arXiv:2304.03680v1 [math.DG] 7 Apr 2023

关于非交换几何中的等变陈特征

BJARNE KOSMEIJER AND HESSEL POSTHUMA

摘要。给定李群在流形上的光滑作用，我们在交叉积代数的循环上同调中给出等变向量丛陈特征的两种构造。第一种构造将一个循环与该向量丛关联起来，其结构映射与 Getzler 的等变上同调模型密切相关。第二种构造使用该模型与在单位元处局部化的（周期）循环上同调之间的直接映射。最后证明，当该作用是适当作用时，这两种构造是等价的。

目录

引言 2 致谢 3 1. 通过循环定义陈特征 3 1.1. 预备知识 3 1.2. 基本循环 5 1.3. 用等变向量丛扭曲 10 2. 与等变陈特征的相容性 12 2.1. 交叉积代数的循环同调 13 2.2. 交叉积代数的周期循环同调 17 2.3. 与等变上同调的配对 17 2.4. $A = C^\infty(M)$ 的情形 22 2.5. 与陈特征的相容性 23 3. 与已知情形的比较 27 3.1. 平凡群作用 27 3.2. 紧群 29 3.3. 紧群作用 30 3.4. 离散群的作用 31 附录A. 证明 $\Omega_{E,\nabla}$ 是外曲微分分次代数 32 参考文献 37

引言

非交换几何旨在研究某些奇异空间的几何，这些空间利用非交换代数进行建模；当应用于交换情形时，它推广了通常的几何学。此类非交换几何的一个典型例子是由李群 G 在流形 M 上的作用之商所定义的奇异空间；该空间利用李群 G 在光滑函数环 $C_c^\infty(M)$ 上诱导作用的交叉积代数进行建模。

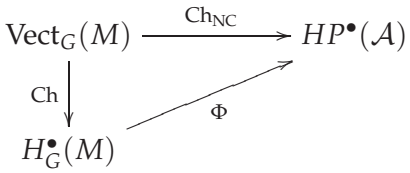
循环同调是代数的同调理论，在非交换几何中扮演着流形的德拉姆上同调的角色。自循环同调研究伊始，交叉积代数 $\mathcal{A} := G \ltimes C_c^\infty(M)$ 的循环同调与上同调及其与等变上同调的联系就得到了广泛研究：

(I) Connes [Con86] 和 Feigin–Tsygan [FT87] 研究了离散群作用的情形，随后 Getzler–Jones [GJ93], Nistor [Nis90], 和 Ponge[Pon18, Pon23]。在这些论文中，交叉积代数的循环同调与该作用的不动点的等变上同调（“扭曲扇区”）相关联。(II) Brylinski [Bry87b] 和 Block–Getzler [BG94] 考察了紧李群的作用：循环同调表示为群上的一个层的上同调，其中该层在每个元素处的茎由其不动点集的等变上同调的 Cartan 模型给出。(III) 最后，Block–Getzler–Jones [BGJ95] 和 Nistor [Nis93] 将前一种情形推广到允许群为非紧的情形。通过局部化，这一情形可归约到紧情形。

这些结果与以下计算密切相关： ´étale 群胚（参见 Brylinsky– Nistor [BN94] 和 Crainic [Cra99]），对应于 (I)；以及真李群胚（参见 [PPT23]），对应于 (II)。

在上述前两种情形中，可以在链级上显式构造这些同构，从而推广经典 HKR 映射，因此可用于比较循环同调中向量丛的 Connes 非交换陈特征与等变上同调中的经典等变陈特征。第三种情形则更为棘手，因为这些同构并未在链级上显式给出。在 [Gor99], Gorokhovsky 研究了离散群作用下非交换几何中的陈特征，采用对偶循环上同调中循环的形式体系，并证明了在上述 (I) 的对偶同构于单位元处局部化后，它与等变陈特征相容。本文将这一结果推广到一般情形，即（不一定紧致的）幺模李群作用于定向流形的情形。

本文的结果可以用下图概括：



在此图中，$\mathrm{Vect}_G(M)$ 表示等变向量丛的同构类集合，竖直箭头则是 $H^{\mathrm{ev}}_G(M) = H^\bullet(EG \times_G M)$中的经典等变陈特征。在本文中，Getzler 的等变上同调模型 [Get94]（它将 Cartan 模型推广到紧李群情形）发挥着重要作用：首先，在 第 1 节 中，我们通过构造交叉积代数上的循环来定义图中的水平箭头，这些循环的结构映射与其复形的微分密切相关。其次，在 Φ 第 2 节 中，我们将 [BG94] 在单位元处局部化的 HKR 映射推广到非紧情形，并证明它与 Getzler 模型中的上循环自然配对。此映射推广了 [离散群作用情形下的 86] 映射。最后，在 定理 2.16 中，我们证明当作用是适当的时，该图交换。对于非适当作用，图的交换性仍是一个悬而未决的问题。我们还要指出，本文讨论的理论是在单位元处局部化的；推广到其他局部化以及相关不动点的问题留待今后研究。

致谢。B.K. 的研究得到荷兰研究理事会（NWO）通过项目编号 613.001.021 的资助。

1. 通过循环定义的陈特征

1.1. 预备知识。 设G 是一个李群，光滑地（从右侧）作用在流形M上。我们假设G 是幺模的，且M 是定向的。与此数据相关联的是一个以M 为底的李群胚，定义为 $\mathsf{G} := M \times G$，其源映射和目标映射分别为$s(x,g) = xg$ 和$t(x,g) = x$。该群胚的卷积代数为$\mathcal{A} := C_c^\infty(\mathsf{G}) = C_c^\infty(M \times G)$，其乘积定义为

$$(f_1 * f_2)(x,g) := \int_G f_1(x,h) f_2(xh, h^{-1}g)\, dh. \tag{1}$$

简要回顾一下 的循环上同调 [的定义，参见 [Lod98]。记 $\mathcal{A}^+$ 为通过给 $\mathcal{A}$ 添单位元得到的代数，并记$C^k(\mathcal{A}^+)$ 为定义在 $\mathcal{A}^+$ 上的$(k+1)$重线性形式空间，满足

$$\phi(a_0, \ldots, a_{i-1}, 1, a_i, \ldots, a_{k-1}) = 0, \qquad \text{for all } i = 1, \ldots, k.$$

Hochschild 微分为 $b : C^k(\mathcal{A}^+) \to C^{k+1}(\mathcal{A}^+)$，而 Connes 的微分将 $B : C^k(\mathcal{A}^+) \to C^{k-1}(\mathcal{A}^+)$ 映到满足 $b^2 = 0 = B^2$ 和 $[b,B] = 0$的对象。接下来我们

set

$$CC^k(\mathcal{A}^+) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^{k+2n}(\mathcal{A}^+),$$

配备微分 $b+B : CC^k(\mathcal{A}^+) \to CC^{k+1}(\mathcal{A}^+)$。 $\mathcal{A}$ 的循环上同调$HC^\bullet(\mathcal{A})$ 定义为由典范态射 $CC^\bullet(\mathcal{A}^+) \to CC^\bullet(\mathbb{C})$的核给出的子复形的上同调。

注 1.1. 交叉积代数 $\mathcal{A} := C_c^\infty(G \times M)$ 具有自然的局部凸拓扑，因此我们实际上将使用（归纳）完备张量积 $\hat{\otimes}$，使得 $\mathcal{A}^{\hat{\otimes}(k+1)} \cong C_c^\infty(G^{\times(k+1)} \times M^{\times(k+1)})$，以及连续同态：$C^k(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{A}\hat{\otimes}(k+1), \mathbb{C})$。根据这一定义， $\mathcal{A}$ 的循环上同调可具有一个模结构，其系数环为共轭不变函数环 $C^\infty_{\mathrm{inv}}(G)$，作用定义为 $(f\phi)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_k) := \phi(f \cdot (a_0 \otimes \ldots \otimes a_k))$，其中 $f \in C^\infty_{\mathrm{inv}}(G)$ 的作用方式为

$$(f \cdot (a_0 \otimes \ldots \otimes a_k))(g_0, \ldots, g_k, x_0, \ldots, x_k) := f(g_0 \cdots g_k) a_0(g_0, x_0) \cdots a_k(g_k, x_k).$$

这个模结构与微分 b 和 B 相容，因此使循环上同调 $HC(\mathcal{A})$ 具有一个 $C^\infty_{\mathrm{inv}}(G)$-模结构。这种模结构的对偶曾用于 [Nis93]，通过局部化到函数环的极大理想 $\mathfrak{m}_{(g)}$ （这些函数在元素共轭类 (g) 上取值为零），分析 $\mathcal{A}$ 的循环同调，其中元素 $g \in G$。本文主要关注在单位元$e \in G$处的局部化。

在本节中，我们将利用 Connes 的循环形式体系，为卷积代数构造循环上同调类，参见 [Con94，§3。1]构造所需的要素是一个（外部）弯曲微分分次代数，以及一个闭分次迹。现在我们简要回顾这些概念。

定义1.2。一个外曲微分分次代数是一个分次向量空间 $\Omega = \Omega^\bullet$，带有一个结合分次乘积 $*$、一个微分 D： $\Omega^\bullet \to \Omega^{\bullet+1}$ 以及 Ω 上的一个次数为 2 的乘子 Θ，满足

- D是一个分次导子，
- $D^2 = [\Theta, -]$，
- $D(\Theta * \alpha) = \Theta * (D\alpha)$。

注 1.3。

i) 回顾一下，次数为 d 的乘子 Θ 是一对线性映射 Θ_l, Θ_r： $\Omega^\bullet \to \Omega^{\bullet+d}$，满足

- $\Theta_l(\alpha * \beta) = \Theta_l(\alpha) * \beta$
- $\Theta_r(\alpha * \beta) = \alpha * \Theta_r(\beta)$
- $\Theta_r(\alpha) * \beta = \alpha * \Theta_l(\beta)$

当 Ω 含幺时，次数为 d 的乘子与元素 $\Theta \in \Omega^d$一一对应，其中 $\Theta_l = \Theta * -$ 且 $\Theta_r = - * \Theta$。因此，在非含幺情形下， Θ_l 和 Θ_r 也分别记作 $\Theta * -$ 和 $- * \Theta$。

ii) 我们将通过把 Ω 注入到一个更大的分次代数中，来诱导分次代数 Ω 上的次数为 d 的乘子，并在更大的代数中找出一个次数为d 的元素 θ，使得 $\theta\Omega \subset \Omega$ 和 $\Omega\theta \subset \Omega$ 在更大的代数中成立。

iii) 定义 1.2 中的最后一个性质称为（左）Bianchi 恒等式，这对应于在有单位情形下$D\Theta = 0$ 这一事实，因为在非单位情形下$D\Theta$ 可能没有定义。还存在一个右 Bianchi 恒等式$D(\alpha * \Theta) = (D\alpha) * \Theta$，但在$D^2\alpha = [\Theta, \alpha]$ 的假设下，左右 Bianchi 恒等式是等价的，因为

$$D(\Theta * \alpha - \alpha * \Theta) = D(D^2\alpha) = D^2(D\alpha) = \Theta * (D\alpha) - (D\alpha) * \Theta.$$

定义 1.4。令$(\Omega, *, D, \Theta)$ 为一个外曲微分分次代数。Ω 上的一个次数为 n 的闭分次迹 是一个泛函 $\int : \Omega^n \to \mathbb{C}$，满足

- $\int \alpha * \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \int \beta * \alpha,$
- $\int \Theta * \alpha = \int \alpha * \Theta,$
- $\int D\alpha = 0.$

现在设有一个三元组 $(\Omega, \int, \rho)$，其中 Ω 是一个外曲微分分次代数，$\int$一个次数为n 的闭分次迹，以及 $\rho : \mathcal{A} \to \Omega^0$ 一个结合代数的态射。在 [Con94，§3.1 中，1], Connes 构造了 $\mathcal{A}$ 上的一个循环余循环。这里我们回顾 Gorokhovsky 针对该类给出的 JLO 型公式 [Gor99，§2] 。记 Δ^k 为标准单纯形

$$\Delta^k = \{t_0, ..., t_k \geq 0 : t_0 + \cdots + t_k = 1\}$$

配备测度 $dt_1 \cdots dt_k$。

定理1.5。[Gor99，定理 2.1。] 令 $(\Omega, *, D, \Theta)$ 为一个外曲微分分次代数，带有一个次数为 n 的闭分次迹 $\int$，并令 $\rho : \mathcal{A} \to \Omega^0$ 为结合代数之间的映射。对于 $0 \leq k \leq n$ 且 $k \equiv n$ 模 2，定义映射$\mathrm{Ch}^k_{\Omega, \rho} : \mathcal{A}^{\otimes(k+1)} \to \mathbb{C}$ 如下：

$Ch^k_{\Omega,\rho}(a_0, ..., a_k) = \hat{}_{\Delta^k} \hat{} \rho(a_0) * e^{-t_0\Theta} * D(\rho(a_1)) * e^{-t_1\Theta} * \cdots * D(\rho(a_k)) * e^{-t_k\Theta} dt_1 \cdots dt_k$

满足 $bCh^k_{\Omega,\rho} = BCh^{k+2}_{\Omega,\rho}$，因此定义了 (b, B)-双复形 $CC^\bullet(\mathcal{A})$ 的上闭链 $Ch_{\Omega,\rho}$。

由此得到的循环上同调类 $HC^\bullet(\mathcal{A})$ 被称为循环 陈特征 $(\Omega, \int, \rho)$ 的陈特征。

1.2. **基本循环**。现在我们将构造一个外曲微分分次代数 Ω，它在卷积代数 $\mathcal{A} = G \ltimes C_c^\infty(M)$上充当基本循环。其元素 Ω 由下式给出

$$\Omega := C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M))$$

下文中，我们将把元素 $\alpha \in \Omega$ 写成映射

$$(g, X) \mapsto \alpha(g, X) \in \Omega_c(M),$$

在$g \in G$ 中光滑且紧支撑，并且关于$X \in \mathfrak{g}$是多项式的。

在 Ω 上我们引入 3 种结构：微分 D、乘法 $*$ 和曲率 Θ:

- 微分 $D := d\mathrm{dR} + \iota$ 是作用在 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)$上的等变上同调的微分，其中 $d\mathrm{dR}$ 给出为

$$(d_{\mathrm{dR}}\alpha)(g, X) = d_{\mathrm{dR}}(\alpha(g, X))$$

以及由 ι 给出

$$(\iota\alpha)(g, X) = \iota_{X_M}(\alpha(g, X))$$

- 乘法由卷积积的以下推广（1）给出:

$$(\alpha * \beta)(g, X) := \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh. \tag{2}$$

- 曲率由如下分布给出$\Theta \in C^{-\infty}{}_c(G, \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)))$其定义为

$$\langle \Theta, \alpha \rangle (X) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(e^{tX}, X).$$

元素 $\alpha \in \Omega$ 的次数与等变上同调中的定义相同，即将 α 作为微分形式的次数与 $\mathfrak{g}$ 上多项式次数的两倍相加。由此，微分 D 确实具有次数 1，而曲率 Θ 的次数为 2。

注意，卷积积 (2) 本质上是由 G-代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)$ 所诱导的卷积积，其乘法由逐点楔积给出，而 G-作用由下式给出:

$$(g \cdot \alpha)(X) = g^*(\alpha(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)))$$

注 1.6。 通过一个分布

$$T \in C_c^{-\infty}(G, \mathsf{End}(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)))$$

我们指的是一个 t-纤维化分布在李群胚 $G \times \rightrightarrows M$ 如 [LMV17], 即，一个$C^\infty(M)$-线性映射

$$T : C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)) \to \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M),$$

其对 Fr´ech`et 拓扑连续。于是，卷积积（2）到分布的延拓定义为

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \left\langle T_1(g_1), g_1 \cdot \left\langle T_2(g_2), g_1^{-1} \cdot \varphi(g_1 g_2) \right\rangle \right\rangle, \qquad \varphi \in C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)).$$

