arXiv:2304.03675v1 [math.FA] 7 Apr 2023

巴拿赫空间之间映射的分离比

CHRISTIAN ROSENDAL

Abstract. 在关于巴拿赫空间 E 同构嵌入 E的弱假设下，我们通过一个单一的数值不变量刻画巴拿赫空间 X 粗嵌入 E 的条件。

1. Introduction

度量空间之间的粗嵌入性这一概念可以看作一致嵌入性在大尺度上的类比，而从与映射相关的模量角度来理解可能最为容易。然而，由于我们只关注巴拿赫空间，这些模量还可以进一步归结为一对数值不变量。

定义1.对于两个巴拿赫空间之间的一个（通常是不连续且非线性的）映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，我们将精确压缩系数$\overline{\kappa}(\phi)$、压缩系数 $\kappa(\phi)$ 和扩张系数 $\omega(\phi)$ 定义为

$$\overline{\kappa}(\phi) = \sup_{t<\infty} \inf_{\|x-y\|=t} \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\|,$$

$$\kappa(\phi) = \sup_{t<\infty} \inf_{\|x-y\|\geqslant t} \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\|,$$

and

$$\omega(\phi) = \inf_{t>0} \sup_{\|x-y\|\leqslant t} \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\|.$$

为避免某些平凡情形，我们将默认所有巴拿赫空间的维数至少为 2，因此尤其是，上述下确界和上确界均取自非空集合。首先注意到一个显然的事实： $\omega(\phi) = 0$ 当且仅当 ϕ 是一致连续的。另一方面， $\omega(\phi) < \infty$ 当且仅当ϕ 在较大距离下是利普希茨的，也就是说，

$$\big\|\phi(x) - \phi(y)\big\| \leqslant K\|x - y\| + K$$

对于某个常数 K 以及所有 x、 $y \in X$。类似地，关于 $\kappa(\phi)$ 的假设对应于关于映射 ϕ 的已知条件。我们总结如下。

(1) $\omega(\phi) = 0$，即， ϕ 是一致连续的，(2) $\omega(\phi) < \infty$，即， ϕ 在大距离下是利普希茨的，(3) $\kappa(\phi) = \infty$，即，ϕ 是膨胀的，(4) $\kappa(\phi) > 0$，即， ϕ 是不塌缩的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46B80.*Key words and phrases.* 粗嵌入、巴拿赫空间。本文的研究得到了 NSF 通过项目编号 DMS 2204849 的资助。

注意，上述三个系数都是正齐次的，即

$$\kappa(\lambda\phi) = \lambda \cdot \kappa(\phi)$$

对所有 $\lambda > 0$ 均成立；同理，对 $\overline{\kappa}(\phi)$ 和 $\omega(\phi)$ 也成立。特别是，这意味着下述量在对 ϕ 进行缩放时保持不变。

定义 2。映射 $X \xrightarrow{\phi} E$ 的分离比为

$$\mathcal{R}(\phi) = \frac{\kappa(\phi)}{\omega(\phi)},$$

其中，我们对所有 $a \in [0, \infty]$ 令 $\frac{a}{\infty} = \frac{0}{a} = 0$，并对所有 $0 < a < \infty$ 令 $\frac{a}{0} = \frac{\infty}{a} = \frac{\infty}{0} = \infty$。

虽然无法直接通过上述系数来表述 ϕ 是一致嵌入，但我们注意到，只要 $\omega(\phi) < \infty$ 且 $\kappa(\phi) = \infty$，ϕ 就是粗嵌入；也就是说，若 ϕ 在较大距离下是利普希茨的且具有扩张性。因此我们看到

$$\mathcal{R}(\phi) = \infty$$

当且仅当 ϕ 是一致连续且不塌缩的（例如一致嵌入），或者 ϕ 是粗嵌入时。

部分动机来自这样一个至今尚未解决的问题：判定一个巴拿赫空间X 粗嵌入一个巴拿赫空间 E，当且仅当它一致嵌入。论文 [2, 3, 7, 8, 9, 10] 包含了各种用于构造一致嵌入和粗嵌入，或构造相应障碍的方案。特别地，在 [10]（见定理 1.16）中，我们证明了，只要 $E \oplus E$ 同构嵌入到 E中，那么一个一致连续且非塌缩的映射 $X \xrightarrow{\phi} E$ 便可导出一个将 X 同时一致嵌入和粗嵌入到 E中的映射。然而，正如 A.Naor [7],所示，存在一些在大距离上具有利普希茨性质的映射，它们甚至不接近任何一致连续映射。对于粗嵌入性这一唯一目的而言，我们的主要结果定理 3 消除了对 ϕ的一致连续性这一有问题的假设。

