arXiv:2304.03668v1 [nlin.AO] 7 Apr 2023

分岔诱导的临界转变中的速率和记忆效应

朱莉娅·坎蒂斯´安，[1] 谢尔盖·扬丘克，[2,3] 赫苏´斯·M.·塞奥阿内，[1]米格尔·A.F.·桑胡´安，[1,4]以及尤¨尔根·库尔特斯[5,3]1非线性动力学、混沌与复杂系统研究组，胡安·卡洛斯国王大学物理系，F´ısica，Tulip´án s/n，28933 M´óstoles，马德里，西班牙2柏林洪堡大学数学系，12489，柏林，德国3波茨坦气候影响研究所，14473，波茨坦，德国4考纳斯理工大学应用信息学系，Studentu 50-415，考纳斯LT-51368，立陶宛 5 柏林洪堡大学物理系，12489，柏林，德国（日期：2023 年4月10日）

摘要

系统环境的变化，例如温度、化学溶液的浓度或磁场的出现，可能导致某个参数发生漂移。如果该参数越过分岔点，系统就可能从一个吸引子转变到另一个吸引子（分岔诱导的临界转变）。通常，这种稳定性交换发生在一个超出分岔值的参数值处。我们在此将这种现象称为稳定性交换偏移。我们系统地研究了偏移如何受到初始参数值及其变化率的影响。为此，我们针对不同类型的分岔和不同的典型系统，给出了数值结果和解析结果。最后，我们推导出支配这一现象的标度律。我们表明，提高变化率以及从距离分岔点更远处开始漂移，都可能延迟临界转变过程。此外，如果变化率足够小，偏移将不再依赖初始条件（无记忆效应），且偏移趋于变化率的平方根。因此，系统参数固定时的分岔图得以恢复。

I. 引言

动力系统的行为可根据其参数值进行分类。通常，这种分类通过分岔图表示，其中展示了各个参数区域对应的吸引子。对于一组固定的参数和方程，系统会保持在相应的吸引子之一，例如不动点、极限环、混沌吸引子等。然而，在自然界中，这种平衡态通常会受到系统环境的扰动。现实世界中的系统是开放的，外部扰动可以建模为参数随时间变化。参数变化可能导致系统从一个吸引子转变到另一个吸引子，从而引起（有时很剧烈的）状态转变。在不同领域中，这种突变有许多实例，例如生态学 [1] 或气候动力学 [2]。此外，这种现象也可能是人们所期望的，因此可以设计一种输入，使系统发生临界转变。例如，涉及跨越临界温度并产生相变的实验便是如此 [3]。

参数变化导致机制转换的方式有很多种。根据 [4], ，它们可分为三类：噪声诱导的临界转变（N 型临界转变）、速率诱导的临界转变（R 型临界转变）和分岔诱导的临界转变（B 型突变）。在 N 型临界转变中，参数发生波动，迫使系统离开吸引子并转向另一个吸引子。对于 R 型临界转变， [5], 参数漂移的速率足够快，以至于系统无法跟随当前的吸引子。最后，B 型突变发生在参数越过分岔时，这会迫使系统发生临界转变。

在这里，我们研究导致 B型突变的参数漂移；在以往文献中，这也称为动态分岔 [6] 或缓慢通过分岔 [7] 。这一现象已从不同角度得到研究，探讨了多稳态系统中的临界转变概率、依赖情景的吸引域或早期预警指标等概念 [8–13]。我们重点系统地描述临界转变过程，具体而言，是偏移现象 [14]。已有观察发现，在存在参数漂移的系统中，临界转变发生时的参数值 p 不同于分岔值 p_b。我们将这个值称为临界值 p_{cr}，它是 $p_{cr} > p_b$（随 p增加）。偏移现象也被称为延迟现象，强调临界转变在时间上的延迟 $t_{cr} > t_b$，而非参数上的偏移。由于参数取决于时间，这两个术语含义相同。文献 [15], 将 p_{cr} 与 p_b 之间的时间称为借来的时间，以指明

指出在这个时间窗口内，吸引子已不再稳定，尽管系统仍在跟随它，而且仍有可能通过逆转漂移来避免临界转变。

偏移量 $p_{cr} - p_0$ 取决于具体情形，且可能随参数变化率 ε而变化。我们称之为速率效应。近期，研究者已针对具有混沌吸引子的映射 [16, 17], 、具有混沌吸引子的流 [18] 以及时滞系统 [19]等复杂系统，探讨了这一效应。另一个影响 p_{cr} 数值的有趣变量是参数的初始值 p_0。这意味着系统具有记忆效应，而且即使失稳的平衡态与参数无关，到分岔点的距离仍然很重要。记忆效应在 [7, 20] 中的研究较少，而且通常未考虑速率效应及其相互作用。

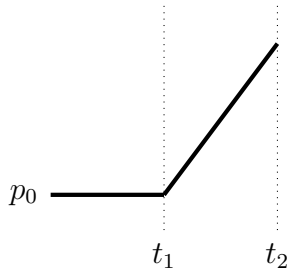
本文旨在系统研究 B型突变中出现的偏移现象。我们将说明，系统的动力学自然分为两种状态：确定性状态和非确定性状态，具体取决于（数值）噪声是否发挥“关键”作用。非确定性情形是指系统轨迹到达某个吸引子的邻域，而该邻域小于数值噪声阈值。变化率较小时 ε，这是一种典型情形，因为在分岔点之外，轨迹会指数收敛至吸引子。此外，现实系统总会受到一定程度的噪声影响，实验装置也具有有限精度。在确定性状态下，不会达到数值阈值。这通常与较快的漂移有关：系统没有时间松弛，也就无法更接近吸引子。我们针对不同的典型系统和不同的分岔，探讨两种状态下的速率效应和记忆效应。我们推导出支配这些过程的解析标度律，并将其与数值结果进行比较。

本文结构如下。第二节介绍系统、分岔以及用于分析它们的数值技术。第三节给出确定性状态下的结果，第四节则给出非确定性状态下的结果。我们探讨这两种状态下的速率效应和记忆效应，并给出数值计算和解析计算结果。最后，我们在文末作出总结。

II. 系统与分岔

我们选择具有不同类型分岔的典型动力系统作为示例，旨在研究参数变化并越过分岔时系统的共同响应。为此，我们对每个系统采用相同的方法，并比较各个案例中的行为。我们选取其中一个参数，使其以较小但不可忽略的速率随时间线性变化 ε。根据系统的固有时间尺度，我们取 ε 的范围为 $10^{-5} - 10^{-2}$。于是，参数扫描按如下方式设定：

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{for } t < t_1 \\ p_0 + \varepsilon \cdot (t - t_1) & \text{for } t_1 < t < t_2 \end{cases} \tag{1}$$



