow\; M \setminus \Sigma \text{ is } G\text{-connected},$$

其中 $S\Sigma = \{v \in \mathrm{N}\Sigma\colon |v| = 1\}$ 是 Σ的单位法丛。

此外，对于任意 $\Sigma \in \mathcal{S}^G_-(M)$，我们可以沿着 Σ切割 M，从而得到一个新的流形 $\widetilde{M}$，使得 $\widetilde{M}$在局部与 M等距， G通过等距变换作用于 $\widetilde{M}$，并且 $\partial\widetilde{M} \in \mathcal{S}^G_+(\widetilde{M})$是$G$-不变的 Σ 的双覆盖。具体而言，令 $r > 0$ 足够小，使得法指数映射$\exp^\perp_\Sigma : \mathrm{N}\Sigma \to M$ 在 $B_{2r}(\Sigma) := \{p \in M\colon \mathrm{dist}_M(\Sigma, p) < 2r\}$上是一个 G-等变微分同胚。因此，我们有

$$E : S\Sigma \times (-2r, 2r) \to B_r(\Sigma), \qquad E(v,t) := \exp^\perp_\Sigma(t \cdot v) \tag{4.3}$$

是 $B_{2r}(\Sigma)$ 的双覆盖。定义 G 在 $S\Sigma \times (-2r, 2r)$ 上的作用为 $g \cdot (v,t) := (g_* v, t)$，其中任意 $v \in S\Sigma$ 和 $t \in (-2r, 2r)$，这表明 E 是 G-等变的，并且

$$\widetilde{\Sigma} = S\Sigma \times \{0\} \tag{4.4}$$

是 G-等变的 Σ 的双覆盖。设 $E_r := E\llcorner(S\Sigma \times (r, 2r))$ 是定义在 $B_{2r}(\Sigma) \setminus \mathrm{Clos}(B_r(\Sigma))$ 上的 G-等变微分同胚。于是，通过将 $M \setminus \mathrm{Clos}(B_r(\Sigma)$ 和 $S\Sigma \times [0, 2r)$ 在 $B_{2r}(\Sigma) \setminus \mathrm{Clos}(B_r(\Sigma))$ 上沿着 E_r 粘合，我们可以定义

$$\widetilde{M} := \big(M \setminus \mathrm{Clos}(B_r(\Sigma))\big) \cup_{E_r} \big(S\Sigma \times [0, 2r)\big), \tag{4.5}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$作为一个带边紧流形 $\partial M = \Sigma$。于是我们有

$$F : \widetilde{M} \to M, \qquad F := \begin{cases} id, & \text{in } M \setminus \mathrm{Clos}(B_r(\Sigma)), \\ E, & \text{in } S\Sigma \times [0, 2r), \end{cases} \tag{4.6}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$是一个 G-等变光滑映射，使得 $F\llcorner(M \setminus \Sigma)$ 给出到 $M \setminus \Sigma$ 的微分同胚，而 $F\llcorner\widetilde{\Sigma}$ 给出 Σ 的双覆盖。利用 F，我们可以将 g_M 上的度量从 M 拉回到 M，使得 $\sim$ $\sim F$ 是一个局部等距，并且 G 通过等距变换作用于 M 上。因此， Σ 是 $\widetilde{M}$ 中带有指向内部的 G-不变单位法向量的极小 G-超曲面。特别地， $\Sigma \in \mathcal{S}^G_-(M)$ 蕴含 $\sim S\Sigma$ 和 $M \setminus \Sigma$ 都是 G-连通的，从而 M 是 G-连通的。

4.1. G-扫掠对应于 $\Sigma \in \mathcal{S}^G(M)$。

命题 4.6. 给定任意 $\Sigma \in \mathcal{S}^G_+(M)$，存在一个 F-连续的 G-扫掠 $\Phi : [-1, 1] \to \mathcal{Z}^G_n(M; \mathbb{Z}_2)$，使得 M从而

(i) $\Phi(0) = [[\Sigma]]$, $\Phi(-1) = \Phi(1) = 0$;
(ii) $\mathbf{M}(\Phi(x)) \leq \mathrm{Area}(\Sigma)$ *with equality only if* $x = 0$.

证明。根据引理 4.5， $M \setminus \Sigma$ 有两个 G-分支 M_1 和 M_2，使得单位法向量ν 的 Σ 指向内部 M_1。此外，由引理4.2 和4.3可知， L_Σ 的第一特征函数 $u_1 > 0$ 是一个 G-不变函数，满足 $L_\Sigma u_1 = -\mu_1(\Sigma) u_1 > 0$。

将 $d_\pm$ 记为到 Σ 的带符号距离函数，使得 $d_\pm = \mathrm{dist}_M(\Sigma, \cdot)$在 M_1中，且$d_\pm = -\mathrm{dist}_M(\Sigma, \cdot)$在 M_2 中。令 $X \in \mathfrak{x}^G(M)$为一个 G-向量场，满足 $X = (u_1 \circ n_\Sigma) \cdot \nabla d_\pm$

在 Σ 的邻域内，其中 n_Σ 是（在 M 中）到 Σ的最近投影。然后我们考虑 G-等变变分 $\{\Sigma_t := F_t(\Sigma)\}_{t\in[-r,r]}$，其作用于 Σ，其中 $\{F_t\}$是由 X 生成的 G-等变微分同胚。根据二次变分公式 (4.1)，我们有

$$\delta^2\Sigma(X) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Area}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma u_1 L_\Sigma u_1 < 0, \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \vec{H}_{\Sigma_t}, \nabla d_\pm\rangle = L_\Sigma u_1 > 0,$$

w 这里$\vec{H}_{\Sigma_t}$ 是 Σ_t的平均曲率向量场。因此，对于足够小的 $r>0$ h,

$$\mathrm{Area}(\Sigma_t) < \mathrm{Area}(\Sigma) \quad \text{and} \quad \langle \vec{H}_{\Sigma_t}, \nabla \,\mathrm{dist}_M(\Sigma,\cdot)\rangle > 0, \quad \text{for all } t\in[-r,0)\cup(0,r].$$

