印度与三角函数微积分

Vijay A. Singh，客座教授，CEBS 物理系，孟买。
电子邮件：physics.sutra@gmail.com

arXiv:2304.03684v1 [math.HO] 7 Apr 2023

摘要

我们探讨一批杰出数学家的研究工作。他们生活在喀拉拉邦中部，以创始人马德哈瓦（公元1350年）为首，发展出可谓微积分的方法，并将其应用于一类三角函数。我们以反正切函数的展开为例，说明他们如何处理积分。此外，他们承续了五世纪数学家阿耶波多（公元499年）的研究，运用微分，并推导出正弦函数和余弦函数的展开式。《Yuktibhasa》（约公元1500年）可谓第一本微积分教科书，书中还详细介绍了三角函数面积和体积的求法，以及圆周率的多种展开式。本文采用教学式的讲解方式，并给出练习题，邀请有志向的学生亲自动手，尝试按照马德哈瓦的方法进行近似计算和积分。

I 引言

大约六百年前，喀拉拉邦中部尼拉河（今称婆罗多普扎河）畔的一群寺庙村庄，曾孕育出一代杰出的数学家。其中最杰出的是创始人马德哈瓦（公元1350年），他开创了后来被称为微积分的学科。马德哈瓦具有远见卓识，但他的著作如今所存无几。他的弟子们薪火相传，不仅使微积分得以延续，还不断发展并撰文阐述。我们如今能读到的，正是这些著述。以下略举数人。马德哈瓦的亲传弟子帕拉梅什瓦拉著述颇丰，花了55年观测夜空并记录日食和月食。他与两个儿子拉维和达莫达拉一同担任尼拉坎塔的老师。尼拉坎塔著作众多，其中《Tantrasamgraha》以及对重要典籍《Aryabhatiya》（公元499年）的注释《Bhasya》尤为著名。我们尤其要感谢他的学生杰什塔德瓦。他撰写了 Yuktibhasa，Divakaran（见参考文献）称之为“第一部微积分教科书”。这一传承延续至19世纪，详情请参阅图1及其说明。

马德哈瓦及其学生发展出了三角函数及其反函数的展开式。一个世纪或更久之后，欧洲数学家运用牛顿和莱布尼茨的微积分发展出了这些展开式。这一事实由 Charles M. Whish [1] 注意到并加以报道。印度书面传统主要以文字为基础。书中提及结果，却省略推导过程。《Aryabhatiya》（公元499年）由一百多首晦涩、极度压缩的数学诗verse组成，是一个典型例子。不过，就 Nila 数学家而言，我们更加

[1]“论印度教关于圆的求积法，以及在四部论典《Tantra Sanghraham》《Yucti Bhasha》《Carana Padhati》和《Sadratnamala》中所展示的圆周与直径之比的无穷级数”，Charles M. Whish，《大不列颠及爱尔兰皇家亚洲学会会刊》第3卷，第509页（1834年）。Whish 私下认识尚卡拉·瓦尔曼（见图1）。

幸运。尤其是得益于 Yuktibhasa 这部著作，我们能够看到详细的推理过程，尽管这些内容仍然以文字为基础。下文将介绍这些印度数学家所使用的方法概况，以及他们的一些成果。最后的习题将帮助你更切实地理解这些内容。

II Samskaram（递归精化）

作为一种方法，递推被印度数学家广泛使用。最好通过一个简单的例子来解释 Samskaram（迭代修正法）或递归精化这一术语。它还有另一个名称——Shudhikarna 或 Shudikarti。考虑在已知 $1/x$ 的情况下求 $1/(x-d)$。我们写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-d} &= \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right] \\ &= \frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left(\frac{1}{x-d}\right)\end{aligned}$$

在第二步右端，我们有“未知项” $1/(x-d)$。将其替换为第一步的右端，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-d} &= \frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right)\right] \\ &= \frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left(\frac{1}{x-d}\right)\right]\end{aligned}$$

然后再递推一步

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-d} &= \frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left(\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{d}{x}\left(\frac{1}{x-d}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

此时，我们可以省略最右端的“d”，得到

$$\frac{1}{x-d} \approx \frac{1}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{d^2}{x^3} + \frac{d^3}{x^4}$$

或者进一步“精化”我们的求值，即

$$\frac{1}{x-d} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{d}{x}\right)^n \tag{1}$$

这种迭代修正法或递归精化被称为 Samskaram（迭代修正法）。这种方法最早的用途之一，是用于求一个数的平方根；相关记载见于在白沙瓦附近发现的《巴克沙利手稿》，其年代大概为公元300年至500年。最后的习题将帮助你更好地理解这一点。我们暂且指出以下内容：