其中， t_1 是参数漂移开始的时间， t_2 是其结束的时间。这样，我们让系统先演化至稳态，然后再开始参数偏移。在 t_1 和 t_2之间的某个时刻，参数越过一个分岔点，预计会观察到一定延迟后的临界转变。

具体而言，我们研究：洛伦兹系统中的叉形分岔和次临界霍普夫分岔、FitzHugh-Nagumo模型中的超临界霍普夫分岔，以及 R¨ossler 系统中的倍周期分岔。通过分析这些系统，我们涵盖了一些常见的分岔，包括可能导致混沌的倍周期分岔。数值积分使用以下常微分方程求解器：ode78（Runge-Kutta 8(7)）和 ode15s（变步长变阶（VSVO）求解器）。后一种方法似乎能更好地捕捉来自不稳定吸引子的排斥力，但两种方法所得结果在定量上相同。

A. 洛伦兹系统

洛伦兹系统 [21] 由 Edward Lorenz 提出，是一个用于描述大气对流动力学（Rayleigh-B´enard 对流）的简单模型。其方程如下

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 σ、β 和 r 是系统参数。在对流动力学中，σ 是普朗特数，是流体的特征参数；β 取决于容器的几何形状；r 是瑞利数，用于表征温度梯度。在此背景下，x 表示对流涡卷的旋转频率，而 y 和 z 对应于与温度场相关的变量。我们固定经典参数值 $\sigma = 10$、$\beta = 8/3$，并将 r 视为随时间变化的参数 $r(t)$，如式 (1) 所示。

在冻结系统中，r 为固定参数时，我们发现了一系列连续发生的分岔，其简要说明见 [18] 。这里，我们重点关注分别发生于 $r = 1$ 和 $r = 24.74$ 的叉形分岔和亚临界霍普夫分岔。异宿分岔的速率效应已在 [18] 中分析。在叉形分岔中，原点处的不动点失去稳定性，并产生另外两个不动点：

$$C^{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(r-1)}, \pm\sqrt{\beta(r-1)}, r-1), \tag{3}$$

而在次临界霍普夫分岔中，$C^{\pm}$ 失去稳定性，一个诞生于$r = 24.06$的混沌吸引子仍是全局吸引子。

转向参数随时间变化的情形，轨迹穿越这些分岔时的时间序列如图 1(a) 和 (b) 所示。参数 r达到分岔的时刻以及临界值（t_b 和 t_{cr}）均已标出。我们将临界转变的判定条件设定为：到平衡态的距离达到 $\eta_{cr} = 10^{-2}$ 阈值（叉形分岔时为原点，次临界霍普夫分岔时为 $C^{\pm}$ ）。超过该阈值时，就认为系统从一个状态转变到另一个状态。在这两种情形下，不动点在 t_b 失去稳定性一段时间后，系统才会转变到另一个吸引子。

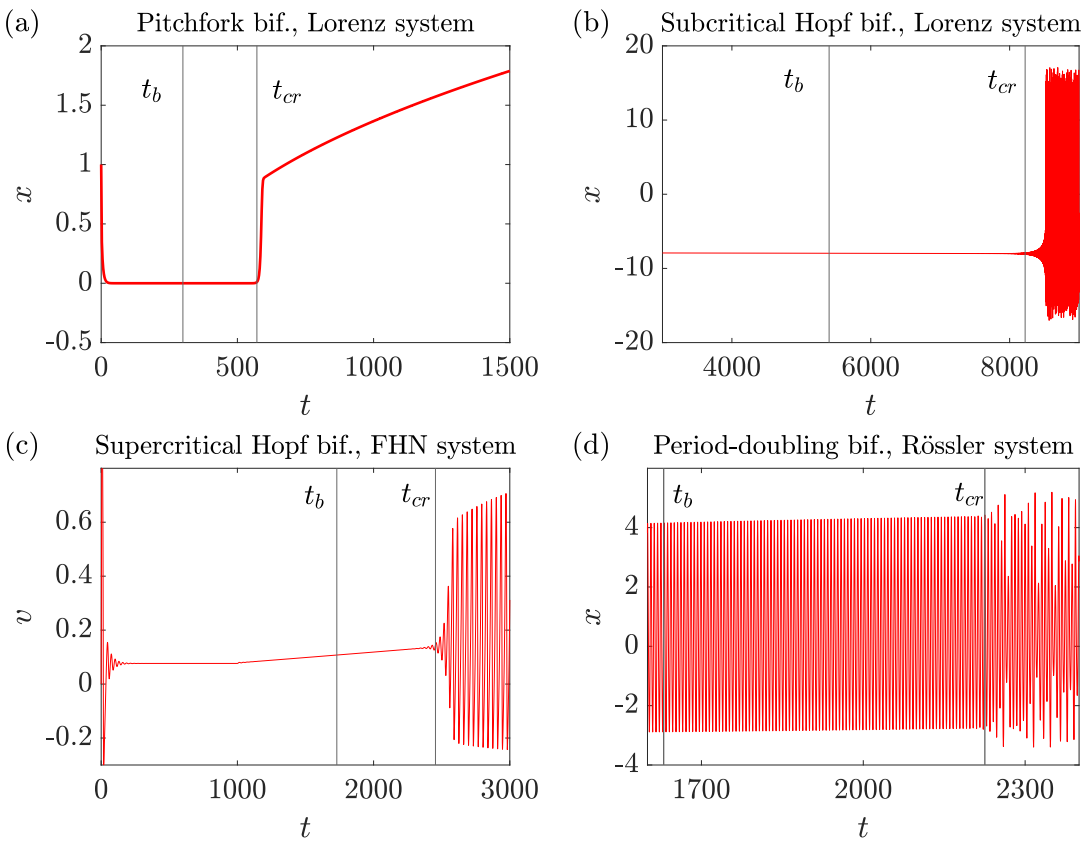


图 1. 显示分岔诱导临界转变的时间序列。参数漂移始于：(a)$t_1 = 100$、(b) $t_1 = 1000$、(c) $t_1 = 1000$ 和(d) $t_1 = 300$。可以看出，临界转变并未发生在分岔值 t_b 处，而是发生在其后的值 $t_{cr} > t_b$ 处。因此，我们观察到了偏移现象。

B. FitzHugh-Nagumo 系统

FitzHugh-Nagumo（FHN）模型 [22, 23] 是将四维 Hodgkin-Huxley 模型 [24] 约化为二变量模型的结果。后者是一个非常成功的模型，利用鱿鱼轴突描述神经动作电位的起始和传播。FitzHugh-Nagumo 模型的简化版本如下