定理3.假设 X 和 E 是巴拿赫空间，使得 $E \oplus E$ 同构嵌入到 E 中。那么 X 粗嵌入到 E 当且仅当

$$\sup_{\phi} \mathcal{R}(\phi) = \infty,$$

其中，上确界取遍所有映射 $X \xrightarrow{\phi} E$。

定理 3 的证明还使我们能够处理另一个问题，即不同形式的可嵌入性对余型的保持性。为此，考虑映射 $X \xrightarrow{\phi} E$ 满足的以下条件。

(5) $\overline{\kappa}(\phi) = \infty$，也就是说，$\phi$ 几乎扩张；(6) $\overline{\kappa}(\phi) > 0$，也就是说，$\phi$ 几乎未塌缩。

此外，若存在常数 R_1、R_2、.....使得下式成立，则称映射 ϕ 可解：

$$R_n \leqslant \|x - y\| \leqslant R_n + n \;\Rightarrow\; \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\| \geqslant n.$$

在 ϕ 对大距离满足利普希茨条件的前提下，ϕ 可解当且仅当它几乎扩张（见引理 8 [8]）。类比定义 2，我们随后将 ϕ 的精确分离比定义为

$$\overline{\mathcal{R}}(\phi) = \frac{\overline{\kappa}(\phi)}{\omega(\phi)}.$$

由于 $\kappa(\phi) \leqslant \overline{\kappa}(\phi)$，因此我们有 $\mathcal{R}(\phi) \leqslant \overline{\mathcal{R}}(\phi)$。此外，$\overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty$ 当且仅当ϕ是均匀连续且几乎未塌缩的，或者在大距离下是利普希茨的且可解。

与此相关，B. Braga [3] 强化了 M. Mendel 和 A. Naor [6] 的工作，证明如果 X 通过一个映射映入具有非平凡型的巴拿赫空间 E，且该映射要么一致连续并且几乎未塌缩，要么在大距离下是利普希茨的且可解，那么

$$\operatorname{cotype}(X) \leqslant \operatorname{cotype}(E).$$

因此，以下陈述涵盖了 Braga 的结果的两种情况，并且似乎提供了这一方向上的最终推广。

定理 4. 假设 X 和 E 是巴拿赫空间，使得

$$\sup_{\phi} \overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty$$

并且 E 具有非平凡型。于是

$$\operatorname{cotype}(X) \leqslant \operatorname{cotype}(E).$$

Braga 的论文 [3] 中的问题 7.4 提出：对于一个空间 X，如果存在映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，它仅在大距离下是利普希茨的，且几乎未塌缩，也就是说满足 $\overline{\mathcal{R}}(\phi) > 0$，那么可以推导出什么结论？换言之，对$E$ 几何的限制是否也能让我们了解 X 的几何？在例 10 中，我们证明情况并非总是如此。事实上，如果 X 是可分的，且 E 是无限维的，那么总能找到一个映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，它在大距离下既是利普希茨的又不塌缩，也就是说满足 $\mathcal{R}(\phi) > 0$；对 E 重新赋范后，甚至可以得到$\mathcal{R}(\phi) \geqslant 1$。另一方面，在另一项假设 $\sup_{\phi} \overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty$ 下，定理 4 对 Braga 的问题给出了肯定的回答。

致谢：我非常感谢 B. Braga 对本文初稿提出的详尽反馈和批评，也感谢他建议了与余型的联系，这一建议促成了定理 4。

2. Proofs

在证明主要结果之前，我们先介绍四个函数模，它们是（精确）压缩系数和扩张系数定义的基础。

定义 5（压缩模）。对于两个巴拿赫空间之间的映射 $X \xrightarrow{\phi} E$（通常不连续且非线性），我们定义精确压缩模量$\overline{\kappa}_{\phi}$：$[0,\infty[\to [0,\infty[$

$$\overline{\kappa}_{\phi}(t) = \inf\left\{\|\phi(x) - \phi(y)\| \;\middle|\; \|x - y\| = t\right\}$$

并将压缩模量定义为 $\overline{\kappa}_{\phi}$：$[0,\infty[\to [0,\infty[$，其定义如下：

$$\kappa_{\phi}(t) = \inf\left\{\|\phi(x) - \phi(y)\| \;\middle|\; \|x - y\| \geqslant t\right\}.$$

因此，$\overline{\kappa}_{\phi}$ 是逐点最大的映射，使得对所有 $x, y \in X$，$\overline{\kappa}_{\phi}\big(\|x - x\|\big) \leqslant \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\|$；而 $\kappa_{\phi}(t) = \inf_{r \geqslant t} \overline{\kappa}_{\phi}(r)$是满足相同不等式的逐点最大单调映射。