定义 $\Phi(x) := [[\Sigma_x]] = (F_x)_\#[[\Sigma]] \in \mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$ 对于 $x\in[-r,r]$，其为 F-连续。

由于 $u_1>0$, $\{\Sigma_t\}_{t\in[-r,r]}$ 是 Σ的一个 G-邻域的光滑叶状结构，且对于 $t>0$，$\Sigma_t\subset M_1$；对于 $t<0$，$\Sigma_t\subset M_2$。现在我们考虑紧流形 $M_1' := M_1\setminus\{\Sigma_t\}_{t\in[0,r)}$和 $M_2' := M_2\setminus\{\Sigma_t\}_{t\in(-r,0]}$，其边界 $\partial M_i' = \Sigma_{r_i}$，（$i\in\{1,2\}$, $r_1=r$, $r_2=-r$），是一个 G-超曲面，具有指向内侧 M_i'的正平均曲率。

假设 $W^G(M_i',\partial M_i') >$面积$(\Sigma_{r_i})$。那么根据定理3.11，存在一个位于 M_i'内部的闭的极小 G-超曲面 Σ'。注意到 $\Sigma\cap\Sigma'=\emptyset$，由引理 4.3(v)得到矛盾。因此，$W^G(M_i',\partial M_i') \le$面积$(\Sigma_{r_i})$。根据定义 2.7和推论 3.7，存在足够小的 $\epsilon>0$ 以及一个 F-连续的 G-扫掠 $\Phi_i:[0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M_i;\mathbb{Z}_2)$，使得 $\Phi_i(0) = [[\Sigma_{r_i}]]$、$\Phi_i(1)=0$，并且

$$\sup\{\mathbf{M}(\Phi_i(x)) : x\in[0,1]\} \le W^G(M_i',\partial M_i') + \epsilon \le \mathrm{Area}(\Sigma_{r_i}) + \epsilon < \mathrm{Area}(\Sigma).$$

Finally，经重新参数化，我们有一个良定义的映射 $\Phi:[-1,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Phi_2(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}), & x\in[-1,-\frac{1}{3}],\\ (F_{3rx})_\#[[\Sigma]], & x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}],\\ \Phi_1(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}), & x\in[\frac{1}{3},1],\end{cases}$$

在满足 (i) 和 (ii) 的 F-拓扑中连续。此外，定义 2.4 和 2.7 之前的论证表明 $F_M(\Phi) = [[M_2]]+[[M_1]] = [[M]]$，其中 F_M由 (2.5) 给出。因此，我们有 $\Phi\in\mathcal{P}^G(M)$。□

命题 4.7。给定任意 $\Sigma\in\mathcal{S}^G(M)$，存在一个 $\mathcal{F}$-连续的 G-sweepout $\Phi:[0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(M;\mathbb{Z}_2)$，其对应的 M轨道上无质量集中，使得

(i) $\Phi(0)=\Phi(1)=0$; (ii) $\sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x\in[0,1]\} <$ 2 面积 (Σ)。

~ ~ ~ ~证明。令$\Sigma = S\Sigma\times\{0\}$ 和 M 由 (4.4)(4.5)给出。则 M 是 G-连通的，面积$(\Sigma) =$ ~ ~2面积(Σ)，且 Σ 具有一个 G-不变的单位法向量 $\tilde{\nu}$，指向内部 M。令 $\tau:\Sigma\to\Sigma$ 为等距对合，即对于 $v\in S\Sigma$，$\tau(v,0) = (-v,0)$。

使用命题 4.6 中的构造，并以 $\widetilde{M}$ 代替 M_1，我们得到一个F-连续的G-扫掠族 $\widetilde{\Phi}:[0,1]\to\mathcal{Z}_n^G(\widetilde{M};\mathbb{Z}_2)$，使得 $\widetilde{\Phi}(0) = [[\widetilde{\Sigma}]]$、$\widetilde{\Phi}(1)=0$，且对所有 $x\in[0,1]$，$\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}(x)) \le 2\mathrm{Area}(\Sigma)$，等号仅在 $x=0$ 处成立。此外，对于 $t\in[0,1/3]$, $\widetilde{\Phi}(t) = \widetilde{\Sigma}_t := [[\exp^\perp_{\widetilde{\Sigma}}(t\tilde{u}\tilde{\nu})]]$，，其中 $\tilde{u} = 3tr\tilde{u}_1$，且 $\tilde{u}_1:\widetilde{\Sigma}\to\mathbb{R}^+$ 是 $L_{\widetilde{\Sigma}}$ 的 G-不变第一特征函数，其特征值为 $\mu_1(\widetilde{\Sigma}) = \mu_1^G(\widetilde{\Sigma}) < 0$。

现在，根据二次变分公式 (4.1)，存在 $\delta_0\in(0,1/3)$ 和 $C_0>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}(t)) = \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}_t) &= \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - \frac{t^2}{2}\int_{\widetilde{\Sigma}}\langle L_{\widetilde{\Sigma}}\tilde{u}\tilde{\nu},\tilde{u}\tilde{\nu}\rangle + O(t^3)\\ &\le \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - C_0t^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

对于所有 $t \in (0, \delta_0)$。对于任意 $\delta \in (0, \delta_0)$（稍后将具体指定），Φ 的 F-连续性和命题 4.6(ii) 表明 $\epsilon > 0$ 的存在，使得

$$\mathbf{M}(\widetilde{\Phi}(t)) \leq \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - \epsilon, \qquad \forall t \in [\delta, 1]. \tag{4.8}$$

现在，我们将在某个轨道处打开 Σ_t, $t \in [0, \delta]$，以减小面积。

具体而言，根据 $\widetilde{M}^{prin}$ 的 G-不变性以及命题 2.2.2, $G \cdot \tilde{p} \subset \widetilde{M}^{prin}$ 也是 $\widetilde{M}$ 中的一个主轨道。注意，要么 $G \cdot \tilde{p} = G \cdot \tau(\tilde{p})$，要么 $G \cdot \tilde{p} \cap G \cdot \tau(\tilde{p}) = \emptyset$。因此，我们可以定义 $P := G \cdot \tilde{p} \cup G \cdot \tau(\tilde{p})$ 为 Σ 中维数为 $n - l$ 的一个 G- 不变子流形。根据假设，$3 \leq$ 余维 $(G \cdot \tilde{p}) = l + 1 \leq 7$。

