arXiv:2304.03685v2 [math.DS] 8 Apr 2024

圆上一类非一致膨胀随机动力系统的马蹄

JEROEN S.W. LAMB*、GIUSEPPE TENAGLIA* 和 DMITRY TURAEV*

*Imperial College London

Abstract. 我们提出了一维随机动力系统中随机马蹄集的概念。我们证明，对于一类受加性噪声作用的圆周自映射，只要噪声足够大，使李雅普诺夫指数为正，随机马蹄集便大量存在。具体而言，我们给出了一些条件，保证对于任意一对不相交区间，几乎对每一种噪声实现，都存在一列具有正密度的返回时间，使得诱导动力学构成两个符号上的全移位。

1. 引言与研究动机

动力系统最令人着迷的方面之一，是对混沌及其性质的研究。在随机动力系统中，存在具有正最大李雅普诺夫指数的物理测度 [17]，是描述混沌的一种常见概念。李雅普诺夫指数是统计量，用于衡量典型轨道沿给定方向的无穷小膨胀/收缩速率。如果最大李雅普诺夫指数为正，那么局部膨胀最终会使邻近轨道彼此分离，从而形成一种可能导致极其复杂动力学的机制。

在确定性情形中，Katok [12] 的一项卓越结果表明，保有遍历测度且最大 Lyapunov 指数为正的 $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ 微分同胚，其动力学可以用一致双曲不变集来逼近，这类不变集称为马蹄。对于流形 X 上的微分同胚 f、两个盒子 I_0、$I_1 \subset X$ 和 $N \in \mathbb{N}$，集合

$$H = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-jN}(I_0 \cup I_1).$$

若微分映射 $df^N|_{T(I_0\cup I_1)}$ 是一致双曲的，且映射 $f^N|_H$ 与两个符号上的全移位拓扑共轭，则称其为马蹄；这意味着，双向无限的 0 和 1 序列与 H 中各点的轨道一一对应：

$$\forall \{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}},\ \exists!\, x \in H \mid f^{Nj}(x) \in I_{s_j} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

拓扑共轭意味着 $f^N|_H$ 具有正的拓扑熵，并且对初始条件敏感依赖。Katok 的结果将一种统计性质——最大 Lyapunov 指数为正——与拓扑动力学性质联系起来。

在尝试为随机动力学建立类似的对应关系时，会遇到诸多困难。主要问题在于如何控制返回时间。在确定性情形中，Katok 构造 [12] 的一个关键要素是找出两个具有周期性返回的盒子（I_0、I_1）

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37H20,37B10, 37D25, 60J05.*Key words and phrases.* 混沌行为、正 Lyapunov 指数、符号动力学、随机动力系统。

然而，在随机系统中，返回时间通常取决于噪声实现，并且以正概率可能任意大。

本文针对第 2 节所述的一类圆映射，解决了这一问题。这些映射呈现出噪声诱导混沌：噪声幅度较小时，典型轨道会同步并收敛到一个随机不动点；但超过临界噪声幅度后，动力学便会变得混沌。因此，对于适度较大的噪声，我们证明了李雅普诺夫指数为正，并且马蹄形动力学广泛存在。

给定一个集合 Ω、一个映射 $\theta\colon \Omega \to \Omega$ 以及一个映射族 $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ with $f_\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$，考虑以下迭代

$$f_\omega^n(x) := f_{\theta^{n-1}(\omega)} \circ \cdots \circ f_\omega(x).$$

定义 1.1. 设 I_0、I_1 为两个区间，满足 $I_0 \cap I_1 = \emptyset$。设 $\omega \in \Omega$ 且 $\kappa > 1$。那么，若存在一列返回时间 $\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$满足

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k(\omega)}{k} < \infty, \tag{1.2}$$

以及一个子集族 $\{J(k,\omega)_{i,\ j}\}_{\{k\geq 0, i,j\in\{0,1\}\}}$，使得 $J(k,\omega)_{i,\ j} \subset I_i$,

$$f_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}(J(k,\omega)_{i,j}) = I_j, \tag{1.3}$$

and

$$\left| df_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}|_{J(k,\omega)_{i,j}} \right| > \kappa \qquad \forall k \geq 0. \tag{1.4}$$

在我们的设定中，我们赋予 Ω 概率空间的结构，因此迭代 f_ω^n 表示一个随机动力系统。在定理 2.6 （我们的主要结果）中，我们描述了一类随机动力系统，并证明其中随机马蹄集大量存在。

以下特殊情形说明了这一结果：

定理 1.2。设 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 是一个在 $[-\sigma,\sigma] \subset [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上均匀分布的独立同分布随机变量，且 $L > 0$。考虑由迭代 $f_\omega^n := f_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_0}$ 生成的随机动力系统（RDS），其中 f_{ω_i} 是如下形式的圆映射

$$f_{\omega_i}(x) := L\sin(2\pi(x+\omega_i)) + a \pmod 1, \tag{1.5}$$

其中 $a \in (0,1)$。令 $\mathbb{P} := \left(\frac{\mathrm{Leb}_{[-\sigma,\sigma]}}{2\sigma}\right)^{\mathbb{N}}$ 为 Ω 上的自然乘积测度：$= [-\sigma,\sigma]^{\mathbb{N}}$，并令 θ 表示 Ω 上的移位。那么，存在常数 $\gamma > 0$ 和 $\kappa > 1$，使得对于每个$a \in (0,1)$，$L \geq 9$ 和 $\sigma \geq \frac{11}{10}L^{-\frac{1}{2}}$

(i) 李雅普诺夫指数为正：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |df_\omega^n(x)| > \gamma \log(L) \qquad \mathbb{P}\times \mathrm{Leb}\ a.s.$$

(ii)存在一个满 $\mathbb{P}$-测度集$\tilde{\Omega} \subset \Omega$，使得对于每个 $\omega \in \tilde{\Omega}$，每一对连通的不相交区间$(I_0, I_1)$ 都是一个 (ω, k)-马蹄。

定理 1.2 确保了一族非一致扩张随机动力系统中存在马蹄形动力学。此前，在一致双曲随机动力系统的框架下，无论是纤维上的混合 [10], ，还是具有等度连续或准周期基底 [9]，都已获得了与定理 1.2 类似的结果。在不假设双曲性的情况下，弱马蹄集的存在性曾被

已针对具有正拓扑熵 [11]的随机动力系统建立。然而，弱马蹄本质上只能刻画具有有限时间范围的动力学，而我们的结果关注的是无限时间内的行为。

我们的主要结果定理 2.6 适用于满足以下条件的随机圆周端同态:

(1) 正李雅普诺夫指数；(2) 李雅普诺夫指数的退火分布尾部衰减足够快；(3) 存在一个映射到整个圆的一致扩张区间；(4) 噪声幅度足够大，使得任意给定区间最终被映射到整个圆的概率为正。

那么，在进一步的温和条件下，我们证明每一对不相交区间 (I_0, I_1) 几乎必然是某个 $\kappa > 1$ 的 (ω, κ)-马蹄。特别地，这些 (ω, κ)-马蹄意味着混沌，表现为对初始条件的敏感依赖和正拓扑熵。

作为定理 2.6 的应用，我们在定理 2.9 中证明，对于具有足够大加性噪声的主要扩张随机圆周端同态，存在类似马蹄的动力学。特别地，在没有噪声时，(1.5) 中的随机动力系统变为确定性映射

$$f(x) := L\sin(2\pi x) + a \pmod 1.$$

对于典型的参数值，它具有汇，而其吸引域的补集是一致双曲排斥子。对于这类示例，定理 2.9 确立了：当 L 足够大时，通过引入加性噪声从该自映射得到的随机动力系统在超过特定噪声幅度水平后会表现出向混沌的转变，其意义是该随机动力系统具有一个全支撑的遍历平稳测度、正李雅普诺夫指数以及大量马蹄形动力学。实际上，噪声促进了确定性吸引子与排斥子的合并，其程度足以使混沌动力学占据主导。

本文结构如下：第 2 节回顾随机动力系统的基本框架，给出马蹄存在的充分条件，并陈述主要结果。我们还定义了主要扩张随机映射类。第 3 节重新探讨双曲时 [1] 理论在随机情形中的应用。第 4 节给出双曲时淬火尾部的估计。第 5 节证明主要定理。第 6 节和第 7 节证明，主要定理的结论适用于第 2 节定义的主要扩张随机动力系统类，即证明定理 1.2。

2. Statement of the results

2.1. 假设与主要结果。设 (X, Σ, ν) 为一个概率空间，并记 $\mathbb{S}^1$为单位圆，其配备弧长距离 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ 以及由该距离诱导的博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$。另记 $\mathrm{Leb}(\cdot)$ 为 $\mathbb{S}^1$ 上的勒贝格测度。

我们考虑如下形式的斜积系统

$$\Theta\colon \Omega \times \mathbb{S}^1 \to \Omega \times \mathbb{S}^1, \qquad \Theta(\omega, x) := (\theta(\omega), g_\omega(x)), \tag{2.1}$$

其中 $\Omega := X^{\otimes\mathbb{N}}$ 是一个配备乘积测度 $\mathbb{P} = \nu^{\otimes\mathbb{N}}$ 和乘积 σ-代数 $\mathcal{F}$ 的概率空间，并且

$$\theta\colon \Omega \to \Omega, \qquad \theta(\{\omega_i\}_{i\geq 0}) = \{\omega_{i+1}\}_{i\geq 0}$$

是作用于 Ω 上的移位映射。因此，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ 是一个遍历动力系统。此外，$\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是一个圆周自映射族。

我们假设 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是一族连续的分段 $\mathcal{C}^2$ 自映射，并且对于所有 $\omega \in \Omega$，除有限个不可微点 $\mathcal{S}_\omega$ 外，g_ω 都是 $\mathcal{C}^2$，且其一阶和二阶导数一致有界。此外，定义临界集

$$\mathcal{C}_\omega := \{x \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{S}_\omega \mid dg_\omega(x) = 0\},$$

并令 $\mathcal{SC}_\omega := \mathcal{S}_\omega \cup \mathcal{C}_\omega$ 为奇异集。我们分别称族 $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$、$\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 和 $\{\mathcal{SC}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 为 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的随机不可微点集、随机临界集和随机奇异集。以下定义改编自 [1, 定义 4.1]。

定义 2.1。设 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 如上所述，且 $\{\mathcal{SC}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 为其随机奇异集。若存在常数 $B > 1$ 和 $\beta > 0$，使得对于几乎所有 $\omega \in \Omega$，$\{\mathcal{SC}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 都是 $\mathbb{P}$ 几乎必然正则的

- for every $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{SC}_\omega$
$$|dg_\omega(x)| \geq \frac{1}{B}\mathrm{dist}(x, \mathcal{SC}_\omega)^\beta,$$
- for every $x, y \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{SC}_\omega$ such that $\mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, \mathcal{SC}_\omega)/2$
$$|\log|dg_\omega(x)| - \log|dg_\omega(y)|| \leq B\frac{\mathrm{dist}(x, y)}{\mathrm{dist}(x, \mathcal{SC}_\omega)^\beta}.$$

本文讨论满足以下假设的一族圆周映射 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$：

假设 (H0)。这族圆周自映射 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 满足：

(i) g_ω 仅依赖于 ω_0，且对所有 $x \in \mathbb{S}^1$，映射 $\omega \to g_\omega(x)$ 都是可测的；(ii) 对于 $\mathbb{P}$，几乎处处的 $\omega \in \Omega$，映射 $x \to g_\omega(x)$ 连续且分段 $\mathcal{C}^2$，其随机奇异集是正则的。此外

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} ||g_\omega||_{\mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1\setminus\mathcal{S}_\omega)} < \infty.$$

给定一族满足假设 (H0) 的圆周自映射 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$，其随机复合 g_ω^n

$$g_\omega^n(x) = g_{\theta^{n-1}(\omega)}(x) \circ \cdots \circ g_\omega(x), \tag{2.2}$$

是一个马尔可夫过程，其对应的转移核为 $\{\mathcal{P}_x(dy) := \mathbb{P}(g_\omega(x) \in dy)\}_{x\in\mathbb{S}^1}$。回顾一下，若 μ 是该马尔可夫过程的平稳测度，则

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{S}^1} \mathcal{P}_x(A)d\mu(x),$$

对于所有博雷尔集 A。此外，当且仅当测度 $\mathbb{P}\otimes\mu$ 对于式 (2.1) 中引入的斜积 Θ 是遍历的，μ 才是遍历的。如果 μ 是遍历的，那么根据伯克霍夫遍历定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(g_\omega^i(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} f(x)d\mu(x) \qquad \mathbb{P}\otimes\mu \text{ a.s},$$