定义 6（扩张模量）。对于一个在巴拿赫空间之间的映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，精确扩张模量 $\overline{\omega}_\phi\colon\ [0,\infty[\to [0,\infty]$ 定义为

$$\overline{\omega}_\phi(t) = \sup\big\{\|\phi(x)-\phi(y)\| \;\big|\; \|x-y\| = t\big\},$$

以及扩张模数 $\omega_\phi\colon\ [0,\infty[\to [0,\infty]$ 乘以

$$\omega_\phi(t) = \sup\big\{\|\phi(x)-\phi(y)\| \;\big|\; \|x-y\| \leqslant t\big\}.$$

以下结论显而易见。

$$\kappa_\phi(t) \leqslant \overline{\kappa}_\phi(t) \leqslant \overline{\omega}_\phi(t) \leqslant \omega_\phi(t).$$

我们回顾一下，为避免平凡情形，假设所有巴拿赫空间的维数至少为 2。因此，设 $X \xrightarrow{\phi} E$ 是一个映射，且 $t>0$ 和 $x,\ y \in X$。令 $n \geqslant 1$ 为满足 $\|x-y\| \leqslant nt$ 的最小值，由此（$n-1$）$t \leqslant \|x-y\|$，并选取 $z_0 = x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ z_n = y$，使得 $\|z_{i-1}-z_i\| = t$ 对 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n$ 成立。于是

$$\big\|\phi(x)-\phi(y)\big\| \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{n}\big\|\phi(z_{i-1})-\phi(z_i)\big\| \ \leqslant\ n\cdot\overline{\omega}_\phi(t) \leqslant \frac{\overline{\omega}_\phi(t)}{t}\|x-y\| + \overline{\omega}_\phi(t).$$

进而，这表明

$$\omega_\phi(s) \leqslant \frac{\overline{\omega}_\phi(t)}{t}s + \overline{\omega}_\phi(t)$$

对所有 $s,\ t > 0$ 均成立，因此 $\limsup_{s\to 0_+}\omega_\phi(s) \leqslant \inf_{t>0}\overline{\omega}_\phi(t)$。由于 ω_ϕ 是非递减的，极限 $\lim_{s\to 0_+}\omega_\phi(s) = \inf_{s>0}\omega_\phi(s)$ 存在，由此

$$\inf_{t>0}\overline{\omega}_\phi(t) \leqslant \liminf_{t\to 0_+}\overline{\omega}_\phi(t) \leqslant \limsup_{t\to 0_+}\overline{\omega}_\phi(t) \leqslant \lim_{t\to 0_+}\omega_\phi(t) \leqslant \inf_{t>0}\overline{\omega}_\phi(t).$$

总而言之，我们发现，

$$\omega(\phi) = \inf_{t>0}\omega_\phi(t) = \lim_{t\to 0_+}\omega_\phi(t) = \lim_{t\to 0_+}\overline{\omega}_\phi(t) = \inf_{t>0}\overline{\omega}_\phi(t).$$

特别是，引入精确扩张系数 $\overline{\omega}(\phi) = \inf_{t>0}\overline{\omega}_\phi(t)$ 并不会带来任何新内容，因为这本身就是扩张系数。此外，如果 $\omega(\phi) < \infty$，那么 ϕ 在较大距离下是利普希茨的，也就是说，

$$\big\|\phi(x)-\phi(y)\big\| \leqslant K\|x-y\| + K$$

对于某个常数 K 以及所有 x、$y \in X$。

接下来，分离比的定义乍看之下可能不太容易理解，因此我们简要地更明确地重述一下。

引理 7. 对于映射 $X \xrightarrow{\phi} E$ 和常数 $K > 0$，我们有

$$\mathcal{R}(\phi) > K$$

当且仅当存在常数 Δ、δ、Λ、$\lambda > 0$ 使得

$$\|x-y\| \geqslant \Delta \ \Rightarrow\ \big\|\phi(x)-\phi(y)\big\| \geqslant \delta,$$

$$\|x-y\| \leqslant \Lambda \ \Rightarrow\ \big\|\phi(x)-\phi(y)\big\| \leqslant \lambda$$

和 $\frac{\delta}{\lambda} > K$。

证明。注意，如果 $\mathcal{R}(\phi) > K$，我们可以找到 $\Delta, \Lambda > 0$ 使得 $\frac{\kappa_\phi(\Delta)}{\omega_\phi(\Lambda)} > K$。令 $\delta = \kappa_\phi(\Delta)$ 和 $\lambda = \omega_\phi(\Lambda)$，两个蕴含关系随即成立。