情形 1：$3 \leq l \leq 6$。对于任意的 $r > 0, t \in [0, \delta]$，我们定义以下 G-不变集：

- $\widetilde{B}_r(P) := \{\tilde{q} \in \widetilde{\Sigma} : \mathrm{dist}_{\widetilde{\Sigma}}(\tilde{q}, P) < r\} \subset \widetilde{\Sigma}$;
- $\widetilde{B}_{r,t}(P) := \{\exp^{\perp}_{\widetilde{\Sigma}}\left((t\tilde{u}\tilde{\nu})(\tilde{q})\right) : \tilde{q} \in \widetilde{B}_r(P)\} \subset \widetilde{\Sigma}_t$;
- $\widetilde{C}_{r,t}(P) := \{\exp^{\perp}_{\widetilde{\Sigma}}\left((s\tilde{u}\tilde{\nu})(\tilde{q})\right) : \tilde{q} \in \widetilde{B}_r(P), s \in [0, t]\}$.

于是，当 $R, \delta > 0$ 充分小时，由 [35, (C.4)] 中的积分公式可得

$$ctr^{l-1} \leq \mathcal{H}^n(\widetilde{C}_{r,t}(P)) \leq Ctr^{l-1} \quad \text{and} \quad cr^l \leq \mathcal{H}^n(\widetilde{B}_{r,t}(P)) \leq Cr^l, \tag{4.9}$$

对所有 $r \in [0, R], t \in [0, \delta]$ 均成立，其中 $c, C > 0$ 是依赖于 Σ, M, P 的常数。定义

$$\widetilde{\Sigma}_{r,t} := \left(\widetilde{\Sigma}_t \setminus \widetilde{B}_{r,t}(P)\right) \cup \widetilde{C}_{r,t}(P) \cup \widetilde{B}_r(P), \quad r \in [0, R], t \in [0, \delta].$$

由 (4.7)(4.9), $\|\widetilde{\Sigma}_{r,\ t}\|(\widetilde{M} \setminus \widetilde{\Sigma}) \leq \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - C_0 t^2 - cr^l + Ctr^{l-1}$。

注意本情形下的 $Ctr^{l-1} \leq \frac{C_0}{2}t^2 + \frac{2C}{C_0}r^{2l-2}$ 和 $l \geq 3$。我们可以取充分小的 $R > 0$，使得 $\frac{2C}{C_0}R^{l-2} < \frac{c}{2}$。因此，

$$\|\widetilde{\Sigma}_{r,t}\|(\widetilde{M} \setminus \widetilde{\Sigma}) \leq \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - \frac{C_0}{2}t^2 - \frac{c}{2}r^l,$$

对所有 $t \in [0, \delta], r \in [0, R]$ 均成立，并且

$$\widetilde{\Sigma}'_t := \begin{cases} \widetilde{\Sigma}_{R,2t} & t \in [0, \frac{\delta}{2}], \\ \widetilde{\Sigma}_{2R(1-t/\delta),\delta} & t \in [\frac{\delta}{2}, \delta], \end{cases} \qquad \|\widetilde{\Sigma}'_t\|(\widetilde{M} \setminus \widetilde{\Sigma}) \leq \begin{cases} \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - cR^l/2 & t \in [0, \frac{\delta}{2}], \\ \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}) - C_0\delta^2/2 & t \in [\frac{\delta}{2}, \delta]. \end{cases}$$

且 $\epsilon' := \min\{\epsilon, cR^l/2, C_0\delta^2/2\}$ 并定义 $\widetilde{\Phi}'(t) := [[\widetilde{\Sigma}'_t]]$ 对于 $t \in [0, \delta]$ 在此情况下。

情形 2：$[0, 1] = \Sigma$ 为由 G-不变对数截断距离定义的令 $\eta_{r,R}$：

$$\eta_{r,R}(\tilde{q}) := \begin{cases} 1 & \tilde{q} \notin \widetilde{B}_R(P), \\ (\log r - \log(\mathrm{dist}_{\widetilde{\Sigma}}(\tilde{q}, P)))/(\log r - \log R) & \tilde{q} \in \widetilde{B}_R(P) \setminus \widetilde{B}_r(P), \\ 0 & \tilde{q} \in \widetilde{B}_r(P), \end{cases}$$

其同样是 τ-不变的。考虑

$$\widetilde{\Sigma}_{r,R,t} := \exp^{\perp}_{\widetilde{\Sigma}}(t\eta_{r,R}\tilde{u}\tilde{\nu}).$$

By [15,命题 2.5] 和 [35, (C.4)], 我们可以取 $R,\delta>0$ 足够小，使得

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Sigma}_{r,R,t}\|(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Sigma}) &\le \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}\setminus\widetilde{B}_r(P))+\frac{t^2}{2}\int_{\widetilde{\Sigma}}|\nabla(\eta_{r,R}\tilde{u})|^2-(\mathrm{Ric}(\tilde{\nu},\tilde{\nu})+|A|^2)(\eta_{r,R}\tilde{u})^2\\ &\quad+Ct^3\int_{\widetilde{\Sigma}}1+|\nabla(\eta_{r,R}\tilde{u})|^2\\ &\le \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma}\setminus\widetilde{B}_r(P))-C_1t^2+C_2t^2\int_{\widetilde{\Sigma}}|\nabla\eta_{r,R}|^2+t^2\int_{\widetilde{B}_R(P)}\tilde{u}\eta_{r,R}\nabla\tilde{u}\nabla\eta_{r,R}\\ &\quad+Ct^3\int_{\widetilde{\Sigma}}1+2\eta_{r,R}^2|\nabla\tilde{u}|^2+2\tilde{u}^2|\nabla\eta_{r,R}|^2\\ &\le \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-cr^2-C_1t^2+\frac{C_3}{\log(R/r)}t^2+C_4R^2t^2+C_5t^3+\frac{C_6}{\log(R/r)}t^3,\end{aligned}$$