这里 $g_1, g_2 \in G$ 是占位变量，该等式应读作如下：固定 g_1, 映射 $g_2 \mapsto g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)$ 属于 $C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M))$，因此可以与 T_2, 配对，从而得到 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)$中的一个元素。这给出了一个映射 $g_1 \mapsto$

$g_1 \cdot \langle T_2(g_2), g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle$ 它属于 $C_c^\infty(G,\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M))$，继而可以与 T_1配对。

事实上，对于由 $\alpha \in \Omega$ 定义的如下形式的分布 T_α

$$\langle T_\alpha, \varphi\rangle (X) := \int_G \alpha(g,X) \wedge \varphi(g,X) dg, \qquad \varphi \in C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M)),$$

分布的卷积恰好导出公式 (2)。

命题 1.7。 $(\Omega,\ m,\ D,\ \Theta)$ 是定义 *1.2*。意义下的外曲微分分次代数

证明。 容易验证，乘积 m 是结合的。下面证明 D 是此乘积的导子。首先:

$$\begin{aligned} \iota m(\alpha,\beta)(g,X) &= \int_G \iota_{X_M}\alpha(h,X) \wedge h^*(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &\qquad + (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h,X) \wedge \iota_{X_M} h^*(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &= m(\iota\alpha,\beta) + (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h,X) \wedge h^* \iota_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)_M}(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &= m(\iota\alpha,\beta) + (-1)^{|\alpha|} m(\alpha,\iota\beta). \end{aligned}$$

对于微分 D的另一部分，导子性质直接由德拉姆微分和微分形式楔积的标准性质得出。

根据嘉当魔术公式，我们有 $D^2 = \mathcal{L}$ 其中

$$\mathcal{L}(\alpha)(g,X) := \mathcal{L}_{X_M}\alpha(g,X),$$

而这等于 $[\Theta, -]$ 因为

$$(\Theta * \alpha)(g,X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX} \cdot \alpha(e^{-tX}g, X) \qquad \text{and} \qquad (\alpha * \Theta)(g,X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha(e^{-tX}g, X).$$

比安基恒等式 $D(\Theta * \alpha) = \Theta * D(\alpha)$, 以及 $D(\alpha * \Theta) = D(\alpha) * \Theta$ 很容易验证成立，前者利用以下观察即可得出：$\mathcal{L}_{X_M}$ 和 ι_{X_M} 作为作用于 $\Omega_c(M)$ 上的算子是可交换的，因为 $\mathcal{L}_{X_M}(X_M) = 0$。这就证明了该命题。□

现在引入泛函 $\fint$： $\Omega^n \to \mathbb{C}$，其中 $n = \dim M$，定义公式为

$$\fint \alpha := \int_M \alpha(e,0).$$

命题 1.8. 泛函 $\fint$ 是一个闭分次迹， 定义在 Ω 上。

证明。 很容易验证，$\fint$ 是一个分次迹:

$$\fint (\alpha * \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} \fint (\beta * \alpha).$$

我们仍概述一下证明步骤，以强调它与本文后文将出现的分次迹之间的区别。从左侧开始，我们有

$$⨍(\alpha * \beta) = \int_M \int_G \alpha(g,0) \wedge g^* \beta(g^{-1},0) dg.$$

利用 $\Omega(M)$ 中的对易关系，我们看到

$$\int_M \int_G \alpha(g,0) \wedge g^* \beta(g^{-1},0) dg = (-1)^{|\alpha||\beta|} \int_M \int_G g^* \beta(g^{-1},0) \wedge \alpha(g,0) dg.$$

利用对 M 的积分是 G-不变的这一事实，我们得到

$$(-1)^{|\alpha||\beta|} \int_M \int_G g^* \beta(g^{-1},0) \wedge \alpha(g,0) dg = (-1)^{|\alpha||\beta|} \int_M \int_G \beta(g^{-1},0) \wedge (g^{-1})^* \alpha(g,0) dg,$$

最后，由于 G 是幺模的，我们可以将关于 g 的积分替换为关于 g^{-1}的积分，从而得到

$$\begin{aligned}(-1)^{|\alpha||\beta|} \int_M \int_G \beta(g^{-1},0) \wedge (g^{-1})^* \alpha(g,0) dg &= (-1)^{|\alpha||\beta|} \int_M \int_G \beta(g,0) \wedge g^* \alpha(g^{-1},0) dg \\ &= (-1)^{|\alpha||\beta|} ⨍ \beta * \alpha\end{aligned}$$

同样，它是闭的这一事实也可由德拉姆定理立即推出：

$$⨍(D\alpha) = \int_M d\alpha(e,0) = 0.$$

恒等式 $⨍ \Theta * \alpha = ⨍ \alpha * \Theta$ 显然由以下事实立即得到：$(\Theta * \alpha)(e,0) = (\alpha * \Theta)(e,0) = 0$。证明至此完成。□

由定理 1.5，三元组 $(\mathcal{A}, \Omega, ⨍)$ 产生了一个次数为 n =维 M 的循环余循环 Ch_Ω，它在 (b,B)-复形中由以下分量给出

$$\mathrm{Ch}^k_\Omega(a_0, \ldots, a_k) := \int_{\Delta^k} ⨍ a_0 * e^{-t_0\Theta} * Da_1 * e^{-t_1\Theta} * \cdots * Da_k * e^{-t_k\Theta} dt_1 \ldots dt_k.$$

其中 $k = n$ 模 2。

利用事实 $(\alpha * \Theta)(g,0) = 0$ 我们看到，该上循环仅在 $k = n$ 时有贡献，此时可明确写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}^n_\Omega(a_0, \ldots, a_n) = \frac{1}{n!} \int_M \int_{G^{\times n}} & a_0(h_1) h_1^* da_1(h_2) \wedge \cdots \\ & \cdots \wedge (h_1 \cdots h_{k-1})^* da_{k-1}(h_k) \wedge (h_1 \cdots h_k)^* da_k((h_1 \cdots h_k)^{-1}) dh_1 \cdots dh_k\end{aligned}$$

利用G 是幺模的这一点，我们也可以将其写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}^n_\Omega(a_0, \ldots, a_n) = \frac{1}{n!} \int_M \int_{G^{\times n}} & a_0((h_1 \cdots h_k)^{-1})((h_1 \cdots h_k)^{-1})^* da_1(h_1) \wedge \cdots \\ & \cdots \wedge ((h_{k-1} h_k)^{-1})^* da_{k-1}(h_{k-1}) \wedge (h_k^{-1})^* da_k(h_k) dh_1 \cdots dh_k\end{aligned}$$

注 1.9. 受等变上同调的启发，人们可能会想定义一个取值于 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*)^G$ 的泛函，其定义如下：

$$\alpha \mapsto \int_M \alpha(e,-),$$

但这并不是卷积积（2）的迹。问题在于乘积公式（2）中G 对$X \in \mathfrak{g}$ 的伴随作用，这也解释了为什么我们在上面的定义中加入了$X = 0$。为了捕捉 $\alpha \in \Omega$的高次多项式项，可以用一个元素 $\gamma \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})^G$对该迹进行扭曲，并将其视为李代数 $\mathfrak{g}$上的不变微分算子 $\mathrm{D}\gamma$。

由此可知，若定义

$$⨍_\gamma \alpha := \int_M \mathrm{D}_\gamma(\alpha)(e,0),$$

这也定义了 Ω 上的一个闭分次迹。值得注意的是，结合在 $0 \in \mathfrak{g}$ 处取值，不变量 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})^G$ 可识别为支撑在 0 处的分布代数，其形式为 δ- 分布的导数，通过 $\gamma \mapsto \mathrm{D}\gamma(\delta_0)$ 给出。

命题 1.10。 对于 $\gamma \in (\mathrm{Sym}^q\mathfrak{g})^G$，泛函 $⨍_\gamma$ 在 Ω 上定义了一个次数为 $\dim(M)+2q$ 的闭分次迹。

证明。 $⨍_\gamma$ 的次数源于以下事实：在对M 应用$D\gamma$ 并将 $0 \in \mathfrak{g}$ 应用于$D\gamma(\alpha)$ 之后，要在M上得到一个顶次形式，我们需要 α 在微分形式部分的次数为 $\dim(M)$，且多项式次数为 q，也就是说，我们需要 α 的次数为 $\dim(M)+2q$。

为说明 $⨍_\gamma$ 在分次交换子上消失，我们针对 $\gamma = v_1 \odot \cdots \odot v_q \in (\mathrm{Sym}\mathfrak{g})^G$ 这一情形，通过显式计算比较 $⨍_\gamma \alpha * \beta$ 和 $(-1)^{|\alpha||\beta|} ⨍_\gamma \beta * \alpha$。表达式$⨍_\gamma \alpha * \beta$ 现在将呈现为

$$⨍_\gamma \alpha * \beta = \frac{d}{dt_1}\Big|_{t_1=0} \cdots \frac{d}{dt_q}\Big|_{t_q=0} \int_M \int_G \alpha(g, \sum_{i=1}^q t_i v_i) \wedge \beta(g^{-1}, g^* \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\sum_{i=1}^q t_i v_i)) dg$$

应用命题证明中的相同变换后1.8，这将等于

$$⨍_\gamma \alpha * \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \frac{d}{dt_1}\Big|_{t_1=0} \cdots \frac{d}{dt_q}\Big|_{t_q=0} \int_M \int_G \beta(g, \sum_{i=1}^q t_i \mathrm{Ad}_g(v_i)) \wedge g^*\alpha(g^{-1}, \sum_{i=1}^q t_i v_i) dg$$

现在，由于 $v_1 \odot \cdots \odot v_q$ 是 G-不变的，我们可以不增加任何代价地将 $\{v_i\}_{i=1,\ldots,q}$ 替换为 $\{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(v_i)\}_{i=1,\ldots,q}$，从而看到

$$⨍_\gamma \alpha * \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \frac{d}{dt_1}\Big|_{t_1=0} \cdots \frac{d}{dt_q}\Big|_{t_q=0} \int_M \int_G \beta(g, \sum_{i=1}^q t_i v_i) \wedge g^*\alpha(g^{-1}, \sum_{i=1}^q t_i \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(v_i)) dg$$

而这恰好等于 $(-1)^{|\alpha||\beta|} ⨍_\gamma \beta * \alpha$。

关于$⨍_\gamma$ 闭合的论证与之前关于 $⨍$ 的论证相同，因为根据德拉姆定理，d-部分在D 中不对 $⨍_\gamma \circ D$ 作出贡献，而 D的 ι-部分不作出贡献，因为唯一形如 $\iota\omega$ 的顶次形式是 0-形式。□

注释 1.11。 写出定理1.5 中关于此闭分次迹的 JLO-余循环时，可以像在 $\gamma = 0$ 的情形中那样看出，它仅在次数 $\dim(M)$上有贡献。事实上，考察给定 k 的贡献时，我们需要考虑$(f_0, ..., f_k) \subset C_c^\infty(G \times M)$ 并对.....作出论证。

$$f_0 * e^{-t_0\Theta} * Df_1 * e^{-t_1\Theta} * \cdots * Df_k * e^{-t_k\Theta}$$

不过，可以看出，这个函数接收$g \in G$ 和$X \in \mathfrak{g}$，并输出k形式（定义在M上），因为$(Df_1)(g, X) = d(f_1(g))$，而应用 Θ 不会改变微分形式的次数。

因此，无论是应用$D\gamma$，还是在$g = e$ 和$X = 0$处取值，我们都可以看出，对M 积分只有在$k = \dim(M)$时才会产生非零贡献。

因此，所得余循环属于S^q 的像：$HC^{\dim(M)}(G \ltimes C_c^\infty(M)) \to HC^{\dim(M)+2q}(G \ltimes C_c^\infty(M))$。

1.3. **用等变向量丛进行扭曲**。 对于一个等变向量丛 $E \to M$，其上带有一个（不一定是 G-不变的）联络 ∇，我们可以对上一节的构造作相应变体。当群是离散群时，这一构造归功于 Gorokhovsky [Gor99, 3]，，这里我们将其推广到幺模李群的情形。在这种情形下，$\Omega_E := C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega_c(M, \mathrm{End}(E)))$，并且我们将微分改为

$$(D_\nabla \alpha)(g, X) := d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g, X)) + (-1)^{|\alpha|}\alpha(g, X) \wedge \delta(g) + \iota_{X_M}\alpha(g, X),$$

其中，∇^{End} 是 $\mathrm{End}(E)$ 上的诱导联络，并且

$$\delta(g) := \nabla - g^*\nabla \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E)).$$

曲率现在由下式给出

$$\Theta_\nabla := \Theta + (F(\nabla) + \mu)\delta_e,$$

其中 $F(\nabla) \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$ 是联络 ∇ 的通常曲率，而 $\mu \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathrm{End}(E)$ 是 ∇ 的矩（参见 [BG94，第518]页），定义为

$$\mu(X) = \nabla_{X_M} - \mathcal{L}_X$$

乘法由与（2）相同的公式给出。

命题 1.12。 四元组 $\Omega_{E,\nabla} = (\Omega_E, *, D_\nabla, \Theta_\nabla)$ 是一个外曲率微分分次代数。

我们将该命题的证明推迟到 附录 A。现在考察泛函

$$⨍ \alpha := \int_M \mathrm{tr}_E \alpha(e, 0)$$

其中 $\mathrm{tr}_E : \Omega^\bullet(M, \mathrm{End}(E)) \to \Omega^\bullet(M)$ 是矩阵迹的应用。

命题1.13。 泛函 $⨍$ 是Ω_E上的闭分次迹，∇。

证明。这与非扭曲情形类似。按照非扭曲情形中的相同步骤，我们得到：

$$⨍(\alpha * \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} ⨍(\beta * \alpha) + \int_M \int_G \mathrm{tr}_E([\alpha(g,0), g^*\beta(g^{-1},0)])dg,$$

这里注意到 $\mathrm{tr}_E([\alpha(g,0), g^*\beta(g^{-1},0)]) = 0$。要证明它是闭的，我们有

$$⨍ D_\nabla \alpha = \int_M \mathrm{tr}_E(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(e,0))) = \int_M d(\mathrm{tr}_E(\alpha(e,0))) = 0.$$

为验证 $⨍ \Theta_\nabla * \alpha = ⨍ \alpha * \Theta_\nabla$，我们首先注意到

$$(\Theta_\nabla * \alpha)(e,0) = F(\nabla) \wedge \alpha(e,0)$$
$$(\alpha * \Theta_\nabla)(e,0) = \alpha(e,0) \wedge F(\nabla),$$

然后利用对 $\mathrm{End}(E)$ 取迹在循环置换下不变这一事实，可得

$$⨍(\Theta_\nabla * \alpha) = \int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla) \wedge \alpha(e,0)) = \int_M \mathrm{tr}_E(\alpha(e,0) \wedge F(\nabla)) = ⨍(\alpha * \Theta_\nabla)$$

因此，$⨍$是一个闭分次迹。 □

由定理 1.5 得到的循环余循环现在由下式给出

$$\mathrm{Ch}^k_{\Omega_{E,\nabla}}(a_0,\dots,a_k) := \int_{\Delta^k} ⨍ \mathrm{tr}_E \Big(a_0 * e^{-t_0\Theta_\nabla} * D_\nabla a_1 * e^{-t_1\Theta_\nabla} * \cdots \cdots * D_\nabla a_k * e^{-t_k\Theta}\Big) dt_1 \dots dt_k, \tag{3}$$

我们还可以利用这一事实将其明确写出：

$$(\alpha * \Theta_\nabla)(g,0) = \alpha(g,0) \wedge g^*F(\nabla),$$

$$(D_\nabla \alpha)(g,0) = d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,0)) + (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,0) \wedge \delta(g),$$