对所有 $f \in L^1(\mu)$。有关马尔可夫过程的更详细背景，请参阅 [15, 8]。

为避免随机动力系统出现退化行为，我们提出以下假设：

假设 (H1)。与 g_ω^n 相关的马尔可夫过程具有唯一的遍历平稳测度 μ，且该测度等价于勒贝格测度。此外，$(\omega, x) \mapsto \log |dg_\omega(x)| \in L^1(\mu \otimes \mathbb{P})$。

注意，当且仅当对于任意初始条件 x，从 x 开始的马尔可夫链 g_ω^n 能够以正概率到达每个开集时，遍历平稳测度 μ 才等价于勒贝格测度（另请参见 [7, 14]）。在（H1）中要求 μ 的遍历性以及函数 $\log |dg_\omega(x)|$关于 $\mathbb{P} \otimes \mu$ 的可积性，以确保李雅普诺夫指数 [5]几乎处处存在：

定义 2.2. 设 g_ω^n 为式 (2.2) 中的随机动力系统。与 g_ω^n 相关联的李雅普诺夫指数定义为

$$\lambda_0(\omega, x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(dg_\omega^n)(x)| = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |dg_{\theta^i(\omega)}(g_\omega^i(x))|.$$

(H1)中 μ 的遍历性假设意味着，李雅普诺夫指数几乎处处为 $\mathbb{P} \otimes \mu$常数，并等于

$$\lambda_0 = \int_\Omega \int_{\mathbb{S}^1} \log |\mathrm{d}g_\omega(x)| d\mu(x) d\mathbb{P}(\omega).$$

对于我们研究的系统类，我们要求 λ_0 为正，并且能够估计有限时间遍历平均偏离 λ_0 的程度，具体如下一个假设中所述。

假设 (H2)。令 $S_n(\omega, x) := \sum_{i=0}^{n-1} \log |dg(g_\omega^i(x))|$。那么，存在 $\lambda > 0$、$\alpha_1 > 0$ 和 $C_1 \geq 1$，使得，对于勒贝格几乎处处 $x \in \mathbb{S}^1$

$$\mathbb{P}(S_n(\omega, x) < \lambda n) \leq \frac{C_1}{n^{4+\alpha_1}}, \qquad \forall n \geq 0.$$

将假设 (H1)-(H2) 与博雷尔-坎特利论证结合起来，可得 λ_0 为正。特别地，有

$$\lambda_0 := \lim_{n\to\infty} \frac{|dg_\omega^n(x)|}{n} \geq \lambda \qquad \mathbb{P} \otimes \mu \text{ a.s.}$$

为了证明我们的结果，我们需要对轨道的行为作进一步假设，实质上确保典型轨道不会在奇异集附近过快地聚集。给定 $\delta > 0$ 和 $\omega \in \Omega$，我们定义从 x 到奇异集 $\mathcal{SC}_\omega$ 的 δ-截断距离为

$$\mathrm{dist}_\delta(x, \mathcal{SC}_\omega) := \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{dist}(x, \mathcal{SC}_\omega) > \delta, \\ \mathrm{dist}(x, \mathcal{SC}_\omega) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

定义 2.3。我们称 f_ω^n 对随机奇异集 $\{\mathcal{SC}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 呈现慢回归，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对于 $\mathbb{P} \otimes \mu$ 几乎所有的 $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} -\log \mathrm{dist}_\delta(g_\omega^j(x), \mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)}) < \varepsilon.$$

作为遍历性假设 (H1) 的推论，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-\log \mathrm{dist}_\delta(g_\omega^j(x),\mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)})=\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^1}-\log \mathrm{dist}_\delta(x,\mathcal{SC}_\omega)d\mu(x)d\mathbb{P}(\omega)\qquad \mathbb{P}\otimes\mu \text{ a.s.}$$

为了控制上述极限收敛过程中的偏差，从而确保典型轨道不会过于频繁地接近奇异集，我们引入

假设（H3）。令 $Z_n(\omega,x,\delta):=\sum_{j=0}^{n-1}\log(\mathrm{dist}_\delta(g_\omega^j(x)\,\mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)}))$。存在一个函数$H(\delta)$，其当 $\delta\to 0$ 时趋于零，并且存在常数 $\alpha_2>1$ 和 $C_2\geq 1$，使得，对于勒贝格几乎处处的 $x\in\mathbb{S}^1$ 以及所有 $\delta>0$ 充分小

$$\mathbb{P}\left(Z_n(\omega,x,\delta)>H(\delta)n\right)\leq\frac{C_2}{n^{4+\alpha_2}}.$$

˜ ˜结合假设（H1）和（H3），可知存在 $H=H(\delta)\leq H(\delta)$ 使得$H\to 0$ 当 $\delta\to 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-\log \mathrm{dist}_\delta(g_\omega^j(x),\mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)})\leq\tilde{H}(\delta)\qquad \mathbb{P}\otimes\mu \text{ a.s.}\tag{2.4}$$

在第7节中，我们证明，具有足够大噪声幅度的一类非一致扩张随机动力系统满足假设（H2）—（H3）。

为了陈述下一个假设，我们先定义全支扩张区间的概念，这对马蹄构造至关重要。

定义2.4.设 $I\subset\mathbb{S}^1$ 是一个区间。对于 $\omega\in\Omega$和 $\kappa_0>1$，如果存在 $J\subset I$ 和 $i\leq K$ 使得 $g_\omega^i(J)=\mathbb{S}^1$ 且 $|dg_\omega^i\,|_J\,|>\kappa_0$，则称 I 是(ω,κ_0,K)-满支扩张。

在假设 (H4) 中，我们要求任意区间以正概率成为 (ω,κ_0,K)-满支扩张。关于区间有限时间增长的这一概率假设，与假设（H2）—（H3）给出的渐近行为相结合，确保任意大小的区间最终都以概率为一成为满射。这为我们构造所需的马蹄提供了必要的信息。

假设 (H4)。存在 $\kappa_0>1$，使得对于所有充分小的 $\eta>0$，都存在一个自然数 K 和一个实数 $\iota\in(0,1)$，使得对于满足$\frac{\eta}{4}\leq|I|\leq 4\eta$的任意区间 $I\subset\mathbb{S}^1$，我们有

$$\mathbb{P}\{I\ is\ (\omega,\kappa_0,K)\text{-}full\ branch\ expanding\}>\iota.\tag{2.5}$$

在假设（H5）中，我们还要求对所有 $\omega\in\Omega$，都存在一个区间 I_ω，它对 g_ω是满支且一致扩张的。这一假设有两个重要原因。首先，如果 $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 满足（H5），那么任何（ω，κ_0，n）满支扩张的映射，对所有 $m\geq n$也都是（ω，κ_0，m）满支扩张的映射。这是定理 2.6 证明中用到的一个关键性质。此外，在第7节中，我们证明，对于噪声幅度足够大的加性噪声情形，（H5）蕴含（H4）。

假设（H5）。对于 $\mathbb{P}$ 几乎所有 $\omega\in\Omega$，都存在一个区间 I_ω，使得 $g_\omega|_{I_\omega}=\mathbb{S}^1$且

$$\inf_{\omega\in\Omega}|dg_\omega|_{I_\omega}|>1.\tag{2.6}$$

为了陈述本文的主要结果，还需要定义两个区间 I_0 和 I_1 形成马蹄的含义。

定义 2.5. 设 I_0, I_1 是两个区间，使得 $I_0 \cap I_1 = \emptyset$。设 $\omega \in \Omega$ 且 $\kappa > 1$。那么，若存在一列返回时间 $\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$ 满足，二元组 (I_0, I_1) 就是一个 (ω, κ)-马蹄。

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k(\omega)}{k} < \infty, \tag{2.7}$$

以及子集族 $\{J(k,\omega)_{i,\ j}\}_{\{k\geq 0, i,j\in\{0,1\}\}}$，使得 $J(k,\omega)_{i,\ j} \subset I_i$,

$$g^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}(J(k,\omega)_{i,j}) = I_j, \tag{2.8}$$

and

$$\left| dg^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}|_{J(k,\omega)_{i,j}} \right| > \kappa \qquad \forall k \geq 0. \tag{2.9}$$

定理 2.6. 设 g^n_ω 是一个满足(H0)-(H5) 的随机动力系统。则存在一个满 $\mathbb{P}$ 测度˜集 Ω 以及 $\kappa > 1$，使得每一对不相交的区间 (I_0, I_1)对于所有˙$\omega \in\Omega$ 都是一个 (ω, κ)-马蹄。此外，随机时间 $\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$ 是可测的，并且满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k(\omega)}{k} = \mathbb{E}[n_0] \qquad \mathbb{P}\ a.s.$$

一个直接的推论如下:

推论 2.7. 设 g^n_ω 是一个满足(H0)-(H5)的随机动力系统。则，该系统表现出对初始条件的敏感依赖。此外，每个 (ω, κ)-马蹄都具有大于或等于$\log(2)\ \overline{\mathbb{E}[n_0]}$的拓扑熵。

2.2. 定理2.6的证明概要。我们将概述定理 2.6 的证明策略，完整细节将在第 5 节中阐述。

我们建立如下事实（见引理 5.1）：

- 存在 $\kappa > 1$ 和 $\alpha > 0$，使得对于每个区间 I，停时

$$m(\omega, I) := \min\{n \geq 0 \mid \exists J \subset I \text{ such that } f^n_\omega(J) = \mathbb{S}^1 \text{ and } |df^n_\omega|_J| > \kappa\}$$

满足

$$\mathbb{P}\left(m(\omega, I) > l\right) \leq \frac{D}{l^{3+\alpha}} \qquad \forall\, l \geq 1, \tag{2.10}$$

对于某个依赖于 I 的 $D \geq 1$。

这一事实的证明如下:

- 首先，我们证明（命题 3.2 和定理 3.4）存在 $\kappa_1 > 1$ 和一个足够小的 $\delta_1 > 0$，使得对于每个区间 $I \subset \mathbb{S}^1$，都存在一列几乎必然有限的停时 τ_k 和区间 J_k，满足

$$|f^{\tau_k}_\omega(J_k)| = 2\delta_1$$
$$|df^{\tau_k}_\omega|_{J_k}| > \kappa_1.$$

这是双曲时 [2]理论中的一个经典结果。

• 由于 $|f_\omega^{\tau_k}(J_k)| = 2\delta_1$，假设(H4)意味着存在 $K \in \mathbb{N}$、 $\kappa_0 > 1$ 以及以及$\iota \in (0,1)$，二者均取决于 δ_1，使得

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{S}'\left(K, f_\omega^{\tau_k}(J_k), \kappa_0\right)\right) > i, \tag{2.11}$$

其中我们记为

$$\mathcal{S}'\left(K, f_\omega^{\tau_k}(J_k), \kappa_0\right) := \{\omega \in \Omega\colon f_\omega^{\tau_k}(J_k) \text{ is } (\theta^{\tau_k}(\omega), \kappa_0, K)\text{-full branch expanding}\}.$$

利用 (2.11) 和乘积测度 $\mathbb{P}$ 的独立性，我们证明命题 5.2，该命题断言：

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 0} \mathcal{S}'\left(K, f_\omega^{\tau_k}(J_k), \kappa_0\right)^c\right) = 0,$$

其中 $\mathcal{S}'(K, f_\omega^{\tau_k}(J_k)\ \kappa_0)^c$是 Ω 中事件 $\mathcal{S}'(K, f_\omega^{\tau_k}(J_k)\ \kappa_0)$ 的补集。因此，几乎必然存在一个 $m_0(\omega)$ $\mathbb{P}$ 、一个整数 $i \leq K$ 和一个区间 $J'(\omega) \subset J_{m_0(\omega)} \subset I$ ，使得

$$f_\omega^{\tau_{m_0}+i}(J') = \mathbb{S}^1$$

and

$$|df_\omega^{\tau_{m_0}+i}\ |_{J'}\ | > \kappa := \min\{\kappa_0, \kappa_1\}.$$

这就证明了该断言，因为它为停时建立了几乎必然的界 $m(\omega, I) \leq \tau_{m_0} + K$。(2.10) 中的估计在引理 5.1 中得到证明。

(2.10) 中的界用于命题5.2，在假设（H5）下，证明对于任意给定的两个区间 I_0、I_1 ，几乎处处存在一个马蹄返回时间序列$\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$。随机序列 $\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$ 的定义表明，增量序列 $\{n_{k+1}(\omega) - n_k(\omega)\}_{k\geq 1}$ 和 $n_0(\omega)$是独立同分布的。因此，命题5.3 运用大数定律建立了正密度（见定义 2.5中的方程（2.7））。对所有可能的˜二进区间对重复上述构造，我们得到一个满 $\mathbb{P}$-测度集Ω，使得任意一对不相交区间都是一个 (ω, κ)-马蹄。这就完成了定理 2.6 的证明。