对所有 $r\in(0,R)$ $t\in[0,\delta]$均成立，其中 c、C、$C_i>0$是取决于 Σ、M、P的一致常数。将 R、$\delta>0$ 取得更小，使得 $C_4R^2<C_1/4$、$C_5\delta<C_1/4$，且 $C_6\delta<C_3$。然后将$r>0$ 取得足够小，使得 $\frac{2C_3}{\log(R/r)}<\frac{C_1}{4}$。于是，

$$\|\widetilde{\Sigma}_{r,R,t}\|(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Sigma})\le\mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-cr^2-\frac{C_1}{2}t^2+\frac{2C_3}{\log(R/r)}t^2\le\mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-cr^2-\frac{C_1}{4}t^2$$

对所有 $t\in[0,\delta]$均成立，且

$$\widetilde{\Sigma}'_t:=\begin{cases}\widetilde{\Sigma}_{r,R,2t} & t\in[0,\frac{\delta}{2}],\\ \widetilde{\Sigma}_{2r(1-t/\delta),2R(1-t/\delta),\delta} & t\in[\frac{\delta}{2},\delta],\end{cases}\qquad \|\widetilde{\Sigma}'_t\|(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Sigma})\le\begin{cases}\mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-cr^2 & t\in[0,\frac{\delta}{2}],\\ \mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-C_1\delta^2/4 & t\in[\frac{\delta}{2},\delta].\end{cases}$$

在此情形下，令 $\epsilon':=\min\{\epsilon,cr^2,C_1\delta^2/4\}$，并定义 $\widetilde{\Phi}'(t):=[[\widetilde{\Sigma}'_t]]$，其中 $t\in[0,\delta]$.

在这两种情形下，我们定义 $\Phi'\llcorner[\delta,1]=\Phi\llcorner[\delta,1]$，并得到

$$\sup\{\|\widetilde{\Phi}'(t)\|(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Sigma}):t\in[0,1]\}\le\mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-\epsilon'. \tag{4.10}$$

此外，根据（2.1），Φ' 仍然是一个 F-连续映射，且 $\Phi'=[[\Sigma]]$、$\Phi'(1)=0$。

最后，我们定义 (4.6) 给出的等变，对所有局部等距映射，由于 $F:\widetilde{M}\setminus\Sigma\to M\setminus\Sigma$ 是等变等距映射，定义 2.4 和 2.7 之前的论证表明，$F_M(\Phi)=F_\#([[M]])=M$，其中 F_M由 (2.5) 给出。此外，注意到 $F:\Sigma\to\Sigma$ 是双覆盖，并且在两种情况下，$\Sigma'_t\cap\Sigma$ 均为 τ-不变的。因此，根据 $\mathbb{Z}_2$-系数和 (4.10)，我们有 $\Phi(0)=F_\#[[\Sigma]]=0$，并且

$$\mathbf{M}(\Phi(x))=\|\widetilde{\Phi}'(t)\|(\widetilde{M}\setminus\widetilde{\Sigma})\le\mathcal{H}^n(\widetilde{\Sigma})-\epsilon'=2\mathrm{Area}(\Sigma)-\epsilon'.$$

最后，由于对所有 $x\in[0,1]$、$p\in M$，$\|\Phi(x)\|(B_r^G(p))\le\|\widetilde{\Phi}'(x)\|(F^{-1}(B_r^G(p)))\le2\mathrm{m}^G(\Phi',r)$，可知 $\mathrm{m}^G(\Phi,r)\le2\mathrm{m}^G(\widetilde{\Phi}',r)$，且 Φ 在轨道上无质量集中。□

5. Proof of the main theorems

设 $\mathcal{S}^G(M)$ 如（4.2）所示。于是我们定义

$$\mathcal{A}^G(M):=\inf_{\Sigma\in\mathcal{S}^G(M)}\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{Area}(\Sigma), & \text{if } \Sigma\in\mathcal{S}^G_+(M)\\ 2\mathrm{Area}(\Sigma), & \text{if } \Sigma\in\mathcal{S}^G_-(M)\end{array}\right\}. \tag{5.1}$$

定理5.1。设(M^{n+1}, g_M) 是一个具有正里奇曲率的闭连通可定向黎曼流形，且 G 是一个紧李群，在 M 上等距地作用，使得对于所有 $p \in M$， $3 \leq \text{codim}(G\cdot p) \leq 7$ 。那么，与基本类 $[M]$ 相对应的等变极小-极大超曲面 Σ 是一个连通的极小 G-超曲面，重数为一，并具有一个 G-不变的单位法向量场，使得

$$\text{Index}_G(\Sigma) = 1 \quad \text{and} \quad \text{Area}(\Sigma) = W^G(M) = \mathcal{A}^G(M).$$

证明。根据定理 3.8，存在一个由光滑嵌入的闭的极小 G-超曲面 $\Sigma \in \mathcal{S}^G(M)$诱导的整数 G-簇 $V \in \mathcal{V}_n^G(M)$，使得 $\|V\|(M) = W^G(M)$。由于 M具有正里奇曲率，引理 4.3(v)表明 Σ 是连通的，因此 $V = m|\Sigma|$ 对某个 $m \in \{1, 2, \dots\}$成立。假设 $\Sigma \in \mathcal{S}_{\perp}^G(M)$，则由定理3.8 的最后一个结论可知， m 必为偶数，因此 $m \geq 2$。然而，根据命题 4.7，我们有矛盾 $W^G(M) < 2$面积$(\Sigma) \leq \|V\|(M) = W^G(M)$。因此，$\Sigma \in \mathcal{S}_+^G(M)$。由命题4.6，我们看到 $W^G(M) \leq$面积$(\Sigma) \leq \|V\|(M) = W^G(M)$，从而 $m = 1$。此外，根据 $\mathcal{A}^G(M)$ 的定义以及命题 4.6、4.7，

$$\mathcal{A}^G(M) \leq \text{Area}(\Sigma) = \|V\|(M) = W^G(M) \leq \mathcal{A}^G(M).$$