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -v(v-a)(v-1) - w + I, \\ \dot{w} &= b(v - \gamma w), \end{aligned} \tag{4}$$

其中，膜电位 v 是主要的可观测量， w 表示缓慢的恢复电流，而 I 是刺激电流的大小。常数 a、 b 和 γ 是

动力学参数。我们固定 $a = 0.2$、$b = 0.05$ 和 $\gamma = 0.4$，而 I 将作为漂移变量 $I(t)$，遵循公式（1）。

对于该系统的冻结版本，其中 I 是一个固定参数，我们发现其在 $I_b = 0.273$ [25]处发生超临界 Hopf分岔。当 $I < I_b$时，存在一个不动点 $P^* = (v^*, w^*)$，满足：

$$\begin{aligned} -v^*(v^* - a)(v^* - 1) - v^*/\gamma + I = 0, \\ w^* = v^*/\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

并且取决于 I的值。当 $I > I_b$时，会出现一个极限环。

如果让 I 以较小但不可忽略的速率随时间变化，并越过 I_b，我们会观察到从式（5）给出的不动点向周期解的转变（见图 1(c)）。我们将与平衡态的距离阈值 P^*设为 $\eta_{cr} = 10^{-2}$。一旦超过这一阈值，就认为系统发生了临界转变。如图所示，临界转变发生在 $t_{cr} > t_b$。这段时间窗口就是借来的时间：不动点已失去稳定性，但系统仍在跟踪它。

C. R¨ossler 系统

我们分析的最后一个系统由 R¨ossler 于 1976 [26] 提出，是连续混沌的一个简单模型。其方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，a、b 和 c 为实参数。在本例中，我们按照方程（1）取随时间变化的 a 作为参数，即 $a(t)$，并固定 $b = 2$ 和 $c = 4$。

在方程（6）的冻结版本中，当 a 固定时，R¨ossler 系统通过倍周期分岔发生通向混沌的转变，这与逻辑斯蒂映射中的情形类似。对于我们的参数值，首次转变发生在 $a_b = 0.333$。

当我们让 a 随时间变化时，会观察到类似图 1(d) 所示的转变。如图所示，周期轨迹在 t_{cr}之后变得混沌。这是因为我们的变化率过快，无法观察到中间的所有倍周期分岔，因为它们彼此过于接近。例如，要观察 $a = 0.374$ 处的下一次转变，最大变化率为 $\varepsilon = 10^{-5}$。对于之后的转变，该变化率应当降低。

在这种情况下，临界转换条件是周期性的丧失。当时间序列的最大值不再呈周期性出现时，就认为系统已临界转变至混沌吸引子。

在接下来的章节中，我们将分析这些系统在确定性和非确定性状态下的表现。对于后者，系统会趋近平衡态，直至超出数值或实验精度范围。超过这一阈值后，噪声便会产生影响，而系统与平衡态之间距离的最大偏差不再变化。对于缓慢漂移的情况，系统有时间弛豫并进一步接近平衡态，因此会出现这种现象。对于每种状态，我们都令参数随时间演化，并使用前文描述的临界转换条件研究偏移现象。我们从解析和数值两方面描述记忆效应（ p_{cr} 对 p_0 的依赖）和速率效应（ p_{cr} 对 ε 的依赖）。

III. 确定性状态

参数恒定的自治动力系统经过一段瞬态时间后会收敛至一个吸引子。然而，如果外部条件发生变化，且其中一个参数随时间变化，我们可能会观察到稳定性交换，即系统从一个吸引子临界转变至另一个吸引子。

本节分析确定性状态下偏移的稳定性交换现象，也就是说，此时尚未达到精度阈值，噪声不会影响系统的行为。我们分析这种情形下的记忆效应和速率效应，并从解析和数值两个方面探讨这一问题。

A. 偏移的稳定性交换。解析方法

我们的目标是得到偏移现象的表达式，以便计算参数 p_{cr} 的临界值。从解析角度来看，我们研究最简单的情形：不动点因分岔穿越而失去稳定性。我们从一般系统开始。

$$\dot{x} = f(x; p), \quad f(x_0(p); p) = 0,$$

其中 $x_0(p)$ 是一个参数依赖的平衡点。在平衡点 x_0 处，线性化结果为

$$\dot{\xi} = Df(x_0(p); p)\xi.$$

现在，我们假设系统有一个主导（临界）特征方向，其特征向量为 $v(p)$，特征值为 $\lambda(p)$，因此

$$Df(x_0(p); p)v(p) = \lambda(p)v(p).$$

这一假设在叉形分岔或跨临界分岔附近成立。因此，对于上文给出的系统，这些计算仅适用于洛伦兹系统中的叉形分岔。尽管存在这一局限，数值方法将表明，系统在更复杂分岔下的响应也非常相似。我们还考虑所有其他特征方向均稳定的情形，此时可将动力学限制在临界方向上，从而得到标量方程

$$\dot{\eta} = \lambda(p)\eta, \tag{7}$$

其中，η 表示到平衡态的距离。

请注意，参数 p 是时间的函数，遵循式（1）。因此，在时间区间 $t \in [0, t_1]$内，参数保持恒定，式（7）具有常系数$\lambda(p_0)$。于是，

$$\eta(t_1) = \eta_0 e^{\lambda(p_0)t_1}, \tag{8}$$

其中 $\eta(0) = \eta_0$。此外，对于 $t \geq t_1$，式（7）的形式为

$$\dot{\eta} = \lambda\left(p_0 + \varepsilon(t - t_1)\right)\eta, \tag{9}$$

可按如下方式求解:

$$\eta(t) = \eta(t_1)\exp\left\{\int_{t_1}^{t} \lambda(p_0 + \varepsilon(t - t_1))dt\right\}, \tag{10}$$

或者，等价地

$$\eta(t) = \eta(t_1)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{p_0}^{p_0+\varepsilon(t-t_1)} \lambda(p)dp\right\} = \eta_0\exp\left\{\lambda(p_0)t_1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{p_0}^{p_0+\varepsilon(t-t_1)} \lambda(p)dp\right\}. \tag{11}$$

如前所述，我们将逃离平衡态的条件取为

$$\eta_{cr} = \eta(t_{cr}), \tag{12}$$

其中 η_{cr} 是一个较小的阈值，超过该阈值后，系统被认为已偏离平衡态，而 t_{cr} 是逃逸时间。利用（11）和（12），我们得到

$$\lambda\left(p_0\right) t_1+\frac{1}{\varepsilon} \int_{p_0}^{p_{cr}} \lambda(p) dp=\ln \frac{\eta_{cr}}{\eta_0}, \tag{13}$$