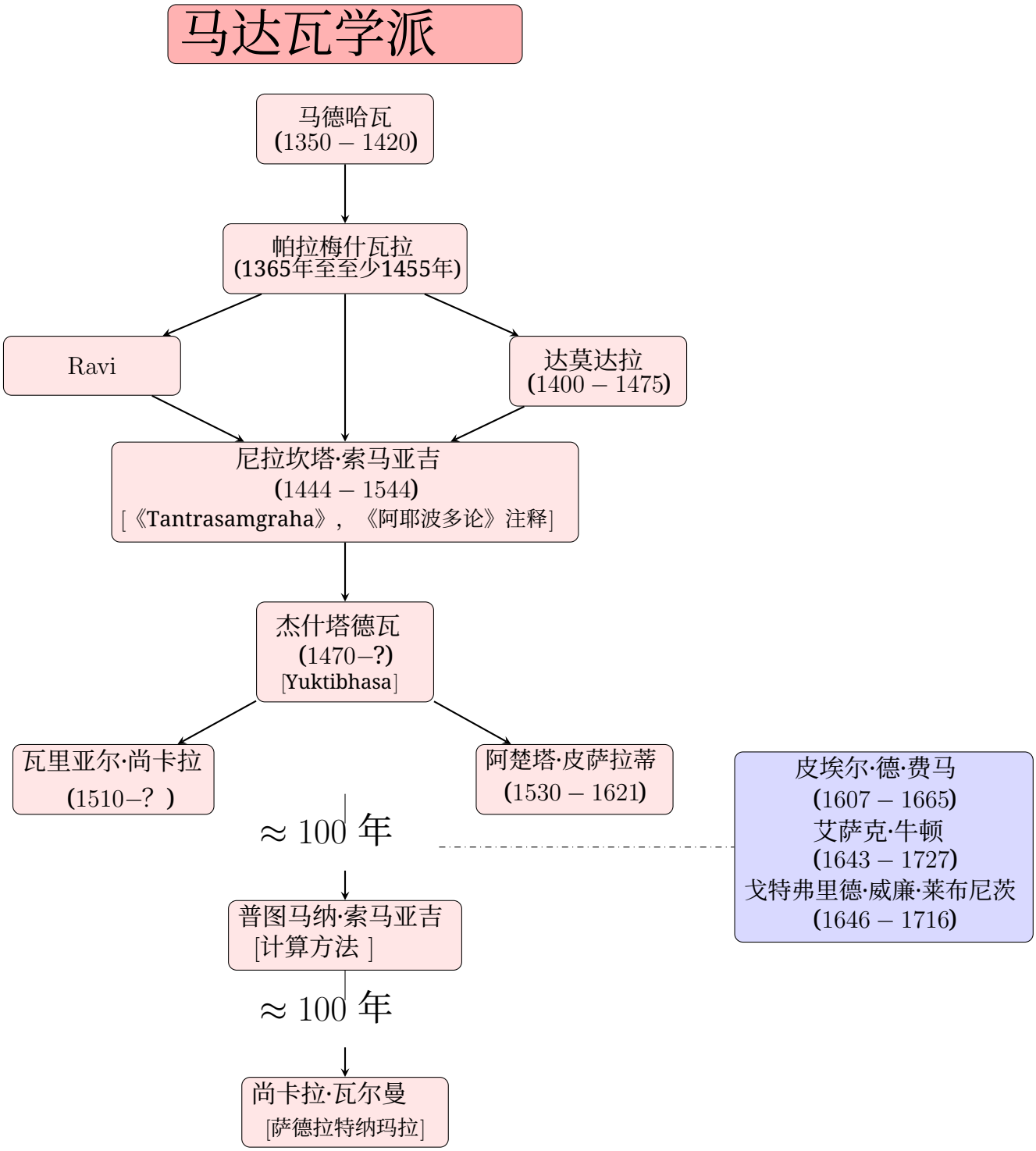

图1：马达瓦学派成员。尼拉坎塔的出生年份1444年已得到确切考证。其他日期尚不确定，存在一定误差（± 5年）。除拉维和达莫达拉是帕拉梅什瓦拉的儿子外，其他成员都不是其直系后代。印度数学的先驱学者萨拉斯瓦蒂·阿玛将这一传承称为阿耶波多学派。

1. 这种方法不同于我们熟悉的泰勒展开。事实上，将其用于余弦级数时，它得到的是

$$cos(\theta+\delta) \approx cos(\theta) - \delta sin(\theta) - \delta^2/2\ cos(\theta) + \delta^3/8\ sin(\theta) + ..$$

最后一项应为 $\delta^3/6$ ，但 Samskaram（迭代修正法）却错误地给出了该项。马达瓦学派[2] 似乎意识到了这一点，并继续推导出正确的展开式（见第 IV 节）。

2. 当 x 和 d 为正且 $d < x$ 时，该级数收敛。尼拉坎塔所引用的具体例子是 $x = 4$ 和 $d = 1$。

3. 上面的例子展示了对无穷级数的熟练运用。左端是一个未知的有限数，右端则是一个等于该数的无穷级数。除非从马德哈瓦的角度来看，否则这或许不会显得有什么问题。人们第一次面对一个未知的无理数 π ，却声称可以用无穷级数来表示它——马德哈瓦正是这样做的。稍后我们还会看到更多这方面的内容（第 III 节）。

III Samkalitam——积分

III.1 引言

Samkalitam 一词意为“和”。在这里，它是一种特殊的和，其极限是一个积分。随着本节的展开，这个术语的含义会变得更加清晰。

马德哈瓦的一项卓越成就是用 $t = tan(\theta)$ 表示角度 θ 的级数，其中 $\theta \leq \pi/4$。

$$\theta \quad = \quad t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - ... \quad (t = tan(\theta)) \tag{2}$$

我们认出这就是“格雷戈里—莱布尼茨”级数，也是令查尔斯·威什感到惊讶的结果之一，因为它比欧洲微积分早了两个多世纪（见脚注第 I 节）。我们要强调的是，这一结果经过了细致的推导，而不是仅仅像板球术语所说的那样，“一次侥幸的击球”。我们将推导这一结果，从而初步了解尼拉传承如何处理积分。我们的论证分为两个阶段。第一阶段是几何部分，马德哈瓦通过精妙的推理确立了该表达式（第 III.2 节）

$$\delta\theta \quad = \quad \frac{\delta tan(\theta)}{1 + tan^2(\theta)} \tag{3}$$