2.3. 在具有主导膨胀和大加性噪声的随机系统中的应用。我们着手构造要应用定理 2.6 的随机动力系统类。考虑概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其中 $\Omega := [-\sigma, \sigma]^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P} := \left(\frac{\mathrm{Leb}|_{[-\sigma,\sigma]}}{2\sigma}\right)^{\otimes\mathbb{N}}$ ，而 $\mathcal{F}$ 是通过柯尔莫哥洛夫扩张定理得到的乘积 Borel σ-代数。令 $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为连续的分段 $\mathcal{C}^2$ 映射。然后，与我们之前所做的类似，对 f 关联集合 $\mathcal{S}$ ，即 f 的不可微点集、临界集 $\mathcal{C}$: $= \{x \in \mathcal{S}^1 \setminus \mathcal{S}\colon\ df = 0\}$ 以及奇异集$\mathcal{SC} := \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$。

定义 2.8. 如果属于族 $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的映射具有如下形式 $f_\omega\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，则称随机动力系统 f_ω^n 是 (σ, R)-主要扩张的

$$f_\omega(x) := f(x + \omega_0),$$

其中

(1) 生成映射 f 满足以下条件：

(i) f 是一个分段 $\mathcal{C}^2$ 光滑映射，其一阶和二阶导数均有界；(ii) 在 f的奇异集 $\mathcal{SC}$ 的每个点附近， f 的一阶或二阶导数有一个远离零的下界。(iii) 设 G: $= \{x \in \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{S} \mid |df| > R\}$为 f的超膨胀区域。那么 G是由 G 中大小大于 $\frac{1}{R}$ 的 $k \geq 1$ 个连通分支 $G_1, .. ., G_k$ 的并集。

(2) 满足以下不等式:

$$\frac{1}{\log(R)} \int_C \log |df(x)| dx + \frac{2}{R} + D(R) > 0. \tag{2.12}$$

其中 C 是 f的收缩区域。

(3) 噪声足够大，即

$$\sigma > \frac{1}{R} + D(R), \tag{2.13}$$

其中

$$D(R) := \mathrm{Leb}\{x \in \mathbb{S}^1 \colon |df| < R\} = \mathrm{Leb}\left(\mathbb{S}^1 \setminus G\right) \tag{2.14}$$

注意，(σ, R)-主导膨胀是对 [7, 14]中引入的主导膨胀概念的推广。

条件 (2.13) 表明，噪声幅度足够大，因此一次迭代就能离开 $\mathbb{S}^1 \setminus G$ 的任一连通分支；而 (2.12) 可解释为对李雅普诺夫指数的估计。

(2.13) 和 (2.12) 的一个推论对于定理 2.9 的证明至关重要：存在满足以下条件的 $h > 0$

$$\sigma > \frac{D(R)}{2h} \tag{2.15}$$

and

$$Z(h) := \log(R)(1-h) + \frac{1}{2\sigma} \int_C \log |df(x)| dx > 0. \tag{2.16}$$

如第 7 节所示，(2.15) 表明，访问 $\mathbb{S}^1 \setminus G$ 的渐近频率严格小于 h。因此，我们可以将参数 h 解释为访问超膨胀区域 G 补集的渐近频率上界。

为了避免因以下事实而产生不必要的复杂性：当 $\sigma > \frac{1}{2}$ 时，映射族 $\omega_0 \to f(x) + \omega_0$ 不再是单射，我们将讨论范围限制在 $\sigma < \frac{1}{2}$ 的情形。我们也预计，对于我们的映射类，结果在 $\sigma > \frac{1}{2}$ 时同样成立。注意，根据 (2.13)，这也意味着 $R > 2$。

在这种情形下，对于 (σ, R)-主要扩张随机系统这一类，我们应用定理 2.6，并证明以下结果。

定理 2.9。任意 (σ, R)-主要扩张随机动力系统都满足定理2.6的全部假设(H0)-(H5)。因此，存在 $\kappa > 1$ ，使得任意一对不相交区间对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$ 都是一个 (ω, κ)-马蹄。

由于由 (1.5) 中的映射族生成的随机动力系统，对于任意 $L \geq 3$，在满足 (2.13) 的 $R = \min\{3, L^{\frac{1}{2}}\}$ 和 σ 下都是 (σ, R)-主要扩张的——证明见第 8 节——因此定理 1.2 是定理 2.9 的一个推论。

3. Random hyperbolic times

3.1. 定义与关键性质。本节旨在建立我们分析中的核心工具：双曲时。Alves [3, 4] 提出了非一致扩张映射的双曲时理论，用以为 Viana 映射构造 SRB测度；此后，双曲时被广泛用于构造 Young 塔 [6]。本节中，我们在随机动力系统的框架下推广双曲时的概念，并借鉴了[1, 6]中的技巧。为使论述自成一体，我们给出完整的证明。

设 g_ω^n 为由 (2.2) 诱导且满足 (H0)-(H3) 的随机动力系统，因此存在 $\beta > 0$，使得 g_ω^n 的随机临界集满足定义 2.1。我们固定一个正数 $b < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\beta^{-1}}{2}\right\}$。以下定义改编自 [1,定义 4.5]。

定义 3.1. 给定 $\kappa_1 > 1$ 和 $\delta > 0$，若 n 是 (κ_1, δ) 关于 $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$ 的双曲时，则称之为

$$\left|\left(dg^m_{\theta^{n-m}(\omega)}\right)(g^{n-m}_\omega(x))\right| \geq \kappa_1^{n-m}, \qquad \operatorname{dist}_\delta(g^m_\omega(x), \mathcal{SC}_{\theta^{n-m}(\omega)}) \geq \kappa_1^{-bm}$$

对所有 $0 < m \leq n$均成立。

对于 $x \in \mathbb{S}^1$，令 $B(x, r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r的开球。以下命题改编自 [1, 引理 4.6]，并表明每当 n 是关于 (ω, x) 的双曲时，g_ω^n 都会将 x 的一个足够小邻域一致地扩张到 $g_\omega^n(x)$ 的一个邻域，其半径固定为 δ_1。这是证明定理 2.6 所需的双曲时的关键性质。

命题 3.2. 假设 n 是 (κ, δ)-双曲时间，对应于 (ω, x)。那么，对于任意足够小的 $\delta_1 > 0$，存在一个包含 x 的区间 $J \subset B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{-\frac{n}{2}}\right)$，使得 $g_\omega^n(J) = B(g_\omega^n(x)\ \delta_1)$，$|dg_\omega^n|_J| > \kappa_1^{\frac{n}{2}}$，并且对所有 $i = 1, \ldots, n-1$，均有 $g_\omega^i(J) \subset B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{-\frac{n+i}{2}}\right)$。

证明。首先，我们陈述一个不加证明的畸变估计，这是 [1,引理 4.6] 以及随机奇异集的正则性的一个直接推论。

引理 3.3. 假设随机奇异集是规则的。给定 $\kappa_1 > 1$ 和 $\delta > 0$，若 n 是 (κ_1, δ) 对 (ω, x) 的双曲时间，则

$$|dg_\omega(y)| \geq {\kappa_1}^{-\frac{1}{2}} |dg_\omega(x)|, \qquad \forall y \in B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{-\frac{n}{2}}\right),$$

对于足够小的 $\delta_1 > 0$。

我们通过对 n 进行归纳法来证明命题 3.2。设 $n = 1$ 是 (κ_1, δ)-随机双曲时间，对应于 (ω, x)。根据引理 3.3，球 $B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{-\frac{1}{2}}\right)$ 被扩大了 $(\kappa_1)^{\frac{1}{2}}$ 倍。因此，命题 3.2 对 $n = 1$ 成立。假设该结论对 n 成立，我们证明该结论对 $n+1$ 也成立。

设 $n+1$ 是 (κ_1, δ) 双曲时，适用于 (ω, x)。那么，n 是 (κ_1, δ) 随机双曲时，适用于 $(\theta(\omega)\ g_\omega(x))$。利用归纳步骤，存在一个区间 $I_n \subset B\left(g_\omega(x)\ \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n}{2}}\right)$，包含 x，使得

$$g^n_{\theta(\omega)}(I_n) = B(g^{n+1}_\omega(x), \delta_1) \tag{3.1}$$

and

$$g^i_{\theta(\omega)}(I_n) \subset B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n+i}{2}}\right) \ \forall i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

我们断言不存在其他满足 (3.1) 和 (3.2) 的区间 $I \subset B\left(g_\omega(x)\ \delta_1 \kappa_1^{-\frac{n}{2}}\right)$。事实上，根据双曲时的定义，我们可知，要么 $\mathrm{dist}(g^k_\omega(x) \mathcal{SC}_{\theta^k(\omega)}) \geq \delta > \delta_1$，要么 $\mathrm{dist}(g^k_\omega(x) \mathcal{SC}_{\theta^k(\omega)}) > \kappa_1^{-b(n+1-k)} > \kappa_1^{-\frac{(n+1-k)}{2}}$。在这两种情况下，对于所有 $k = 1, \ldots, n$，$\mathcal{SC}_{\theta^k(\omega)}$ 都位于 $B\left(g^k_\omega(x)\ \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1+k}{2}}\right)$之外。这意味着 $g_{\theta^k(\omega)}$ 将 $B\left(g^k_\omega(x)\ \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1+k}{2}}\right)$ 微分同胚地映到其像上。特别地，由 (3.2) 可知，$g^n_{\theta(\omega)}|_{I_n}$ 是单射。因此，由 (3.1) 可知，$I = I_n$，断言得证。

接下来，我们断言 $g_\omega\left(B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}\right)\right)$ 包含 I_n。我们用反证法证明。假设 $g_\omega\left(B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}\right)\right)$ 不包含 I_n。那么，区间$g_\omega\left(\left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]\right)$和 $g_\omega\left(\left[x, x + \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}\right]\right)$中至少有一个严格包含于 I_n。假设$g_\omega\left(\left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]\right) \Subset I_n$。另一种情况可以类似处理。于是，由 (3.2),

$$g^i_\omega\left(\left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]\right) \Subset B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{-\frac{n+i}{2}}\right) \qquad \forall i = 1, \ldots n.$$

并且，根据 (3.1)

$$g^{n+1}_\omega\left(\left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]\right) \Subset B(g^{n+1}_\omega(x), \delta_1) \tag{3.3}$$

利用方程（3.2）和引理3.3，我们有

$$\left|\left(dg^{n+1}_\omega\right)(y)\right| = \prod_i \left|dg_{\theta^i(\omega)}(g^i_\omega(y))\right| \geq \kappa_1^{-\frac{n+1}{2}} |g^{n+1}_\omega(x)| \geq \kappa_1^{\frac{n+1}{2}} \qquad \forall y \in \left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]. \tag{3.4}$$

因此，

$$\left|g^{n+1}_\omega\left(\left[x - \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}, x\right]\right)\right| \geq \delta_1,$$

这与（3.3）矛盾。

通过选择区间，即可完成命题 3.2 的证明。

$$J := g_\omega^{-1}(I_n) \cap \left(B\left(x, \delta_1 \kappa_1^{\frac{-n-1}{2}}\right)\right).$$

事实上，$x \in J$ 由 g_ω的单射性可知，映射 g^{n+1}_ω根据(3.1)将 J 映到 $B(g^{n+1}_\omega(x)\ \delta_1)$上，并且 $\left|dg^{n+1}_\omega|_J\right| > \kappa_1^{\frac{n+1}{2}}$ 由与(3.4)类似的计算可得。□

3.2. 随机双曲时的正频率。下述命题蕴含了随机双曲时的存在性及其正渐近频率。事实上，我们证明，对于任意 (ω, x)，如果轨道在时间 N 处具有正的有限时间李雅普诺夫指数，并且充分缓慢地回归到奇异集。等价地，采用 (H2)-(H3) 中的记号，若 $S_N(\omega, x) > \lambda N$且 $Z_N(\omega, x, \delta) < H(\delta)N$，则在$\{1, \ldots, N\}$中，双曲时所占的比例远离于零有界，并且对所有 (ω, x) 和 n一致成立。本结果将在第 4 节中用于获得双曲时分布的估计。