其中 $p_{cr}=p_0+\varepsilon(t_{cr}-t_1)$。令常数

$$C:=\ln \frac{\eta_{cr}}{\eta_0}, \tag{14}$$

我们得到以下用于确定临界参数值 p_{cr} 的条件：

$$\int_{p_0}^{p_{cr}} \lambda(p) dp=\varepsilon\left[C-\lambda\left(p_0\right) t_1\right]. \tag{15}$$

可以看出，偏移的值（$p_{cr}-p_b$）取决于参数的初始值 p_0，从而产生记忆效应。此外，它还取决于变化率 ε，也就是说，同样存在速率效应。

作为示例，我们计算洛伦兹系统中叉形分岔的公式(15)。现在我们的参数 p 是瑞利数 r。原点处平衡态的特征值为

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=-\beta,\\
&\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}(-1-\sigma \pm \sqrt{4 r \sigma+\sigma^2-2 \sigma+1}).
\end{aligned}$$

对于 $r<1$，所有特征值均为负。在 $r=1$ 处，λ_2 改变符号，因此原点处的不动点变得不稳定，从而产生叉形分岔。因此，$r_b=1$，且此时的临界特征值为 $\lambda_2=:\lambda$。对于我们的参数值，其表达式为

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(-11+\sqrt{81+40 r}\right). \tag{16}$$

现在，按照公式（15）对特征值进行积分，我们得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_{cr}}(-11+\sqrt{81+40 r}) dr=\\
&=\frac{-11\left(r_{cr}-r_0\right)}{2}+\frac{1}{120} \cdot\left[\left(40 r_{cr}+81\right)^{3/2}-\left(40 r_0+81\right)^{3/2}\right].
\end{aligned} \tag{17}$$

由于我们关注的是表示 $r_1=r_{cr}-r_b$ 与 $r_2=r_b-r_0$，即分岔前后的距离，因此我们进行变量替换，使得 $r_{cr}=r_1+r_b$ 和 $r_0=r_b-r_2$。最后，利用方程（15）可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{-11\left(r_1+r_2\right)}{2}+\frac{1}{120} \cdot\left[\left(40\left(r_1+r_b\right)+81\right)^{3/2}-\left(40\left(r_b-r_2\right)+81\right)^{3/2}\right]=\\
&=\varepsilon\left[C-\frac{-11 \sqrt{81+40\left(r_b-r_2\right)}}{2} t_1\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

为获得 C的值，我们根据第二节中提出的判据，取平衡态的初始距离 $\eta_0 = 1$ 和临界距离 $\eta_{cr} = 10^{-2}$。我们还将参数开始漂移的时间固定为 $t_1 = 100$。通过数值求解方程（18），可以得到不同 ε取值下图2(a)中的曲线。

图中清楚地呈现了记忆效应：参数的初始值越接近分岔值，临界转变就越早发生。一般来说，这种关系不是线性的。只有在特征值 λ 与参数呈线性关系的简单系统中，这种关系才是线性的： $\lambda(p) = mp$，其中 $m \in \mathbb{R}$。洛伦兹系统并非如此，见方程（16）。[25] 中曾在取ε的小值时对特征值进行线性化，而这里我们得到了通用表达式。

图2(a)中也可以看到速率效应：对于固定的 r_0 值，偏移会随变化率增大。以往一些研究认为，偏移现象与 ε 无关，因为当参数的初始值非常接近分岔点时，曲线会彼此靠近。然而，我们表明，如果初始状态远离分岔点，并且允许系统在漂移开始前经历一段初始瞬态时间 t_1，这一结论便不成立。

B. 偏移的稳定性交换。数值方法

现在，我们通过数值方法分析偏移的稳定性交换。不过，我们仅考虑未达到数值阈值且动力学具有确定性的情形。对于不同的速率 ε，我们对方程 (2)、(4) 和 (6) 进行积分，参数漂移分别从 (a) $t_1 = 100$、(b)$t_1 = 1000$、(c) $t_1 = 1000$ 和 (d) $t_1 = 300$ 开始。选择这些值是为了跳过漂移开始前的瞬态行为。我们在图2中展示了所有分岔的偏移现象。 ε 和 p_0 的值也因系统而异，这是根据自然时间尺度以及其他会限制 $p_{cr} - p_0$ 最大值的分岔来确定的。

比较叉形分岔的解析数据和数值数据可以看出，两种方法在某个区域内相吻合，但随后数值数据呈现出一个平台。这个平台也存在于其他所有分岔中，对应于非确定性状态。在该状态下，我们让系统有足够的时间进行松弛，并以超出数值精度的程度接近系统之外的吸引子。这可能发生在速率足够慢时，或者