反之，若对于某些 Δ、δ、Λ、$\lambda > 0$，这两个蕴含关系成立，使得 $\frac{\delta}{\lambda} > K$，那么

$$\mathcal{R}(\phi) = \frac{\sup_{t<\infty} \kappa_\phi(t)}{\inf_{t>0} \omega_\phi(t)} \geqslant \frac{\kappa_\phi(\Delta)}{\omega_\phi(\Lambda)} \geqslant \frac{\delta}{\lambda} > K,$$

这就证明了该引理。 □

定理3 的证明。如前所述，如果 $X \xrightarrow{\phi} E$ 是任意巴拿赫空间之间的粗嵌入，那么 $\mathcal{R}(\phi) = \infty$，这就证明了一个方向的蕴含关系。此外，在关于 E的给定假设下，根据定理1.16 [10], 我们有， X 粗嵌入到 E 当且仅当对于某个映射 $X \xrightarrow{\phi} E$， $\mathcal{R}(\phi) = \infty$。因此，我们仅假设 $\sup_\phi \mathcal{R}(\phi) = \infty$。接下来我们如下构造一个粗嵌入 $X \xrightarrow{\psi} E$。

由于 $E \oplus E$同构嵌入到 E中，我们可以归纳地构造两个由 E 的闭线性子空间组成的序列 E_n、Z_n，它们都与 E 同构，使得

$$E_{n+1} \oplus Z_{n+1} \subseteq Z_n.$$

具体而言，我们只需先在 E 中取一个 $E \oplus E$ 的同构副本，并分别令 E_1和 Z_1 为第一和第二个直和项。再在 Z_1 中选取一个 $E \oplus E$ 的同构副本，其第一和第二个直和项分别记为 E_2和 Z_2，依此类推。因此可得

$$E \supseteq E_1 \oplus Z_1 \supseteq E_1 \oplus E_2 \oplus Z_2 \supseteq E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus Z_3 \supseteq \dots$$

是 E的一个递减闭线性子空间序列。令

$$V_n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n \oplus Z_n$$

并令 $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$。注意， V 是 E 的一个闭线性子空间，其中每个 E_n 都是一个闭子空间，且由有界投影 $V \xrightarrow{P_n} E_n$ 补。于是，当 $n \neq m$时， $E_m \subseteq \ker P_n$。另一方面，我们无法对范数 $\|P_n\|$给出统一的上界。

现在固定一列同构 $E \xrightarrow{T_n} E_n$，并找出映射 $X \xrightarrow{\theta_n} E$，使得$\mathcal{R}(\theta_n) > n\, 2^n \|P_n\| \|T_n\| \|T_n^{-1}\|$。注意，对所有 $t > 0$,

$$\kappa_{T_n \circ \theta_n}(t) \geqslant \frac{\kappa_{\theta_n}(t)}{\|T_n^{-1}\|},$$

而

$$\omega_{T_n \circ \theta_n}(t) \leqslant \|T_n\| \cdot \omega_{\theta_n}(t),$$

这表明

$$\mathcal{R}(T_n \circ \theta_n) \geqslant \frac{\mathcal{R}(\theta_n)}{\|T_n\| \|T_n^{-1}\|} \geqslant n\, 2^n \|P_n\|.$$

令 $\phi_n = T_n \circ \theta_n$，我们得到 $\lim_n \mathcal{R}_{(\phi_n)} \overline{2^n \|P_n\|} = \infty$。因此，定理的结论可直接由下文的引理 8 得出。□

引理 8. 设 X 和 E 是巴拿赫空间，且 $E \xrightarrow{P_n} E$ 是一个有界线性投影序列，其像为子空间 $E_n \subseteq E$，满足 $E_m \subseteq \ker P_n$ 对所有$m \neq n$成立。另假设存在一个映射序列

$$X \xrightarrow{\phi_n} E_n$$

使得

$$\lim_n \frac{\mathcal{R}(\phi_n)}{2^n \|P_n\|} = \infty.$$

那么，X 粗嵌入到 E。

证明。通过与一个平移复合，我们不妨假设对每个n，都有 $\phi_n(0) = 0$。由于 $\lim_n \frac{\mathcal{R}(\phi_n)}{2^n\|P_n\|} = \infty$，我们还可以找到常数 $\Delta_n, \delta_n, \Lambda_n, \lambda_n > 0$，使得

$$\|x - y\| \geqslant \Delta_n \;\Rightarrow\; \big\|\phi_n(x) - \phi_n(y)\big\| \geqslant \delta_n$$

and

$$\|x - y\| \leqslant \Lambda_n \;\Rightarrow\; \big\|\phi_n(x) - \phi_n(y)\big\| \leqslant \lambda_n,$$