下述命题的陈述和证明改编自 [1, 命题 4.9]。

命题 3.4. 给定 $N \in \mathbb{N}$，令 $S_N(\omega,x)=\sum_{i=0}^{N-1}\log\left(|dg_{\theta^i}(\omega)(g^i_\omega(x))|\right)$ 和$Z_N(\omega,x,\delta)=\sum_{i=0}^{N-1}-\log\left(\mathrm{dist}_\delta(g^i_\omega,\mathcal{SC}_{\theta^i}(\omega))\right)$。令 λ如假设 (H2) 中所述，$H(\delta)$ 如 (H3) 中所述。那么，存在 $\kappa_1>1$、$\delta>0$和 $\gamma\in(0,1)$，它们与 (ω,x) 无关，使得若 $S_N(\omega,x)>\lambda N$且 $Z_N(\omega,x,\delta)<H(\delta)N$，则位于 $\{1,\dots,N\}$ 中的 (ω,x) 的 (κ_1,δ)- 双曲时数量大于 γN。

以下引理归功于 Pliss，是证明该命题的关键要素。参考文献见 [16] 或 [1, 引理 3.9]。

引理 3.5. 给定 $0<c\le A$令 $\gamma:=\frac{c}{A}$. 假设 $a_1,\dots,a_N$ 满足 $a_j\le A$ 对所有$1\le j\le N$ 及

$$\sum_{j=1}^{N}a_j\ge cN$$

那么，存在 $l\ge\gamma N$和 $1\le n_1<\dots<n_l\le N$使得

$$\sum_{j=k}^{n_i}a_j\ge 0$$

对于每个 $k=1,\dots,n_i$和 $i=1,\dots,l$。

定理 3.4 的证明。考虑该序列

$$a_{j+1}:=\log\left|dg_{\theta^j(\omega)}(g^j_\omega(x))\right|-\frac{\lambda}{2},\qquad j=0,\dots N-1$$

由于假设 (H0) 中的 (ii)，$a_j\le A:=\sup_\omega||dg_\omega||_{C^1(\mathbb{S}^1\setminus\mathcal{S}_\omega)}$对所有 $j=1,\dots,N$ 均成立。由于$S_N(\omega,x)>\lambda N$，我们有

$$\sum_{j=1}^{N}a_j\ge\frac{\lambda}{2}N.$$

于是，由引理 3.5，存在一列 $l_1\ge\gamma_1 N$数 $1\le n_1,..,n_{l_1}\le N$，使得

$$\sum_{j=k}^{n_i}a_j\ge 0,$$

对于所有的 $k=1,\dots,n_i$和 $i=1,\dots,l_1$，且满足 $\gamma_1:=\frac{\lambda}{2A}$。利用 a_j的定义，我们可以将上述不等式改写为

$$\left|dg^{n_i-m}_{\theta^m(\omega)}(g^m_\omega(x))\right|\ge e^{\frac{\lambda}{2}(n_i-m)},\tag{3.5}$$

对于每个 $m=0,\dots,n_i-1$和 $i=1,..,l$。

接下来，我们断言，若 $\delta>0$ 足够小，则存在 $\gamma_2\in(1-\gamma_1,1)$和 $l_2\ge\gamma_2 N$ 个数 $1\le\tilde n_1,\dots,\tilde n_{l_2}\le N$，使得

$$\sum_{j=k}^{\tilde n_i}\log(\mathrm{dist}_\delta(g^j_\omega(x),\mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)}))\ge-\frac{b\lambda}{8}(\tilde n_i-k),\tag{3.6}$$

对所有 $k = 1, \dots, \tilde{n}_i - 1$ 以及 $i = 1, \dots, l_1$，均成立，其中 b 如定义 3.1 所述。

事实上，由于 $H(\delta) \to 0$ as $\delta \to 0$，因此可以选择足够小的 $\delta > 0$，使得$H(\delta) < \frac{\gamma_1 b\lambda}{8}$。考虑序列

$$\tilde{a}_{j+1} := \log \operatorname{dist}_\delta \left(g_\omega^j(x), \mathcal{SC}_{\theta^j(\omega)} \right) + \frac{b\lambda}{8}, \qquad j = 0, \dots, N-1. \tag{3.7}$$

由于 $Z_N(\omega, x, \delta) \le H(\delta)N$，我们有

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_j \ge \left(\frac{b\lambda}{8} - H(\delta) \right) N.$$

由于 $\operatorname{dist}_\delta(\cdot,\cdot)$ 按定义 ≤ 1，因此对所有 $j = 1 \dots, N$，都有 $\tilde{a}_j \le \frac{b\lambda}{8}$。由引理 3.5，存在 $l_2 \ge \gamma_2 N$ 个数 $1 \le \tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{l_2} \le N$，使得

$$\sum_{j=k}^{\tilde{n}_i} \tilde{a}_j \ge 0,$$

对所有 $k = 1, \dots, \tilde{n}_i$ 以及 $i = 1, \dots, l_2$，其中 $\gamma_2 = 1 - \frac{8H}{(\delta)\,\lambda}$。根据 $\tilde{a}_j$ 的定义，由 (3.7) 可得 (3.6)，如所述。

为了完成证明，注意到 $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 - 1 > 0$。事实上

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + 1 - \frac{8H(\delta)}{\lambda} > \gamma_1 + 1 - \frac{8b\lambda\gamma_1}{8b\lambda} > 1.$$

由于 $|\{n_1, \dots, n_{l_1}\}| \ge \gamma_1 N$和 $|\{\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{l_2}\}| \ge \gamma_2 N$和 $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 - 1 > 0$，鸽巢原理表明集合 $\{n_1, \dots, n_{l_1}\} \cap \{\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{l_2}\}$至少包含 γN个元素。根据 (3.5) 和 (3.6)，该集合中的每个元素都是一个 $(e^{\frac{b}{8}}, \delta)$-双曲时间，由此完成证明。□

4. Quenched large deviation estimates for hyperbolic times

Let κ_1, δ 如命题 3.4 中所述。假设 δ_1 满足命题 3.2 的断言。[1]

定义 4.1. 给定一个区间 I，如果存在 $_nx \in I$，使得 n 是 x 的一个 (κ_1, δ)-双曲时刻，且 $B(x, \delta_1 \kappa_1^{-2}) \subset I$，则称 n 是一个 (ω, I)-双曲时刻。

设 $E_N(\omega)$ 为满足以下条件的 $x \in \mathbb{S}^1$ 集合：定理 3.4 的假设不成立，也就是说，对于这些 $x \in \mathbb{S}^1$，我们无法保证在 $\{1, \dots, N\}$ 中，任意满足 $x \in E_N(\omega)$ 的 (κ_1, δ)-双曲时具有正密度： (ω, x)

$$E_N(\omega) := \{x \in \mathbb{S}^1 \mid S_N(\omega, x) < \lambda N \text{ or } Z_N(\omega, x, \delta) \ge H(\delta)N\} \qquad \forall N \ge 0,$$

其中 S_N 和 Z_N 如定理 3.4 中所述。

命题4.2。设 $I \subset \mathbb{S}^1$ 为一个区间。假设 N 是满足$\gamma N > 2\log_{\kappa_1}\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right)$ 的自然数，其中 γ 如定理3.4中所述。进一步假设 $\omega \in \Omega$ 使得勒贝格测度 $\left\{E_N(\omega) < \frac{|I|}{2}\right\}$。那么，在集合 $\{1, \dots, N\}$ 中至少有 $\gamma N - 2\log_{\kappa_1}\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right)$ (ω, I)- 个双曲时。

[1] δ_1 的精确值在第5节中确定。

证明。令 y 为 I 的中心。如果勒贝格测度$\{E_N(\omega) < \frac{|I|}{2}\}$，那么根据定理 3.4，至少存在一个 $x \in B_{\frac{|I|}{2}}(y)$，其在 $\{1,\dots,N\}$ 中具有不少于 $\gamma N(\kappa_1,\delta)$-双曲时。设[4] n 是这样的一个 (κ_1,δ)-双曲时，并且

$$n > 2\log_{\kappa_1}\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right).$$

那么 $B_{\delta_1\kappa_1^{-\frac{n}{2}}}(x) \subset I$，因此 n 是一个（ω, I）-双曲时间。这就证明了该命题。 □

下述命题在定理2.6的证明中被广泛使用，并为事件 $\left\{\text{勒贝格测度}(E_N(\omega)) > \frac{|I|}{2}\right\}$ 的尾部建立了一个界。

命题 4.3. 对于任意区间 I，存在 $C_5 \geq 1$，它依赖于 $|I|$，使得

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{Leb}(E_N(\omega)) > \frac{|I|}{2}\right\} < C_5\left(\frac{1}{N}\right)^{3+\frac{\alpha}{2}} \qquad \forall N \geq 0, \tag{4.1}$$

其中 α 如假设（H2）—（H3）中所述。

证明。计算过程与 [6, 推论 7.6] 和 [6, 引理 7.7] 类似，但指数尾被多项式尾取代。

W首先证明存在 $C_3 \geq 1$，使得 at

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{Leb}(E_N(\omega)) > \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \leq C_3\left(\frac{1}{N}\right)^{4+\frac{\alpha}{2}} \qquad \forall N \geq 1. \tag{4.2}$$

事实上，假设结论不成立，且存在 $N_0 \geq 1$，使得

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{Leb}(E_N(\omega)) > \left(\frac{1}{N_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \geq C_3\left(\frac{1}{N_0}\right)^{4+\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.3}$$

对于 $x \in \mathbb{S}^1$，考虑噪声实现集合

$$E_N(x) := \{S_N(\omega,x) < \lambda N \text{ or } Z_N(\omega,x,\delta) \geq H(\delta)N\}.$$

由假设 (H2) 和 (H3)，存在 $C_3 > 1$、$\alpha > 0$，使得

$$\mathbb{P}(E_N(x)) \leq \frac{C_3}{N^{4+\alpha}} \qquad \forall N \geq 0, x \in \mathbb{S}^1.$$

因此，由 Fubini定理，

$$\int_\Omega \mathrm{Leb}(E_{N_0}(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{S}^1}\mathbb{P}(E_{N_0}(x))d(x) \leq C_3\left(\frac{1}{N_0}\right)^{4+\alpha}. \tag{4.4}$$

然而，由 (4.3)

$$\int_\Omega \mathrm{Leb}(E_{N_0}(\omega))d\mathbb{P}(\omega) > \left(\frac{1}{N_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\mathbb{P}\left\{\mathrm{Leb}(E_N(\omega)) > \left(\frac{1}{N_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\} > C_3\left(\frac{1}{N_0}\right)^{4+\alpha},$$

这与 (4.4) 矛盾，因此可得 (4.2)。

现在，考虑

$$\tilde{E}_k := \left\{\exists i \geq k \,\text{such that}\, \mathrm{Leb}(E_i(\omega)) > \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

由（4.2），可得

$$\mathbb{P}(\tilde{E}_k) \le C_3 \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{4+\frac{\alpha}{2}} \le C_4 \left(\frac{1}{k}\right)^{3+\frac{\alpha}{2}},$$

˜对于某个常数 $C_4 \ge 1$。由于 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$，随机时间

$$N_1(\omega) := \min\{n \ge 1 \mid \omega \notin \tilde{E}_n\}$$

˜几乎必然有限。根据 $E_{N_1(\omega)}$ 的定义，对于所有 $N \ge N_1(\omega)$

$$\mathrm{Leb}(\tilde{E}_N(\omega)) \le \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.5}$$

此外，

$$\mathbb{P}\{N_1(\omega) > k\} \le C_4 \left(\frac{1}{k}\right)^{3+\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.6}$$

最后，对于 k_0 充分大使得 $\left(\frac{1}{k_0}\right)^{\frac{\alpha}{2}} < \frac{|I|}{2}$，由 (4.5) 可知，若勒贝格测度$(E_N(\omega)) > \frac{|I|}{2}$，则$N_1(\omega) > N - k_0$，并且 (4.1) 由 (4.6) 得出。□

5. Random Horseshoe

本节我们证明定理 2.6。证明该定理的主要依据是引理 5.1、命题 5.2 和命题 5.3。

设 κ_0 如假设 (H4) 所述，κ_1 如定理 3.4 所述，取 $\kappa := \min\{\kappa_0, \kappa_1\}$。设 I 为任意给定的区间，并考虑以下随机时间

$$m(\omega, I) := \min\{n \ge 0 \mid I \text{ is an } (\omega, n, \kappa)\text{-full expanding branch}\}. \tag{5.1}$$