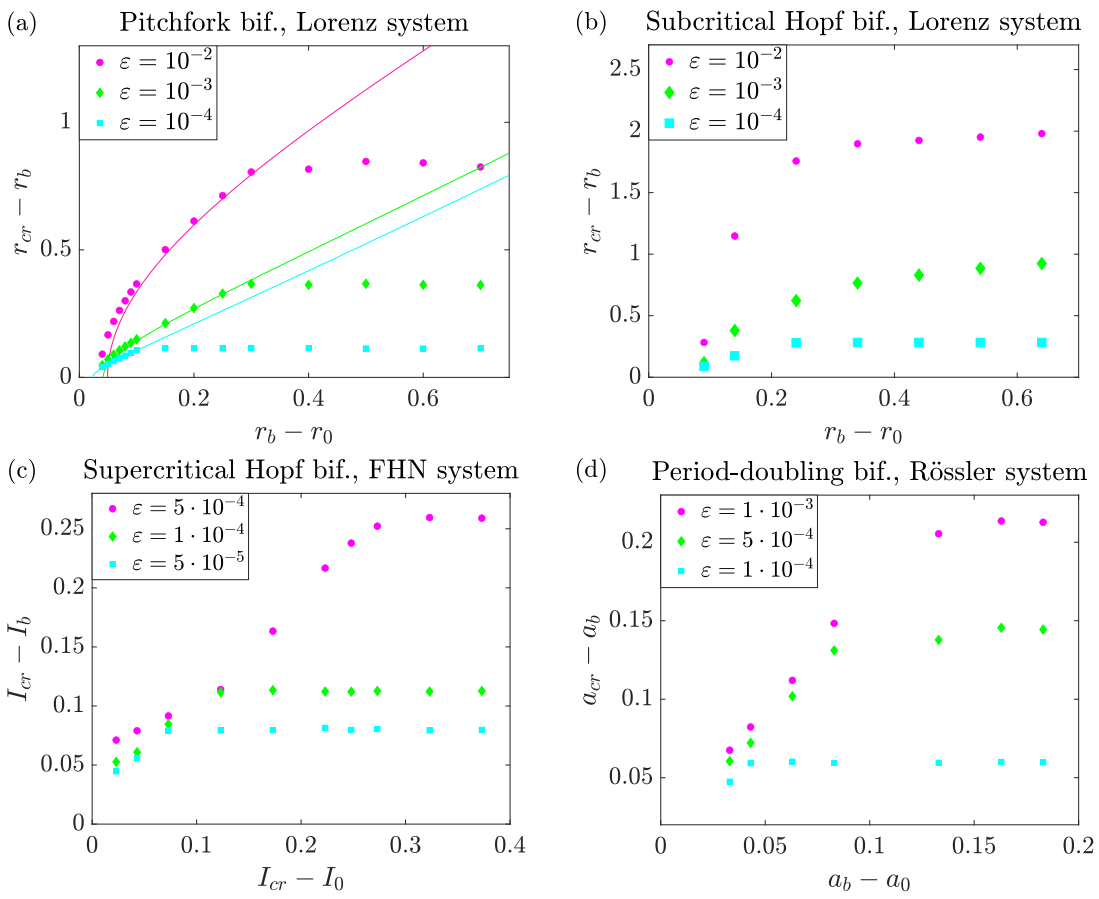


图2. 确定性状态下不同分岔和系统的记忆效应与速率效应。(a)中的曲线通过解析方法计算得到，而(a)、(b)、(c)和(d)中的点通过数值方法计算得到。两种方法的差异源于数值噪声的影响；当我们进入非确定性状态时，数值噪声会导致记忆丧失。这一点可以从平台中看出。在此之前，即处于确定性状态时，对于叉形分岔，可以看到两种方法的结果相吻合。

r_0 的值远离分岔。在这些情况下，数值噪声起到了记忆丧失因子的作用。我们将在下一节更详细地探讨非确定性状态。

请注意，在确定性状态下，所有系统的响应都与公式(15) 的预测结果非常相似。该解析计算适用于具有一个主导（临界）特征方向的系统，这对于诸如叉形分岔这样的分岔来说是成立的。然而，我们可以看到，即使对于更复杂的分岔（如倍周期分岔），我们

获得类似的记忆效应。在所有情况下，偏移会随着 ε 增加，并且也会随着进入非确定性状态之前与分岔之间的初始距离增加。

另一个看似可能影响偏移现象的参数是 t_1。它的作用与 ε 类似。当 t_1 的值较小时，参数漂移开始前系统没有时间弛豫；而当 t_1 较大时，我们会再次进入非确定性状态，并观察到记忆丧失。图 3 展示了叉形分岔和 $\varepsilon = 10^{-2}$ 的情况。左图中可以看到，即使 t_1 的值较小，只要参数的初始值离分岔足够远，系统就能再次弛豫，因此仍会出现记忆丧失。右图展示了不同轨迹如何在 $r_0 = 0.9$ 时趋近原点处的不动点；也就是说，$r_b - r_0 = 0.1$。请注意，$y-$ 轴上的量级各不相同，而且在 t_1 的最大取值下存在数值噪声。对于 $t_1 = 50$，200，轨迹是确定性的；而对于 $t_1 = 1000$，我们会进入非确定性状态。

对于其他分岔，改变 t_1 几乎不会影响偏移，因为平衡态的数值也取决于参数的数值，参见公式(3)或 (5)。请注意，相反，对于叉形分岔，$r < r_b$的平衡态固定在原点。这意味着，对于其他分岔而言，追踪$t_1 < t < t_b$的平衡态更加困难。因此，在这些情况下，在参数漂移开始之前更接近平衡态，并不足以观察到记忆丧失。

IV. 非确定性状态

在本节中，我们探讨系统进入非确定性状态时的偏移的稳定性交换。这意味着系统达到精度阈值，噪声影响动力学，从而导致记忆丧失。我们同样给出第二节中所介绍系统的解析结果和数值结果。

A. 偏移的稳定性交换。解析方法

我们的目标是获得一个关于 p_{cr} 的解析表达式，该表达式考虑到系统在可观测时间区间$t_n < t_{cr}$内达到数值精度的阈值 $\eta_n = \eta(t_n)$。根据达到该阈值是在漂移开始之前还是之后，我们可以将系统的行为分为两种情况，即 A 和 B。

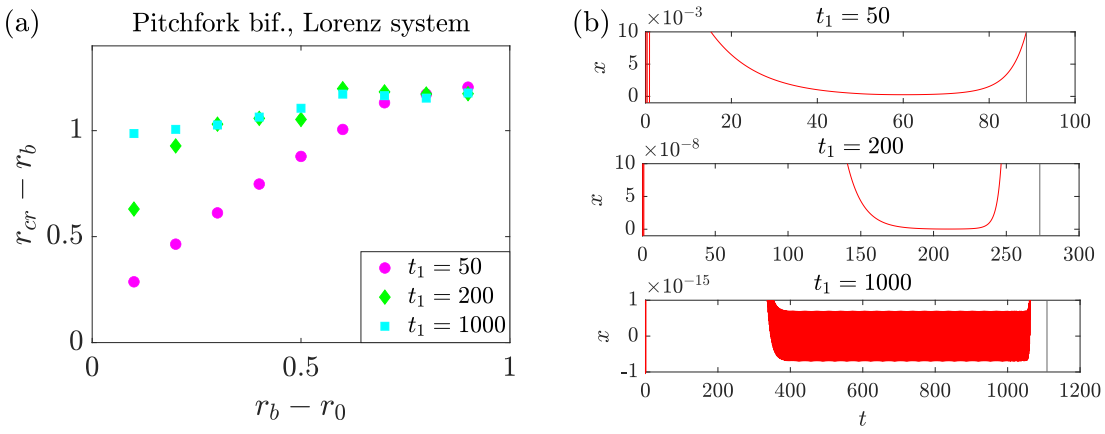


图 3. 不同 t_1 值下的记忆效应。(a) 中可以看到，对于较小的 t_1 值，偏移不太明显。当 r_0 的取值远离分岔时，由于三条轨迹进入非确定性区域，这种效应便会消失（r_{cr} 变得独立于 t_1）。(b) 展示了 $r_0 = 0.9$ 的时间序列，即 $r_b - r_0 = 0.1$。请注意，对于 $t_1 = 1000$，数值噪声已经出现，并导致记忆丧失。

(A) 系统在参数漂移开始之前达到数值精度阈值（$t_1 > t_n$）。在这种情况下，系统的动力学可以分为以下步骤:

(i) 以固定速率指数收敛至平衡态 $\lambda(p_0)$，直至 t_n。(ii) 在 $t \in [t_n, t_b]$、$t_b > t_1$内处于数值精度误差范围内的漂移阶段。(iii) 按照方程(9)在 $[t_b, t_{cr}]$ 上进行非自治确定性动力学，直至达到逃逸阈值 $\eta_{cr} = \eta(t_{cr})$。