并且，由于对于一个 $\in C^\infty_c(M) \subset \Omega^0_c(M, \mathrm{End}(E))$ 我们有$d\nabla^{\mathrm{End}} a = da$，最终得到

$$\mathrm{Ch}^k_{\Omega_{E,\nabla}}(a_0,\dots,a_k) = \sum_{i_0+\cdots+i_k=\frac{n-k}{2}} \int_{\Delta^k} \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}} t_0^{i_0}\cdots t_k^{i_k}}{i_0!\cdots i_k!} dt$$
$$\int_{G^k}\int_M \mathrm{tr}_E(a_0(h_1)(h_1^*F(\nabla))^{\wedge i_0} \wedge h_1^*(da_1(h_2) + a_1(h_2)\delta(h_2)) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (h_1\cdots h_k)^*(da_k((h_1\cdots h_k)^{-1}) + a_k((h_1\cdots h_k)^{-1})\delta((h_1\cdots h_k)^{-1}) \wedge F(\nabla)^{\wedge i_k})dh,$$

其中 $dt = dt_0 \cdots dt_k$ 以及 $dh = dh_1 \cdots dh_k$。我们可以计算关于 Δ^k（另见 [Gor99]）的积分，得到

$$\begin{aligned}(4)\quad \mathrm{Ch}^k_{\Omega_{E,\nabla}}(a_0,\ldots,a_k) = \sum_{i_0+\cdots+i_k=\frac{n-k}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{\left(\frac{n+k}{2}\right)!} \int_{G^k}\int_M \mathrm{tr}_E(a_0(h_1)(h_1^* F(\nabla))^{\wedge i_0}\wedge \\ \wedge h_1^*(da_1(h_2)+a_1(h_2)\delta(h_2))\wedge\cdots\wedge(h_1\cdots h_k)^*(da_k((h_1\cdots h_k)^{-1})+ \\ + a_k((h_1\cdots h_k)^{-1})\delta((h_1\cdots h_k)^{-1}))\wedge F(\nabla)^{\wedge i_k})dh\end{aligned}$$

注 1.14。结合这两种变化，也可以针对某个 $\gamma \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})^G$ 定义一个 $\not{f}_\gamma$ on Ω_E，与非扭曲情形类似，从而得到另一个闭分次迹。

最后我们指出，循环上同调类不依赖于联络的选择：

定理 1.15。循环上同调类 $\mathrm{Ch}^{\Omega_{E,\nabla}} \in HC^\bullet(\mathcal{A})$ 不依赖于联络 ∇ 的选择，并定义一个映射

$$\mathrm{Ch}_\Omega : \mathrm{Vect}_G(M) \to HC^\bullet(\mathcal{A}),$$

其中 $\mathrm{Vect}_G(M)$ 表示 M 上 G-向量丛同构类的集合。

证明。联络选择的无关性可仿照 [Gor99，引理 2.7], 证明：注意到对于两个联络 ∇_0, ∇_1, 族 $\nabla_t = \nabla_0 + t(\nabla_1 - \nabla_0)$在$\Omega_{E,\nabla_0}$ 与 Ω_{E,∇_1}之间诱导出一个配边族。□

2. 与等变陈特征的相容性

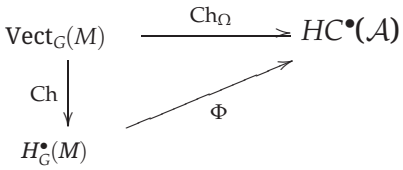
回顾李群 G 在流形 M上光滑作用的基本设定。定理1.15 中描述的映射称为非交换陈特征，其中“非交换”一词表明，该映射的取值落在非交换代数的循环上同调中$\mathcal{A}$；此代数由G 在$C^\infty(M)$上的诱导作用的交叉积给出。经典（或交换）等变陈特征 的取值则落在等变上同调$H^\bullet_G(M)$ 中，其定义是取同伦商$(EG \times M)/G$上诱导向量丛的普通陈特征。

本节旨在比较这两种陈特征。为此，我们首先构造一个映射

$$\Phi : H^\bullet_G(M) \to HC^\bullet(\mathcal{A}),$$

采用 Getzler模型 [Get94] 来构造计算等变上同调的上链复形 $H^\bullet_G(M)$，并结合循环同调中的计算，将 紧李群 作用的情形推广到 [Bry87a、BG94、PPT23]。随后我们证明

该图表



当作用是适当的时可交换。

2.1. **关于交叉积代数的循环同调**。 设 A 是一个赋有局部凸拓扑的交换结合代数，李群 G 通过同态 $\rho: G \to \mathrm{Aut}(A)$的自同构作用于该代数。我们假设此作用在以下意义下是光滑的，参见 [Bla85]:

a)映射$G \times A \to A$，由 $(g,a) \mapsto \rho(g)(a)$ 给出，是连续的；b) 对任意$a \in A$，映射 $g \mapsto \rho(g)(a)$ 是光滑的；c) $\rho(C) \subset \mathrm{Aut}(A)$ 对所有紧子集$C \subset G$ 都是等度连续的。

对于这样的代数 A，我们可以定义一个作用 $\rho: \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(A)$ 由 $\mathfrak{g}$ of G的李代数通过导子如下:

$$\rho(X)(a) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tX))(a), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

令 $\Omega^\bullet A = \bigwedge^\bullet A\,\Omega^1 A$ 为 A 的 K¨ahler 微分的 DG 代数，由导子的泛 A-模 $\Omega^1 A$ 生成。根据定义，我们有 $\mathrm{Der}(A) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1 A, A)$，因而得到映射 $\mathfrak{g} \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^1 A, A)$，记作 $X \mapsto \iota_X$，$X \in \mathfrak{g}$，并可将其延拓至 $\Omega^\bullet A$，成为次数为 -1的分次导子。接着，我们可以利用嘉当魔术公式 $L_X := d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$，在整个 $\Omega^\bullet A$ 上定义一个 $\mathfrak{g}$-模结构。结合由 A 上的 G-作用诱导的自然 G-作用，这使得 $\Omega^\bullet A$ 成为 [GS99, §2.3] 中所称的 $G^\star$-代数。

记$G \ltimes A$ 为与G对 A的作用相关联的交叉积代数，并以$CC_\bullet(G \ltimes A)$ 表示其循环双复形。本节将遵循 Brylinski[Bry87a] 和 Block-Getzler [BG94], 构造链态射

$$(5)\quad CC_\bullet(G \ltimes A) \xrightarrow{\Psi_1} \mathrm{Diag}(CC_{\bullet,\bullet}(G, A)) \xrightarrow{\Psi_2} \mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(G, A)) \xrightarrow{\Psi_3} \mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}} A)).$$

这里，$C_{\bullet,\bullet}(G,A)$ 构成一个双复形，其水平和垂直微分分别为群同调微分和交换代数 A 的（扭曲）Hochschild 微分；而$C_{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}} A)$ 构成一个双复形，它借鉴了 Block-Getzler 的等变微分形式模型（详情见下文）。

循环链复形。由于交叉积代数 $\mathcal{A} := G \ltimes A$ 是 H-幺元的，我们可以将 Hochschild链空间定义为

$$C_\bullet(\mathcal{A}) := \begin{cases} \mathcal{A}, & \bullet = 0, \\ \mathcal{A}^+ \otimes \mathcal{A}^{\otimes \bullet}, & \bullet > 0. \end{cases}$$

结合 Hochschild 微分 $b : C_k(\mathcal{A}) \to C_{k-1}(\mathcal{A})$ 与 Connes 循环微分 $B : C_k(\mathcal{A}) \to C_{k+1}(\mathcal{A})$，它们构成一个混合复形。我们将$CC_\bullet(\mathrm{A}) = \bigoplus_{k=0}^{[n/2]} C_{n-2k}(\mathrm{A})$ 记作计算循环同调的相应复形。

柱状空间 $\mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})$。与 G 在 A 上的作用相关联的是柱状向量空间 $\mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})$（参见 [BGJ95]），其中 $\mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})_{p,q} := (\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})^+)^{\otimes(p+1)} \otimes (\mathrm{A}^+)^{\otimes(q+1)}$，这里 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})^+$ 表示 G 上带单位元的光滑卷积代数，即在单位元处的狄拉克 δ 函数 δ_e。由于我们使用归纳张量积，有同构 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G}) \bar{\otimes} \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G}) \cong \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$，因此我们可以将 $\mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})_{p,q}$ 中的元素看作从 $\mathrm{G}^{\times(p+1)}$ 到 $(\mathrm{A}^+)^{\otimes(q+1)}$的紧支撑分布映射，其中我们只允许形如 $\delta_e(\mathrm{g}_i)$、$\mathrm{i} = 0$、...、p 的奇异分布。若 $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})_{p,q}$ 具有如下形式：$\mathrm{F}(\mathrm{g}_0, \ldots, \mathrm{g}_p) = \mathrm{f}(\mathrm{g}_0, \ldots, \mathrm{g}_p) \otimes \mathrm{a}_0 \otimes \ldots \otimes \mathrm{a}_q$，其中 f 是 $\mathrm{G}^{\times(p+1)}$ 上的、具有上述类型的紧支撑分布，且 $\mathrm{a}_i \in \mathrm{A}^+$、$\mathrm{i} = 0$、...、q，那么诱导 $\mathrm{L}^+(\mathrm{A}, \mathrm{G})$ 柱状结构的映射为

$$
\begin{aligned}
d_i^h(F)(g_0, \ldots, g_p) &= f(g_0, \ldots, g_p) \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_q && (0 \le i \le q-1)\\
d_q^h(F)(g_0, \ldots, g_p) &= f(g_0, \ldots, g_p) \otimes (g_0 \cdots g_q)^{-1}(a_q) a_0 \otimes \ldots \otimes a_{q-1}\\
s_i^h(F)(g_0, \ldots, g_p) &= f(g_0, \ldots, g_q) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_p && (0 \le i \le q)\\
t^h(F)(g_0, \ldots, g_p) &= f(g_0, \ldots, g_p) \otimes (g_0 \cdots g_q)^{-1}(a_q) \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{q-1}\\
d_i^v(F)(g_0, \ldots, g_{p-1}) &= \int_G F(g_0, \ldots, \gamma, \gamma^{-1} g_i, \ldots, g_{p-1}) d\gamma && (0 \le i \le p-1)\\
d_p^v(F)(g_0, \ldots, g_{p-1}) &= \int_G \gamma \cdot F(\gamma^{-1} g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}, \gamma) d\gamma\\
s_i^v(F)(g_0, \ldots, g_{p+1}) &= \delta(g_{i+1}) F(g_0, \ldots, g_i, g_{i+2}, \ldots, g_{p+1}) && (0 \le i \le p)\\
t^v(F)(g_0, \ldots, g_p) &= g_0 \cdot F(g_1, \ldots, g_p, g_0)
\end{aligned}
$$

由柱状结构，我们得到一个双复形

$$C_{p,q}(G, \mathrm{A}) := C_c^\infty(G)^+ \otimes C_c^\infty(G)^{\otimes p} \otimes \mathrm{A}^+ \otimes \mathrm{A}^{q+1},$$

它可以看作是对归一化 商$L^+(G、\mathrm{A})$ 同时除去水平和垂直退化映射后得到的商。在这个双复形上，水平和垂直微分由以下公式诱导

$$b^h = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_i^h, \qquad b^v = \sum_{i=0}^{q} (-1)^{i+p} d_i^v.$$

现在，在柱状空间 $L^+(G, \mathrm{A})$ 中，我们可以使用$(b')^h$ 和$(b')^v$ 进行收缩。

$$
\begin{aligned}
c^h(F)(g_0, \ldots, g_q) &= 1 \otimes F(g_0, \ldots, g_q)\\
c^v(F)(g_0, \ldots, g_{q+1}) &= \delta(g_0) F(g_1, \ldots, g_{q+1})
\end{aligned}
$$

因此，利用 [GJ93] 我们可以构造循环微分 B^h和 B^v 使得$(C_{p,q}(G,\mathrm{A}), b^h+b^v, B^h+B^v)$ 是一个混合双复形。这些循环微分由以下公式诱导

$$B^h = (1+(-1)^p t^h)c^h\left(\sum_{j=0}^{p} d_j^h\right) c^h\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^{ip}(t^h)^i\right),$$
$$B^v = (-1)^p(t^h)^{p+1}(1+(-1)^q t^v)c^v\left(\sum_{j=0}^{q} d_j^v\right) c^v\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^{iq}(t^v)^i\right).$$

由混合双复形 $C_{\bullet,\bullet}(G,\mathrm{A})$ 构造总循环复形

$$\mathrm{Tot}(CC(G,\mathrm{A}))_n = \bigoplus_{\substack{p+q\le n\\ p+q\equiv n \bmod 2}} C_{p,q}(G,\mathrm{A}),$$

其微分由四个微分b^h,b^v, B^h 和B^v的所有适当作用给出。

态射 Ψ_1。 图（5中的第一个态射是（众所周知的）映射 Ψ_1： $C_k((\mathrm{A}\rtimes G)^+)\to C_{k,k}(G,\mathrm{A})$，最早见于[Bry87a]，其定义为

$$\Psi_1(F)(g_0,\dots,g_n) = ((g_0\cdots g_n)^{-1}\otimes\cdots\otimes g_n^{-1})F(g_0,\dots,g_n)$$

它将 $\mathrm{A}\rtimes G$ 的 Hochschild链上的循环结构与对角复形 $\mathrm{Diag}(L^+(\mathrm{A},G)_{\bullet,\bullet})$上的循环结构交织起来。

态射 Ψ_2。 根据 Eilenberg-Zilber定理，映射 $\mathrm{EZ}_{p,q}$: $C_{p+q,p+q}(G,\mathrm{A})\to C_{p,q}(G,\mathrm{A})$ 以及 $\nabla_{p,q}$: $C_{p,q}(G,\mathrm{A})\to C_{p+q,p+q}(G,\mathrm{A})$ 由下式给出

$$\mathrm{EZ}_{p,q} := d_{p+1}^h\cdots d_{p+q}^h\cdot(d_0^v)^p,$$
$$\nabla_{p,q} := \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(p,q)}(-1)^\sigma s^h_{\sigma(p+q)}\cdots s^h_{\sigma(p+1)}\cdot s^v_{\sigma(p)}\cdots s^v_{\sigma(1)},$$

构造链映射 EZ : (diag(C(G, A)), b) $\to$ (Tot(C(G, A)), $\mathrm{b}^h+\mathrm{b}^v$), ∇: (Tot(C(G, A)), $\mathrm{b}^h+\mathrm{b}^v$) $\to$ (diag(C(G, A), b)，使得

- $\mathrm{EZ}\circ\nabla = \mathrm{id}$,
- $\nabla\circ\mathrm{EZ}\simeq\mathrm{id}$ 通过同伦 $h: C_{n,n}(G,\mathrm{A})\to C_{n+1,n+1}(G,\mathrm{A})$。

根据 Khalkali 和 Rangipour 的工作 [KR04]，我们可以通过定义映射 $\mathrm{EZ}^{\mathrm{pert}}$: $\mathrm{diag}(CC(G,\mathrm{A}))\to\mathrm{Tot}(CC(G,\mathrm{A}))$，将其推广到循环情形。该映射定义在$F\in C_{k,k}(G,\mathrm{A})$上，将其视为 $\mathrm{diag}(CC(G,\mathrm{A}))_n$中的一个元素，定义如下:

$$\mathrm{EZ}^{\mathrm{pert}}(F) = \sum_{m=0}^{\frac{n-k}{2}}\mathrm{EZ}((Bh)^m(F)).$$

正如 Khalkali 和 Rangipour 所示，齐次微扰引理保证 $\mathrm{EZ}^{\mathrm{pert}}$ 是一个拟同构。

等变微分形式。受 Getzler模型中等变上同调的启发[Get94], 我们采用 Block 和 Getzler 的等变 Hochschild-Kostant-Rosenberg 态射 [BG94] 以获得一个混合双复形 $C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)$:

定义 2.1。 混合双复形 $C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)$ 在次数 (p,q) 中定义为子空间

$$C_{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A) \subset C^{-\infty}(\mathfrak{g}\times G^{\times q},\Omega^p A)$$

由那些在$G^{\times q}$ 中具有紧支集、且其奇异- 性行为被限制于 $\delta(e^X(g_1\cdots g^q)^{-1})$ 的分布组成。与这些空间相关联的是四个微分

$$\widetilde{b}^h\colon C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)\to C_{\bullet-1,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A),\qquad \widetilde{B}^h\colon C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)\to C_{\bullet+1,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A),$$
$$\widetilde{b}^v\colon C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)\to C_{\bullet,\bullet-1}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A),\qquad \widetilde{B}^v\colon C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)\to C_{\bullet,\bullet+1}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A),$$

由.....给出

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}^h(F)(X,g_1,...,g_q) &= \iota_X(F(X,g_1,...,g_q)),\\
\widetilde{b}^v(F)(X,g_1,...,g_{q-1}) &= \int_G (-1)^p F(X,\gamma^{-1},g_1,...,g_{q-1})d\gamma\\
&\quad+\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^{i+p}\int_G F(X,g_1,...,\gamma,\gamma^{-1}g_j,...,g_{q-1})d\gamma\\
&\quad+(-1)^{p+q}\int_G \gamma\cdots F(\mathrm{Ad}_{\gamma^{-1}}(X),g_1,...,g_{q-1},\gamma)d\gamma,\\
\widetilde{B}^h(F)(X,g_1,...,g_q) &= \int_{\Delta^1} e^{-tX}\cdot d(F(X,g_1,...,g_q))dt\\
\widetilde{B}^v(F)(X,g_1,...,g_{q+1}) &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^{iq+p}\delta(e^X(g_1\cdots g_{q+1})^{-1})(g_{i+1}\cdots g_{q+1})^{-1}\cdot\\
&\quad\cdot F(\mathrm{Ad}_{g_{i+1}\cdots g_{q+1}}(X),g_{i+2},...,g_{q+1},g_1,...,g_i).
\end{aligned}$$

可以明确验证，借助四个算子 $\widetilde{}b^h$、$\widetilde{}b^v$、$\widetilde{}B^h$ 和 $\widetilde{}B^v$，$C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}A)$ 成为一个双混合复形。

态射 Ψ_3。图表中的最后一个态射（5）由Hochschild-Kostant-Rosenberg 映射的一个等变变体给出，如 [BG94]，区别在于此处我们处理的不是 G-不变链（如 前引文献 中所述），而是前一小节中的等变链。

我们回顾 Block 和 Getzler 的等变 Hochschild-Kostant-Rosenberg 映射[BG94],，对于 $X\in\mathfrak{g}$，它由映射 $\mathsf{HKR}_X\colon A^+\otimes A^{\otimes p}\to\Omega^p A$ 以及公式给出

$$\mathsf{HKR}_X(a_0\otimes\cdots\otimes a_p):=\int_{\Delta^p} a_0 d(e^{-t_1X}\cdot a_1)\wedge\cdots\wedge d(e^{-t_pX}\cdot a_p)dt_1\cdots dt_p.$$

利用此映射，我们在链层面定义态射 Ψ_3，即映射 $\Psi_3 : C_{p,q}(G,\mathbf{A}) \to C_{p,q}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$，其公式为

$$\Psi_3(F)(X, g_1, ..., g_q) := \mathsf{HKR}_X(F(e^X(g_1 \cdots g_q)^{-1}, g_1, ..., g_q)).$$

通过显式计算可推知如下结论：

引理 2.2. 映射 Ψ_3 满足：

$$\widetilde{b}^h \circ \Psi_3 = \Psi_3 \circ b^h, \qquad \widetilde{B}^h \circ \Psi_3 = \Psi_3 \circ B^h,$$
$$\widetilde{b}^v \circ \Psi_3 = \Psi_3 \circ b^v, \qquad \widetilde{B}^v \circ \Psi_3 = \Psi_3 \circ B^v.$$

可以通过显式计算证明这个引理。

推论 2.3。 映射 Ψ_3 诱导出一个链映射

$$\Psi_3 : \mathsf{Tot}(CC(G,\mathsf{A})) \to \mathsf{Tot}(CC(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathsf{A})).$$

2.2. **关于交叉积代数的周期循环同调**。 上一小节中的构造也可以应用于周期循环同调。映射 Ψ_1 和 Ψ_3 直接复制自上一节，而经过扰动的Eilenberg-Zilber 映射现在采用以下形式 $\mathsf{EZ}^{\mathrm{pert}} : \mathsf{diag}(CP_{*,*}(G,\mathbf{A})) \to \mathsf{Tot}(CP_{*,*}(G,\mathbf{A}))$ 给定于 $F \in C_{k,k}(G,A) \subset \mathsf{diag}(CP_{*,*}(G,A))_n$ 通过

$$\mathsf{EZ}^{\mathrm{pert}}(F) = \sum_{m\geq 0} \mathsf{EZ}((Bh)^m(F))$$

需要指出的是，对于陪域中的每个次数，该映射只有有限个贡献，因为 $C_{*,*}$ 上的分次有下界。然而，由于定义域中的一个元素原则上会在无限多个次数上产生贡献，因此我们确实需要使用直积来定义周期复形。

总而言之，我们得到一列关联的周期循环复形之间的映射：

$$CP(G \ltimes \mathsf{A}) \xrightarrow{\Psi_1} \mathsf{diag}(CP(G,\mathsf{A})) \xrightarrow{\mathsf{EZ}^{\mathrm{pert}}} \mathsf{Tot}(CP(G,\mathsf{A})) \xrightarrow{\Psi_3} \mathsf{Tot}(CP(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathsf{A}))$$

总复合记作 $\Psi : CP(\mathbf{A} \rtimes G) \to \mathsf{Tot}(CP(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}))$。

2.3. **与等变上同调的配对**。 本节中，设 $\mathbf{A}$ 是一个光滑的含幺 G-代数，其中 $\mathbf{A}$ 是理想，并且 $\Omega\mathbf{A}$ 是 $\Omega\mathbf{A}$ 的理想。需要考虑的主要例子是 $(\mathbf{A},\mathbf{A}) = (C_c^\infty(M), C^\infty(M))$，其中 M 是一个带有右 G-作用的流形。

我们希望将交叉积代数循环同调的表述 $G \ltimes \mathsf{A}$ 与 $\mathbf{A}$ 的等变上同调联系起来。我们回顾 [Get94] 中得到的等变同调模型；事实上，这正是我们表述循环同调的灵感来源。

Getzler的上链复形由下式给出

$$C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) = \left\{ F \in C^\infty(\mathfrak{g}\times G^{\times q},\Omega^p\mathbf{A}) : \begin{array}{c} F \text{ is polynomial in } \mathfrak{g} \\ F(X,g_1,\ldots,g_q) = 0 \text{ if either one of } g_1,\ldots,g_q \text{ equals } 1 \end{array} \right\}$$

带有 4 个微分

$$\begin{aligned} \iota &\colon C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to C^{p-1,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \\ \bar{\iota} &\colon C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to C^{p,q-1}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \\ d &\colon C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to C^{p+1,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \\ \bar{d} &\colon C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to C^{p,q+1}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \end{aligned}$$

由下式给出

$$\begin{aligned} (\iota F)(X,g_1,\ldots,g_q) &= (-1)^q \iota_X(F(X,g_1,\ldots,g_k)) \\ (\bar{\iota}F)(X,g_1,\ldots,g_{q-1}) &= \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(X,g_1,\ldots,g_i,e^{t\mathrm{Ad}_{g_{i+1}\cdots g_{q-1}}(X)},g_{i+1},\ldots,g_{q-1}) \\ (dF)(X,g_1,\ldots,g_q) &= (-1)^q d(F(X,g_1,\ldots,g_q)) \\ (\bar{d}F)(X,g_1,\ldots,g_{q+1}) &= F(X,g_2,\ldots,g_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q}(-1)^i F(X,g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{q+1}) \\ &\quad + (-1)^{q+1} g_{q+1}^{-1}\cdot F(\mathrm{Ad}_{g_{q+1}}(X),g_1,\ldots,g_q) \end{aligned}$$

对于 $\mathbf{A} = C^\infty(M)$ 的情形，该复形计算 $H_G(M)$的等变上同调，其中 M [Get94,1.2.3]。

在 Getzler 的工作中，该复形的分次是其作为群上链的次数（q）、其作为 $\Omega\mathbf{A}$ (p) 中元素的次数以及多项式次数（上文未标出）的两倍之和。在此分次下， $\iota + \bar{\iota} + d + d$ 是一个上同调微分。对于我们的讨论而言，更自然的做法是忽略多项式次数，并将 $C^{\bullet,\bullet}(G,\ \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 视为带有微分 $(d + d, \iota + \bar{\iota})$的混合双上链复形。

为了将此复形与我们的复形 $\mathrm{C}_{*,*}(\mathrm{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 配对，令 $\mathrm{ffl}: \Omega^n\mathrm{A} \to \mathbb{R}$ 为一个闭的、分次的且 G-不变的迹（即 $\mathrm{ffl}\ \mathrm{d}\alpha = 0$ and $\mathrm{ffl}\ \mathrm{g}\cdot\alpha = \mathrm{ffl}\ \alpha$）。我们将默认假设 $\Omega^{>n}\mathrm{A} = \{0\}$。利用这个迹，我们可以写出 $\mathrm{C}^{n-p,q}(\mathrm{G},\ \Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 与 $\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 之间的配对$\langle -,-\rangle$，对 $\alpha_{n-p,q} \in \mathrm{C}^{n-p,q}(\mathrm{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 和 $\beta_{p,q} \in \mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 定义如下：

$$\langle \alpha_{n-p,q},\beta_{p,q}\rangle = (-1)^{p(n+q)+\frac{1}{2}p(p+1)} \int_{G^{\times q}} \!\!\!\!\!\!- \ \alpha_{n-p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)\wedge\beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)dg_1\cdots dg_q$$

引理 2.4. 以下恒等式对所有 α 和 β 均成立

$$\begin{aligned}\langle \iota\alpha_{n-p+1,q}, \beta_{p,q}\rangle &= \langle \alpha_{n-p+1,q}, \widetilde{b^h}\beta_{p,q}\rangle = 0\\ \langle d\alpha_{n-p-1,q}, \beta_{p,q}\rangle &= \langle \alpha_{n-p-1,q}, \widetilde{B^h}\beta_{p,q}\rangle\\ \langle \overline{d}\alpha_{n-p,q-1}, \beta_{p,q}\rangle &= \langle \alpha_{n-p,q-1}, \widetilde{b^v}\beta_{p,q}\rangle\end{aligned}$$

此外，如果 $\alpha_{n-p,q+1}$ 满足 $\alpha_{n-p,q+1}(0, g_1, ..., g^{q+1}) = 0$，当 $g_1 \cdots g_{q+1} = 1$ 时，对于所有 $\beta_{p,q}$，以下结论也成立：

$$\langle \overline{\iota}\alpha_{n-p,q+1}, \beta_{p,q}\rangle = \langle \alpha_{n-p,q+1}, \widetilde{B^v}\beta_{p,q}\rangle = 0$$

证明。对于第一个等式，我们注意到 $(\iota\alpha_{n-p+1,q})(0, g_1, ..., g^q) = 0$ 因为 $\iota_0\omega = 0$ 对于$\sim$任意 $\omega \in \Omega\mathrm{A}$。类似地，$(b^h\beta_{p,q})(0, g_1, ..., g^q) = 0$。

关于第二行，注意对于 $\omega_1 \in \Omega^{n-p-1}\mathrm{A}$ 和 $\omega_2 \in \Omega^p\mathrm{A}$，我们有

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{n-p-1}\omega_1 \wedge d\omega_2$$

由于 ffl 在恰当形式上消失，我们得到

$$\fint d\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{n-p} \fint \omega_1 \wedge d\omega_2$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}(\widetilde{B^h}\beta_{p,q})(0, g_1, ..., g_q) &= \int_{\Delta^1} e^{-t\cdot 0} \cdot d(\beta_{p,q}(0, g_1, ..., g_q))dt\\ &= \int_{\Delta^1} d(\beta_{p,q}(0, g_1, ..., g_q))dt\\ &= d(\beta_{p,q}(0, g_1, ..., g_q))\end{aligned}$$

由此得出的是

$$\begin{aligned}\langle d\alpha_{n-p-1,q}, \beta_{p,q}\rangle &= (-1)^{p(n+q)+\frac{1}{2}p(p+1)+q} \int_{G^q} \fint d(\alpha_{n-p-1,q}(0, g_1, ..., g_q))\wedge\\ &\qquad \wedge \beta_{p,q}(0, g_1, ..., g_q)dg_1 \cdots dg_q\\ &= (-1)^{(p-1)(n+q)+\frac{1}{2}p(p-1)} \int_{G^q} \fint \alpha_{n-p-1,q}(0, g_1, ..., g_q)\wedge\\ &\qquad \wedge d(\beta_{p,q}(0, g_1, ..., g_q))dg_1 \cdots dg_q\\ &= (-1)^{(p-1)(n+q)+\frac{1}{2}p(p-1)} \int_{G^q} \fint \alpha_{n-p-1,q}(0, g_1, ..., g_q)\wedge\\ &\qquad \wedge (\widetilde{B^h}\beta_{p,q})(0, g_1, ..., g_q)dg_1 \cdots dg_q\\ &= \langle \alpha_{n-p-1,q}, \widetilde{B^h}\beta_{p,q}\rangle.\end{aligned}$$

然后，对于引理的第三部分，我们进行一个显式计算：

$$\begin{aligned}\langle \overline{d}\alpha_{n-p,q-1}, \beta_{p,q}\rangle = (-1)^{p(n+q)+\frac{1}{2}p(p+1)} \int_{G^{\times q}} \fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_2,\ldots,g_q)\wedge \\ \wedge \beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)dg_1\cdots dg_q \\ + (-1)^{p(n+q)+\frac{1}{2}p(p+1)} \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i \int_{G^{\times q}} \fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_q)\wedge \\ \wedge \beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)dg_1\cdots dg_q \\ + (-1)^{p(n+q)+\frac{1}{2}p(p+1)}(-1)^q \int_{G^{\times q}} \fint (g_q^{-1}\cdot \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_{q-1}))\wedge \\ \wedge \beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)dg_1\cdots dg_q.\end{aligned}$$

现在对 $G^{\times q}$ 的积分进行几次变量替换（并利用G 对第一行是幺模的这一事实），以及利用ffl 是 G-不变的这一事实，我们得到：

$$\begin{aligned}\langle d\overline{\alpha}_{n-p,q-1}, \beta_{p,q}\rangle =&(-1)^{p(n+q-1)+\frac{1}{2}p(p+1)}(-1)^p \int_{G^{\times(q-1)}}\int_G \fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_{q-1})\wedge \\ &\wedge \beta_{p,q}(0,\gamma^{-1},g_1,\ldots,g_{q-1})d\gamma dg_1\cdots dg_q \\ &+ (-1)^{p(n+q-1)+\frac{1}{2}p(p+1)}\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^{p+i}\int_{G^{\times(q-1)}}\int_G \fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_{q-1})\wedge \\ &\wedge \beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,\gamma,\gamma^{-1}g_i,\ldots,g_{q-1})dg_1\cdots dg_{q-1} \\ &+ (-1)^{p(n+q-1)+\frac{1}{2}p(p+1)}(-1)^{p+q}\int_{G^{\times(q-1)}}\int_G \fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_{q-1})\wedge \\ &\wedge (\gamma\cdot\beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_{q-1},\gamma))d\gamma dg_1\cdots dg_{q-1} \\ =&(-1)^{p(n+q-1)+\frac{1}{2}p(p+1)}\int_{G^{\times(q-1)}}\fint \alpha_{n-p,q-1}(0,g_1,\ldots,g_{q-1})\wedge \\ &\wedge (\widetilde{b^v}\beta_{p,q})(0,g_1,\ldots,g_{q-1})dg_1\cdots dg_{q-1} \\ =&\langle \alpha_{n-p,q-1}, \widetilde{b^v}\beta_{p,q}\rangle.\end{aligned}$$