在以下引理中，我们证明随机时间 m 几乎必然有限，且其尾部至少呈幂律衰减。

引理 5.1. 对于每个区间 I，都存在一个常数 $C_7 \ge 1$ 使得

$$\mathbb{P}\{m(\omega, I) > l\} \le C_7 \left(\frac{1}{l}\right)^{3+\frac{\alpha}{4}} \qquad \forall l \ge 0. \tag{5.2}$$

特别地，$m(\omega, I)$ 几乎必然有限。

由于该引理的证明较为复杂，我们将其留到本节末尾给出。

递归定义随机序列

$$n_k(\omega) := \max\{m(\theta^{n_{k-1}(\omega)}(\omega), I_0), m(\theta^{n_{k-1}(\omega)}(\omega), I_1)\}. \tag{5.3}$$

由引理 5.1 可知，对于所有 $k \ge 0$，n_k 几乎必然有限。在下面的命题中，我们将展示如何利用 $\{n_k(\omega)\}_{k\ge 0}$ 的定义，在 I_0 与 I_1 之间构造符号动力学。

命题5.2. 给定两个不相交区间 I_0、$I_1 \subset \mathbb{S}^1$，存在一个满测度集 ˆΩ，使得对于所有 $\omega \in$ ˆΩ、i 和 $j \in \{0, 1\}$，存在一个集合 $J^{i,j}_k(\omega) \subset I_i$ 使得

$$g^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}(J^{i,j}_k(\omega)) = I_j,$$
$$\left| dg^{n_{k+1}(\omega)-n_k(\omega)}_{\theta^{n_k(\omega)}(\omega)}|_{J^{i,j}_k(\omega)} \right| > \kappa > 1.$$

^^证明。令 Ω 满足：对于所有 $\omega \in \Omega$以及所有 $k \geq 0$, n_k 为有限值。考虑 k =0的情形。不失一般性，令 $m(\omega, I_0) > m(\omega, I_1)$。令 $E_\omega := \{x \in \mathbb{S}^1 \mid |dg_\omega| > 1\}$。根据假设（H5），将其限制到一个满测度的噪声实现子集后，我们可以假设，对于所有 $\omega \in$ ^Ω以及所有 $s \geq 0$, $g_{\theta^s}(\omega)(E_{\theta^s}(\omega)) = \mathbb{S}^1$ 。因此，如果 $\omega \in$ ^Ω，则存在集合 $E'_{\omega,\ j} \subset E_{\theta^{m(\omega,I_1)}(\omega)}$、$j \in \{0,1\}$，使得对于每个 $q \leq m(\omega, I_0) - m(\omega, I_1)$，都有 $g^q_{\theta^{m(\omega,I_1)}(\omega)} \subset E_{\theta^{m(\omega,I_1)+i}(\omega)}$，并且

$$g^{m(\omega,I_0)-m(\omega,I_1)}_{\theta^{m(\omega,I_1)}(\omega)}(E'_{\omega,j}) = I_j. \tag{5.4}$$

根据 $m(\omega, I)$ 的定义，我们可以定义集合 $\{J_0^{i,j}(\omega)\}_{i,\ j\in\{0,1\}}$，使得 $J^{i,\ _0j}(\omega) \subset I_i$ 并且

$$\begin{aligned} g^{m(\omega,I_1)}_\omega(J_0^{1,j}(\omega)) &= E'_{\omega,j}, \\ g^{m(\omega,I_0)}_\omega(J_0^{0,j}(\omega)) &= I_j, \\ \left| dg^{m(\omega,I_i)}_\omega|_{J_0^{i,j}(\omega)} \right| &> \kappa. \end{aligned}$$

由 (5.4)

$$\begin{aligned} g^{m(\omega,I_0)}_\omega(J_0^{1,j}(\omega)) &= g^{m(\omega,I_0)-m(\omega,I_1)}_{\theta^{m(\omega,I_1)}(\omega)}\left(g^{m(\omega,I_1)}_\omega(J_0^{1,j}(\omega))\right) \\ &= g^{m(\omega,I_1)-m(\omega,I_0)}_{\theta^{m(\omega,I_1)}(\omega)}(E'_{\omega,j}) = I_j. \end{aligned}$$

由于我们假设 $n_0(\omega) = m(\omega, I_0)$，因此这就完成了 $k = 0$ 的证明。对于情形$k \geq 1$，证明过程相同，只需将 ω 替换为 $\theta^{n_{k-1}(\omega)}(\omega)$。□

In 在下面的命题中，我们证明序列 $\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$ 具有正密度。

命题 5.3. 对于任意一对不相交区间 I_0、$I_1 \subset \mathbb{S}^1$，存在一个满测集 ^集 Ω ⊂ Ω，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k(\omega)}{k} = E[n_0(\omega)] \qquad \forall \omega \in \overline{\Omega}.$$

证明。注意到

$$n_k = n_0 + (n_1 - n_0) + \cdots + (n_k - n_{k-1}).$$

随机变量 $\{n_{j+1} - n_j\}_{j\geq 0}$ 和 n_0 独立同分布。此外，由 (5.2) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(n_0)^2] &\leq \sum_{l\geq 0} l^2 \mathbb{P}(n_0(\omega) > l - 1) \\ &\leq C_6 \sum_{l\geq 0} l^2 \left(\frac{1}{l}\right)^{3+\frac{\alpha}{4}} \\ &\leq C_6 \sum_l \frac{1}{l^{1+\frac{\alpha}{4}}} < \infty. \end{aligned}$$

根据大数定律，我们得出结论：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k(\omega)}{k} = \mathbb{E}[n_0(\omega)], \qquad \mathbb{P}\text{ a.s.}$$

□

定理 2.6的证明。固定两个不相交区间 $I_0, I_1 \subset \mathbb{S}^1$ 并考虑随机序列$\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$。根据命题 5.2 和5.3，存在一个满 $\mathbb{P}$-测集$\Omega(I_0, I_1)$，使得$\{n_k(\omega)\}_{k\geq 0}$ 对所有 $\omega \in \Omega(I_0, I_1)$满足 (2.7)、(2.9) 和 (2.6)。根据定义 2.5，对于所有$\omega \in \Omega(I_0, I_1)$，数对$(I_0, I_1)$是一个 (ω, κ)-马蹄。这就以该满测集推出了定理

$$\tilde{\Omega} := \bigcap_{I_0, I_1 \text{ dyadic intervals}} \overline{\Omega}(I_0, I_1).$$

□

本节其余部分专门用于引理 5.1 的证明。

引理 5.1 的证明。固定一个区间 $I \subset \mathbb{S}^1$。令 $\delta_1 > 0$ 足够小，使得存在满足假设 (H4) 的 K 和 ι。定义 K-稀疏双曲时序列

$$\tau_1(\omega) := \min\{n \geq 1 \mid n \text{ is a } (\omega, I)\text{-hyperbolic time }\},$$
$$\tau_{k+1}(\omega) := \min\{n > \tau_k(\omega) + K \mid n \text{ is a } (\omega, I)\text{-hyperbolic time}\},$$

其中，(ω, I)-双曲时如定义4.1所述。令 $k_l(\omega) := \max\{i \mid \tau_i(\omega) \leq l\}$，即$k_l(\omega)$ 是位于 $\{1, \ldots, l\}$ 中的 K-稀疏双曲时的数量。在继续进行证明之前，为了不中断思路，我们先建立一个将在本节结论中使用的估计。

命题 5.4. 设 s 是一个自然数，使得 $s(K+1) \leq \max\left\{0, \gamma l - 2\log_\kappa\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right)\right\}$，其中 $\gamma \in (0, 1)$ 如定理 3.4 中所述。则

$$\mathbb{P}(k_l(\omega) = s) \leq C_6 \left(\frac{1}{l}\right)^{3+\frac{\alpha}{2}}.$$

证明。令 $t_l(\omega)$ 表示不大于 l 的 (ω, I)-双曲时的数量。容易验证

$$k_l(\omega) \geq \frac{1}{K+1} t_l(\omega), \qquad \forall l \geq 0. \tag{5.5}$$

根据命题 4.2，如果 $s(K+1) \leq \max\left\{\gamma l - 2\log_\kappa\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right), 0\right\}$，那么或者 $l \leq {}^{2}\log_\kappa(\frac{4\delta_1}{|I|})\,\gamma$或者

$$\{k_l(\omega) \leq s\} \subset \left\{\text{Leb}(E_l(\omega)) > \frac{|I|}{2}\right\},$$

由命题 4.3 立即得到结论，其中 $l = N$。 □

根据 (ω, I)-双曲时的定义，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，像 $f_\omega^{\tau_j}(I)$ 都包含一个半径为 δ_1 的球。令 $H(\omega, j)$ 表示这样一个球。定义噪声实现集合

$$\mathcal{S}(K, j, \kappa) := \{H(\omega, j) \text{ is not } (\theta^{\tau_j}(\omega), K, \kappa)\text{- full branch expanding}\}, \qquad j \geq 0.$$

注意，如果 $m(\omega, I) > l$，那么 I就不是 (ω, l, κ)-满支扩张。这意味着，对于所有 $j = 1, \ldots, k_l(\omega) - 1$，$H(\omega, j)$ 都不是 $(\tau_j(\omega) K, \kappa)$-满支扩张。因此，我们可以写作

$$\mathbb{P}(m(\omega, I) > l) = \sum_{s=0}^{l} \mathbb{P}(m(\omega, I) > l \text{ and } k_l(\omega) = s)$$

$$\leq \sum_{s=0}^{l} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k_l(\omega)-1} \mathcal{S}\left(K,j,\kappa\right) \text{ and } k_l(\omega)=s \right)$$
$$= \sum_{s=0}^{l} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{S}\left(K,j,\kappa\right) \text{ and } k_l(\omega)=s \right).$$

因此，根据 H¨older 不等式，我们有

$$\mathbb{P}\left(m(\omega,I)>l\right) \leq \sum_{s=0}^{l} \left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{S}\left(K,j,\kappa\right) \right) \right)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \left(\mathbb{P}(k_l=s)\right)^{\frac{12+\alpha}{12+2\alpha}}, \tag{5.6}$$

其中 α 如命题 4.3 所述。

设 ι 如假设（H5）所述。我们断言：

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{S}\left(K,j,\kappa\right) \right) \leq (1-\iota)^{s-1}. \tag{5.7}$$

设 $V_i = \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{S}(K,j,\kappa)$，则

$$\mathbb{P}\left(V_{s-1}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\mathcal{S}\left(K,s-1,\kappa\right) | \mathcal{F}_{\tau_{s-1}} \right)(\omega) \cdot 1_{V_{s-2}}(\omega) \right], \tag{5.8}$$

其中 $\mathcal{F}_{\tau_{s-1}}$ 表示截至时间 τ_{s-1} 的过去 σ-代数。由于 $H(\omega, s-1)$ 的长度等于 $2\delta_1 \in (\frac{\eta}{4}, 4\eta)$，因此根据假设 (H4)，

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{S}\left(K,s-1,\kappa\right) | \mathcal{F}_{\tau_{s-1}} \right)(\omega) \leq 1-\iota.$$

因此，由（5.8）得到

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{S}\left(K,\tau_j,H(\omega,j),\kappa\right) \right) \leq (1-\iota)\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{s-2} \mathcal{S}\left(K,\tau_j,H(\omega,j),\kappa\right) \right),$$

不等式（5.7）由归纳法得出。

由方程 (5.6)-(5.7) 和命题 5.4 可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(m(\omega,I)>l) &\leq (1-\iota)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \sum_{s=0}^{l} (1-\iota)^{s\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \mathbb{P}(k_l(\omega)=s)^{\frac{12+\alpha}{12+2\alpha}} \\
&\leq (1-\iota)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}} C_6 \left(\frac{1}{l}\right)^{\left(3+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{12+\alpha}{12+2\alpha}\right)} \sum_{s(K+1)\leq \max\left\{0,\gamma l-2\log_\kappa\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right)\right\}} (1-\iota)^{s\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \\
&\quad + (1-\iota)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \sum_{s(K+1)>\max\left\{0,\gamma l-2\log_\kappa\left(\frac{4\delta_1}{|I|}\right)\right\}} (1-\iota)^{s\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \\
&\leq C_6 \left(\frac{1}{l}\right)^{3+\frac{\alpha}{4}} (1-\iota)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \left(\sum_{s\geq 0} (1-\iota)^{s\frac{\alpha}{12+2\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

$$+\left((1-\iota)^{\frac{-\alpha\log\left(\frac{4\delta_1}{l}\right)}{12+2\alpha}}\right)\left((1-\iota)^{\frac{\alpha}{12+2\alpha}\frac{\gamma}{K+1}}\right)^l\left(\sum_{s\geq 0}(1-\iota)^{s\frac{\alpha}{12+2\alpha}}\right)$$
$$\leq C_7\left(\frac{1}{l}\right)^{3+\frac{\alpha}{4}},$$