而

$$\lim_n \frac{\delta_n}{\lambda_n 2^n \|P_n\|} = \infty.$$

对于每个 n，令

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\lambda_n 2^n} \cdot \phi_n\Big(\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot x\Big).$$

Then

$$\begin{aligned} \|x - y\| \leqslant n \;&\Rightarrow\; \big\|\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot x - \tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot y\big\| \leqslant \Lambda_n \\ &\Rightarrow\; \Big\|\phi_n\big(\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot x\big) - \phi_n\big(\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot y\big)\Big\| \leqslant \lambda_n \\ &\Rightarrow\; \|\psi_n(x) - \psi_n(y)\| \leqslant 2^{-n}. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geqslant \frac{n\Delta_n}{\Lambda_n} \;&\Rightarrow\; \big\|\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot x - \tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot y\big\| \geqslant \Delta_n \\ &\Rightarrow\; \Big\|\phi_n\big(\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot x\big) - \phi_n\big(\tfrac{\Lambda_n}{n} \cdot y\big)\Big\| \geqslant \delta_n \\ &\Rightarrow\; \big\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\big\| \geqslant \frac{\delta_n}{\lambda_n 2^n}. \end{aligned}$$

尤其是，如果 $\|x - y\| \leqslant m$，那么对于所有 $n \geqslant m$ 都有 $\|x - y\| \leqslant n$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\big\| \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} \big\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\big\| + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

此外，对所有 n，$\psi_n(0) = 0$，这表明，对所有 $x \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\|\psi_n(x)\big\| < \infty$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$在 E 中绝对收敛。因此，我们可以定义一个映射 $X \xrightarrow{\psi} E$，令

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x).$$

现在我们验证 ψ 是从 X 到 E的粗嵌入。首先，令 $m \geqslant 1$ 为任意给定的自然数，并假设 x、$y \in X$ 满足 $\|x-y\| \leqslant m$。那么我们可以找到 $z_0 = x$、z_1、z_2、……、$z_m = y$，使得对所有 i 都有 $\|z_{i-1} - z_i\| \leqslant 1$，因此特别地，对所有 n都有 $\|\psi_n(z_{i-1}) - \psi_n(z_i)\| \leqslant 2^{-n}$。由此可得

$$\begin{aligned}
\big\|\psi(x)-\psi(y)\big\| &= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(y)\Big\| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m-1}\big\|\psi_n(x)-\psi_n(y)\big\| + \sum_{n=m}^{\infty}\big\|\psi_n(x)-\psi_n(y)\big\| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m-1}\big\|\psi_n(z_0)-\psi_n(z_m)\big\| + \sum_{n=m}^{\infty}2^{-n} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m-1}\Big\|\sum_{i=1}^{m}\big(\psi_n(z_{i-1})-\psi_n(z_i)\big)\Big\| + 2^{-m+1} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{m}\big\|\psi_n(z_{i-1})-\psi_n(z_i)\big\| + 2^{-m+1} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{m}2^{-n} + 2^{-m+1} \\
&= \sum_{n=1}^{m-1} m2^{-n} + 2^{-m+1} \\
&< m + 2^{-m+1}.
\end{aligned}$$

换言之，对于所有 m 以及 $x, y \in X$，我们有

$$\|x-y\| \leqslant m \;\Rightarrow\; \big\|\psi(x)-\psi(y)\big\| < m + 2^{-m+1}.$$

反过来，如果给定任意 m，就取足够大的 n，使得 $\frac{\delta_n}{\lambda_n 2^n \|P_n\|} \geqslant m$。那么，如果 $\|x-y\| \geqslant \frac{n\Delta_n}{\Lambda_n}$，我们有

$$\begin{aligned}
\|\psi(x)-\psi(y)\| &\geqslant \frac{1}{\|P_n\|}\big\|P_n\psi(x) - P_n\psi(y)\big\| \\
&= \frac{1}{\|P_n\|}\big\|\psi_n(x)-\psi_n(y)\big\| \\
&\geqslant \frac{\delta_n}{\lambda_n 2^n \|P_n\|} \\
&\geqslant m.
\end{aligned}$$