那么对于最后一行，请注意 $(\overline{\imath}\alpha_{n-p,q+1})(0,g_1,\ldots,g^q)=0$；而如果将$\widetilde{\ }B^v$写下来并计算配对，利用 $\alpha_{n-p,q+1}(0,1,g_2,\ldots,g^{q+1})=0$，便可得到

$$\begin{aligned}\langle \alpha_{n-p,q+1}, \widetilde{B^v}\beta_{p,q}\rangle = \int_{G^{\times q}}\fint \sum_{i=0}^{q}(-1)^{iq}(g_{q-i+1}\cdots g_q)\cdot \\ \cdot \alpha_{n-p,q+1}(0,g_{q-i+1},\ldots,g_q,(g_1\cdots g_q)^{-1},g_1,\ldots,g_{q-i})\wedge \\ \wedge \beta_{p,q}(0,g_1,\ldots,g_q)dg_1\cdots dg_q\end{aligned}$$

其值为零，因为 $g^{q-i+1}\cdots g^q\cdot(g_1\cdots g^q)^{-1}\cdot g_1\cdots g_{q-i}=1$，因此我们可以对 $\alpha_{n-p,\ q+1}$ 使用额外假设。□

根据前一个引理的最后一部分，我们得到如下结论：

定义 2.5。 若元素 $\alpha_{p,q} \in C^{p,q}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 满足以下条件，则称其为循环归一化的 if

$$\alpha_{p,q}(0, g_1, ..., g_q) = 0$$

当 $g_1 \cdots g_q = 1$。

最后，我们希望得到一个从$C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 到$G \ltimes \mathrm{A}$ 的周期循环复形的真正链映射。然而，显然，从配对的次数来看，如果我们对$C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$施加标准分次，这就不可能实现。为此，我们将 Getzler 的复形重新编排成类似周期循环复形的形式，从而也为我们忽略 Getzler 复形中的多项式次数提供了依据。

定义 2.6。 复形 $CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 定义为

$$CP^k(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A}) = \bigoplus_{p+q \equiv n+k \bmod 2} C^{p,q}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$$

微分为 $\iota + \bar{\iota} + d + d$。

由于$CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 只是 $\mathrm{Tot}(C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}))$ 所有偶数次度移位的直和，下面的结论显而易见：

引理 2.7. 复形 $CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 计算以下上同调

$$H^k(CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})) = \bigoplus_{p \equiv n+k \, mod \, 2} H^p(\mathrm{Tot}(C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})))$$

因此，前面的讨论可归纳为以下命题。

命题2.8。 映射 Φ： $CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to (CP(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})^{\times})^{\bullet}$ 定义为

$$\Phi(\sum_{p',q'} \alpha_{p',q'})(\beta_{p,q}) = \langle \alpha_{n-p,q}, \beta_{p,q} \rangle$$

在限制到循环归一化余链时，与微分相容 $\sum_{p',\ q'} \alpha_{p',\ q'}$。

结合映射 Ψ，我们得到本节的第一个主要结果；它是前一个命题以及 Ψ 是链映射这一事实的推论。

推论 2.9。 映射 c： $CP^{\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) \to CP^{\bullet}(G \ltimes \mathrm{A})$ 定义为

$$c(\sum_{p,q} \alpha_{p,q})(a_0, ..., a_k) = \Phi(\sum_{p,q} \alpha_{p,q})(\Psi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k))$$

限制到循环归一化上链时，与微分相容 $\sum_{p,\ q} \alpha_{p,\ q}$。

2.4. $\mathbf{A} = C^\infty(M)$ 的情形。 正如我们在前一部分所见，并非每个$C^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 中的元素都是循环归一化的，这意味着我们无法直接写出链映射。回到带有右G作用的流形M 这一情形时，我们可以明确地绕过这一问题，从等变上同调到周期循环上同调构造出一个实际映射，具体方法如下。

因此，在本节中，$(\mathbf{A},\mathbf{A}) = (C_c^\infty(M),C^\infty(M))$，其中 M 是一个维数为 n 的光滑定向流形，带有保定向的右 G 作用。注意，在这种情况下，对顶次形式的积分诱导出一个闭的、分次的、G 不变的迹 $\int_M$，定义在 $\Omega^n\mathbf{A}$ 上。

关键在于将 Getzler 复形拟同构地嵌入一个具有循环结构的复形中。具体来说，我们回顾一下，在 [Get94] 中，复形 $\mathbf{C}^{\bullet,\bullet}(\mathbf{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 是通过构造约化余条分解 $\Omega^{\bullet}_{\mathrm{red}}(\mathbb{C},\Omega^{\bullet}(\mathbf{G}),\Omega\mathbf{A})$，然后应用拟同构 $\mathcal{J}\colon \Omega^{\bullet}_{\mathrm{red}}(\mathbb{C},\Omega^{\bullet}(\mathbf{G}),\Omega\mathbf{A}) \to \mathbf{C}^{\bullet,\bullet}(\mathbf{G},\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 得到的。

约化余条分解定义为 $\Omega^{\bullet}_{\mathrm{red}}(\mathbb{C},\Omega^{\bullet}(G),\Omega\mathbf{A}) = \Omega^{\bullet}(G)\otimes\Omega\mathbf{A}$，其中 $\Omega^{\bullet}\overline{(G)}$ 表示余单位 $\overline{\Omega^{\bullet}(G)} \to \mathbb{C}$ 的核，它是对单位元的求值。拟同构 $\mathcal{J}$则由以下公式给出

$$\mathcal{J}(\omega_1\otimes\ldots\otimes\omega_k\otimes\gamma)(g_1,\ldots,g_\ell,X) = (-1)^l \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}_{\ell,k-\ell}} \left(\prod_{i=1}^{\ell}\omega_{\sigma(i)}(g_i)\right)\left(\prod_{j=\ell+1}^{k}\omega_{\sigma(j)}(e)(X_j)\right)\gamma.$$

其中 $X_j = \mathrm{Ad}_{g_i\cdots g_l}X$，其中 $i \le l$ 取满足条件的最小值，使得 $\sigma(j) < \sigma(i)$（若不存在这样的i，则令$X_j = X$）。在此公式中，项 $\omega(g)$ 仅当 ω 是G上的零形式时才有贡献，而项 $\omega(e)(X)$ 仅当 ω 是G上的一形式时才有贡献。

我们注意到，在定义约化余柱分解时使用余单位的核 $\Omega^{\bullet}(G) \to \mathbb{C}$，直接对应于这样一个事实：在 Getzler 的复形 $C^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$中，链满足：只要$e \in \{g_1,\ldots,g_q\}$，就有 $\alpha(X,g_1,\ldots,g^q) = 0$。

然而，我们也可以等价地使用未约化余柱分解 $\Omega^{\bullet}(\mathbb{C},\Omega^{\bullet}(G),\Omega\mathbf{A}) = \Omega^{\bullet}(G)\otimes\Omega\mathbf{A}$，公式 $\mathcal{J}$可以自然地推广到该分解。所得复形$\widetilde{C}^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 是 Getzler 复形 $C^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$的一个拟同构扩张，其定义如下

$$\widetilde{C}^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A}) = \left\{F\in C^\infty(\mathfrak{g}\times G^{\times q},\Omega^p\mathbf{A}) : F \text{ is polynomial in } \mathfrak{g}\right\}$$

现在考虑 $\mathbf{A} = C^\infty(M)$ 的情形。我们注意到，未约化余柱分解就是$\Omega^{\bullet}(G^{\times *}\times M)$，其微分是 deRham 微分与来自$G^{\times\bullet}\times M$ 底层单纯形结构的微分之和；后者按惯例由面算子 $\partial_i : G^{\times k}\times M \to G^{\times(k-1)}\times M$ 定义如下：

$$\partial_i(g_1,\ldots,g_k,x) = \begin{cases}(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_k,x), & 0\le i\le k-1,\\ (g_1,\ldots,g_{k-1},g_kx), & i=k.\end{cases}$$

这个单纯空间还具有由下式给出的循环结构

$$t(g_1,\ldots,g_k,x) = ((g_1\cdots g_k)^{-1},g_1,\ldots,g_{k-1},g_kx)$$

由拉回在微分形式上诱导的映射，赋予未约化的余条分解一个 DG 余循环向量空间的结构。

在计算循环上同调时，我们可以像往常一样将自身限制在循环子复形上，在本例中该子复形为

$$\Omega^\bullet(\mathbb{C},\Omega G,\Omega M)_\lambda := \bigoplus_q \{\alpha \in \Omega(G^{\times q}\times M),\ t^*\alpha = (-1)^q\alpha\}.$$

我们将满足 $t^*\alpha = (-1)^q\alpha$ 循环微分形式的形式称为循环微分形式。于是显然，$\widetilde{}$上同调 $C^{\bullet,\bullet}(G,\ \Omega_{\mathfrak{g}}M)$ 完全由对这类循环微分形式应用 $\mathcal{J}$所得到的类构成。

接下来我们注意到，$C^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 与$C_{*,*}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$ 之间的配对可以自然地$\widetilde{}$扩展到 $C^{*,*}(G,\ \Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$，我们将证明，循环微分形式实际上诱导出循环归一化元素。首先，我们有如下源于初等计算的观察：

引理 2.10.循环微分形式 $\alpha \in \Omega(G^{\times\bullet}\times M)_\lambda$ 的像满足

$$\mathcal{J}(\alpha)(0,g_1,\dots,g_q) = (-1)^q(g_q^{-1})^*(\mathcal{J}(\alpha)(0,(g_1\cdots g_q)^{-1},g_1,\dots,g_{q-1}))$$

$\widetilde{}$于是我们可以再次利用微分B^v 进行计算，得到如下结果：

$\widetilde{}$**引理2.11.** 设$\alpha_{p,q} \in C^{p,q}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathbf{A})$ 使得

$$\alpha_{p,q}(0,g_1,\dots,g_q) = (-1)^q(g_q^{-1})^*\alpha(0,(g_1\cdots g_q)^{-1},g_1,\dots,g_{q-1})$$

那么，对于所有 $\beta_{n-p,q-1} \in C_{n-p,q-1}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}\mathrm{A})$，我们有

$$\langle\alpha_{p,q},\widetilde{B^v}\beta_{n-p,q-1}\rangle = 0$$

$\widetilde{}$根据B^v 以及循环微分形式的定义方程，这一点是显而易见的。

推论*2.12*。 $\Omega^\bullet(G^{\times\bullet}\times M)_\lambda$ 与 $C_{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(M))$之间的上同调配对，结合映射 $\Psi: CP_\bullet(G \ltimes C_c^\infty(M)) \to CP_\bullet(Tot(C(G,\Omega_{\mathfrak{g}}M))$ 的构造，诱导出一个映射 $c: H^{\mathrm{ev/odd}}\ G(M) \to HP^{\mathrm{ev/odd+n}}(G \ltimes C^\infty(M))$；将其应用于$H^{\mathrm{ev/odd}}\ G\ (M)$中由 $C^{\bullet,\bullet}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(M))$的循环归一化元素诱导的这类类时，它与 *2.9* 中的映射 c 一致。

2.5. 与陈特征的相容性。在[Get94] 中，带有联络 ∇ （不一定是不变的）的等变向量丛 $\mathrm{E} \to \mathrm{M}$ 的等变陈特征，由 $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}^{*,*}(\mathrm{G},\ \Omega_{\mathfrak{g}}(\mathrm{M})))$ 中一个次数为 n 的显式循环余循环 $\mathrm{Ch}_G(\mathrm{E},\ \nabla)$ 确定。对于我们的配对，我们只关注 $\mathrm{Ch}_G(\mathrm{E},\nabla)_q^0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}^{\times q},\Omega(\mathrm{M}))$，其定义如下：

$$\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)_q^0(g_1,\dots,g_q) := \mathrm{Ch}_G(E,\nabla)(0,g_1,\dots,g_q)$$

并且我们描述这些函数。

当G是离散群时，它们由 Bott 的 Chern-Simons 形式的相同公式给出。具体来说，设 ∇_0、...、 ∇_q 是E的联络。那么 Chern-Simons 形式定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{cs}(\nabla_0,\ldots,\nabla_q) &= \int_{\Delta^q} \mathrm{Tr}\left(\exp\left(-dt_1\wedge(\nabla_q-\nabla_0)+\sum_{i=1}^{q-1}(dt_i-dt_{i+1})\wedge(\nabla_q-\nabla_i)+F(t)\right)\right)\\ &= \int_{\Delta^q} \mathrm{Tr}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{q} dt_i\wedge(\nabla_{i-1}-\nabla_i)+F(t)\right)\right)\end{aligned}$$

其中 $F(t)$ 是联络的曲率

$$\nabla(t) = \nabla_q - t_1(\nabla_q-\nabla_0)+\sum_{i=1}^{q-1}(t_i-t_{i+1})(\nabla_q-\nabla_i)$$

然后，通过仔细剖析 Getzler 的构造，我们认识到

$$\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)^0_{p,q}(g_1,\ldots,g_q) = (-1)^{p+q}\mathrm{cs}(\gamma_1^*\nabla,\ldots,\gamma_q^*\nabla,\nabla)$$

其中 $\gamma_i = g_i\cdots g^q$。

考察陈-西蒙斯形式的具体形式，可得以下引理。

引理 2.13。 函数 $\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)^0_q$ 满足以下条件：

i) $\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)^0_q(g_1,\ldots,g^q)\in\bigoplus ni{=}q\,\Omega^i$Aii) $\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)^0_q(g_1,\ldots,g^q) = 0$ 如果其中任一个 g_i 或它们的乘积 $g_1\cdots g^q$ 是群的单位元。

证明。对于i)，注意到，在对 Δ^q 进行积分后，陈-西蒙斯形式指数下的项中，只有所有部分$dt_i\wedge(\nabla_{i-1}-\nabla_i)$ 恰好各出现一次的项会在 ΩA 中保留下来。这尤其意味着，由 $\int_{\Delta^q}$ 得到的项是 M 上的一个次数至少为 q 的形式。

对于 ii)，注意 $\mathrm{g}_i = 1\,\mathrm{for\,i} = 1,\ldots,\mathrm{q}-1$ 对应于 $\gamma_i^*\nabla = \gamma_{i+1}^*\nabla$，$\mathrm{g}_q = 1$对应于 $\gamma_q^*\nabla = \nabla$，而 $\mathrm{g}_1\cdots\mathrm{g}_q = 1$对应于 $\gamma_1^*\nabla = \nabla$。为得到引理的陈述，我们现在证明，$\mathrm{cs}(\nabla_0,\ldots,\nabla_q) = 0$ 当且仅当对某个 i $\nabla_{i-1} = \nabla_i, \ldots, \mathrm{q}$ 或 $\nabla_0 = \nabla_q$成立。事实上，若其中一个条件成立，我们考察 $\Delta^q\times\mathrm{M}$ 上取指数的形式，并考察其中包含的 Δ^q 上的形式。若我们有某个 ∇_i 的等式，就会发现 Δ^q 上只剩下 $\mathrm{q}-1$ 个不同的一形式（对于 $\nabla_{i-1}=\nabla_i$ 的情形，我们考察 $\mathrm{cs}(\nabla_0,\ldots,\nabla_q)$ 的第二种写法，此时只剩下 $\{\mathrm{dt}_j\wedge(\nabla_{j-1}-\nabla_j)\}_{j\neq i}$ 项；而对于 $\nabla_q=\nabla_0$ 的情形，我们使用 $\mathrm{cs}(\nabla_0,\ldots,\nabla_q)$ 的第一种写法，可以看到只剩下 $\{(\mathrm{dt}_i-\mathrm{dt}_{i+1})\wedge(\nabla_q-\nabla_i)\}_{i=1,\ldots,q-1}$），那么在 Δ^q 上得到 q-形式的唯一方式，就是取 q 重楔积，且至少有一个一形式重复，因此所有项都为零。□