现在，只需证明 $\text{Index}_G(\Sigma) = 1$。假设 $\text{Index}_G(\Sigma) \geq 2$，且 u_1, u_2是 L^2-正交且 G-不变的 $L_\Sigma \llcorner \mathfrak{X}^{\perp,G}(\Sigma)$ 的前两个负特征值对应的特征函数。设 $u_2\nu$ 是定义在 Σ 上的 G-不变法向量场，并将其延拓为光滑向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$。那么， $X_2 := \int_G (g^{-1})_* X d\mu(g) \in \mathfrak{X}^G(M)$ 给出了 $u_2\nu$的一个等变延拓。考虑由 X_G生成的等变微分同胚 $\{F_s^2\}$，并定义 $\Phi_s(t) := (F_s^2)_\# \Phi(t)$，其中 $t \in [-1, 1]$；这里， $\Phi \in \mathcal{P}^G(M)$ 是命题 4.6 给出的 F- 连续扫掠。回忆命题 4.6 的证明中，$\Phi(t) = [[\Sigma_t]] = [[F_t^1(\Sigma)]]$ 对 $t \in [-1/3, 1/3]$成立，其中 $\{F_t^1\}$ 是由 $X_1 \in \mathfrak{X}^G(M)$ 生成的等变微分同胚，且某个 $r > 0$ 满足 $X_1 \llcorner \Sigma = 3ru_1\nu$ 。因此，对于光滑族 $\{F_s^2(\Sigma_t)\}_{s\in[-\sigma,\sigma], t\in[-1/3,1/3]}$，面积函数 $A(s,t) :=$面积$(F_s^2(\Sigma_t)) = \mathbf{M}(\Phi_s(t))$ 满足：

- $\nabla A(0,0) = 0$ since Σ is minimal;
- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(0,0) = -9r^2 \int_\Sigma u_1 L_\Sigma u_1 < 0$ and $\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(0,0) = -\int_\Sigma u_2 L_\Sigma u_2 < 0$;
- $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} A(0,0) = -3r \int_\Sigma u_2 L_\Sigma u_1 = 3r\mu_1(\Sigma) \int_\Sigma u_1 u_2 = 0.$

因此，我们可以将 σ、$\delta > 0$ 设得足够小，使得

$$\mathbf{M}(\Phi_s(t)) = \text{Area}(F_s^2(\Sigma_t)) < \text{Area}(\Sigma), \quad \forall t \in [-\delta, \delta], s \in (0, \sigma].$$

此外，存在 $\epsilon > 0$，使得$\mathbf{M}(\Phi(t)) \leq$面积$(\Sigma) - \epsilon$，根据命题 4.6(ii)，对所有 $t \in [-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$均成立。因此，通过将 $\sigma > 0$ 取得更小，我们有 $\mathbf{M}(\Phi_\sigma(t)) = \mathbf{M}((F_\sigma^2)_\# \Phi(t)) <$面积$(\Sigma)$，对所有 $t \in [-1, 1]$均成立。注意， Φ_σ是与 Φ 在 $\mathcal{Z}_n^G(M; \mathbb{Z}_2)$ 中同伦的 F-连续曲线。因此，

$$W^G(M) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi_\sigma(t)) : t \in [-1, 1]\} < \text{Area}(\Sigma) = W^G(M),$$

这就产生了矛盾。因此我们有 $\text{Index}_G(\Sigma) = 1$。 □

作为一项应用，我们利用共形体积证明了定理 5.1 中等变极小极大极小超曲面 G 的亏格界 Σ ，前提是 $\dim(M) = 3$ ，且 G 的作用保持定向。

定理5.2。设(M^3, g_M) 是一个具有正里奇曲率的闭连通可定向黎曼三维流形，且 G 是一个通过保持定向作用于 M 的有限群

等距变换。然后，等变极小-极大超曲面 Σ对应于基本类 $[M]$，是一个连通的闭的极小 G-超曲面，重数为一，并满足

$$\mathrm{genus}(\Sigma)\le 4K \quad \text{and} \quad W^G(M)=\mathrm{Area}(\Sigma)\le \frac{8\pi K}{\inf_{|v|=1}\mathrm{Ric}_M(v,v)},$$

其中 $K:=\max_{p\in M}\#G\cdot p\le \#G$ 是 M 的一个主轨道中的点数。此外，$\pi(\Sigma)=\Sigma/G$ 是一个具有有限个阶为$\{n_i\}_{i=1}^k$ 的锥奇点的可定向曲面（即局部模型为 $\mathbb{B}^2_1(0)$ 除以一个循环旋转群 $\mathbb{Z}_{n_i}$），因此

$$\sum_{i=1}^k(1-\frac{1}{n_i})\le 4, \quad \text{and} \quad \mathrm{genus}(\pi(\Sigma))\le 3.$$

尤其是，如果 $\Sigma\subset M^{prin}$，即 $k=0$，那么 亏格$(\Sigma)\le 1+2K$。

证明。根据定理 5.1，Σ 是一个闭的嵌入连通极小 G-曲面，带有一个 G-不变的单位法向量 ν，使得面积$(\Sigma)=W^G(M)$，且指数$_G(\Sigma)=1$。根据引理 4.3，Σ 具有一个诱导定向。此外，由于单位法向量 ν 是 G-不变的，G 在 Σ 上的作用也保持定向。因此，由（Σ, G）诱导的轨形 $\underline{\Sigma}$是一个可定向的闭的 2-轨形，其底空间是商距离空间（$\pi(\Sigma)$，$\mathrm{dist}^{\Sigma/G}$）。