接下来的两节将讨论上述表达式的 Samkalitam（积分）（第 III.2 节和第 III.3 节）。这一整套过程在微积分史上尚属首次。

[2]为避免下文产生混淆，我们将把所有结果都归于“马达瓦学派”，只偶尔归于杰出的“尼拉传承”或某部著作（如 Yuktibhasa）。这一传承的成员有时也会使用“Madhavoditam”（马德哈瓦所说）这一说法，偶尔还会提及阿耶波多。

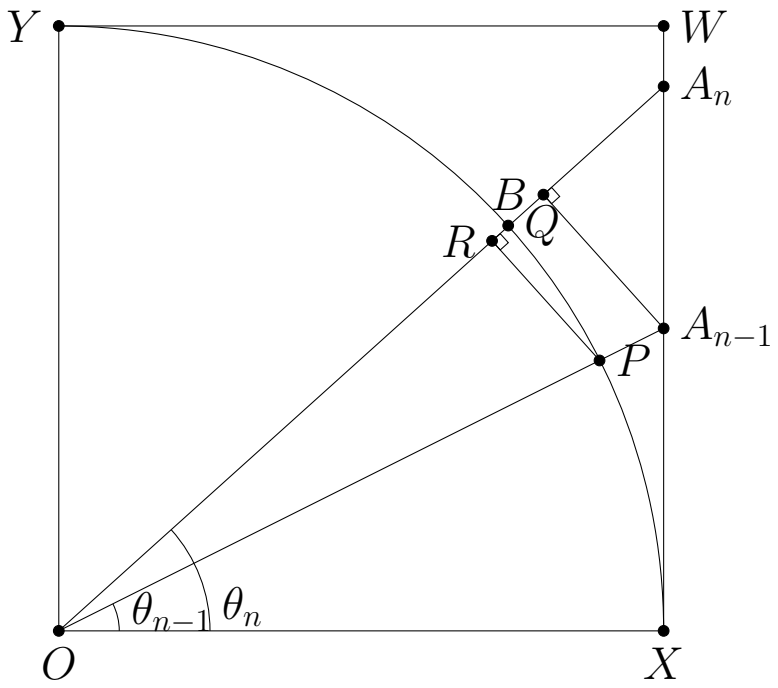

图2：单位圆的一个象限 OXY 由一个单位正方形$OXWZ$外接。点 A_{n-1} 和 A_n 彼此非常接近，但为便于观察，放大了它们之间的距离。弧PQ在O处所对的角为 $\delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$。 PR 和 $A_{n-1}B$ 是 OA_n 上的垂线，这些内容只会用于一道习题。

III.2 几何部分

马德哈瓦得出了角度 θ 与正切 $t(= tan(\theta))$之间的关系。图 2 展示了单位圆的一个象限。外切的单位正方形为 $OXWY$。我们将角度 XOA_{n-1} 记为 θ_{n-1}，将角度 XOA_n 记为 θ_n。线段 XW 被分成大量 N 个相等的线段，分别为 $X = A_0$、 A_1、 A_2、 $..A_{n-1}$、 A_n、 $...A_N$ =W。线段 $A_{n-1}A_n = 1/N$ 很短，等于正切的增量 δt。单位圆弧上的相应增量为 PQ，等于 $\theta_n - \theta_{n-1}$。再说一遍

$$\begin{aligned} \delta t &= A_{n-1}A_n = 1/N & (4)\\ \delta\theta_n &= \theta_n - \theta_{n-1} & (5) \end{aligned}$$

同样由直角三角形 OXA_n,

$$\begin{aligned} OA_n^2 &= OX^2 + XA_n^2 \\ &= 1 + (\frac{n}{N})^2 & (6) \end{aligned}$$

通过一系列基于相似三角形和微小性 $\delta\theta_n$ 的精妙论证，马德哈瓦展示了

$$\begin{aligned} sin(\delta\theta_n) &= \frac{\delta t}{OA_n^2} \\ &= \frac{1}{N(1 + (n/N)^2)} & (7) \end{aligned}$$

Yuktibhasa要求我们将 N 视为非常大的量；它使用pararddham一词，或 10^{17}，并提到这只是概念上的，还要设想更大的数！角度$\delta\theta_n$ 和 δt ，用它自己的话说是“shunyaprayam”，意为具有零的性质（而不是“shunyam”或零）。换言之，这就是微积分中的“无穷小量”。为强调这一点，文本还称其为“anuprayam”，即原子的。

$$\delta\theta_n = \frac{1}{N(1+(n/N)^2)} \tag{8}$$

这很容易辨认出就是式（3）。下一步是对表达式式（8）进行积分。我们分两步来做。

III.3 最初几项的 Samkalitam

我们可以轻松求出方程（8）左边的和。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\delta\theta_n &= (\theta_1-\theta_0)+(\theta_2-\theta_1)+...(\theta_N-\theta_{N-1}) \\ &= \pi/4 \end{aligned} \tag{9}$$

我们利用 Eq. (1) 和 $x=1$、 $d=-(n/N)^2$ 展开 Eq.(8) 的右边，从而得到一个无穷级数

$$\pi/4 \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[1-\frac{n^2}{N^2}+\frac{n^4}{N^4}-..-\right] \tag{10}$$

$$\approx I_N(0)-I_N(2)+I_N(4)-I_N(6)+... \tag{11}$$

with

$$I_N(k) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n^k}{N^k}\right] \tag{12}$$