注记 2.14。前述引理的第二部分表明，由等变陈特征 $[\mathrm{Ch}_G(\mathrm{E},\nabla)] \in \mathrm{H}_G^{\mathrm{even}}(\mathrm{M})$ 诱导的 $\mathrm{HP}^n(\mathrm{G} \ltimes \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}))$ 中的周期循环类，可由根据 2.9 得到的显式周期循环余链 $\mathrm{c}(\mathrm{Ch}_G(\mathrm{E},\nabla))$ 表示。事实上，由此可得 $\mathrm{Ch}_G(\mathrm{E},\nabla)$ 是一个循环归一化余链。

注记 2.15。 前面引理的第一部分意味着 $c(\mathrm{Ch}_G(E,\nabla))$ 实际上是一个次数为 n的循环余链，而不仅仅是一个周期循环余链。

现在我们进入本文的主要结果，即当该作用是适当的时，我们构造的两个等变陈特征在周期循环上同调中一致：

定理 2.16. 若 G 在 M 上的作用是适当的，则定理 1.15中的陈特征 $\mathrm{Ch}^{\Omega_{E,\nabla}}$ 以及将 *Getzler* 的陈特征代入定理 2.9 所得的周期循环余循环 $c(\mathrm{Ch}_G(E,\nabla))$ 在 $HP^n(G \ltimes C^\infty(M))$中诱导相同的周期循环上同调类。

证明的要点是，当作用适当时，在 E上存在一个 G-不变联络。

备注 2.17。 很容易看出，由$\mathrm{Ch}^{\Omega_{E,\ \nabla}}$ 和c（Ch_G（E，∇））分别诱导的周期循环类都与联络的选择无关。对于 $\mathrm{Ch}^{\Omega_{E,\ \nabla}}$ 我们已经在定理 1.15中作过此说明，而对于c（Ch_G（E，∇））这来自以下事实：我们的映射c 在上同调上诱导出一个映射，并且 $[\mathrm{Ch}_G$（E，∇）$] \in H_G^{\mathrm{ev}}$（M） 与联络无关 ∇。

证明 *2.16*。 由于 M 上的作用是适当的，我们可以找到一个 G-不变联络 ∇ 在E上。这有两个含义：

- 在 Ω_E中，∇ 我们有 $\delta \equiv 0$，特别地 $F(\nabla)$ 也是 G-不变的
- 陈特征的$\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)$ 在 Getzler 复形中，对我们相关的部分$\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)^0$ 仅存在于次数 $(2k,0)$ 其中它表示为 $\frac{1}{k!}\mathrm{tr}(F(\nabla)^{\wedge k})$

现在我们可以明确写出两个循环 $\mathrm{Ch}^{\Omega_{E,\ \nabla}}$ 和 $c(\mathrm{Ch}_G(E,\ \nabla))$。从前一个开始，由于 4）中的公式可以简化，因为 G 是幺模的，并得到

$$\mathrm{Ch}^k_{\Omega_{E,\nabla}}(a_0,\ldots,a_k) = \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\wedge\frac{n-k}{2}}) \int_{G^k} a_0((h_1\cdots h_k)^{-1})((h_1\cdots h_k)^{-1})^* da_1(h_1)\wedge\cdots \cdots (h_k^{-1})^* da_k(h_k)dh_1\cdots dh_k$$

这由前面的公式可知，因为 a_0 和 a_i 都是 $\Omega(M,\mathrm{End}(E))$ 中的标量形式，因此与 2-形式 $F(\nabla)$ 可交换，最终该求和项确实.....
不依赖于 $(i_0,\ldots,\ i_k)$，以及求和所遍历的指标集大小为 $n{+}k\,2\ k$ —).

另一方面，我们可以仔细写出 $c(\mathrm{Ch}_G(E,\nabla))$ 的公式。从 $\alpha \in CP^0(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(M))$ 出发，我们看到 $c(\alpha)$ 的公式变为

$$c(\alpha)(a_0,\ldots,a_k) = \sum_{m=0}^{\frac{n-k}{2}} \sum_{p=0}^{k+2m} \langle \alpha_{n-p,k+2m-p}, \Psi_2 \mathsf{EZ}_{p,k+2m-p}((Bh)^m \Psi_1(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k))\rangle \tag{6}$$

对于 $\alpha = \mathrm{Ch}_G$（E,∇） 我们看到，只有 $m = 0$ 项有贡献。事实上，从 a_0,...、$a_k \in C_c^\infty$（G, C_c^∞（M））出发，我们得到】【。

$$(\Psi_2 \mathsf{EZ}_{k,0} \Psi_1(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k))(0) = \frac{1}{k!} \int_{G^{\times k}} (h_1 \cdots h_k)^* a_0((h_1 \cdots h_k)^{-1}) da_1(h_1) \wedge h_1^* da_2(h_2) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (h_1 \cdots h_{k-1})^* da_k(h_k) dh_1 \cdots dh_k$$

这里的因子 $\frac{1}{}k!$源于代入 $X = 0$ 后，得到的关于Δ^k的被积函数与t_1,...、t_k 无关，因此我们得到因子 $\mathrm{vol}(\Delta^k)$。

然后与 $\mathrm{Ch}_G(E,\nabla)$配对后，方程 $m = 0$ 的各项 6 相等

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} \int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}}) \int_{G^{\times k}} (h_1 \cdots h_k)^* a_0((h_1 \cdots h_k)^{-1}) da_1(h_1) \wedge h_1^* da_2(h_2) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (h_1 \cdots h_{k-1})^* a_k(h_k) dh_1 \cdots dh_k$$

然后利用这样一个事实：$\int_M$ 在一般情况下对 G的作用是不变的，并且由于在这个特定情况下，$F(\nabla)$对于 G是不变的，这可以改写为

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} \int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}}) \int_{G^{\times k}} a_0((h_1 \cdots h_k)^{-1})((h_1 \cdots h_k)^{-1})^* da_1(h_1) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (h_k^{-1})^* a_k(h_k) dh_1 \cdots dh_k$$

现在，将（6）的 $m > 0$-部分代入$(Bh)^m(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{k-2m})$ 这一公式中；当然，对于由 Bh 的作用所得到的更广泛的分布类，该公式也定义良好。为说明这些项消失，我们论证上面的公式对B-恰当元素为零。事实上，这些B-恰当元素具有这样的性质：它们由纯张量构成，其中某处含有一个或多个1（这里的1是狄拉克δ分布，其值为M上的常值函数1）。凡是在a_1 至a_k 槽位中含有1的项都立即消失，因为$d(1) = 0$。现在，对于各项 $1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$，我们得到

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!} \int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}}) \int_{G^{\times (k-1)}} da_1((h_1 \cdots h_{k-1})^{-1}) \wedge ((h_1 \cdots h_{k-1})^{-1})^* da_2(h_1) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge (h_{k-1}^{-1})^* a_k(h_{k-1}) dh_1 \cdots dh_{k-1}$$

对 G^k 的积分变为对 G^{k-1} 的积分，因为对 $a_0((h_1 \cdots h_k)^{-1})$ 积分消去 $a_0 = 1$ 后，积分就化为对 Burgleha 空间的积分，而该空间

与 G^{k-1} 微分同胚。现在注意到，由于 $\mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}})$ 是闭的（它是诱导 E 的非等变陈类的微分形式），上述公式可以写成

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\int_M d\left(\mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}})\int_{G^{\times(k-1)}} a_1((h_1\cdots h_{k-1})^{-1})\wedge((h_1\cdots h_{k-1})^{-1})^* da_2(h_1)\wedge\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\wedge(h_{k-1}^{-1})^* a_k(h_{k-1})dh_1\cdots dh_{k-1}\right)$$

由于我们对一个恰当元进行积分，因此该项为零。

总之，我们看到 $c(\mathrm{Ch}_G(E,\nabla))$ 只有来自$(m = 0)$部分的贡献（6），由此得出：

$$c(\mathrm{Ch}_G(E,\nabla))(a_0,...,a_k)=\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{k!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\int_M \mathrm{tr}_E(F(\nabla)^{\frac{n-k}{2}})\int_{G^{\times k}} a_0((h_1\cdots h_k)^{-1})\wedge$$
$$\wedge((h_1\cdots h_k)^{-1})^* da_1(h_1)\wedge\cdots\wedge(h_k^{-1})^* a_k(h_k)dh_1\cdots dh_k$$

其等于$\mathrm{Ch}\Omega_{E,\nabla}$。 □

注 2.18。人们预期，定理 2.16 的结果对于非适当作用也应成立。对于离散作用，由于 Gorokhovsky [Gor99], 的工作，这一点确实成立；我们也将在下文讨论这一点。主要思想是将M 替换为M ×X，其中G在 X上适当地作用，并将 E → M 替换为 pr*E → M ×X。在离散情形中，关键点是存在一个代数映射 Γ ⋉A → (Γ × Γ) ⋉A：当 Γ 是一个离散群且 A是一个 Γ × Γ-代数（带有诱导的对角复形 Γ-作用）时，该映射将 Uℊf发送到 $U_{g,g}$ f。利用这一点，以及周期循环上同调中的 K¨unneth 型公式，可以定义一个等变杯积；Gorokhovsky 证明，pr*E → M ×X的陈特征是 E → M 的陈特征与 X 的基本循环的杯积。

对于非离散情形，我们预计可以通过将 M 替换为$M \times G/K$ 来得到类似的论证，其中 K 是 G 的一个极大紧子群（注意，G/K 是可缩空间，且 G 在 G/K 上的作用是适当的）。我们还预计，定义杯积这一主要问题可以借助 Nistor 的结果解决 [Nis93], ，该结果表明，卷积代数 G ⋉A的周期循环上同调的局部化（经过次数平移后）与 K ⋉A的周期循环上同调的局部化同构。

3. 与已知情形的比较

3.1.平凡群作用。 如果群G 是平凡群，卷积代数$G \ltimes A$ 就是交换代数A。此时我们的双复形变为

$$L(G,A)_{p,q} = (A^+)^{\otimes(p+1)}.$$

然而，垂直微分 d^v: $L(G,A)_{\bullet,q} \to L(G,A)_{\bullet,q-1}$ 满足的是

$$d^v = \begin{cases} \mathrm{id} & q \text{ is even,} \\ 0 & q \text{ is odd.} \end{cases}$$

特别地，我们可以将全复形 $\mathrm{Tot}_\bullet(L(G,A))$ 替换为第一行 $L(G,A)_{\bullet,0}$，并且我们看到我们的复形就是 A^+ 的 Hochschild复形。

类似地，复形 $C_{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}A)$ 可以替换为复形 $C_{\bullet,0}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}A)$，在这种情况下，它就是 A 的 “deRham 复形 ”，即混合复形 $(\Omega^\bullet A, 0, d)$。映射 $\Psi_2 : L(G, A) \to C(G, \Omega_{\mathfrak{g}}A)$ 现在就变成了普通的 HKR 映射 $(A^+)^{\otimes(\bullet+1)} \to \Omega^\bullet A$；由于映射 $EZ \circ \Psi_1 : C^{\mathrm{Hoch}}_\bullet(G \ltimes A, G \ltimes A) \to L_{\bullet,0}(G, A)$ 只是恒等映射，我们看到，我们的映射链 Ψ 就是 HKR态射。

$$(C^\bullet_{\mathrm{Hoch}}(A,A), b, B) \to (\Omega^\bullet A, 0, d).$$

考察$A = C_c^\infty(M)$ 中M 为流形的情形，我们注意到，等变上同调$H_G(M)$ 就是 de Rham 上同调，而 Getzler模型$C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}C^\infty(M))$集中在$q = 0$次，其中它由$M$的 de Rham 复形给出。总而言之，这些映射

$$c\colon H^{\mathrm{ev}}_G(M) \to HP^{\dim(M)}(G \ltimes C_c^\infty(M)),\ H^{\mathrm{odd}}_G(M) \to HP^{\dim(M)+1}(G \ltimes C_c^\infty(M))$$

在这种情况下（相差一些符号）由映射诱导

$$[-]\colon \Omega^\bullet(M) \to \mathrm{Hom}(C_c^\infty(M)^{\dim(m)+1-\bullet}, \mathbb{R})$$

该映射将一个微分形式 $\omega \in \Omega^n(M)$ 映射为

$$[\omega](f_0, \ldots, f_{\dim(M)-n}) = \int_M \omega \wedge f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_{\dim(M)-n}.$$

特别是，它是以下同构的复合

$$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{\cong} H^{\mathrm{dR},c}_{\dim(M)-\bullet}(M) \xleftarrow{\cong} HP^{\dim(M)-\bullet}(C_c^\infty(M)).$$

这里，第一个映射是庞加莱对偶的一个实例，它将k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$对应到密度 $\widetilde{\omega} \in \Omega_c^{n-k}(M)^\times$，其定义为

$$\widetilde{\omega}(\alpha) = \int_M \omega \wedge \alpha,$$

第二个映射则是在连续情形下由Hochschild-Kostant-Rosenberg定理推出。

在这种情况下，陈特征彼此相容，这一点从直接确定带有联络 ∇ 的向量丛 $E \to M$ 所对应的广义循环即可清楚看出。由于不存在群作用，我们看到其底层的弯曲微分分次代数是弯曲微分分次代数

$$\Omega = \Omega(M, \mathrm{End}(E))$$

其微分为 $d^{\nabla^{\mathrm{End}}}$，曲率为 $F(\nabla)$。由此得到的广义循环可见等于（相差一个符号）由微分所诱导的流

$$\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}\mathrm{Tr}(F(\nabla)^{\wedge i}),$$

这正是诱导普通陈特征 $\mathrm{Ch}(E)\ \in H^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{dR}}(M)$ 的微分形式。

3.2. **紧群**。若置 $M=\{\mathrm{pt}\}$，我们就得到群 G 自身的卷积代数。若 G 是紧的，则 $C^\infty(G)$ 的周期循环上同调已由 Natsume 和 Nest 计算[NN90，§1.II]。在此情形下，它集中于偶数度，其中由迹表示 τ_ϕ 谱 $\hat{}G$ 上的G函数 ϕ，这些函数在某种意义下缓慢增长。这里，对于 $f\ \in C^\infty(G)$，此迹 τ_ϕ 由下式给出

$$\tau_\phi(f)=\sum_{\pi\in\widehat{G}}\frac{\phi(\pi)}{\dim(V_\pi)}\int_G f(g)\chi_\pi(g)dg$$