令 Σ^{prin} 为 G 在 Σ 上作用的主轨道之并，令 $\underline{\Sigma}^{prin}$ 为由 (Σ^{prin},G) 诱导的 orbifold。注意，轨道 $G\cdot p$ 在 Σ（或 M）中是主轨道，当且仅当 G_p 在 $\mathrm{N}_p^\Sigma G\cdot p$（或 $\mathrm{N}_pG\cdot p$）上的切片表示是平凡的（参见 [3, 推论 2.2.2]）。因此，由于 ν 的 G-不变性，我们得到 $\Sigma^{prin}\subset M^{prin}$，从而对所有 $p\in\Sigma^{prin}$ 和 $q\in M^{prin}$，均有 $K=\#G\cdot p=\#G\cdot q$。此外，由 [4, 第四章定理 3.3] 可知，$\underline{\Sigma}^{prin}$ 上存在诱导的黎曼度量 $g_{\underline{\Sigma}}$，使得 $\pi:\Sigma^{prin}\to\underline{\Sigma}^{prin}$ 是黎曼浸没。又由于 G 通过保持定向的等距变换作用于 Σ，奇点$\underline{\Sigma}\setminus\underline{\Sigma}^{prin}$ 是有限个锥点 $\{[p_i]\}_{i=1}^k$，其阶分别为 n_1、……、n_k。由 orbifold 版的 Gauss–Bonnet 定理（参见 [8,命题 2.17]），可得

$$\int_{\pi(\Sigma)}K_{\underline{\Sigma}}\,dA_{g_{\underline{\Sigma}}}=2\pi(\chi(\underline{\Sigma}))=2\pi\Big(2-2\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))-\sum_{i=1}^k(1-\frac{1}{n_i})\Big), \tag{5.2}$$

其中 $K_{\underline{\Sigma}}$是（$\underline{\Sigma}^{prin}$，$g_{\underline{\Sigma}}$）的高斯曲率，积分在 $\underline{\Sigma}^{prin}$上进行。

对于任意充分小的 $r>0$，令 $\Sigma_r:=\Sigma\setminus\cup_{i=1}^kB_r^G(p_i)$，并令 η_r 为 Σ上的 G-不变对数截断函数，其定义如下

$$\eta_r(p):=\begin{cases}0, & d(p)\in[0,r]\\ 2-\frac{2\log d(p)}{\log r}, & d(p)\in(r,\sqrt{r}]\\ 1, & d(p)\in(\sqrt{r},\infty)\end{cases},$$

其中 $d(p):=\mathrm{dist}_\Sigma(p,\Sigma\setminus\Sigma^{prin})=\mathrm{dist}_\Sigma(p,\cup_{i=1}^kG\cdot p_i)$。于是定义 $\underline{\Sigma}_r:=\underline{\Sigma}\setminus\cup_{i=1}^kB_r([p_i])$。注意，$(\underline{\Sigma}_r,\ g_{\underline{\Sigma}})$ 是一个光滑黎曼流形（带边界）。我们可以取任意共形浸入 $\phi:\underline{\Sigma}_r\to\mathbb{S}^m$, $m\ge 2$, 并定义 $P:\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^m)\to\mathbb{B}^{m+1}_1(0)$，如下

$$P(h):=\frac{1}{\int_\Sigma\eta_ru_1}\Big(\int_\Sigma(\eta_ru_1)(h_1\circ\phi\circ\pi),\dots,\int_\Sigma(\eta_ru_1)(h_{m+1}\circ\phi\circ\pi)\Big),$$

其中 $h=(h_1,\cdots,h_{m+1})\in\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^m)$是 $\mathbb{S}^m$（在标准度量下）的任意共形微分同胚，而 $u_1:\Sigma\to\mathbb{R}_+$ 是 L_Σ的第一个（G-不变）特征函数。

由于 $u_1 > 0$ 和 $\sum_{j=1}^{m+1} h_j^2 = 1$，容易验证 P 是良定义的。同时，对于每个$x \in \mathbb{B}^{m+1}$，定义一个共形微分同胚 $h_x \in \mathrm{Conf}(\mathbb{S}^m)$，如 [25, (1.1)] 所示，通过

$$h_x(y) = \frac{y + (\mu\langle x, y\rangle + \lambda)x}{\lambda(\langle x, y\rangle + 1)},$$

其中 $\lambda = (1 - |x|^2)^{-1/2}$ 且 $\mu = (\lambda - 1)|x|^{-2}$。于是我们有一个连续映射 $f : \mathbb{B}_1^{m+1}(0) \to \mathbb{B}_1^{m+1}(0)$，由 $f(x) = P(h_x)$ 给出，它可以通过恒等映射连续延拓到$\partial\mathbb{B}_1^{m+1}(0) = \mathbb{S}^m$。注意，$\mathrm{Clos}(\mathbb{B}_1^{m+1}(0))$ 与 $f(\mathrm{Clos}(\mathbb{B}_1^{m+1}(0)))$ 同伦，且对任意 $x \in \mathbb{B}_1^{m+1}(0)$，$\mathrm{Clos}(\mathbb{B}_1^{m+1}(0)) \setminus \{x\}$ 与 $\mathbb{S}^m$ 同伦。因此，我们必有 f 是满射。特别地，存在 $h = (h_1, \dots, h_{m+1}) \in \mathrm{Conf}(\mathbb{S}^m)$，使得 $P(h) = 0$。于是，$\{\tilde{h}_j := h_j \circ \phi \circ \pi\}_{j=1}^{m+1}$ 是定义在 Σ_r 上的 G-不变光滑函数，使得

$$\sum_{j=1}^{m+1} \tilde{h}_j^2 = 1 \quad \text{and} \quad \int_\Sigma u_1 \cdot (\eta_r \tilde{h}_j) = 0, \ \forall j = 1, \dots, m+1.$$

由于 $\mathrm{Index}_G(\Sigma) = 1$，我们看到 $\delta^2\Sigma(\eta_r\tilde{h}_j\nu) \geq 0$ 对所有 $j = 1, \dots, m+1$，以及