综上，这两个条件表明 ψ 是一个粗嵌入。 □

定理 4 的证明。设 X 和 E 是巴拿赫空间，使得

$$\sup \overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty,$$

且 E 具有非平凡型，即，型$(E) > 1$。然后我们注意到，型$\big(\ell_2(E)\big)$ =型$(E) > 1$，并且余型$\big(\ell_2(E)\big)$ =余型(E)。因此，如果我们能证明 X 映射

通过一个在大距离下满足利普希茨条件且可解的映射到 $\ell_2(E)$，那么，根据前面提到的 Braga 结果（定理 1.3 [3]），我们将得到的是

$$\mathsf{cotype}(X) \leqslant \mathsf{cotype}\big(\ell_2(E)\big) = \mathsf{cotype}(E).$$

因此，固定一列映射 $X \xrightarrow{\phi_n} E$，使得对所有 $n \geqslant 1$，有 $\overline{\mathcal{R}}(\phi_n) > n2^n$。这意味着存在 Δ_n、δ_n、Λ_n、$\lambda_n > 0$，使得

$$\|x - y\| = \Delta_n \;\Rightarrow\; \big\|\phi_n(x) - \phi_n(y)\big\| \geqslant \delta_n$$

and

$$\|x - y\| \leqslant \Lambda_n \;\Rightarrow\; \big\|\phi_n(x) - \phi_n(y)\big\| \leqslant \lambda_n$$

以及 $\frac{\delta_n}{\lambda_n} > n2^n$。然后我们将 ψ_n 定义为 $\psi_n(x) = \frac{1}{2^n\lambda_n}\phi_n\big(\frac{\Lambda_n}{n}x\big)$，并注意到。

$$\|x - y\| \leqslant n \;\Rightarrow\; \big\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\big\| \leqslant 2^{-n},$$

而

$$\|x - y\| = \tfrac{n\Delta_n}{\Lambda_n} \;\Rightarrow\; \big\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\big\| \geqslant n.$$

我们最终将 $X \xrightarrow{\psi} \ell_2(E)$定义为 $\psi(x) = \big(\psi_1(x)\ \psi_2(x)\ \dots\big)$，并注意到，根据上述内容，$\psi$定义良好，并满足 $\omega(\psi) \leqslant \omega_\psi(1)$ 61 以及 $\overline{\kappa}(\psi) \geqslant \overline{\kappa}_\psi\big(\frac{n\Delta_n}{\Lambda_n}\big) \geqslant n$对所有 n 均成立。换言之，ψ 在较大距离下是利普希茨的且可解。□

证明定理 4 的另一种方法是，先针对量 $\sup_\phi \overline{\mathcal{R}}(\phi)$ 建立一个类似于定理 3 的结果，以取代 $\sup_\phi \mathcal{R}(\phi)$。具体做法是注意到，上文定理 3 的证明可以加以修改，从而证明以下命题。

定理 9. 设 X 和 E 是巴拿赫空间，且 $E \oplus E$ 同构嵌入到 E 中。另假设

$$\sup_\phi\ \overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty,$$

那么存在一个映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，它在大距离下是利普希茨的且可解。

为了得到定理 4，只需注意到 $\ell_2(E) \oplus \ell_2(E) \cong \ell_2(E)$，因此，若 $\sup_\phi \overline{\mathcal{R}}(\phi) = \infty$，其中上确界取遍所有映射 $X \xrightarrow{\phi} E$，则存在一个映射 $X \xrightarrow{\psi} \ell_2(E)$，它在大距离下既是利普希茨的又是可解的。

3. Examples

定理 3 表明，对于每一对巴拿赫空间 X 和 E，我们都可以关联常数

$$\mathcal{CR}(X, E) = \sup\big\{\mathcal{R}(\phi) \;\big|\; \phi\colon X \to E \text{ is a map}\big\}$$

在对 E 施加非常温和的假设下，该数值衡量了 X 到 E 的粗嵌入性程度。数值 $\mathcal{CR}(X, E)$ 将被称为 X 在 E 中的粗嵌入比。

如下一个例子所示，主要关注的是 $\mathcal{CR}(X, E) > 1$ 的情形，而 $\mathcal{CR}(X, E) = 1$ 则容易得到。

例 10. 若 X 可分，且 E 是一个含有无限等距集的巴拿赫空间，也就是说，存在一个无限子集 $A \subseteq E$，使得对于某个 $\delta > 0$,

$$\|x - y\| = \delta$$

对于所有互不相同的 x，都有 $y \in A$，那么我们便有 $\mathcal{CR}(X,E) \geqslant 1$。为证明这一点，令 $(Y_x)_{x\in A}$ 为 X 的一个划分，该划分以集合 A 为指标，划分成直径至多为 1 的子集 $Y_x \subseteq X$，并令 $X \xrightarrow{\phi} E$ 定义为

$$\phi(y) = x \;\Leftrightarrow\; x \in A \;\&\; y \in Y_x.$$

注意，如果 $\|y - y'\| > 1$，那么 y 和 y' 必定属于划分中的不同部分，因此 $\|\phi(y) - \phi(y')\| = \delta$。另一方面，对于所有 y、$y' \in X$，都有 $\|\phi(y) - \phi(y')\| \leqslant \delta$，由此可知，对于所有 $t > 1$，$\kappa_\phi(t) = \delta$，而对于所有 $t > 0$，$\omega_\phi(t) \leqslant \delta$。因此 $\mathcal{R}(\phi) \geqslant 1$。