如上所示，前三项很容易求和。

$$I_N(0)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[1]=1$$

$$I_N(2)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n^2}{N^2}\right]=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}$$

$$I_N(4)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{n^4}{N^4}\right]=\frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30N^5}$$

接下来我们取极限 $N\to\infty$，并用 J 表示极限量。经观察

$$J_0=\lim_{N\to\infty}I_N(0)=1$$
$$J_2=\lim_{N\to\infty}I_N(2)=1/3$$
$$J_4=\lim_{N\to\infty}I_N(4)=1/5$$

对于 I_N(6)和 I_N(8)，存在解析表达式，但更高阶项将需要了解并运用伯努利数。马德哈瓦及其门徒是否处理了更高阶项，例如 J_{20} 例如？答案是，他们通过归纳法，并借助大 N的渐近极限完成了这一工作。他们的方法将在附录中介绍，这又一次展现了他们高超的数学才能。具体而言，他们得到

$$J_k = \frac{1}{k+1} \tag{13}$$

总结如下：

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \\ &= \sum_{k=0,2,4,...}^{\infty} (-1)^{k/2} \frac{1}{k+1} \end{aligned} \tag{14}$$

我们以几点相关的评论结束本节。

1. 我们可以将上述内容与我们学过的微积分联系起来。例如，在上面的式（12）中，取

$$1/N \to dt; \quad \sum_{1}^{N} \to \int_0^1; \quad (n/N)^k \to t^k$$

so

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n^k}{N^k} \right] \to \int_0^1 t^k dt \tag{15}$$

2. 与我们熟悉的微积分相比，一个关键区别在于，在马德哈瓦方法中，我们先求和，然后取极限 N 趋于无穷大。在前一种方法中，我们先取极限得到微分 dt，然后进行积分。由于 t^k 的幂的导数已知，因此可以运用微积分基本定理[3]，机械地写出结果$1/（k+1）$。而在我们的方法中，积分是从基本原理出发求得的。正如我们将看到的，马德哈瓦方法有一些优点。其中之一，即求和次序的交换，上文已经提到。在我们的求和过程中，基本定理显然成立。例如式（9），其中求和被端点（$\pi/4$-0）所取代。下一节我们将通过另一个例子对此加以说明。

3. 我们可以取 $\delta t = tan(\theta)/N$ 代替 $\delta t = 1/N$，从而得到一般级数。

$$\theta = 1 - \frac{tan^3(\theta)}{3} + \frac{tan^5(\theta)}{5} - \frac{tan^7(\theta)}{7} + ... \tag{16}$$

在这里，我们可以合理地使用“函数”这一术语。它描述了一个实数量 θ 对另一个实变量 tan θ的依赖。换句话说，对于该变量的每一个值，我们都有一个函数表达式。

[3]也就是说，函数 f 在固定区间上的积分，就是其原函数 F 在该区间两端的变化量。

4. 在马德哈瓦之前，我们已有圆周率的一个近似值，即 22/7，或者按照阿耶波多给出的数值，即62832/20000 = 3.1416。阿耶波多明确指出，这个数值是近似值，也就是说，它接近但并不完全等于 π。需要注意的是，马德哈瓦并未给出另一个近似值，而是给出了一个关于 π的精确无穷级数。这暗示了 π 的无理性，但马德哈瓦并未明确如此说明。方程（14）中的级数收敛缓慢，因此人们提出了许多方法来构造快速收敛的级数。直到1800 年代，世界纪录一直由马达瓦学派的尚卡拉·瓦尔曼保持（见图 1），其 π 精确到小数点后 18 位。

IV 微分；正弦与余弦展开

在本节中，我们首先探讨阿耶波多的工作，然后了解这些工作如何促使马达瓦学派发展出微分的概念，并推导出正弦和余弦级数的展开式。

IV.1 阿耶波多关联

人们可以辨识出印度数学从吠陀时期以前（< 1000公元前）一直延续到19世纪，尽管这种延续性十分微弱。一个突出的例子是《Aryabhatiya》（公元499年）对马达瓦学派（公元1350年）的影响。

《Aryabhatiya》共有约121首诗，其中33首属于数学部分（数学篇）。阿耶波多首次在数学史上定义了正弦函数。它是图3中单位圆的半弦 AP。

$$\begin{aligned} sin(\theta) &= \frac{AP}{OA} \\ &= AP \quad (OA = 1) \end{aligned}$$

圆可能大或小；相应地， AP 和 OA 可能大或小，但左侧是 θ 的函数且保持不变。借此，阿耶波多赋予了圆几何度量性质。仅凭这一点，他就足以被称为三角学的奠基人。但他做得更多。

他知道，两个角 $\phi + \delta\phi$ 和 $\phi - \delta\phi$ 的正弦之差与平均角 ϕ的余弦成正比，

$$sin(\phi + \delta\phi) - sin(\phi - \delta\phi) = 2sin(\delta\phi)cos(\phi) \tag{17}$$

而两个角 $\phi + \delta\phi$ 和 $\phi - \delta\phi$ 的余弦之差与平均角 ϕ的正弦成正比。

$$cos(\phi + \delta\phi) - cos(\phi - \delta\phi) = -2sin(\delta\phi)sin(\phi) \tag{18}$$

此外，他还给出了第二正弦差。根据其评注者的说法，这是通过再次运用基于相似三角形的巧妙论证得出的。由于我们在此关注的是不同的问题，所以这里不再赘述。但阿耶波多做得更多。