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{\sqrt{r}}} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 &\leq \int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2)\eta_r^2 = \int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2) \sum_{j=1}^{m+1} (\eta_r\tilde{h}_j)^2 \\
&\leq \int_\Sigma \sum_{j=1}^{m+1} |\nabla(\eta_r\tilde{h}_j)|^2 \\
&\leq \int_\Sigma \sum_{j=1}^{m+1} \left[(1+\epsilon)|\nabla\tilde{h}_j|^2\eta_r^2 + (1+\frac{1}{\epsilon})|\nabla\eta_r|^2\tilde{h}_j^2\right] \\
&\leq (1+\epsilon)K \cdot \int_{\underline{\Sigma}_r} \sum_{j=1}^{m+1} |\nabla h_j \circ \phi|^2 + (1+\frac{1}{\epsilon}) \int_\Sigma |\nabla\eta_r|^2 \\
&= 2(1+\epsilon)K \cdot \mathrm{Area}(\underline{\Sigma}_r; (h\circ\phi)^* g_{\mathbb{S}^{m+1}}) + (1+\frac{1}{\epsilon}) \int_\Sigma |\nabla\eta_r|^2,
\end{aligned}$$

其中 $\epsilon > 0$ 为任意常数，$\mathrm{Area}(\underline{\Sigma}_r; (h\circ\phi)^* g_{\mathbb{S}^{m+1}})$ 是 $\underline{\Sigma}_r$ 在共形度量 $(h\circ\phi)^* g_{\mathbb{S}^{m+1}}$ 下的面积，且最后一个不等式中使用了余面积公式。令 $A_c(m, \underline{\Sigma}_r)$ 表示 Σ 的 m-共形面积，其定义如 [16] 所示：

$$A_c(m, \underline{\Sigma}_r) := \inf_{\phi} \sup_{h \in \mathrm{Conf}(\mathbb{S}^m)} \mathrm{Area}(\underline{\Sigma}_r; (h\circ\phi)^* g_{\mathbb{S}^m}),$$

其中下确界取遍所有将 $\underline{\Sigma}_r$ 映射到 $\mathbb{S}^m$中的非退化共形映射 ϕ。由于ϕ: $\underline{\Sigma}_r \to \mathbb{S}^m$ 是上述计算中的任意共形浸入，因此我们有

$$\int_{\Sigma_{\sqrt{r}}} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 \leq 2(1+\epsilon)K \cdot A_c(m, \underline{\Sigma}_r) + (1+\frac{1}{\epsilon}) \int_\Sigma |\nabla\eta_r|^2.$$

根据 [13, 第四章，注5.5。1], 每个闭可定向曲面都可以共形分支覆盖 $\mathbb{S}^2$，次数为 $\lfloor$（亏格 $+3$）$/2\rfloor$，其中 $\lfloor a\rfloor$ 是 $a \in \mathbb{R}_+$的整数部分。由 [16, 事实 1, 5] 可得 $A_c(m, \underline{\Sigma}_r) \leq 4\pi\lfloor\frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2}\rfloor$，从而

$$\int_{\Sigma_{\sqrt{r}}} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 \leq 4\pi(1+\epsilon)K \cdot 2\Big\lfloor \frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2} \Big\rfloor + (1+\frac{1}{\epsilon}) \int_\Sigma |\nabla\eta_r|^2.$$

Si因此 $\int_\Sigma |\nabla \eta_r|^2 \to 0$ 作为 $r \to 0$，我们首先取 $r \to 0$，然后令 $\epsilon \to 0$，这给出s

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 \leq 4\pi K \cdot 2\Big\lfloor \frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2} \Big\rfloor.$$

记 $\{e_i\}_{i=1}^2$ 为 Σ 上的局部标准正交基。由于 $\mathbf{Ric}_M > 0$，我们有 e

$$\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 = \sum_{i=1}^2 \mathrm{Ric}_M(e_i,e_i) - 2K_\Sigma > -2K_\Sigma$$

在 Σ^{prin} 上，其中 K_Σ 是 Σ 的高斯曲率。因此，由余面积公式，

$$-2K\int_{\underline{\Sigma}} K_{\underline{\Sigma}} = -2\int_\Sigma K_\Sigma < \int_\Sigma \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |A|^2 \leq 4\pi K \cdot 2\Big\lfloor \frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2} \Big\rfloor.$$

然后，由上述严格不等式和高斯–博内公式（5.2）可知，$\mathbf{genus(\pi(\Sigma))} \leq 3$，$\sum_{i=1}^k (1-\frac{1}{n_i})$ ≤ 4，$\mathbf{genus(\pi(\Sigma))} + \sum_{i=1}^k (1-\frac{1}{n_i}) < 5$，并且

$$\mathrm{genus}(\Sigma) = 1 + K\Big[\mathrm{genus}(\pi(\Sigma)) - 1 + \sum_{i=1}^k (1-\frac{1}{n_i})\Big] < 1 + 4K.$$

特别地，如果 $\Sigma \subset M^{prin}$，那么 $\sum_{i=1}^k (1-\frac{1}{n_i}) = 0$，且 $\mathbf{genus(\Sigma)} = 1+K\mathbf{(genus(\pi(\Sigma))-1)}$ $\leq 1+2K$。最后，我们看到

$$\begin{aligned} 2c_M W^G(M) &\leq \int_\Sigma \sum_{i=1}^2 \mathrm{Ric}_M(e_i,e_i) \\ &\leq 4\pi K \cdot 2\Big\lfloor \frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2} \Big\rfloor + 2K\int_{\underline{\Sigma}} K_{\underline{\Sigma}} \\ &= 4\pi K \cdot \Big(2 - 2\mathrm{genus}(\pi(\Sigma)) - \sum_{i=1}^k (1-\frac{1}{n_i}) + 2\Big\lfloor \frac{\mathrm{genus}(\pi(\Sigma))+3}{2} \Big\rfloor\Big) \\ &\leq 16\pi K, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{Ric}_M \geq c_M > 0$。 □