特别地，当 E 是经典巴拿赫空间 ℓ_p、c_0、L_p 中的一个，甚至是 Tsirelson 空间 T 时，这一推理仍然适用。事实上，在这些空间中，标准单位基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个无限等距集（或者，就 Tsirelson 空间而言，$(e_n)_{n=2}^{\infty}$ 是等距的）。这里我们要指出，T^* 是 B. S.Tsirelson [11], 最初构造并描述的自反空间，而 T 是其 ℓ_1-渐近对偶空间，其显式构造由 T.Figiel 和 W. B. Johnson 给出 [5]。

还要指出，如果 E 是无限维的，那么 E 可以赋予一个等价的重新赋范，使其具有一个无限等距集。事实上，由于 E 是无限维的，它包含一个规范化基序列 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$。我们在闭线性空间 $[e_n]_{n=1}^{\infty}$ 上定义一个新的等价范数 $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$，定义如下

$$|\!|\!|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n|\!|\!| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{n\in I} a_n e_n\Big\| + \Big\|\sum_{n\in J} a_n e_n\Big\| \;\Big|\; I, J \text{ are intervals and } i < j \text{ for all } i \in I \text{ and } j \in J\Big\}.$$

由于对于所有 n，$\|e_n\| = 1$，我们得到对于所有 $i < j$，$|\!|\!|e_i - e_j|\!|\!| = 2$，因此 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是范数 $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ 下的等距集。现在只需注意到，$|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ 可扩展为整个 E 上的一个等价范数。

例 10说明，可嵌入比率 $\mathcal{CR}(X,E)$ 对 E 上的具体范数敏感，但不受 X 上范数选择的影响。另一方面，条件 $\mathcal{CR}(X,E) = \infty$ 仅取决于 E 的同构类。还要注意，如果 X、Y 和 Z 是巴拿赫空间，且 $\mathcal{CR}(X,Y) = \infty$，那么

$$\mathcal{CR}(X,Z) \geqslant \mathcal{CR}(Y,Z).$$

F. Baudier、G. Lancien 和 T. Schlumprecht [1], 最近证明了一个重要的不可嵌入性结果，他们表明，可分 Hilbert 空间 ℓ_2 不能粗嵌入 Tsirelson 空间 T^*。已知 T^* 是极小的，也就是说，T^* 同构地嵌入其所有的无限维子空间中（见第 VI 章 [4]）。此外，T^* 具有一个无条件基，因此可以写成两个无限维子空间的直和。因此可得，$T^* \oplus T^*$ 同构地嵌入 T^*，从而 $E = T^*$ 满足定理 3 的假设。由此，粗嵌入比 $\mathcal{CR}(\ell_2, T^*)$ 是有限的，下面我们将给出一个上界。

命题 11. 若 T^* 表示 Tsirelson 空间，则

$$\mathcal{CR}(\ell_2, T^*) \leqslant 4.$$

证明。我们依赖于对 [1], 的分析，其中也包含下述构造的更多细节。为证明这一点，反设 $\ell_2 \xrightarrow{\phi} E$

满足 $\mathcal{R}(\phi) > 4$。然后，通过对 ϕ 进行前后复合伸缩变换，我们可以假设，对于某些常数 $\Delta > 0$ 和 $\delta > 4$，有

$$\|x - y\| \geqslant \Delta \;\Rightarrow\; \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\| \geqslant \delta$$

and

$$\|x - y\| \leqslant \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \big\|\phi(x) - \phi(y)\big\| \leqslant 1.$$