[4]这个词须与粗略值区分开来。例如，理论学家使用 9.1×10^{-31} kg 作为电子质量时，这就是粗略值。实验学家谨慎地给出 9.10938×10^{-31} kg 这一数值时，这就是近似值，意味着通过更仔细的实验还可以进一步修正。

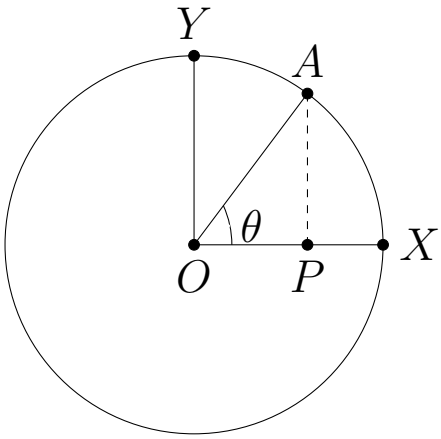

图 3：单位圆的象限。半弦 AP 是阿耶波多所定义的 sin（θ）。注释请参见正文。

随后，他得出了 0 到 $\pi/2$ 之间固定角度的正弦值，从而生成了用于 $\pi/48 = 3.75$ 度、7.5 度.....90 度的正弦表。自公元499年以来，印度天文学家（以及占星家）一直以某种形式使用这张表，直到今天。我们将在下一节中看到这一点。为了让你有所了解，每当你使用计算器，或查阅表格来寻找正弦值和三角函数的值时，都可以默默感谢阿耶波多为你指明了方向。但阿耶波多所做的不止这些。

IV.2 有限差分微积分

令 $\delta\phi = \epsilon$，其中 ϵ 很小但并非无穷小量（不是"shunyaprayam"）。取 $\phi = n\epsilon$，其中 n 是从 1 到 N 的正整数。为明确起见，$\epsilon = \pi/48 = 3.75^0 = 3438'$。利用上一节中的正弦与余弦差公式，我们定义差分

$$\begin{aligned} \delta s_n &= s_{n+1} - s_n = 2s_{1/2}c_{n+1/2} && (19) \\ \delta c_n &= c_n - c_{n-1} = -2s_{1/2}s_{n+1/2} && (20) \end{aligned}$$

其中符号 s_n 表示 sin（$n\epsilon$），c_n 表示 cos（$n\epsilon$），而 $s_{1/2}$ 表示 $sin\epsilon/2$。注意，这些实质上与公式（17）和（18）相同，例如 sin（$\phi + \delta\phi$）$-sin$（ϕ）$= 2sin$（$\delta\phi/2$）cos（$\phi + \delta\phi/2$）。上述是一个耦合方程组，而阿耶波多的洞见在于取二阶差分，即

$$\begin{aligned} \delta^2 s_n &= \delta s_n - \delta s_{n-1} = 2s_{1/2}(c_{n+1/2} - c_{n-1/2}) \\ &= -4s_{1/2}^2 s_n \quad \text{using Eq. (20)} && (21) \end{aligned}$$

因此，正弦的二阶差分与正弦本身成正比。类似地，余弦的二阶差分也与余弦成正比。

$$\begin{aligned} \delta^2 c_n &= \delta c_n - \delta c_{n-1} = 2s_{1/2}(s_{n+1/2} - s_{n-1/2}) \\ &= -4s_{1/2}^2 c_n \quad \text{using Eq. (19)} && (22) \end{aligned}$$

下一步是将右端项表示为递推形式。我们注意到，式 Eq.(21) 右端的 s_n 可以写成 $s_n = s_n - s_{n-1} + s_{n-1} - s_{n-2} + s_{n-2} - ... =$

$\delta s_{n-1} + \delta s_{n-2} + ...$ 因此

$$\delta s_n - \delta s_{n-1} \;=\; -4s_{1/2}^2 \sum_{m=1}^{n-1} \delta s_m \tag{23}$$

这里需要说明几点。

1.上述工作出自阿耶波多之手，他取 $\epsilon = \pi/48$。他还将 $s_1 = sin(\epsilon)$近似为 $\approx \epsilon$。利用这一结果，他以24个等距步长求出了从 3.75_0 到 90^0的角的正弦。我们将在习题中提出一个沿着这一思路的简单问题。

2. 更重要的是，上述算法正是我们目前用来数值地求导数的算法。我们知道，sine(37^0)接近0.6，而sine(30^0)为0.5。因此，角度之差为 7^0，换算成弧度是0.122。因此，根据式（19），中间角33.5^0 处正弦的导数为

$$\delta sin(\phi)/\delta\phi \;=\; (0.6 - 0.5)/0.122 = .82$$

查阅正弦表或使用计算器可得cos(33.5) $= 0.83$。同样，方程(21)给出二阶导数，即

$$\delta^2 sin(\phi)/\delta^2\phi \approx -sin(\phi)$$

上述内容现在被称为导数和二阶导数的中心差分近似。阿耶波多没有提及“有限差分微积分”这一术语（更不用说微积分了）。但如今，人们仍使用类似的方法以数值地求解微分方程。这包括牛顿第二定律以及量子力学中著名的薛定谔方程；二者都是二阶微分方程。

IV.3 三角级数

阿耶波多取 $\delta\phi = \pi/48$（$= 3.75^0 = 3438'$）。但这并非不可更改，他还说明 $\delta\phi$ 可以是“chindyat yateshtani”，意思是可以任意小。也可以任意大。例如，婆罗摩笈多（公元600年）取 $\pi/12$，利用上一节阿耶波多的公式生成正弦级数。值得肯定的是，他还掌握了计算中间值正弦的可靠方法。马达瓦学派则采取了相反的方向，将其取为非常小的值。