References

[1] F.J. Almgren Jr.积分圈群的同伦群。 *Topology*，1(4):257–299，1962。[2] F.J.AlmgrenJr. 变体理论。 *Mimeographed notes*，1965。[3] J.Berndt、S. Console和C. E.Olmos。 *Submanifolds and holonomy*，第 21卷。CRC出版社，2016。[4] G.E. Bredon。 *Introduction to compact transformation groups*。学术出版社，1972。[5] O. Chodosh和D. Maximo。关于极小曲面的拓扑与指标。 *Journal of Differential Geometry* 104 3 399 418, 2016，( ): –。[6] O. Chodosh 和D. Maximo。关于极小曲面的拓扑与指标 II。 *arXiv:1808.06572* 2018 *arXiv preprint*。[7] H.I.Choi和R. Schoen。将曲面嵌入具有正里奇曲率的三维流形中的极小嵌入空间。 *Inventiones mathematicae*，81(3):387–394，1985。[8] D. Cooper、C.D.Hodgson和 S.Kerckhoff。 *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*，第 5 卷。日本数学会，2000。[9] C. DeLellis和 D. Tasnady。嵌入型极小超曲面的存在性。 *Journal of Differential Geometry* 95 3 355 388, 2013，( ):–。[10] N.Ejiri和 M. Micallef。极小曲面的面积二阶变分与能量二阶变分之间的比较。 *arXiv:0708.2188*，2007。[11] H. Federer。 *Geometric measure theory*。施普林格，2014。

[12] P.Glynn-Adey和Y. Liokumovich。宽度、里奇曲率与极小超曲面。*Journal of Differential Geometry* 105 1 33 54, 2017，（）：–。[13] R. Hartshorne。*Algebraic Geometry*。第 52 卷。SpringerScience & BusinessMedia，1977。[14] D.Ketover。等变极小极大理论。*arXiv preprint arXiv:1612.08692*，2016。[15] D. Ketover、F. C.Marques和 A.Neves。悬链面估计及其几何应用。*Journal of Differential Geometry* 115 1 1 26, 2020，（）：–。[16] P. Li 和 S.-T.Yau。一个新的共形不变量及其在 Willmore猜想和紧曲面第一特征值中的应用。*Inventiones mathematicae*，69(2):269–291，1982。[17] Z.Liu。嵌入的 G-不变极小超曲面的存在性。*Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 60 1 1 21, 2021，（）：–。[18] F.C. Marques和 A.Neves。三流形中极小极大极小球面的刚性。*Duke Mathematical Journal* 161 14 2725 2752, 2012，（）：–。[19] F. C. Marques和 A.Neves。极小极大理论与 Willmore猜想。*Annals of mathematics*，第 683–782 页，2014。[20] F. C.Marques和 A. Neves。极小极大极小超曲面的莫尔斯指标与重数。*Cambridge Journal of Mathematics* 4 4 463 511, 2016，（）：–。[21] F. C.Marques和 A.Neves。正里奇曲率中无穷多个极小超曲面的存在性。*Inventiones mathematicae*，209(2):577–616，2017。[22] F.C.Marques和A.Neves。重数为一的极小极大极小超曲面的莫尔斯指标。*Advances in Mathematics* 378 107527, 2021，：。[23] L.Mazet 和 H.Rosenberg。最小面积极小超曲面。*Journal of Differential Geometry*，106 2 283( ): –316，2017。[24] W.H. Meeks III、J. Perez和 A.Ros。极小曲面的拓扑与指标的界。*Acta Mathematica* 223 1 113 149, 2019，（）：–。[25] S.Montiel和 A.Ros。利用第一特征函数对曲面的极小浸入与共形面积。*Inventiones mathematicae*，83(1):153–166，1986。[26] J.D. Moore 和R. Schlafly。关于等变等距嵌入。*Mathematische Zeitschrift*，173 2 119133，1980（）：–。[27] J. T. Pitts。*Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds.(MN-27)*，第27 卷。PrincetonUniversityPress，2014。[28] J.T.Pitts和J.H. Rubinstein。极小极大法在极小曲面和 3-流形拓扑中的应用。载于 *Miniconference on geometry/partial differential equations*，2，第 12 卷，第 137–171 页。Australian National University，Mathematical Sciences Institute，1987。[29] J.T.Pitts和J.H.Rubinstein。几何 3-流形中的等变极小极大与极小曲面。*Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*，19(1):303–309，1988。[30] A. Ros。单侧完备稳定极小曲面。*Journal of Differential Geometry* 74 1 69 92, 2006，（）：–。[31] R.Schoen 和L.Simon。稳定极小超曲面的正则性。*Communications on Pure and Applied Mathematics* 34 6 741 797, 1981，（）：–。[32] R. M. Schoen 和 S.-T. Yau。*Lectures on differential geometry*，第 2卷。International pressCambridge，MA，1994。[33] L. Simon。*Lectures on geometric measure theory*。The Australian National University，MathematicalSciences Institute，Centre...，1983。[34] T.Wang。G-不变极小超曲面的极小极大理论。*The Journal of Geometric Analysis*，32 91 53，2022（）：–。[35] T.Wang。自由边界G-不变极小超曲面的极小极大理论。*arXiv:2208.07187* 2022 08，..。[36] T. Wang。极小极大 g-不变极小超曲面的等变莫尔斯指标。*arXiv preprint arXiv:2210.07638* 2022 10，. .。[37] Z. Wang。体积谱的共形上界。*Geometric and Functional Analysis*，31 4 9921012，2021（）：–。[38] B.White。与变体相关的流和扁平链及其在平均曲率流中的应用。*Duke Mathematical Journal*，148(1):41–62，2009。[39] X.Zhou。在(M^{n+1} g $Ric \geq 0$ $2 \leq n \leq 6$ *Journal of*，) 中带有 和 的极小极大极小超曲面。*Differential Geometry* 100 1 129 160, 2015，（）：–。

[40] X. Zhou. 正里奇曲率流形中的极小极大超曲面。 *Journal of Differential Geometry* 105 2 291 343, 2017

, ( ): – . [41] X. Zhou. 关于极小极大理论中重数为一猜想。 *Annals of Mathematics* 192 3 767 820, , ( ): – . 2020

Institute for Theoretical Sciences, Westlake Institute for Advanced Study, Westlake University, Hangzhou, Zhejiang, 310024, China*Email address*: wangtongrui@westlake.edu.cn