考察等变上同调 $H^\bullet_G(\mathrm{pt})$，由 Getzler模型可知，它仅出现在偶数次中，其中它由

$$H^{2q}_G(\mathrm{pt})\cong(\mathrm{Sym}^q(\mathfrak{g}^*))^G,$$

在 $\mathfrak{g}$上的不变q 次多项式。

分析此处的映射 $c\colon H^{\mathrm{ev}}_G(M)\ \to \mathrm{HP}^{\mathrm{ev}}(C^\infty(G))$，我们注意到不变多项式属于 $C^{0,0}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(\{\mathrm{pt}\}))$，因此唯一有意义的配对是与 $C^{0,0}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(\{\mathrm{pt}\}))$ 进行的配对。接下来，注意 $C^{0,0}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(\{\mathrm{pt}\}))$与 $C^{0,0}(G,\Omega_{\mathfrak{g}}(\{\mathrm{pt}\}))$ 之间的配对会消去严格正次数的多项式，因为该配对将一个多项式 $P\ \in\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*)$ 和一个函数 $f\ \in C^\infty(\mathfrak{g})$ 按照以下方式进行配对

$$\langle P,f\rangle=P(0)f(0).$$

我们得出以下结论：

命题3.1。映射 $c\colon\ H^{\mathrm{ev}}_G(\mathrm{pt})\ \to HP^{\mathrm{ev}}(C^\infty(G))$ 将不变多项式 $P\ \in\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*)\ \cong H^{\mathrm{ev}}_G(\mathrm{pt})$ 映射为迹 $c(P)\ \in HP^0(C^\infty(G))$，其定义为

$$c(P)(f)=f(e)P(0).$$

注记 3.2. $\tau(f)=f(e)$ 甚至是卷积代数 $C^\infty(G)$上的一个迹，这一事实是任何紧群都是幺模的这一事实的推论。事实上，容易验证：

$$\tau([f_1,f_2])=\int_G f_1(g)f_2(g^{-1})dg-\int_G f_2(g)f_1(g^{-1})dg,$$

由于幺模性，这两个积分相等。

注记3.3。 在 Natsume 和 Nest 的同构下，迹 $c(P)$ 对应于$^{\tau}\phi$ 对于

$$\phi(\pi) = P(0)\dim(V_\pi)^2.$$

这是因为正则表示的特征 $L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus}_{\pi\in} \hat{}_G V(\pi)^{\oplus \dim(V_\pi)}$ 在空间 $C^\infty(G)$上起到位于 $e \in G$ 处的狄拉克 δ 分布的作用。

回顾由命题 1.10 我们有一个映射 $\mathrm{Ch}_{\Omega,-}\colon \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})^G \to HP^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A}_G)$，它将不变多项式 γ 映射为具有闭分次迹ffl γ 的周期的特征。利用傅里叶反演进行简单计算可知，在 Natsume和Nest 的同构下，$\mathrm{Ch}_{\Omega,\gamma}$ 是与映射相关联的迹

$$\phi(\pi) = \mathsf{dim}(V_\pi)^2 \mathsf{D}_\gamma(\mathsf{Tr}(\pi))(0).$$

3.3. **紧群作用**。 在 Block-Getzer[BG94], 中，给出了当群 G 为紧群时等变循环同调的一个模型，该模型使用了关于G 的层（其拓扑由共轭不变开集定义），其中在 $g \in G$ 处的茎 $\in G$ 描绘了 $M_g = \{p \in M$ 的图景： $pg = p\}$ 以及g的中心化子的李代数 $\mathfrak{g}^g$，它们使用G^g-不变形式的芽，并带有 $\mathfrak{g}^g$中的多项式系数。利用复形上的$C^\infty_{\mathrm{inv}}(G)$-模结构，我们看到，在我们的模型中对单位元进行局部化，对应于 Block-Getzler 模型中单位元处的茎，因为群的紧性使我们能够毫无代价地从G-上同调转到G-不变量。

因此，我们精确地得到映射 α_e 的 [BG94，定理3。3], 由此我们推断

推论 3.4。 [BG94，定理 3。3] 当群 G 紧致时，映射 Ψ： $CC(G \ltimes A) \to \mathrm{Tot}(CC(G, \Omega_{\mathfrak{g}}A))$ 由图（（5） 的复合给出，在单位元处局部化后是一个拟同构。

因此，理解映射c: $H^\bullet_G$(M) → HP•(G ⋉ C^∞_c(M))的作用，等同于理解C•,•(G, $\Omega_{\mathfrak{g}}C^\infty$(M)) 与C•,•(G, $\Omega_{\mathfrak{g}}C^\infty_c$(M))之间的配对。由于群 G是紧群，我们可以将双复形分别替换为 G-上同调和 G-同调集中在其第一行的形式。特别地：

$$\mathrm{Tot}(C^{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}C^\infty(M)) \simeq (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^\bullet(M))^G$$

and

$$\mathrm{Tot}(C_{\bullet,\bullet}(G, \Omega_{\mathfrak{g}}C^\infty_c(M)) \simeq (C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^\bullet_c(M))_G.$$

这两者之间的配对首先是在 $\mathfrak{g}$ 中对 $X = 0$ 求值，其余部分则是微分形式之间的庞加莱配对的等变形式：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\dim(M)-p}(M)^G \otimes \Omega^p_c(M)_G & \to & \mathbb{R} \\ \langle \omega, \eta \rangle & \mapsto & \int_M \omega \wedge \eta, \end{array}$$

根据庞加莱对偶，这是一种（同调意义上的）完美配对。我们再次看到这样的情况：除了首先消去所有沿 $\mathfrak{g}$ 方向的行为之外，我们几乎得到了一个同调意义上的完美配对。

3.4. **离散群的作用**。 当群 G 是离散群时，我们的构造和结果直接推广了以下文献中的部分工作 [Gor99]。特别地，第 1.3 节 中定义的弯曲微分分次代数，恰好就是 [Gor99, 第 3] 节中定义的弯曲微分分次代数；当群是离散群时（当然，此时矩 μ 为零）。

我们还注意到，当群是离散群时，我们显然解决了在等变上同调与循环同调配对时沿 $\mathfrak{g}$ 方向丢失信息的问题：事实上，由于群是离散的，李代数 $\mathfrak{g}$ 是平凡的。

在离散情形下，我们注意到卷积代数 $\Gamma \ltimes C_c^\infty(M)$ 是群代数 Γ 与 Γ-代数 $C_c^\infty(M)$的扭曲张量积。特别地，元素通常写成形如 $U_g f$ 的元素之和，其中 $g \in \Gamma$ 且 $f \in C_c^\infty(M)$。于是乘积定义为

$$(U_g f)(U_h f') = U_{gh} f(g \cdot f').$$

在其著作中，Connes [Con94, §III.2.δ] 描述了等变上同调$H_\Gamma(M)$的一个模型。在该模型中，他使用了映射

$$\gamma \colon \Gamma^{\times \bullet} \to \Omega_\bullet(M)$$

群的乘积与M上的 deRham 流之间。他还给出了一个映射，将卷积代数的(b,B)-双复形的链 $\Gamma \ltimes C_c^\infty(M)$ 配对起来；该映射——除符号和组合因子外——按照以下公式，将一个如上所述的映射 γ 与卷积代数的链配对。

$$\langle \gamma, (U_{g_0} f_0, \ldots, U_{g_n} f_n) \rangle \sim \gamma(g_0, \ldots, g_n)(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_n).$$

此外，他证明了 [Con94, 定理 III.2.14] 该过程给出了等变上同调 $H_\Gamma^\bullet(M)$ 与在单位元处局部化的周期循环上同调 $HP^\bullet(\Gamma \ltimes C_c^\infty(M))$ 之间的一个同构。

利用庞加莱对偶性论证，我们可以用微分形式替代流，并重新得到等变上同调的Getzler模型。将配对转换到这一情形，并使用Eilenberg-Zilber映射完成计算后，可以得出，我们的映射 c 在等变上同调 $H_\Gamma^\bullet(M)$ 与周期循环上同调 $HP^\bullet(\Gamma \ltimes C_c^\infty(M))$ 之间，恰好就是Connes所写下的映射。

借助这一点，[Gor99, 定理 3。1] 可直接转化为一般情形下定理 2.16 的证明。

推论3.5. [Gor99,定理3.1] 当离散群 Γ 作用于一个定向流形 M 上时，对于任意等变向量丛 E，两个陈类 $c(\mathrm{Ch}_\Gamma(E))$,$\mathrm{Ch}\Omega_\Gamma(E) \in HP^{\mathrm{even}}(\Gamma \ltimes C_c^\infty(M))$ 相等。

值得注意的是，与我们在一般情况下描述的证明思路相比，离散群的情形下论证要简单得多。因此，我们快速讨论一下 Gorokhovsky 将问题化归到适当情形的论证。同样，将问题化归到适当情形的关键在于，将 M 替换为 $M \times X$ 使得 Γ 在 X上适当地作用。接下来，在 [Gor99，命题 3.3],中，利用循环上同调中的标准杯积得到一个映射

$$HP^{\dim(M)}(\Gamma \ltimes C_c^\infty(M)) \otimes HP^{\dim(X)}(\Gamma \ltimes C_c^\infty(X)) \xrightarrow{\cup} HP^{\dim(M\times X)}((\Gamma \times \Gamma) \ltimes C_c^\infty(M \times X))$$

并且可以证明 $\mathrm{Ch}_{\Omega(E)} \cup \tau = \mathrm{Ch}_{\Omega(\mathsf{pr}^*E)}$。这里，$\tau$ 是与X 上的平凡等变线丛相关联的等变定向类，而 pr^*E 被视为一个$\Gamma \times \Gamma$-等变向量丛。接着，利用一个映射

$$\Delta \colon \Gamma \ltimes C_c^\infty(M \times X) \to (\Gamma \times \Gamma) \ltimes C_C^\infty(M \times X)$$

定义为 $\Delta(U_g f) = U_{g,g} f$，可得到一个映射

$$HP^{\dim(M\times X)}((\Gamma \times \Gamma) \ltimes C_c^\infty(M \times X)) \to HP^{\dim(M\times X)}(\Gamma \ltimes C_c^\infty(M \times X))$$

并且证明了这一总约化将 $\mathrm{Ch}_{\Omega(E)} \otimes \tau$ 映射为 $\mathrm{Ch}_{\Omega(\mathsf{pr}^*E)}$。从那时起，论证大致沿着相同的思路展开。

当然，与G 为非离散李群的情形相比，最大的区别在于不存在类似 Δ 这样的映射，也没有明显的方法可以将$(G \times G) \ltimes A$ （其中A 是一个$G \times G$-代数）的循环上同调约化为$G \ltimes A$ 的循环上同调，其中我们通过对角作用将A 视为一个G-代数。

Appendix A. Showing that $\Omega_{E,\nabla}$ is an externally curved DGA

我们使用本附录来证明命题1.12。

命题 A.1. 四元组 $\Omega_{E,\ \nabla} = (\Omega_E,\ *,\ D_\nabla,\ \Theta_\nabla)$ 是一个外曲微分分次代数。

证明。这个证明与非扭曲情形基本相同，只需写出明确的方程。唯一的区别在于，我们必须处理群作用不与联络交换这一事实，以及 ∇_{X_M} 不等于 $\mathcal{L}_X$这一事实。为此，我们有几个断言，其中大多数都可由标准的类型计算得到。在下文中 $X \in \mathfrak{g}$、g、$h \in G$、 ω、$\eta \in \Omega(M$、$\mathrm{End}(E))$ 以及 $\alpha \in C_c^\infty(G$、$\mathrm{Sym}\mathfrak{g} \otimes \Omega_c(M$、$\mathrm{End}(E)))$。

Claim 1: $\iota_{X_M} g^*\omega = g^* \iota_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)_M}\omega$
Claim 2: $\delta(hg) = \delta(h) + h^*\delta(g)$
Claim 3: $d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(g^*\omega) = g^* d_{\nabla^{\mathrm{End}}}\omega + \delta(g) \wedge g^*\omega - (-1)^{|\omega|} g^*\omega \wedge \delta(g)$
Claim 4: $d^2_{\nabla^{\mathrm{End}}}\omega = F(\nabla) \wedge \omega - \omega \wedge F(\nabla)$
Claim 5: $g^*F(\nabla) = F(\nabla) - d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\delta(g)) + \delta(g) \wedge \delta(g)$
Claim 6: $\{d_{\nabla^{\mathrm{End}}}, \iota_{X_M}\}\omega - \mathcal{L}_X\omega = \mu(X) \wedge \omega - \omega \wedge \mu(X)$
Claim 7: $g^*(\mu(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))) = \mu(X) - \iota_{X_M}\delta(g)$
Claim 8: $((F(\nabla) + \mu)\delta_e * \alpha)(g, X) = (F(\nabla) + \mu(X)) \wedge \alpha(g, X)$

证明。我们使用 1.6 中卷积积的描述。令 $\phi \in C_c^\infty(G, \mathrm{Sym}\mathfrak{g}^* \otimes \Omega_c(M, \mathrm{End}(E)))$ 为一个测试函数。固定占位变量 g_1，我们需要在 T_α 上测试函数 $g_2 \mapsto g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)$；加上 $\mathfrak{g}$-分量，即该函数将 (g_2, X) 映射为 $(g_1^{-1})^* \phi(g_1 g_2, \mathrm{Ad}_{g_1}(X))$，因此以 T_α 测试可得

$$\langle T_\alpha(g_2), g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle(X) = \int_G \alpha(g_2, X) \wedge (g_1^{-1})^*(\phi(g_1 g_2, \mathrm{Ad}_{g_1}(X)))dg_2$$

因此，用于测试的函数 $(F(\nabla) + \mu)\delta_e$ 将 (g_1, X) 映射为

$$\begin{aligned}(g_1 \cdot \langle T_\alpha(g_2), g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle)(X) &= g_1^*(\langle T_\alpha(g_2), g_1^{-1} \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle(\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}}(X))) \\ &= \int_G (g_1^*(\alpha(g_2, \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}}(X))) \wedge \phi(g_1 g_2, X)dg_2\end{aligned}$$

将其与 $(F(\nabla) + \mu)\delta_e$ 进行测试时，我们代入 $g_1 = e$ 并取楔积，得到

$$\langle (F(\nabla) + \mu)\delta_e * T_\alpha, \phi\rangle(X) = \int_G (F(\nabla) + \mu(X)) \wedge \alpha(g_2, X) \wedge \phi(g_2, X)dg_2$$

并且我们看到，这个分布恰好具有 T^β 的形式

$$\beta(g, X) = (F(\nabla) + \mu(X)) \wedge \alpha(g, X)$$

这证明了该断言。 □ C8

Claim 9: $(\alpha * (F(\nabla) + \mu)\delta_e)(g, X) = \alpha(g, X) \wedge (g^* F(\nabla) + g^*(\mu(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))))$

证明。我们再次令 ϕ 为测试函数，并固定占位变量 g_1。现在将函数 $(g_2, X) \mapsto (g_1^{-1})^*\phi(g_1 g_2, \mathrm{Ad}_{g_1}(X))$ 与 $(F(\nabla) + \mu)\delta_e$ 进行检验，得到：

$$\langle (F(\nabla) + \mu)\delta_e(g_2), g_1 \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle(X) = (F(\nabla) + \mu(X)) \wedge (g_1^{-1})^*\phi(g_1, \mathrm{Ad}_{g_1}(X))$$

因此我们得到

$$(g_1 \cdot \langle (F(\nabla) + \mu)\delta_e(g_2), g_1 \cdot \phi(g_1 g_2)\rangle)(X) = (g_1^* F(\nabla) + g_1^*(\mu(\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}}(X)))) \wedge \phi(g_1, X)$$

将此与 $T_\alpha(g_1)$ 进行检验，我们得到

$$\langle T_\alpha * (F(\nabla) + \mu)\delta_e, \phi\rangle(X) = \int_G \alpha(g_1, X) \wedge (g_1^* F(\nabla) + g_1^*(\mu(\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}}(X)))) \wedge \phi(g_1, X)dg_1$$

而这恰好具有 T^β 对于

$$\beta(g, X) = \alpha(g, X) \wedge (g^* F(\nabla) + g^*(\mu(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))))$$

这证明了该断言 □ C9

Claim 10: $d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\omega \wedge \eta) = d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}\eta)$.