对于某个常数 $C_7\geq 1$，由此完成引理 5.1 的证明。 □

6. A random horseshoe for predominantly expanding RDS: Lyapunov exponent and invariant measure

第6节和第7节致力于证明定理2.9。特别地，我们需要验证，任何（σ， R）-主要扩张随机动力系统（见定义2.8）都满足假设（H0）—（H5）。在第6节中，我们检验任何（σ， R）-主要扩张随机动力系统都满足假设（H0）—（H1）和（H4）—（H5），而在第7节中，我们将重点讨论剩余的假设（H2）—（H3）。

从现在起，沿用第 2.3 节中的记号，我们设 $\Omega:=[-\sigma,\sigma]^{\mathbb{N}}$，$\mathbb{P}:=\left(\frac{\mathrm{Leb}|_{[-\sigma,\sigma]}}{2\sigma}\right)^{\otimes\mathbb{N}}$，给定噪声幅度 $\sigma>0$，并令 $\mathcal{F}$ 为通过柯尔莫哥洛夫扩张定理得到的 Ω 上的乘积博雷尔 σ-代数。

我们提醒——有关更多详情请参见第2.3节——一个 (σ,R)-主要扩张随机动力系统f_ω^n 由一族迭代 $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 生成，该族具有一个正则随机奇异集$\{\mathcal{SC}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ （见定义2.1）并满足

$$f_\omega(x):=f(x+\omega_0),$$

对于满足定义 2.8 中要求的给定函数 f。由于 f 在奇异集 $\mathcal{S}$ 附近的一阶和二阶导数的性质，根据定义 2.8 的条件 (ii)，可以证明 $\mathcal{SC}$ 是正则的（参见定义 2.1）。回顾一下， $\mathcal{SC}$ 是不可微集 $\mathcal{S}$ 和临界集 $\mathcal{C}$ 的并集。此外，回顾一下， $G=\{|df|>R\}$ 是超膨胀集，并且 G 有 G_1、...、G_k 个连通分支满足 $|G_i|\geq\frac{1}{R}$。

下面的命题揭示了 (σ,R)-主要扩张映射的一个关键性质，本节中经常会用到这一性质：也就是说，存在一个 Δ 位于超膨胀区域内，使得 $|\Delta|\leq\frac{1}{R}$, $f(\Delta)=\mathbb{S}^1$，且 Δ 满足可达性条件（见方程 (6.3)）。

命题 6.1。设 f_ω^n 是（σ， R）-主要扩张的。设 G_1 是定义 2.8 的第（iii）项中 G 的一个连通分支，并设 c 是其中点。令

$$\Delta:=\left[c-\frac{1}{2R},c+\frac{1}{2R}\right]. \tag{6.1}$$

则， $\Delta\subset G_1$ 和 $f(\Delta)=\mathbb{S}^1$。

此外，给定 $\gamma>0$，考虑集合

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma) &:=\{x\in\Delta\mid d\left(x,\mathbb{S}^1\setminus G\right)>\gamma\},\\ E(\gamma) &:=\{x\in E\mid d\left(x,\mathbb{S}^1\setminus E\right)>\gamma\}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

则存在 $\gamma>0$、 $M\geq 0$ 和 $q\in\in(0,1)$，使得

$$\mathbb{P}\left(x+\omega_0\in E(\gamma)\ \textit{and}\ f_\omega(x)\in\Delta(\gamma)\right)>q, \tag{6.3}$$

对所有 $x\in\mathbb{S}^1$。

证明。该命题的第一个断言源于这样一个事实：根据拉格朗日定理， G_1 内任何长度至少为 $\frac{1}{R}$ 的区间都会映射到整个圆。为证明（6.3），注意到由（2.14）可知 Leb $\left(\mathbb{S}^1 \setminus G\right) < D(R)$，因此，对于任意 $x \in \mathbb{S}^1$，存在 G_i，使得 $d(x, G_i) < {}^{D}{}_{(R)\,2}$。利用（2.13）以及 $f(G_i) = \mathbb{S}^1$ 这一事实，取足够小的 γ，使得

$$(G_i \cap \Delta(\gamma)) \cap f^{-1}(\Delta(\gamma)) \neq \emptyset \ \forall i = 1, \ldots, k,$$

我们得出结论，

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^1} \mathbb{P}\left(x + \omega_0 \in f^{-1}(\Delta(\gamma)) \cap G_i\right) > 0,$$

由此立即得到（6.3）。 □

6.1.奇异集的正则性与遍历平稳测度的唯一性。本小节的主要结果如下命题：

命题 6.2. 设 f_ω^n 是任意一个 (σ, R)-主要扩张随机动力系统。那么 (H0) 和 (H1) 均成立。特别地，随机动力系统 f_ω^n 存在一个绝对连续的唯一遍历平稳测度 μ，使得 $\log |df_\omega(x)| \in L^1(\mathbb{P} \otimes \mu)$。

证明。(H0) 得以验证的证明是定义 2.8 中第 (i) 项的直接推论，留给读者完成。

为了证明遍历测度的存在性和唯一性，由于 $\mathbb{S}^1$ 的紧致性，只需证明任意初始条件 $x \in \mathbb{S}^1$ 都能以正概率到达圆上的任意开集（参见 $[13, $第 $1]$ 章）。对于一个 (σ, R)-主要扩张随机动力系统 f_ω^n，以下引理在噪声幅度足够大的条件下，利用 (6.1) 中 Δ 的存在性，确立了这一事实。

引理 6.3. 对任意 $x \in \mathbb{S}^1$ 和任意开集 $A \subset \mathbb{S}^1$， $\mathbb{P}\left\{f_\omega^2(x) \in A\right\} > 0$。

证明。固定 $x \in \mathbb{S}^1$ 并取一个开集 $A \subset \mathbb{S}^1$。由 (6.3)

$$\mathbb{P}\left\{f_\omega(x) \in \Delta\right\} > 0. \tag{6.4}$$

由于 $f(\Delta) = \mathbb{S}^1$， $f^{-1}(A) \cap \Delta \neq \emptyset$。于是，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{f_\omega^2(x) \in A\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{f_\omega(x) + \omega_1 \in \Delta \cap f^{-1}(A)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{f_\omega(x) \in \Delta\right\} \inf_{y \in \Delta} \mathbb{P}\left\{y + \omega_0 \in f^{-1}(A) \cap \Delta\right\}.\end{aligned}$$

在最后一行中，第一项由 (6.4) 可知大于零，第二项为正，这是因为 $\sigma > \frac{1}{R} = |\Delta|$。证毕。□

由引理 6.3 可知，随机动力系统 f_ω^n 具有唯一的遍历测度 μ。μ 的绝对连续性源于以下事实：对于所有 $x \in \mathbb{S}^1$ $[13, $章节 $1]$，转移概率 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \mapsto \mathbb{P}(f_\omega(x) \in A)$ 都相对于勒贝格测度绝对连续。

仍需证明 $\log |df_\omega(x)|$ 关于 $\mathbb{P} \otimes \mu$ 可积。注意到，除临界集 $\mathcal{C}$ 的一个小邻域外， $df(x)$ 处处远离于零有界，且从上方一致有界；在该邻域内， $df(x)$ 趋近于 0。因此，我们只需检验 $\log |df_\omega(x)|$ 关于 $\mathbb{P} \otimes \mu$ 的积分有下界。由于 $\mathcal{SC}$ 的正则性，存在常数 $B \geq 1$，使得对小邻域 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ 中的所有 x，均有 $\mathcal{C}$

$$|df(x)| \geq B\mathrm{dist}(x, \mathcal{C}).$$

利用这一事实可知，存在常数 $D_1 > 0$，使得对所有 $x \in \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \log|df(x+\omega_0)|d\mathbb{P}(\omega_0) &\geq \int_{B(x,\sigma)} \log|df(z)|\,dz \\ &\geq \int_{B(x,\sigma)\setminus\mathcal{N}(\mathcal{C})} \inf_{x\in\mathbb{S}^1\setminus\mathcal{N}(\mathcal{C})} \log|df(x)| \\ &+ \int_{\mathcal{N}(\mathcal{C})} \log B\mathrm{dist}(z,\mathcal{C})dz \\ &\geq D_1 + \int_{\mathcal{N}(\mathcal{C})} \log \mathrm{dist}(z,\mathcal{C})dz.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1\times\Omega} \log|df(x+\omega_0)|d\mu(x)d\mathbb{P}(\omega_0) &= \int_{\mathbb{S}^1}\left[\int_\Omega \log|df(x+\omega_0)|\,d\mathbb{P}(\omega)\right]dx \\ &\geq D_1 + \int_{\mathcal{N}(\mathcal{C})} \log\mathrm{dist}(x,\mathcal{C})dx > -\infty,\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

6.2. 满支扩张性质。我们已经证明假设（H0）和（H1）均成立。还需注意，假设（H5）显然成立。事实上，令 G_ω 为 f_ω 的超扩张区域，并考虑集合 $\Delta_\omega := \Delta - \omega_0$，其中 $\omega \in \Omega$。于是，根据定义 2.8，对于所有 $\omega \in \Omega$，均有 $\Delta_\omega \subset G_\omega$和 $f_\omega(\Delta_\omega) = \mathbb{S}^1$。现在我们证明（H4）也成立。回顾一下（见定义2.4），若存在区间 $J \subset I$和整数 $i \leq K$，使得 $f_\omega^i(J) = \mathbb{S}^1$且 $\left|df_\omega^i|_J\right| > \kappa_1$，则称区间 I 为（ω，κ_1，K）-满支扩张。

本小节的主要结果如下

命题6.4. 设 f_ω^n是一个 (σ, R)-主要扩张随机动力系统，且设 G是 f的超扩张区域。设 $\Delta \subset G$ 使得 $f(\Delta) = \mathbb{S}^1$。那么，假设 (H4) 得以满足，即对于充分小的 $\eta > 0$，存在数 $K \in \mathbb{N}$ 和 $\kappa_1 \geq 1$，使得任意直径位于 $(\frac{\eta}{4}, 4\eta)$ 内的区间为(ω, κ_1, K)-满支扩张的概率为正且有正下界。特别地，(2.5) 成立。

证明分为三个步骤。

- 在引理 6.5 中，我们使用 (H5) 证明，对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及所有 $\omega \in \Omega$，都存在一个随机区间 $J = J(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})$，使得 J 是 (ω, k, R^k)-满支扩张的，并且 $|J| \leq R^{-k}$。
- 在引理6.7中，我们由引理6.5推导出以下概率的统一界：对于任意 $\eta_1 > 0$，存在 $K \in \mathbb{N}$，使得包含于 (6.1)中引入的集合 Δ内、满足 $|I| \geq \eta_1$的任一区间 I 都是 (ω, K, R^K)-满支扩张；
- 我们结合引理 6.5 和引理 6.7，以及命题 6.1，从而完成证明。

引理 6.5. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $\gamma_k \in (0, 1)$ 以及一个形如 H_k 的噪声实现集合。

$$H_k := [-\sigma, \sigma] \times H'(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) \tag{6.5}$$

满足 $\mathbb{P}(H_k) > \gamma_k$，并具有如下性质：对于每个 $\omega \in H_k$，都存在一个随机区间$J_k = J_k(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})$，使得 $|J_k| \leq R^{-k}$，$f_\omega^i(J_k) \subset \Delta_{\theta^i(\omega)}$对所有 $0 = 1, \ldots, k-1$ 均成立，且

$f_\omega^k(J_k) = \mathbb{S}^1$，其中 $\Delta_\omega := \Delta - \omega_0$，而 Δ 如（6.1）所示。特别地，J_k 是 (ω, k, R^k)-满支扩张的。

证明。我们首先陈述以下有用的事实，不作证明。

引理 6.6。设 $Q \subset \mathbb{S}^1$ 是一个区间，使得 $|Q| \le \frac{1}{R}$。那么

$$\mathbb{P}\left\{f^{-1}(Q+\omega_0)\cap\Delta \text{ is connected}\right\} \ge \frac{1}{4R\sigma}. \tag{6.6}$$