我们将方程（17）和（18）中的 $\delta\phi$ 替换为 $\delta\phi/2$。

$$\begin{aligned} \delta sin(\phi) &= sin(\phi + \delta\phi/2) - sin(\phi - \delta\phi/2) \\ &= 2sin(\delta\phi/2)cos(\phi) \qquad (24) \\ \delta cos(\phi) &= cos(\phi + \delta\phi) - cos(\phi - \delta\phi) \\ &= -2sin(\delta\phi/2)sin(\phi) \qquad (25) \end{aligned}$$

如同前一节一样，我们取 $\delta\phi/2 = \phi/N$，其中 N 再次大得难以想象，比 paraddham 或 10^{17} 还要大！于是 $\delta\phi/2$ 是 sunyaprayam，即“具有零的性质”，也就是一个无穷小量。然后，我们可以将 $2\ sin(\delta\phi/2)$ 替换为 $\delta\phi$，从而得到

$$\begin{aligned} \delta sin(\phi) &= \delta\phi\, cos(\phi) \qquad (26) \\ \delta cos(\phi) &= -\delta\phi\, sin(\phi) \qquad (27) \end{aligned}$$

马达瓦学派将上述方程保留为微分形式。他们没有明确写出导数。但我们完全可以这样做。

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\phi\to 0}\frac{\delta sin(\phi)}{\delta\phi} &= \frac{dsin(\phi)}{d\phi}\\ &= cos(\phi)\end{aligned} \tag{28}$$

同样地

$$\frac{dcos(\phi)}{d\phi} = -sin(\phi) \tag{29}$$

借鉴上一节的思路，我们还可以再求一次导数，例如 $\delta^2 sin\phi$和 $\delta^2 cos\phi$

$$\frac{d^2sin(\phi)}{d\phi^2} = -sin(\phi) \tag{30}$$

$$\frac{d^2cos(\phi)}{d\phi^2} = -cos(\phi) \tag{31}$$

马德哈瓦及其弟子在离散域中进行研究，将取极限过程留到最后。我们将使用我们熟悉的现代记号来说明他们是如何进行的。从零到 θ 积分一次

$$\begin{aligned}\left.\frac{dsin(\phi)}{d\phi}\right|_\theta - \left.\frac{dsin(\phi)}{d\phi}\right|_0 &= -\int_0^\theta sin(\phi)d\phi \quad \text{Or}\\ \left.\frac{dsin(\phi)}{d\phi}\right|_\theta &= 1-\int_0^\theta sin(\phi)d\phi\end{aligned}$$

注意，我们使用了微积分基本定理。我们再次重复这一过程，以得到

$$sin(\theta) = \theta - \int_0^\theta d\phi\int_0^\phi sin(\xi)d\xi \tag{32}$$

上述表达式可以很容易地进行递归精化（“Samskaram（迭代修正法）”）。首先，我们有

$$\sin(\theta)_1 = \theta$$

接下来，我们将式（32）右侧第二项中的正弦替换为 $sin(\xi) = \xi$。因此，对于第二个递推式

$$\begin{aligned}sin(\theta)_2 &= \theta - \int_0^\theta d\phi\int_0^\phi \xi d\xi\\ &= \theta - \int_0^\theta \phi^2/2\, d\phi\\ &= \theta - \theta^3/3!\end{aligned}$$

很容易看出这一趋势。接下来，我们将公式 (32) 中的 $sin(\xi)$ 替换为 $\xi - \xi^3/3!$。由此得到

$$sin(\theta)_3 = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5!$$

因此，整个正弦级数就得到了

$$sin(\theta) \quad = \quad \sum_{k=1,3,5\ldots} (-1)^{(k-1)/2} \frac{\theta^k}{k!} \tag{33}$$

同理，可以得到余弦级数

$$cos(\theta) \quad = \quad \sum_{k=0,2,4\ldots} (-1)^{k/2} \frac{\theta^k}{k!} \tag{34}$$

我们采用“Samskaram（迭代修正法）”的方法进行展开，但在推导中穿插了更为熟悉的积分，并借助微积分基本定理。可以说，Yuktibhasa一书以一种令人叹为观止的方式，用离散形式体系完成了整个习题，并用马拉雅拉姆语详尽地描述了这一过程[5]。我们没有采用这种做法。与上一节相关的附录将使读者了解这种离散形式体系的运作方式。

V 讨论

在马达瓦学派的其他成就中，我们提及其中两项。他们运用微积分方法推导出了球体的面积和体积公式。其次，他们意识到 π 级数（式14）的收敛速度很慢，因此以多种方式重新构造了该级数。他们的才智可由一个例子证明：桑卡拉·瓦尔曼（Sankara Varman，19世纪初；见图1）将 π 的值计算到小数点后18位。当时，这创下了世界纪录。这里我们不再详述这些成就。

人们不时会听到有关早于马德哈瓦的印度数学家在微积分方面成就的说法。在描述天体运动时，巴斯卡拉二世（公元1100年）使用过诸如tatkalika（在那个瞬间）这样的术语。他还提到了椭圆轨道在远拱点和近拱点处的静止性质。这是一个基于观测所得理论洞见的可贵例子。仔细研读后会发现，他仍然是在用角度（而非时间）上的小的有限差分来思考。关于尼拉坎塔（见图1）及其改进的天文模型，也有人提出过类似的主张。这符合第IV.2节所述的阿耶波多框架。量值虽小，但并不存在无穷小量（“shunyaprayam”）及其所要求的严谨处理。球体的面积和体积也有所提及，但得出这些结果的方法并不清楚。欧洲数学史上也有类似情况。阿基米德很久以前就通过穷竭法得到了 π 的值。笛卡尔和费马都曾根据斜率讨论过“导数”。费马甚至提到了函数 $f(x)$ 中的一些点，在这些点上， x 的微小变化对f(x)“几乎没有影响”。充其量，可以将这些杰出数学家的工作称为前微积分或微积分萌芽。