令 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 ℓ_2 的标准单位向量基，并设 $\epsilon = \frac{\delta - 4}{2}$。再取足够大的 k，使得 $\sqrt{2k} \geqslant \Delta$，并令 $[\mathbb{N}]^k$ 表示 $\mathbb{N}$ 的所有 k 元子集的集合，赋予 Johnson 度量，

$$d_J(A, B) = \frac{|A \vartriangle B|}{2}.$$

注意，d_J 就是这样一个图上的最短路径度量：其顶点为 $[\mathbb{N}]^k$，且当且仅当 $|A \vartriangle B| = 2$ 时，两个顶点 A 和 B 之间有一条边。于是定义映射 $f\colon [\mathbb{N}]^k \to T^*$ 如下：

$$f(A) = \phi\Big(\sum_{n \in A} e_n\Big).$$

注意，若 $d_J(A, B) = 1$，则

$$\Big\|\sum_{n \in A} e_n - \sum_{n \in B} e_n\Big\| = \sqrt{|A \vartriangle B|} = \sqrt{2}$$

因此 $\|f(A) - f(B)\| \leqslant 1$。故 f 是常数为 1 的利普希茨映射。

由命题 4.1 [1]，存在一个无限子集 $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ 以及某个 $y \in T^*$，使得对于任意满足 $A \subseteq \mathbb{M}$ 的 $A \in [\mathbb{N}]^k$，都存在向量 $y_1^A, \ldots, y_k^A \in T^*$，满足 $\|y_i^A\| \leqslant 1$，从而 $y, y_1^A, \ldots, y_k^A$ 构成 T^* 的标准单位向量基的一个有限块基，且 $k \leqslant \min \operatorname{supp}(y_1^A)$ 并且

$$\big\|f(A) - (y + y_1^A + \cdots + y_k^A)\big\| < \epsilon.$$

特别地，对于所有 A、$B \in [\mathbb{N}]^k$、A、$B \subseteq \mathbb{M}$，我们有

$$\begin{aligned}\|f(A) - f(B)\| &< \big\|y_1^A + \cdots + y_k^A\big\| + \big\|y_1^B + \cdots + y_k^B\big\| + 2\epsilon \\ &\leqslant 2 + 2 + 2\epsilon \\ &\leqslant \delta,\end{aligned}$$

其中第二个界由 [1] 中的 (2.13) 得出。另一方面，对于任意两个不相交的 A、$B \in [\mathbb{N}]^k$，我们有

$$\Big\|\sum_{n \in A} e_n - \sum_{n \in B} e_n\Big\| = \sqrt{2k} \geqslant \Delta,$$

这意味着 $\|f(A) - f(B)\| \geqslant \delta$，从而与前面的上界矛盾。□

下面这个尚未解决的问题为我们在此进行研究提供了主要的理论动机。

问题 12. 设 X 和 E 是巴拿赫空间。X 粗嵌入 E 当且仅当它一致嵌入，这是真的吗？

问题 13. 假设 X 和 E 是巴拿赫空间，且满足 $\mathcal{CR}(X, E) > 1$。能否推出 $\mathcal{CR}(X, E) = \infty$？

References

[1] F. Baudier、G. Lancien 和 Th. Schlumprecht, *The coarse geometry of Tsirelson's space and applications* 31, 3, 2018, 699 717 , 《美国数学会杂志》, 卷号, 年份, 页码 –。[2] B. Braga, *Coarse and uniform embeddings* 272 2017 5, , 《泛函分析杂志》 (), 第 – 期。[3] B. Braga, *On weaker notions of nonlinear embeddings between Banach spaces*, 《泛函分析杂志》, 274 (2018), 第 11 期, 3149–3169。[4] P. G. Casazza 和 T. J. Shura, *Tsirelson's Space*, 《数学讲义》, 第 1363 卷, 柏林: Springer-Verlag, 1989。[5] T. Figiel 和 W. B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no l_p*, 《组合数学》29 (1974), 179–190。[6] M. Mendel 和 A. Naor, *Metric Cotype*, 《数学年刊》168 (2008), 247–298。[7] A. Naor, *Uniform nonextendability from nets*, 《法国科学院院报·数学辑》353 (2015), 第 11 期, 991–994。[8] C. Rosendal, *Equivariant geometry of Banach spaces and topological groups*, 《数学论坛·Sigma》, (2017), 第 5 卷, e22, 共 62 页。[9] C. Rosendal, *On Uniform and Coarse Rigidity of $L^p([0,1])$*, 《数学研究》268 (2) (2023), 235–240。[10] C. Rosendal, *Geometries of topological groups*, 预印本。[11] B. S. Tsirel'son, *It is impossible to imbed l_p or c_0 into an arbitrary Banach space* (俄文), 《功能分析与应用》8 (1974), 57–60。

Department of Mathematics, University of Maryland,
4176 Campus Drive - WilliamE. Kirwan Hall, College Park, MD 20742-4015, USA
Email address: rosendal@umd.edu*URL*: sites.google.com/view/christian-rosendal/