接下来我们可以进行引理 6.5的证明。令 f 为 f 的提升，令 Δ 为 Δ的一个提升，使得 $\bar{\Delta} \subset [0,1)$。记 $\bar{\Delta} := [a,b]$，其中 $0 \le a < b \le 1$和 $b-a \le \frac{1}{R}$。不失一般性，设 $f(a) = 0$ 且 $f(b) = 1$。固定 $k \in \mathbb{N}$ 并定义$J_1 := \Delta_{\theta^{k-1}(\omega)}$，使得 $f(J_1 + \omega_{k-1}) = \mathbb{S}^1$。注意，根据定义，$J_1$ 是连通的。现在取$J_2 \subset \Delta_{\theta^{k-2}(\omega)}$ 使得 $f(J_2 + \omega_{k-2}) = J_1$。由此可得

$$J_2 := f^{-1}(J_1 + \omega_{k-1}) \cap \Delta - \omega_{k-2},$$

根据引理 6.6，与 $\frac{1}{4R\sigma}$ 的连接概率大于 $\frac{1}{4R\sigma}$ 。通过归纳构造，我们构造出一列随机区间 $\{J_i\}_{i=1,\ ...,\ k}$，使得 $J_i \subset \Delta_{\theta^{k-i}(\omega)}$，$f(J_i + \omega_{k-i}) = J_{i-1}$ 对于 $i \ge 2 \le k-1$，$f(J_1 + \omega_{k-1}) = \mathbb{S}^1$，并且只要噪声实现 $\{\omega_i\}_{i=1}^{k-1}$ 的选择满足

$$J_i := f^{-1}(J_{i-1} + \omega_{k-i}) \cap \Delta$$

对所有 $i = 2$、...、$k-1$ 都是连通的。根据公式（6.6），其发生的概率大于$\left(\frac{1}{4R\sigma}\right)^{k-1}$。随机集合 J_i 所需的其他性质由构造直接得到。□

在下面的引理中，我们证明 Δ 中的区间是满支扩张的。

引理 6.7. 对任意 $\eta_1 > 0$，存在 $K_1 \in \mathbb{N}$ 和 $\iota_1 \in (0,1)$，使得若 $|I| \ge \eta_1$ 和 $I \subset \Delta$，则

$$\mathbb{P}\left\{I \text{ is } (\omega, K_1, R^{K_1})\text{-full branch expanding}\right\} \ge \iota_1.$$

证明。取 K_1 使得 $\eta_1 \gg R^{-K_1}$。令 $H_k \subset \Omega$ 为 (6.5) 中定义的噪声实现集合。现在考虑集合

$$\tilde{H}_k := \theta^{-1}(H_k),$$

使得对于所有 $\omega \in \tilde{H}_k$，存在一个区间 $J = J(\omega_1, \dots, \omega_{K_1})$，满足 $f_{\theta^{K_1-1}(\omega)}(J) = \mathbb{S}^1, f^i_{\theta(\omega)}(J) \subset \Delta_{\theta^{i+2}(\omega)}$ 且 $|J| \le R^{-K_1+1}$。

取 $J = J(\omega_1, \dots, \omega_{K_1}) \subset \Delta$ 使得 $f(J) = J$。由于 $J \subset \{|df| > R\}$，我们有$\left|\tilde{J}\right| \le R^{-K_1} << \eta_1$。令 $\tilde{H}_{k+1}$ 表示使得 $\tilde{J}$ 连通的噪声实现集合。注意到

$$\left\{I \text{ is } (\omega, K_1, R^{K_1})\text{-full branch expanding}\right\} \supset \left\{I + \omega_0 \supset \tilde{J} \text{ and } \tilde{J} \text{is connected}\right\}.$$

因此，我们可以看到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{I \text{ is } (\omega, K_1, R^{K_1})\text{-full branch expanding}\right\} &\ge \mathbb{P}\left\{I + \omega_0 \supset \tilde{J} \text{ and } \tilde{J} \text{ is connected}\right\} \\ &\ge \int_{\tilde{H}_{k+1}} \left[\int \mathbb{P}\left\{I + \omega_0 \supset \tilde{J}\right\} d\mathbb{P}(\omega_0)\right] d\mathbb{P}(\omega_1, \dots, \omega_{K_1}).\end{aligned} \tag{6.7}$$

由于根据（σ， R）-主导膨胀， I 和 $\tilde{J}$ 均包含于 Δ 和$\sigma > \frac{1}{R} > |\Delta|$ 中，因此存在 $\iota_1 > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left\{I + \omega_0 \text{ contains } \tilde{J}\right\} > \iota_1,$$

˜对所有 $\omega_1, \ldots, \omega_{K_1} \in H_{k+1}$均成立。由 (6.7) 和 (6.5) 可得证明。

□

命题 6.4 的证明。

令 $C{:=}\sup_{\omega\in\Omega} ||g_\omega||_{\mathcal{C}^1\setminus\mathcal{SC}_\omega}$。设 I 是一个区间，使得 $|I| \in (\frac{\eta}{4}, 4\eta)$。特别地， $I \subset B(x_I, 2\eta)$，其中 x_I 是 I 的中点。利用 (6.3) 以及 $x = x_I$，我们得到

$$\mathbb{P}\left\{x + \omega_0 \in E \text{ and } f_\omega(I) \subset \Delta\right\} > q.$$

注意，由于 E 中的扩张，事件 $\{x + \omega_0 \in E$ 和 $f_\omega(I) \subset \Delta\}$ 包含于事件

$$E(I) := \left\{f_\omega(I) \subset \Delta,\, |f_\omega(I)| \geq \frac{\eta}{4} \text{ and } |df_\omega|_I| > 1\right\} \tag{6.8}$$

因此

$$\mathbb{P}\left(E(I)\right) > q. \tag{6.9}$$

根据引理 6.7 以及 $\eta_1 = \frac{\eta}{4}$，我们得到 K_1 和 ι_1，使得

$$\inf_{\{I\subset\Delta, |I|\geq\frac{\eta}{4}\}} \mathbb{P}\left\{I \text{ is } (\omega, K_1, R^{K_1})\text{-full branch expanding}\right\} > \iota_1. \tag{6.10}$$

因此，由于（6.8）

$$\mathbb{P}\left\{I \text{is}\,(\omega, K_1+1, R^{K_1}) \text{full-branch expanding }\right\} \geq$$
$$\int_{E(I)} \mathbb{P}\left\{f(I+\omega_0) \text{is}\,(\theta(\omega), K_1, R^{K_1})\text{full-branch expanding}\right\} d\mathbb{P}(\omega_0) \geq q\iota_1,$$

这就完成了证明。 □

7. Large deviations estimates for slow recurrence to the critical set and for the Lyapunov exponent

7.1. 临界集的慢回归。本小节将证明，(σ, R)-主要扩张随机动力系统满足假设（H3）。设 f_ω^n 是一个以 f 为生成映射的 (σ, R)-主要扩张随机动力系统。 f 的奇异集 $\mathcal{SC}$ 具有如下形式

$$\mathcal{SC} := \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\},$$

其中， $m = |\mathcal{SC}|$ 表示奇异集的基数。使用与假设（H3）中相同的记号，令

$$Z_n(\delta, \omega, x) := \sum_{i=0}^{n-1} -\log\left(\text{dist}_\delta\left(f_\omega^i(x), \mathcal{SC}_{\theta^i(\omega)}\right)\right).$$

根据伯克霍夫遍历定理，我们可以看到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n(\omega, x, \delta)}{n} = \int_{\mathbb{S}^1\times\Omega} \log\left(\text{dist}_\delta\left(x, \mathcal{SC}_\omega\right)\right) d\mu(x) d\mathbb{P}(\omega) \qquad \mathbb{P}\otimes\mu \text{ a.s.}$$

本小节的主要结果如下

定理 7.1. 设 f_ω^n是一个 (σ, R)-主要扩张随机动力系统，并且

$$H(\delta) := \sqrt{\delta}\left(1 + \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

那么，存在 $p \in (0,1)$ 使得

$$\mathbb{P}_x(Z_n(\omega, x, \delta) > nH(\delta)) \le p^n \qquad \forall n \ge 0,$$

对于足够小的 δ。特别地，假设（H3）得到满足。

证明。根据马尔可夫不等式，对于 $1 < \zeta < e$，我们有

$$\mathbb{P}\left(Z_n(\omega, x, \delta) > nH(\delta)\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[\prod_i \zeta^{-\log\left(\mathrm{dist}_\delta\left(f_\omega^i(x), \mathcal{SC}_{\theta^i(\omega)}\right)\right)}\right]}{\zeta^{H(\delta)n}}$$

为简化记号，我们记作 $b_i(\omega, x, \delta) := -\log\left(\mathrm{dist}_\delta\left(f_\omega^i(x)\,\mathcal{SC}_{\theta^i(\omega)}\right)\right)$。注意，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\le n} \zeta^{b_i(\omega,x,\delta)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i\le n-1} \zeta^{b_i(\omega,x,\delta)} \mathbb{E}\left[\zeta^{b_n(\omega,x,\delta)} | \mathcal{F}_{n-1}\right](\omega)\right] \tag{7.1}$$

由于恒等式 $\mathcal{SC}_\omega = \mathcal{SC} - \omega_0$ 以及以下事实：$\mathcal{SC}_{\theta^n(\omega)}$ 显式依赖于 ω_n，而 $f_\omega^n(x)$依赖于 ω_0、.....、ω_{n-1}，因此我们有，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\zeta^{b_n(\omega,x,\delta)} | \mathcal{F}_{n-1}\right](\omega) &= \int_{(-\sigma,\sigma)} \zeta^{-\log(\mathrm{dist}_\delta(f_\omega^n(x)+\omega_n, \mathcal{SC}))} d\mathbb{P}(\omega_n) \\
&= \frac{1}{2\sigma}\int_{\mathbb{S}^1} \zeta^{-\log(\mathrm{dist}_\delta(y,\mathcal{SC}))} 1_{B(f_\omega^n(x),\sigma)}(y) dy \\
&= \frac{1}{2\sigma}\int_{\mathbb{S}^1} 1_{B(f_\omega^n(x),\sigma)}(y) \left(\frac{1}{\mathrm{dist}_\delta(y,\mathcal{SC})}\right)^{\log(\zeta)} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\sigma}\int_{\mathbb{S}^1\setminus B(\mathcal{SC},\delta)} 1_{B(f_\omega^n(x),\sigma)} dy + \frac{1}{2\sigma}\int_{B(\mathcal{SC},\delta)} 1_{B(f_\omega^n(x),\sigma)}(y) \left(\frac{1}{\mathrm{dist}_\delta(y,\mathcal{SC})}\right)^{\log(\zeta)} d(y) \\
&\le 1 + \frac{2|\mathcal{SC}|}{\sigma}\int_{(0,\delta)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\log(\zeta)} dx \\
&= 1 + \frac{2|\mathcal{SC}|}{\sigma}\frac{\delta^{1-\log(\zeta)}}{1-\log(\zeta)}.
\end{aligned}$$

将这一估计代入（7.1），通过对 n 使用归纳法，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\le n} \zeta^{b_i(\omega,x,\delta)}\right] \le \left(\frac{1 + \frac{2|\mathcal{SC}|}{\sigma}\frac{\delta^{1-\log(\zeta)}}{1-\log(\zeta)}}{\zeta^{H(\delta)}}\right)^n. \tag{7.2}$$

此外，

$$\frac{d\zeta^{H(\delta)}}{d\delta} = \log(\zeta)\zeta^{H(\delta)}\left(\frac{1}{2\sqrt{\delta}} + \frac{\log(\frac{1}{\delta})}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \log(\zeta) \zeta^{H(\delta)} \left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right) - 1 \right)$$
$$> \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \log(\zeta) \text{ as } \delta \to 0.$$

因此，当 δ 足够小时，

$$\zeta^{H(\delta)} - 1 > \lim_{t \to 0} \int_t^{\delta} \log(\zeta) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \log(\zeta)\sqrt{\delta}. \tag{7.3}$$

选取 ζ 充分接近于 1，使得$\frac{1}{2} < 1 - \log(\zeta)$。那么，如果 δ 足够小，我们有

$$\log(\zeta)\sqrt{\delta} > \frac{2|\mathcal{SC}|}{\sigma} \frac{\delta^{1-\log(\zeta)}}{1-\log(\zeta)}. \tag{7.4}$$

因此，

$$p := \left(\frac{1 + \frac{2|\mathcal{SC}|}{\sigma} \frac{\delta^{1-\log(\zeta)}}{1-\log(\zeta)}}{\zeta^{H(\delta)}} \right) < 1,$$