马达瓦学派的研究存在一些明显的不足。他们对无穷级数的收敛性十分敏感，但并未证明其收敛性，无论是绝对收敛还是条件收敛。牛顿也没有做到这一点。文中没有明确的导数记号，也没有将其解释为斜率。从某种意义上说，马达瓦学派的...

[5]印度数学家的大多数手稿都以梵语写成，并采用诗体，遵循梵语的语法和格律规范

微分的处理方式更接近莱布尼茨，而非牛顿。人们可以感受到他们不愿将“零除以零”。文中没有讨论圆锥曲线（例如双曲线）。此外，如何在萨姆拉克里塔姆语中求 $\sqrt{x}$ 的积分呢？又该如何对指数函数和对数函数进行积分？这些问题的答案或许是：这是可能的。学生们，尤其是印度学生，应当推动马达瓦计划向前发展，并探索其优势与局限。总而言之，这是一种优美的微积分方法。等到严肃的欧洲科学和数学传入印度时，马达瓦学派或许已日渐衰落，因此可能没有机会处理这些问题。

总而言之，马达瓦学派建立了一套连贯的形式体系，采用了可视为微积分方法的方法，并成功将其应用于一类函数，即三角函数。这种方法与欧洲的方法迥然不同，令人耳目一新。借用菲尔兹奖得主戴维·芒福德的话来说：“在我看来，将 [马德哈瓦] 与牛顿和莱布尼茨相提并论是公平的。”[6]

致谢：作者谨此记录与 P. P. Divakaran 教授进行的多次有益讨论。

$J_k = 1/(k+1)$ 的推导（式（13））

我们定义一个相关量 $S_N(k)$

$$S_N(k) = N^{k+1} I_N(k) = \sum_{n=1}^{N} n^k \tag{35}$$

证明分两部分进行。我们首先推导出 $S_N(k)$ 的递推关系。接着，取较大 N 时的渐近极限，以得到 $S_N(k)$ 的显式表达式。

为推导递推关系，我们首先注意到

$$\begin{aligned} NS_N(k-1) - S_N(k) &= \sum_{n=1}^{N} (N-n) n^{k-1} && (36) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{n} j^{k-1} && (37) \end{aligned}$$

Thus

$$S_N(k) = NS_N(k-1) - \sum_{n}^{N-1} S_n(k-1) \tag{38}$$

要看出如何将方程（36）中的单重求和重排为方程（37）中的双重求和，并不容易。一种方法是取一些具体数值，例如 $N = 5$ 和 $k = 3$，以此说服自己。Divakaran 的著作（见参考文献）对这一结果取连续统极限，并通过分部积分予以证明。他还指出，这是阿贝尔重求和公式的一个特例；Yuktibhasa 发现并运用了这一公式，实在令人惊叹。利用定义（方程（35）），我们可以由方程（37）得到方程（38）给出的递推关系。

[6]《美国数学会通报》，第 57 卷，第 385 页（2010 年）。

下一步是在 N 很大的极限下求解 S_N（k）。首先注意到，根据方程（35），$S_N(0) = N$。因此，方程（38）得出

$$\begin{aligned} S_N(1) &= N^2 - \sum_n^{N-1} S_n(0) \\ &= N^2 - (1+2+3+...(N-1)) \\ &= N^2 - N(N-1)/2 \\ &= N^2/2 \end{aligned} \tag{39}$$

其中，我们在最后一步取大 N 极限。式（39）表明，

$$S_N(k) = N^{k+1}/(k+1) \tag{40}$$

我们接着使用数学归纳法。我们将利用递推公式（38）证明 $S_N(k+1) = N^{k+2}/(k+2)$。注意

$$\begin{aligned} S_N(k+1) &= NS_N(k) - \sum_n^{N-1} S_n(k) \\ &= N^{k+2}/(k+1) - \sum_n^{N-1} n^{k+1}/(k+1) \\ &= \frac{N^{k+2}}{k+1} - \frac{S_{N-1}(k+1)}{k+1} \end{aligned} \tag{41}$$

其中，最后一步是根据式（35）中 $S_N(k)$ 的定义得到的。由于 N 很大，我们取 $S_{N-1}(k+1) \approx S_N(k+1)$。由此便得到了我们所需的关系。

$$S_N(k+1) = \frac{N^{k+2}}{k+2} \tag{42}$$

现在我们注意到，我们已经渐近地证明了这一点。因此，我们将方程(35)中的 $I_N(k)$ 替换为 $N \to \infty$ 极限表达式 J_k，

$$J_{k+1} = \frac{1}{k+2} \tag{43}$$

同理可得 $J_k = 1/(k+1)$。我们注意到，该推导对所有正整数k 都成立，而不仅适用于第 III 节中要求的偶数。

习题

1. 正数 n 的平方根的 Samskaram（迭代修正法）。取一个小于 n 但最接近它的完全平方数 m^2。定义一个修正量 $n = m^2 + r$。我们可以将其改写为

$$n = (m + r/2m)^2 - (r/2m)^2.$$

第一次迭代时，略去右侧的 $(r/2m)^2$ 项，于是

$$\sqrt{n_1} = m + r/2m.$$

继续迭代并证明

$$\sqrt{n}_2 = m + r/2m - (r/2m)^2 \frac{1}{2(m + r/2m)}.$$

用数值方法计算 $n = 95$ 和 $m = 9$。

2。正数 n平方根的另一种 Samskaram（迭代修正法）。取

$$\sqrt{n}_1 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right).$$

求出下一次迭代。再次用数值方法计算 $n = 95$ 和$m = 9$。两种方法中，哪一种得到的$\sqrt{5}$更接近真实值?