（B）在参数漂移开始之前未达到阈值（$t_1 < t_n$）。在这种情况下，动力学分为以下步骤:

(i) 以固定速率指数收敛至平衡态 $\lambda(p_0)$，直至 t_1。(ii) 在 $[t_1, t_n]$上根据方程（9）进行非自治确定性动力学演化，直至达到数值精度阈值 $\eta_n = \eta(t_n)$。(iii) 在 $t \in [t_n, t_b]$, $t_b > t_1$范围内处于数值精度误差内的漂移阶段。(iv) 在 $[t_b, t_{cr}]$上根据方程（9）进行非自治确定性动力学演化，直至达到逃逸阈值 $\eta_{cr} = \eta(t_{cr})$。

在这两种情况下，系统从分岔值开始感受到排斥力，也就是说，此时平衡态失去稳定性。从这一刻起，动力学再次变为确定性的。

从描述偏离平衡态的距离的约化方程（式（9））出发，并结合式（8）–（11），我们得到情形 A 中距离 $\eta(t)$ 的以下表达式：

(A-i):

$$\eta_n = \eta_0 e^{\lambda(p_0)t_n}, \tag{19}$$

(A-ii):

$$\eta(t_b) = \eta_b = \eta_n = \eta_0 e^{\lambda(p_0)t_n}, \tag{20}$$

（A-iii）：

$$\eta(t) = \eta(t_b) \exp\left\{ \int_{t_b}^{t} \lambda(p_0 + \varepsilon(t - t_1))dt \right\}. \tag{21}$$

在阶段(A-ii)期间，最大偏差不发生变化，并且存在与数值噪声和数值积分方案的特性有关的快速波动。我们忽略这些波动，只考虑在该阶段之后距离从 η_b开始呈指数增长。等价地，式 (21) 中的积分可以用参数而非时间来表示，从而得到

$$\eta(t) = \eta(t_b) \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{p_0+\varepsilon(t_b-t_1)}^{p_0+\varepsilon(t-t_1)} \lambda(p)dp \right\} = \eta_0 \exp\left\{ \lambda(p_0)t_n + \frac{1}{\varepsilon} \int_{p_0+\varepsilon(t_b-t_1)}^{p_0+\varepsilon(t-t_1)} \lambda(p)dp \right\}. \tag{22}$$

现在，对于 $t = t_{cr}$，我们应用逃逸条件。

$$\ln \frac{\eta_{cr}}{\eta_0} = \lambda(p_0)t_n + \frac{1}{\varepsilon} \int_{p_b}^{p_{cr}} \lambda(p)dp \tag{23}$$

其中 $p_{cr} = p_0 + \varepsilon(t_{cr} - t_1)$和 $p_b = p_0 + \varepsilon(t_b - t_1) \geq p_{0}$。利用式 (19)，我们记$\lambda(p_0)$ $t_n = \ln \frac{\eta_n}{\eta_0} := C_1$。最后，考虑式 (14)，我们得到

$$\int_{p_b}^{p_{cr}} \lambda(p)dp = \varepsilon[C - C_1]. \tag{24}$$

由该表达式可得到 p_{cr} 的值，而该值不依赖于 p_{0}。因此，我们观察到，由于噪声的存在而产生了记忆丧失。在数值计算得到的点中，图2已经显示了这一现象：当系统进入非确定性状态时，各点达到一个平台，表明稳定性交换与 p_0 无关。

另一方面，公式（24）确实取决于变化率。对洛伦兹系统中的叉形分岔积分该方程，并考虑 $\eta_n = 10^{-19}$，我们在图4(a)中以红色曲线描绘了这种依赖关系。为便于观察，图中采用对数尺度表示。这对应于表示图2中平台的不同高度。我们观察到，偏移随着变化率的增加而增大。

公式（24）的另一个明显推论是，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $p_{cr} \to p_b$ 。这意味着，随着偏移趋于零，我们会恢复冻结分岔图。这对应于准静态参数变化的情形。此外，当 ε 足够小时，可以使用线性化$\lambda(p) \approx \lambda_0'(p - p_b)$，从而得到

$$p_{cr} = p_b + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda_0'}\,[C - C_1]},$$

这意味着平方根标度（$p_{cr} - p_b$） $\sim \varepsilon^{1/2}$。图4中用蓝色虚线绘出了所有分岔对应的这一幂律。对于叉形分岔，它与使用公式（24）计算得到的红色曲线非常相似。对于其余分岔，数值计算点似乎也符合这一近似。总的来说，我们发现不同分岔和系统都呈现出相似的定性行为，并遵循幂律（$p_{cr} - p_b$） $\sim \varepsilon^{1/2}$。

对于情形B，我们可以类似地得到以下结果

(B-i):

$$\eta_1 = \eta_0 e^{\lambda(p_0)t_1}, \tag{25}$$

(B-ii):

$$\eta_n = \eta(t_n) = \eta_1 \exp\left\{\int_{t_1}^{t_n} \lambda(p_0 + \varepsilon(t - t_1))dt\right\}, \tag{26}$$

$$\eta_n = \eta_0 \exp\left\{\lambda(p_0)t_1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{p_0}^{p_n} \lambda(p)dp\right\}, \tag{27}$$

其中 $p_n = p_0 + \varepsilon(t_n - t_1)$,

(B-iii):

$$\eta_b = \eta(t_b) = \eta_n, \tag{28}$$

以及（B-iv）:

$$\eta_{cr} = \eta_b \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{p_b}^{p_{cr}} \lambda(p)dp\right\} = \eta_0 \exp\left\{\lambda(p_0)t_1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{p_0}^{p_n} \lambda(p)dp + \int_{p_b}^{p_{cr}} \lambda(p)dp\right)\right\}, \tag{29}$$

从而导致

$$\int_{p_0}^{p_n} \lambda(p)dp + \int_{p_b}^{p_{cr}} \lambda(p)dp = \varepsilon \left[C - \lambda(p_0)t_1\right]. \tag{30}$$

在最后这个方程中，积分对应于达到数值阈值之前以及达到分岔之后漂移的确定性部分。式（30）与式（15）的区别在于，由于存在数值噪声，区间 $[p_n, p_b]$ 不得纳入考虑。在此区间内，与平衡态的最大偏差保持不变。在情形B中，我们再次发现记忆效应，因为式（30）取决于 p_0。