命题 11： $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \delta(e^{tX}) = -d^{\nabla^{\mathrm{End}}}(\mu(X)) - \iota_{X_M} F(\nabla)$

利用这些断言，我们可以证明 $\Omega_{E,\nabla}$ 是一个外曲微分分次代数。首先注意到，乘法由一般理论可知是结合的，因为它是由一个G-代数诱导的卷积积。

接下来我们证明，对于所有 $\alpha, \beta \in \Omega$，$D_\nabla(\alpha * \beta) = (D_\nabla(\alpha)) * \beta) + (-1)^{|\alpha|}\alpha * (D_\nabla(\beta))$。我们考察构成 D_∇ 的三个项：

$$d_{\nabla^{\mathrm{End}}}((\alpha * \beta)(g, X)) = \int_G d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(h, X) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh.$$

利用命题 10，可将其分解为

$$\begin{aligned} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}((\alpha * \beta)(g, X)) = &\int_G (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(h, X))) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))))dh. \end{aligned}$$

利用第二行中的命题 3，得到

$$\begin{aligned} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}((\alpha * \beta)(g, X)) = &\int_G (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(h, X))) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge \delta(h) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)) \wedge \delta(h)dh. \end{aligned}$$

然后利用命题 2，将最后一行中的 $\delta(h)$ 项替换为 $h^*\delta(h^{-1}g) - \delta(g)$，便得到

$$\begin{aligned} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}((\alpha * \beta)(g, X)) = &\int_G (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(h, X))) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge \delta(h) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*(\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)) \wedge \delta(h^{-1}g))dh \\ &+ (-1)^{|\alpha|+|\beta|+1} \int_G \alpha(h, X) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)) \wedge \delta(g)dh. \end{aligned}$$

注意，这里最后一行在作用于 $\alpha * \beta$ 时，会抵消为 D_∇ 的 $\wedge\delta$ 部分。接下来处理 ι_{X_M} 项，我们得到

$$\begin{aligned} \iota_{X_M}((\alpha * \beta)(g, X)) &= \int_G \iota_{X_M}(\alpha(h, X) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &= \int_G (\iota_{X_M}\alpha(h, X)) \wedge h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|} \int_G \alpha(h, X) \wedge \iota_{X_M}(h^*\beta(h^{-1}g, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh. \end{aligned}$$

将断言1应用于第二行，得到

$$\begin{aligned}\iota_{X_M}((\alpha*\beta)(g,X)) = &\int_G (\iota_{X_M}\alpha(h,X))\wedge h^*\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh\\ &+(-1)^{|\alpha|}\int_G \alpha(h,X)\wedge h^*(\iota_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)_M}\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)))dh.\end{aligned}$$

综合以上内容，我们得到

$$\begin{aligned}D_\nabla((\alpha*\beta))(g,X) &= \int_G \left(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(h,X))+(-1)^{|\alpha|}\alpha(h,X)\wedge\delta(h)+\iota_{X_M}\alpha(h,X)\right)\wedge h^*\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh\\ &\quad+(-1)^{|\alpha|}\int_G \alpha(h,X)\wedge h^*\Big(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))+\\ &\quad(-1)^{|\beta|}\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))\wedge\delta(h^{-1}g)+\iota_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)_M}\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))\Big)dh\\ &= \int_G (D_\nabla\alpha)(h,X)\wedge h^{-1}\beta(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh\\ &\quad+(-1)^{|\alpha|}\int_G \alpha(h,X)\wedge h^{-1}((D_\nabla\beta)(h^{-1}g,\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))dh\\ &= ((D_\nabla\alpha)*\beta)(g,X)+(-1)^{|\alpha|}(\alpha*(D_\nabla\beta))(g,X).\end{aligned}$$

最后我们证明 $D_\nabla^2=[\Theta_\nabla,-]$。首先，我们计算 D_∇^2:

$$\begin{aligned}(D_\nabla^2\alpha)(g,X) &= d_{\nabla^{\mathrm{End}}}((D_\nabla\alpha)(g,X))-(-1)^{|\alpha|}(D_\nabla\alpha)(g,X)\wedge\delta(g)+\iota_{X_M}((D_\nabla\alpha)(g,X))\\ &= d^2_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X))+(-1)^{|\alpha|}d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X)\wedge\delta(g))+d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\iota_{X_M}(\alpha(g,X)))\\ &\quad-(-1)^{|\alpha|}d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X))\wedge\delta(g)-\alpha(g,X)\wedge\delta(g)\wedge\delta(g)\\ &\quad-(-1)^{|\alpha|}\iota_{X_M}(\alpha(g,X))\wedge\delta(g)+\iota_{X_M}(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X)))\\ &\quad+(-1)^{|\alpha|}\iota_{X_M}(\alpha(g,X)\wedge\delta(g))+\iota_{X_M}\iota_{X_M}\alpha(g,X).\end{aligned}$$

现在我们利用命题 10、ι_{X_M} 是分次导子这一事实以及 $\iota^2_{X_M}=0$，得到

$$\begin{aligned}(D_\nabla^2\alpha)(g,X) = &d^2_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X))+\alpha(g,X)\wedge d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\delta(g))-\alpha(g,X)\wedge\delta(g)\wedge\delta(g)\\ &+\{d_{\nabla^{\mathrm{End}}},\iota_{X_M}\}(\alpha(g,X))+\alpha(g,X)\wedge\iota_{X_M}(\delta(g)).\end{aligned}$$

现在我们利用断言 4 和断言 6，得到

$$\begin{aligned}(D_\nabla^2\alpha)(g,X) =&(F(\nabla)+\mu(X))\wedge\alpha(g,X)+\mathcal{L}_X(\alpha(g,X))\\ &-\alpha(g,x)\wedge(F(\nabla)-d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\delta(g))+\delta(g)\wedge\delta(g)+\mu(X)-\iota_{X_M}\delta(g)).\end{aligned}$$

于是，断言 5 和断言 7 给出

$$\begin{aligned}(D_\nabla^2\alpha)(g,X) = &(F(\nabla)+\mu(X))\wedge\alpha(g,X)+\mathcal{L}_X(\alpha(g,X))\\ &-\alpha(g,X)\wedge(g^*F(\nabla)+g^*\mu(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))).\end{aligned}$$

最后注意，非扭曲情形中的计算在此处同样适用，从而得到$\mathcal{L}_X=[\Theta,-]$；结合断言 8 和 9，将得到

$$(D_\nabla^2\alpha)(g,X)=[\Theta_\nabla,\alpha](g,X).$$

最后我们检验比安基恒等式 $D_\nabla(\Theta_\nabla * \alpha) = \Theta_\nabla * D_\nabla\alpha$。为明确记号，我们为$D_\nabla$的三项分别给出明确名称，即 ∇、δ 和 ι，分别用于

$$(\nabla\alpha)(g,X) = d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X)), \qquad (\delta\alpha)(g,X) = (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,X)\wedge\delta(g,X),$$

$$(\iota\alpha)(g,X) = \iota_{X_M}\alpha(g,X).$$

我们计算

$$\begin{aligned}\nabla(\Theta_\nabla * \alpha)(g,X) = {} & d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\mathcal{L}_X(\alpha(g,X))) - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(e^{tX}g,X)) \\ & + d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(F(\nabla)\wedge\alpha(g,X)) + d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\mu(X)\wedge\alpha(g,X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Theta_\nabla * \nabla\alpha)(g,X) = {} & \mathcal{L}_X(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X))) - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(e^{tX}g,X)) \\ & + F(\nabla)\wedge d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X)) + \mu(X)\wedge d_{\nabla^{\mathrm{End}}}\end{aligned}$$

注意，第二项相互抵消；结合 $d^{\nabla^{\mathrm{End}}}$ 是楔积的分次导子这一事实，以及经典比安基恒等式 $d^{\nabla^{\mathrm{End}}}(F(\nabla)) = 0$，第三项也相互抵消。我们得到

$$(\nabla(\Theta_\nabla * \alpha) - \Theta_\nabla * \nabla\alpha)(g,X) = [d_{\nabla^{\mathrm{End}}}, \mathcal{L}_X](\alpha(g,X)) + (d_{\nabla^{\mathrm{End}}}\mu(X))\wedge\alpha(g,X)$$

接下来我们计算这里出现的各项，首先有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X))) = {} & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}\cdot d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(\alpha(g,X)) \\ \text{(C3)} \to {} = {} & \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d_{\nabla^{\mathrm{End}}}(e^{tX}\cdot\alpha(g,X)) - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta(e^{tX})\wedge e^{tX}\cdot\alpha(g,X) \\ & + (-1)^{|\alpha|}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(e^{tX}\cdot\alpha(g,X))\wedge\delta(e^{tX})\end{aligned}$$

利用 $\delta(e) = 0$ 这一事实，可得

$$[d_{\nabla^{\mathrm{End}}}, \mathcal{L}_X](\alpha(g,X)) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta(e^{tX})\right)\wedge\alpha(g,X) - (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,X)\wedge\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta(e^{tX})\right)$$

利用命题 11，现在可以推出

$$(\nabla(\Theta_\nabla * \alpha) - \Theta_\nabla * \nabla\alpha)(g,X) = -\iota_{X_M}F(\nabla)\wedge\alpha(g,X) - (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,X)\wedge\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta(e^{tX})\right)$$

接下来我们考察 δ 部分并发现

$$\begin{aligned}\delta(\Theta_\nabla * \alpha)(g,X) = {} & (-1)^{|\alpha|}\mathcal{L}_X(\alpha(g,X))\wedge\delta(g) - (-1)^{|\alpha|}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\alpha(e^{tX}g,X)\wedge\delta(g) \\ & + (-1)^{|\alpha|}F(\nabla)\wedge\alpha(g,X)\wedge\delta(g) + (-1)^{|\alpha|}\mu(X)\wedge\alpha(g,X)\wedge\delta(g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Theta_\nabla * \delta\alpha)(g,X) =&(-1)^{|\alpha|}\mathcal{L}_X(\alpha(g,X)\wedge\delta(g)) - (-1)^{|\alpha|}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\alpha(e^{tX}g,X)\wedge\delta(e^{tX}g)\\ &+(-1)^{|\alpha|}F(\nabla)\wedge\alpha(g,X)\wedge\delta(g)+(-1)^{|\alpha|}\mu(X)\wedge\alpha(g,X)\wedge\delta(g)\end{aligned}$$

由此我们得出结论

$$\begin{aligned}(\delta(\Theta_\nabla * \alpha) - (\Theta_\nabla * \delta\alpha))(g,X) &= (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,X)\wedge\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\delta(e^{tX}g) - e^{tX}\cdot\delta(g))\right)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\alpha(g,X)\wedge\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\delta(e^{tX})\right)\end{aligned}$$

最后，我们来看看 ι 部分。

$$\begin{aligned}\iota(\Theta_\nabla * \alpha)(g,X) =&\iota_{X_M}(\mathcal{L}_X(\alpha(g,X))) - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\iota_{X_M}(\alpha(e^{tX}g,X))\\ &+\iota_{X_M}(F(\nabla)\wedge\alpha(g,X)) + \iota_{X_M}(\mu(X)\wedge\alpha(g,X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Theta_\nabla * \iota\alpha)(g,X) =&\mathcal{L}_X(\iota_{X_M}(\alpha(g,X))) - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\iota_{X_M}(\alpha(e^{tX}g,X))\\ &+F(\nabla)\wedge\iota_{X_M}(\alpha(g,X)) + \mu(X)\wedge\iota_{X_M}(\alpha(g,X))\end{aligned}$$

我们在这里发现了

$$(\iota(\Theta_\nabla * \alpha) - \Theta_\nabla * \iota\alpha)(g,X) = [\iota_{X_M},\mathcal{L}_X](\alpha(g,X)) + \iota_{X_M}F(\nabla)\wedge\alpha(g,X)$$

与非扭曲情形完全类似，我们有 $[\iota_{X_M},\mathcal{L}_X] = 0$，因此可见来自 ∇、δ 和 ι 的贡献相互抵消，从而得出比安基恒等式

$$D_\nabla(\Theta_\nabla * \alpha) = \Theta_\nabla * D_\nabla\alpha$$

确实成立。

我们由此得出 $\Omega_{E,\nabla}$ 是一个外曲微分分次代数，如断言所述。 □

参考文献

[BG94] Jonathan Block 和 Ezra Getzler。等变循环同调与等变微分形式。*Ann.Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4)*，27(4):493–527，1994年。[BGJ95] Jonathan Block、Ezra Getzler 和 John D. S. Jones。交叉积代数的循环同调。II. 拓扑代数。纯粹与应用数学杂志，466:19–25，1995年。[Bla85] P. Blanc。可微（上）同调与群的改变。载于同调、群Ext^n，有限长度表示´李群，Ast´erisque 第124-125卷，页码13–29。1985年。[BN94] J.-L. Brylinski 和 Victor Nistor。 ´étale 群胚的循环上同调。*K*-理论，8(4):341–365，1994年。[Bry87a] Jean-Luc Brylinski。与群作用相关的代数及其同调，布朗大学，预印本。1987年。[Bry87b] Jean-Luc Brylinski。循环同调与等变理论。傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔），37(4):15–28，1987年。

[Con86] A. Connes。循环上同调与叶状结构的横截基本类。载于《算子代数中的几何方法》（京都，1983），Pitman 数学研究笔记丛书第123卷，页码52–144。Longman Sci. Tech.，哈洛，1986年。[Con94] Alain Connes。《非交换几何》。学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1994年。[Cra99] Marius Crainic。 ´étale 群胚的循环上同调：一般情形。K-理论，17(4):319–362，1999年。[FT87] B. L. Fe˘ıgin 和 B. L. Tsygan。加法 K-理论。载于《K-理论、算术与几何》（莫斯科，1984–1986），《数学讲义》第1289卷，页码67–209。施普林格，柏林，1987年。[Get94] Ezra Getzler。非紧李群的等变陈特征。Adv. Math.，109(1):88–107，1994年。[GJ93] Ezra Getzler 和 John D. S. Jones。交叉积代数的循环同调。纯粹与应用数学杂志，445:161–174，1993年。[Gor99] Alexander Gorokhovsky。循环的特征、等变特征类与 Fredholm 模。Comm. Math. Phys.，208(1):1–23，1999年。[GS99] Victor W. Guillemin 和 Shlomo Sternberg。超对称与等变 de Rham 理论。《数学：过去与现在》。施普林格出版社，柏林，1999年。附录收录 Henri Cartan 的两篇转载文章 [MR0042426 (13,107e); MR0042427 (13,107f)]。[KR04] M. Khalkhali 和 B. Rangipour。论广义循环 Eilenberg-Zilber 定理。Canad. Math. Bull.，47(1):38–48，2004年。[LMV17] Jean-Marie Lescure、Dominique Manchon 和 St´ ephane Vassout。关于群胚上分布的卷积。J. Noncommut. Geom.，11(2):757–789，2017年。[Lod98] Jean-Louis Loday。《循环同调》，《数学科学基本原理》第301卷。[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]。施普林格出版社，柏林，第二版，1998年。附录 E 由 Mar´ıa O. Ronco 撰写，第13章由作者与 Teimuraz Pi-rashvili 合作撰写。[Nis90] V. Nistor。群上同调与交叉积的循环上同调。Invent. Math.，99(2):411–424，1990年。[Nis93] Victor Nistor。代数群作用下交叉积的循环上同调。Invent. Math.，112(3):615–638，1993年。[NN90] Toshikazu Natsume 和 Ryszard Nest。紧李群的循环上同调与直和公式。J. Operator Theory，23(1):43–50，1990年。[Pon18] Rapha¨el Ponge。循环同调与群作用。J. Geom. Phys.，123:30–52，2018年。[Pon23] Rapha¨el Ponge。循环同调与群作用。载于《循环上同调四十年：成就与未来展望》，《纯粹数学研讨会论文集》第105卷，页码371–395。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， [2023] ©2023年。[PPT23] Markus J. Pflaum、Hessel Posthuma 和 Xiang Tang。真李群胚的 Hochschild 同调。J. Noncommut. Geom.，17(1):101–162，2023年。

阿姆斯特丹大学电子邮件地址:
b.a.kosmeijer@uva.nl

阿姆斯特丹大学电子邮箱地址:
h.b.posthuma@uva.nl