3. 马德哈瓦余弦插值公式的 Samskaram（迭代修正法）。考虑以下两个三角恒等式:

$$cos(\theta + \delta) = cos(\theta) - 2sin(\delta/2)sin(\theta + \delta/2) \quad (44)$$
$$sin(\theta + \delta) = sin(\theta) + 2sin(\delta/2)cos(\theta + \delta/2) \quad (45)$$

我们指出，尼拉传承承认，这些恒等式最早见于《Aryabhatiya》（公元499年）的《数学》部分。随后，马德哈瓦在 δ 较小时，用 $\delta/2$ 近似 $sin(\delta/2)$，写出

$$cos(\theta + \delta) = cos(\theta) - \delta sin(\theta + \delta/2) \quad (46)$$

接着，他省去右边正弦项中的 $\delta/2$ ，得到递推的第一步

$$cos(\theta + \delta)_1 = cos(\theta) - \delta sin(\theta)$$

另一方面，如果我们保留了式（46）并采用精确的正弦公式（45），就能改进递推。证明，继续下去将会得到

$$cos(\theta + \delta)_3 = cos(\theta) - \delta sin(\theta) - \frac{\delta^2}{2} cos(\theta) + \frac{\delta^3}{8} sin(\theta)$$

这不会得出正确的余弦展开式。尼拉河数学家非常清楚上述展开式的局限性。这道习题旨在指出，Samskaram（迭代修正法）通常伴随着其他近似（在此情况下为 $sin(\delta/2) \approx \delta/2$），其可靠性必须独立于迭代过程进行评估。

4. 印度数学传统恰当地运用了相似三角形。我们可以通过推导角度与其正切之间的重要关系式（式（7））来略窥一二。首先证明三角形 OXA_n 和 $A_{n-1}A_nB$ 相似，并进一步证明三角形 OPR 和 $OA_{n-1}B$ 相似。由此推导出。

$$PR = \frac{A_nA_{n-1}}{OA_n\, OA_{n-1}}$$

注意， $PR = sin$（$\delta\theta_n$）以及 $OA_n \approx OA_{n-1}$ ，而 $A_nA_{n-1} = \delta t$。

5. 我们可以按照阿耶波多的建议生成正弦表，但不必完全采用他为 ϵ 使用的相同数值。我们选择 $\epsilon = \pi/80 \approx 0.0393$，这与 4.5^0 相同。我们取 $sin（\epsilon） \approx \epsilon$ 和 $sin（2\epsilon） \approx 2\epsilon$）。如果你有简单计算器，可以利用公式（23），以相同步长生成从 2.25 度到 18 度的所有正弦值。或者，如果你有可编程计算器或电脑，可以生成从 2.25 度到 90 度的所有正弦值。将结果与你的计算器以其他方式得出的结果进行比较。6. 使用第 IV.3 节的方法，推导余弦展开式，从而得到公式（34）。7. 对求和公式（公式（36）和公式（37））取连续统极限。为此请参见公式（15）。证明这两个求和确实相等。 [注意：此证明由 Divakaran 提出（见参考文献）。]

部分参考文献

这些参考文献均为英文。

小学

1.《Aryabhatiya》，Walter E. Clark，芝加哥大学出版社（1930年）。2.《Aryabhatiya》，Kripashanker Shukla 和 K V Sarma，第一、二卷，印度国家科学研究院出版物（1976年）。第四部分的第1节和第2节，是根据这两位作者对《数学篇》若干诗句所作的批判性讨论撰写的。3.《Ganita-Yukti-Bhasa》（杰什塔德瓦著），K. V. Sharma（K. Ramasubramanian、M. D. Srinivas 和 M. S. Sriram 作注），印度斯坦图书出版社，新德里（2008年）。

次要：

1.《印度数学》，P. P. Divakaran，印度斯坦图书出版社（2018年）。本书以显而易见或不易察觉的方式影响了本文。强烈推荐。2.《印度教数学史》，Bibhutibhusan Datta 和 Avadhesh Narayan Singh，第一、二卷，亚洲出版社，德里（1935年和1938年）。这是一部开创性著作，写于印度独立前，介绍印度数学。3.《印度古代与中世纪几何学》，萨拉斯瓦蒂·阿玛，莫蒂拉尔·巴纳西达斯出版社，德里（1999年）。书中有许多值得一读的详细讨论，也揭示了印度数学传统从古代到英国统治前时期的延续性。

Vijay A. Singh 教授曾任教于坎普尔印度理工学院（1984—2014）和塔塔基础研究所 HBCSE（2005—2015），并在长达十年的时间里担任科学奥林匹克竞赛和国家本科科学教育倡议的全国协调员。他是印度国家科学院院士，曾任印度物理教师协会会长（2019—21）。目前，他是孟买 CEBS 的客座教授。（电子邮箱：physics.sutra@gmail.com）