B. 偏移的稳定性交换。数值方法

现在，我们对非确定性状态下的 $p_b - p_{cr}$ 进行数值计算。t_1 的取值与上一节相同，并将 p_0 固定为以下数值：(a) $r_0 = 0.5$、(b) $r_0 = 24.5$、(c) $I_0 = 0.05$、(d) $a_0 = 0.2$。这些数值对应图2中各个平台的起始位置，因此可以确保我们处于非确定性状态。对于这些取值，在所有情况下我们都发现 $t_1 < t_n$，这对应于第四节A中的情形A。

如前所述，我们在此状态下发现了记忆丧失，这可以从图2中的平台看出。关于速率效应，我们在图4中展示了结果。为便于观察，这些点以对数尺度表示。正如上一节所述，这些数值计算得到的点与幂律 $(p_{cr} - p_b) \sim \varepsilon^{1/2}$ （蓝色虚线）相匹配。这意味着，无论分岔或系统如何，我们都能观察到对变化率变化的类似响应。

这些结果与先前关于复杂分岔的研究一致，例如洛伦兹系统中的异宿分岔 [18] 以及带时滞杜芬振子中的边界危机 [19]。在这两种情况下，失去稳定性的混沌吸引子都参与其中，因此预计它们不会遵循我们的解析计算结果（幂律中的指数不同于 $1/2$）。然而，从定性上看，它们表现出相似的速率效应。

表I总结了系统处于不同状态时产生的各种效应。对于确定性状态以及带有 $t_1 < t_n$ 的非确定性状态，偏移取决于参数 p_0 的初始值以及 ε。特别是，我们观察到，随着 $|p_b - p_0| \to 0$，对 ε 的依赖不那么显著。另一方面，对于带有 $t_1 > t_n$ 的非确定性状态，会发生记忆丧失。因此，偏移与 p_0 无关，我们可以将偏移近似为 $(p_{cr} - p_b) \sim \varepsilon^{1/2}$。

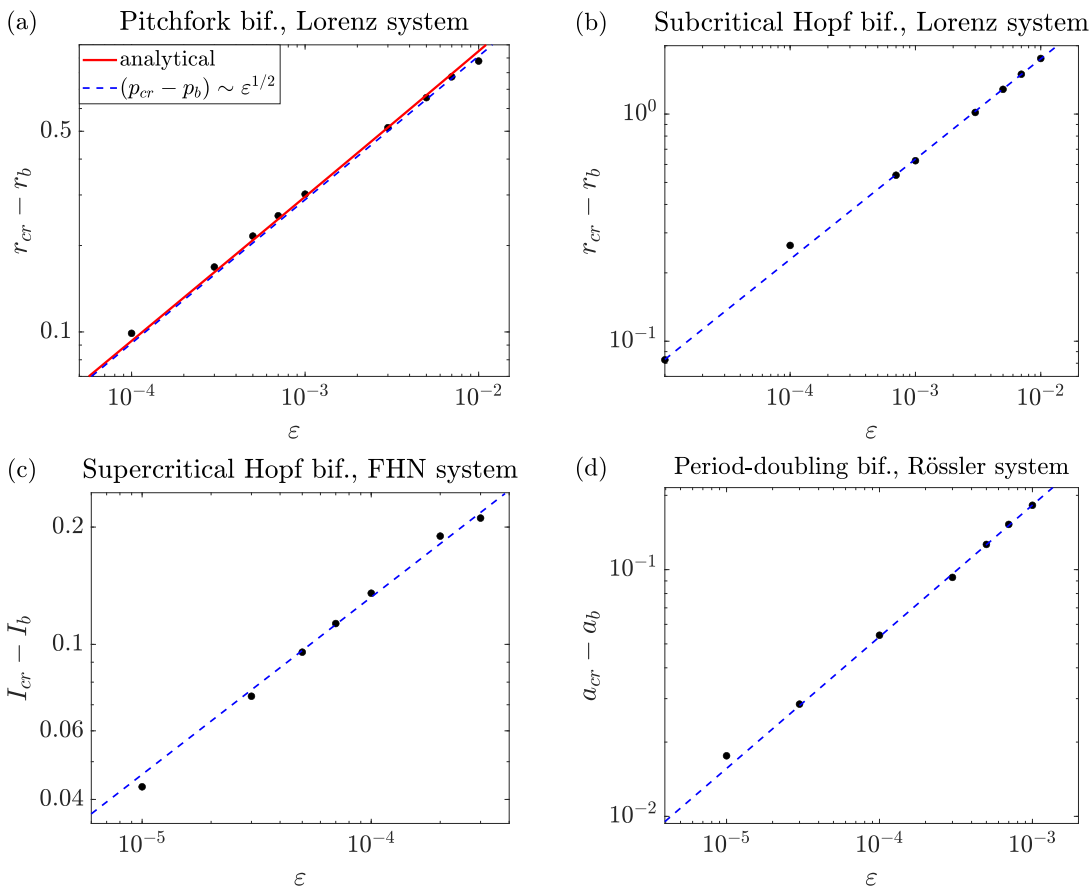


图4. 不同分岔和系统中，变化率对偏移的稳定性交换的速率效应。为便于观察，图中的坐标采用对数尺度。(a)中的红色曲线根据公式（24）通过解析计算得到，而(a)、(b)、(c)和(d)中的数据点则通过数值计算得到。所有系统的响应都相似：变化率越高，偏移越大，并且在所有情况下，偏移似乎近似遵循幂律 $(p_{cr} - p_b) \sim \varepsilon^{1/2}$ （蓝色虚线）。

V. 结论与讨论

我们研究了漂移参数越过分岔点时发生的偏移的稳定性交换。这种现象导致从一个吸引子向另一个吸引子的临界转变出现在分岔点之后的某个参数值处。为此，我们分析了一些典型系统，以寻找这一现象的共同特征。我们发现存在两种状态：确定性状态和非确定性状态。在某些漂移情景下，当参数变化率足够低时，系统会非常接近某个吸引子，以至于精度（数值噪声）不足以使其被吸引

确定性状态	非确定性状态	
	$t_1 > t_n$	$t_1 < t_n$
记忆效应	无记忆效应	记忆效应
速率效应	速率效应 $(p_{cr} - p_b) \sim \varepsilon^{1/2}$	速率效应

表I。确定性状态和非确定性状态下记忆效应（p_{cr} 对 p_0的依赖）与速率效应（p_{cr} 对 ε的依赖）的总结。

不再继续。在这种情况下，噪声发挥着重要作用，并导致系统进入非确定性状态。这是一种非常常见的情况，因为所有数值算法都受到精度限制的影响。此外，当实验装置接近吸引子时，如果其精度受到限制，也会处于这种状态。

对于确定性状态，我们推导出了偏移现象的表达式，即 p_{cr}的值；该值取决于参数的初始值（记忆效应）和变化率（速率效应）。在这种情况下，参数初始值距离分岔越远，速率效应越强烈。该表达式适用于叉形分岔等分岔类型，但数值计算表明，对于更复杂的分岔（如倍周期分岔），也表现出类似的定性行为。

对于非确定性状态，我们区分了数值阈值在漂移之前和之后达到的情况。当阈值在漂移之前达到时，噪声充当记忆丧失因子。我们推导出了偏移的解析表达式，并证明该表达式也与数值计算结果相符。对于速率效应，我们观察到所有系统和分岔都呈现如下形式的幂律标度：$(p_{cr} - p_b) \sim \varepsilon^{1/2}$ 。这意味着，如果 $\varepsilon \to 0$，那么 $p_{cr} \to p_b$，从而恢复冻结分岔图。对于阈值在漂移之后达到的情况，我们可以看到与确定性状态下类似的响应。我们也推导出了这种情况下的解析表达式。

最后，我们讨论本研究的意义。目前有大量研究致力于预测系统何时会发生临界转变，从而结束分岔与临界转变之间所谓的“借来的时间”。有时，这种转变并不可取，例如

在生态学或人为导致的气候变化背景下发生的种群灭绝。在其他情况下，临界转变可能是可取的，但应尽可能减少偏移。一些物理实验便属于这种情况，例如跨越临界温度的转变，因为改变参数的过程代价高昂。为此，我们认为有必要考虑本文所述的记忆效应和速率效应。

致谢

本研究得到西班牙国家研究署（AEI）和欧洲区域发展基金（ERDF，欧盟）的支持，项目编号为 PID2019-105554GB- I00（MCIN/AEI/10.13039/501100011033）。S.Y. 的研究工作得到德国研究基金会（DFG）的支持，项目编号为 411803875。

[1] A. Hastings、K. C. Abbott、K. Cuddington、T. Francis、G. Gellner、Y. C. Lai、A. Morozov、S. Petrovskii、K. Scranton 和 M. L. Zeeman，《生态学中的瞬态现象》，《科学》361（2018）。

[2]T. M. Lenton、H. Held、E. Kriegler、J. W. Hall、W. Lucht、S. Rahm- storf 和 H. J. Schellnhuber，《地球气候系统中的临界转变要素》，《美国国家科学院院刊》105，1786（2008）。

[3] A. Majumdar、J. Ockendon、P. Howell 和 E. Surovyatkina，《向列液晶中的临界温度转变》，《物理评论E辑：统计、非线性与软物质物理》88，022501（2013）。

[4]P. Ashwin、S. Wieczorek、R. Vitolo 和 P. Cox，《开放系统中的临界转变：气候系统中的分岔、噪声诱导和速率依赖示例》，Phil. Trans. R. Soc. A. 370，1166（2012）。

[5] S. Wieczorek、P. Ashwin、C. M. Luke 和 P. M. Cox，《斜坡变化系统中的兴奋性：堆肥炸弹不稳定性》，Proc. R. Soc. A 467，1243（2011）。

[6] E. Benoˆıt，《动态分岔》，载于《数学讲义》（LNM，第1493卷）（德国：Springer，1991），第1–13页。

[7] S. M. Baer、T. Erneux 和 J. Rinzel, 《缓慢经过 Hopf分岔：延迟、记忆效应与共振》, 《SIAM应用数学杂志》49，55（1989）。[8]A. Neishtadt, 《动力分岔中的稳定性丧失延迟》, 《离散与连续动力系统·S辑》2，897（2009）。[9] B. Kasz´as、U. Feudel 和 T. T´el, 《参数漂移作用下典型动力系统中的临界转变现象》, 《科学报告》9，1（2019）。[10] P. Ashwin、C. Perryman 和 S. Wieczorek, 《低维非自治系统的参数偏移：分岔诱发和速率诱发的临界转变》, 《非线性》30，2185（2017）。[11] Y. Song、W. Xu 和 Y. Jiao, 《双参数基因转录调控系统中由分岔和噪声诱发的临界转变》, 《欧洲物理学杂志 Plus》137，1（2021）。[12]N. Berglund 和 H. Kunz, 《缓慢驱动系统中的记忆效应与标度律》, 《物理学杂志 A：数学与一般》32，15（1999）。[13] N. Berglund 和 B. Gentz, 《简单气候模型中的亚稳态：缓慢驱动朗之万方程的路径分析》, 《随机动力学》02，327（2002）。[14] A. Neishtadt, 《动力分岔中稳定性丧失的持续性 I》, 《微分方程》23，1385（1987）。[15]T. P. Hughes、C. Linares、V. Dakos、I. A. van de Leemput 和 E. H. van Nes, 《在缓慢且未被察觉的状态转变期间，冒险活在借来的时间里》, 《生态学与进化趋势》28，149（2013）。[16] O. V. Maslennikov 和 V. I. Nekorkin, 《洛伦兹型映射中的动态边界危机》, 《混沌》23（2013）。[17] O. V. Maslennikov、V. I. Nekorkin 和 J. Kurths, 《周期强迫下洛伦兹型映射中的暂态混沌》, 《混沌》28，033107（2018）。[18] J. Cantis´an、J. M. Seoane 和 M. A. F. Sanju´an, 《参数漂移下洛伦兹系统的暂态动力学》, 《国际分岔与混沌杂志》31，2150029（2021）。[19] J. Cantis´an、J. M. Seoane 和 M. A. F. Sanju´an, 《参数漂移作用下时滞系统中的暂态混沌》, 《复杂物理学杂志》2，025001（2021）。[20] J. Su, 《延迟分岔现象及其分析》, 载于《多重动力系统》, C. K. R. T. Jones 和 A. I. Khibnik 编（Springer，纽约州纽约，2001），第203–214页。[21] E. N. Lorenz, 《确定性非周期流》, 《大气科学杂志》20，130（1963）。[22] R. FitzHugh, 《神经膜理论模型中的脉冲与生理状态》,

《生物物理学杂志》1, 445 (1961).[23] J. Nagumo、S. Arimoto 和 S. Yoshizawa, 《模拟神经轴突的有源脉冲传输线》, 《IRE会刊》50, 2061 (1962).[24] A. L. Hodgkin 和 A. F. Huxley, 《膜电流的定量描述及其在神经传导与兴奋中的应用》, 《生理学杂志》117, 500 (1952).[25]S. M. Baer 和 E. M. Gaekel, 《缓慢地加速和减速通过Hopf分岔：幂斜坡、靶点成核与椭圆爆发》, 《物理评论E辑：统计、非线性与软物质物理》78, 1 (2008).[26] O. E. R¨ossler, 《连续混沌的一个方程》, 《物理快报A辑》57, 397 (1976).