由 (7.2) 可知，证明至此完成。 □

7.2. 李雅普诺夫指数的正性与大偏差。本小节的主要结果如下

命题 7.2. 设 f_ω^n是一个 (σ, R)-主要扩张随机动力系统。那么，李雅普诺夫指数 λ 为正，且满足

$$\lambda > Z(h), \tag{7.5}$$

其中 $Z(h)$ 由定义 2.8 中的 (2.16) 给出。此外，如果 $\alpha > 0$ 取得足够小，使得

$$\bar{Z}(h) := \log(R)(1-h) + \frac{\alpha+1}{2\sigma} \int_C \log|df(z)|dz > 0, \tag{7.6}$$

其中， C 是 f 的收缩区域，则存在一个常数 $D \geq 1$ 和 $q \in (0, 1)$，使得

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^1} \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \log\left|df_{\theta^i(\omega)}(x)\right| < \bar{Z}(h)n \right) \leq Dq^n. \tag{7.7}$$

特别地，假设 (H2) 得到了满足。

证明。由命题 6.2，与随机动力系统 f_ω^n 相关的马尔可夫链存在唯一的遍历平稳测度 μ，使得 $\log |df(x+\omega_0)| \in L^1(\mathbb{P} \otimes \mu)$。因此

$$\lambda = \int_{\mathbb{S}^1} \int_\Omega \log|df(x+\omega_0)| \, d\mu(x) d\mathbb{P}(\omega) \geq \inf_{x \in \mathbb{S}^1} \int_\Omega \log|df(x+\omega_0)| \, d\mathbb{P}(\omega) \tag{7.8}$$

此外，方程（2.15）和（2.16）表明，对于任意 $x \in \mathbb{S}^1$，我们有

$$\int_\Omega \log|df(x+\omega_0)| d\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2\sigma} \int_{B(x,\sigma) \cap G} \log|df(z)|dz + \frac{1}{2\sigma} \int_{B(x,\sigma) \setminus G} \log|df(z)|dz$$
$$\geq \log(R)(1-h) + \frac{1}{2\sigma} \int_{B(x,\sigma) \setminus G} \log|df(z)|dz > Z(h) > 0.$$

还需证明大偏差估计 (7.7)。首先，为简化记号，令 $V := -\int_C \log(|df(x)|)dx > 0$。于是

$$\bar{Z}(h) = (1-h)\log(R) - \frac{\alpha+1}{2\sigma}V. \tag{7.9}$$

对于充分大的 $l \in \mathbb{N}$，我们考虑这些集合

$$P(k) := \left\{ x \in \mathbb{S}^1 \mid R^{-\frac{k}{l}} > |df(x)| > R^{-\frac{(k+1)}{l}} \right\}. \tag{7.10}$$

则，当 l 足够大时，$\{P(k)\}_{k\geq -l}$ 是 $\mathbb{S}^1 \setminus G$ 的一个直径较小的划分，而集合$\{P(k)\}_{k\geq 0}$ 是 C 的一个具有相同性质的划分。于是，对于任意满足 $x_k \in P(k)$且 l 足够大的序列 $\{x_k\}_{k\geq 0}$，我们有

$$\sum_{k\geq 0} \log|df(x_k)|\mathrm{Leb}(P(k)) \approx -V.$$

此外，根据 (7.10) 中 $P(k)$ 的定义，我们有

$$\left| \sum_{k\geq 0} \log|df(x_k)|\mathrm{Leb}(P(k)) - \sum_{k\geq 0} \log(R^{-\frac{(k+1)}{l}})\mathrm{Leb}(P(k)) \right| \leq \log\left(R^{-\frac{1}{l}}\right)\mathrm{Leb}(C).$$

我们可以选择足够大的 l，使得

$$\frac{\sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)}{l}\mathrm{Leb}(P(k))}{2\sigma} < \left(\frac{1}{2\sigma\log(R)} + \frac{\alpha}{4\sigma\log(R)}\right)V. \tag{7.11}$$

固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{S}^1$。给定 $k \geq -l$，令 $\tilde{P}_{n,\,k}(\omega, x)$ 表示 $P(k)$ 中包含在 $x+\omega_0$，....., $f_\omega^{n-1}(x) + \omega_{n-1}$ 里的点的数量：

$$\tilde{P}_{n,k}(\omega, x) := \mathrm{card}\{i \in \{0,\ldots,n-1\} \mid f_\omega^i(x) + \omega_i \in P(k)\}, \tag{7.12}$$

同样地，我们定义

$$\tilde{G}_n(\omega, x) := \mathrm{card}\{i \in \{0,\ldots,n-1\} \mid f_\omega^i(x) + \omega_i \in G\}.$$

回想一下，G 是 f 和 $\bigcup_{k\geq -l} P(k) = \mathbb{S}^1 \setminus G$ 的超膨胀区域。根据 G 和 $P(k)$ 的定义，我们有

$$S_n(\omega, x) := \sum_{i=0}^{n-1} \log|df_{\theta^i(\omega)}(f_\omega^i(x))| \geq \tilde{G}_n(\omega, x)\log(R) - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{n,k}(\omega, x)\frac{(k+1)}{l}\log(R). \tag{7.13}$$

给定 $x \in \mathbb{S}^1$，考虑噪声实现的集合

$$A_n(x) := \left\{ \tilde{G}(n)(\omega, x) - \sum_{k\geq 0} \tilde{P}_{n,k}(\omega, x)\frac{(k+1)}{l} < \left(1 - h - \left(\frac{1+\alpha}{2\sigma\log(R)}\right)V\right)n \right\}.$$

注意，由（7.9）和（7.13）可知，我们有

$$\left\{S_n(\omega, x) < \bar{Z}(h)n\right\} \subset A_n(x). \tag{7.14}$$

为了估计 $A_n(x)$ 的测度，我们引入集合 $A_n^1(x)$，其中包含所有噪声实现，使得 x 的轨道至少一次进入集合 $P(k)$ 中的一个集合，对于 $k \geq n$ 至少一次：

$$A_n^1(x) := \left\{ \exists k \geq n \mid \tilde{P}_{n,k}(\omega, x) > 0 \right\}.$$

我们进一步考虑这样一组噪声实现： x 的轨道访问 G 的频率小于$1-h-{}_{8\sigma}{}^{\alpha}{}_{\log(R)V}$：

$$A_n^2(x) := \left\{ \tilde{G}_n(\omega, x) \leq \left(1 - h - \frac{\alpha}{8\sigma \log(R)} V\right) n \right\}.$$

集合 $A_n(x)$可分解为

$$A_n(x) := A_n^3(x) \sqcup \left(A_n(x) \cap \left(A_n^1(x) \cup A_n^2(x)\right)\right), \tag{7.15}$$

其中

$$\begin{aligned} A_n^3(x) &= A_n(x) \setminus \left(A_n^1(x) \cup A_n^2(x)\right) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}_{n,k}(\omega, x) \left(\tfrac{k+1}{l}\right) > \tilde{Z} n \right\}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

and

$$\tilde{Z} := \left(\frac{3\alpha}{8\sigma \log(R)} + \frac{1}{2\sigma \log(R)}\right) V. \tag{7.17}$$

As

$$\mathbb{P}(A_n(x)) \leq \mathbb{P}\left(A_n^1(x)\right) + \mathbb{P}(A_n^2(x)) + \mathbb{P}(A_n^3(x)),$$

命题 7.2 将由下文引理 7.3、7.4 和 7.5 中关于 $A_n^1(x)$、 $A_n^2(x)$ 和 $A_n^3(x)$ 测度的估计推出。

引理 7.3。存在一个 $D_0 \geq 1$，使得对所有 $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(A_n^1(x)\right) \leq D_0 h R^{-\frac{n}{2l}}.$$

证明。令

$$\tilde{P}(n) := \bigcup_{k \geq n} P(k),$$

then

$$\mathbb{P}\left(A_n^1(x)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(f_\omega^i(x) + x_i \in \tilde{P}(n)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{y \in \mathbb{S}^1} \mathbb{P}\left(y + \omega_i \in \tilde{P}(n)\right).$$

根据定义 2.8的第 (1)项， f 的临界集是非退化的。于是，存在一个常数 $C \geq 1$，使得勒贝格测度($P(k)$) $\leq CR^{-\frac{n}{l}}$，对所有 $n \geq 0$ 均成立。因此，我们有

$$\mathbb{P}\left(y + \omega_i \in \tilde{P}(n)\right) \leq \frac{\mathrm{Leb}(\tilde{P}(n))}{2\sigma} \leq DR^{-\frac{n}{l}},$$

这意味着

$$\mathbb{P}\left(A_n^1(x)\right) \leq DnR^{-\frac{n}{l}} \leq D_0 R^{-\frac{n}{2l}},$$

对于某个 $D_0 \geq 1$。 □

引理 7.4. 存在 $\tilde{q}_1 \in (0, 1)$，使得对所有 $n \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(A_n^2(x)\right) \leq \tilde{q}_1^n.$$

证明. 注意到 $A_n^2(x)$ 可以改写为

$$A_n^2(x) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} 1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x) + \omega_i) > \left(h + \frac{\alpha}{4}V\right) n \right\}.$$

由马尔可夫不等式，对于任意 $\zeta > 1$，我们得到

$$\mathbb{P}\left(A_n^2(x)\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\zeta^{\sum_{i=0}^{n-1} 1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}\left(f_\omega^i(x)+\omega_i\right)}\right]}{\zeta^{\left(h+\frac{\alpha}{4}V\right)n}}$$

我们可以将上项改写为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\zeta^{\sum_{i=0}^{n-1} 1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x)+\omega_i)}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n-1} \zeta^{\sum_{i=0}^{n-1} 1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x)+\omega_i)}\right] \\
&= \int_{\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1} \zeta^{1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x)+\omega_i)} d\mathbb{P}(\omega_0, \ldots \omega_{n-1}) \\
&= \int_{\omega_0,\ldots,\omega_{n-2}} \prod_{i=0}^{n-2} \zeta^{1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x)+\omega_i)} \left[\int_{\omega_{n-1}} \zeta^{1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^{n-1}(x)+\omega_{n-1})} d\mathbb{P}(\omega_{n-1})\right] d\mathbb{P}(\omega_0, \ldots, \omega_{n-2}).
\end{aligned}$$

现在注意到，在固定 ω_0、.....、ω_{n-2} 的情况下，我们有

$$\int_{\omega_{n-1}} \zeta^{1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^{n-1}(x)+\omega_{n-1})} d\mathbb{P}(\omega_{n-1}) = \zeta \frac{\mathrm{Leb}(\omega_n \mid f_\omega^{n-1}(x) + \omega_{n-1} \notin G)}{2\sigma} + 1 - \frac{\mathrm{Leb}(\omega_n \mid f_\omega^{n-1}(x) + \omega_{n-1} \notin G)}{2\sigma}.$$

此外，由(2.15)可得

$$\int_{\omega_{n-1}} \zeta^{1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^{n-1}(x)+\omega_{n-1})} d\mathbb{P}(\omega_{n-1}) \leq \zeta h + 1 - h.$$

递归地重复这一论证，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\zeta^{\sum_{i=0}^{n-1} 1_{\mathbb{S}^1 \setminus G}(f_\omega^i(x)+\omega_i)}\right] \leq (\zeta h + 1 - h)^n.$$

因此，对于任意 $\zeta > 1$

$$\mathbb{P}\left(A_n^2(x)\right) \leq \left(\frac{h\zeta + 1 - h}{\zeta^{h+\frac{\alpha}{4}V}}\right)^n.$$

取 $\tilde{q}_1 = \left(\frac{\zeta h+1-h}{\zeta^{h+\frac{\alpha}{4}V}}\right)$ 使 ζ 接近于 1，即可完成证明。 □

引理 7.5。存在 $\tilde{q}_2 \in (0, 1)$，使得，对于所有 $n \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(A_n^3(x)\right) \leq \tilde{q}_2^n.$$

证明。由马尔可夫不等式和（7.16），对于所有 $\zeta > 1$。

$$\mathbb{P}(A_n^3(x)) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\zeta^{\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}_{n,k}(\omega,x)\frac{k+1}{l}}\right]}{\zeta^{n\tilde{Z}}}. \tag{7.18}$$

对 $j = 0, \ldots, n-1$ 定义

$$M_j(\omega, x) := \prod_{k=0}^{n-1} \zeta^{\frac{k+1}{l} 1_{P(k)}(f_\omega^j(x)+\omega_j)},$$

并令

$$\pi_j(A) = \mathbb{P}((\omega_0, \dots, \omega_{j-1}) \in A) \qquad \forall A \subset \mathcal{B}([-\sigma, \sigma]^j).$$

然后，由（7.12）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\zeta^{\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{P}_{n,k}(\omega,x)(k+1)}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{n-1}\zeta^{\tilde{P}_{n,k}(\omega,x)(k+1)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\zeta^{(k+1)1_{P(k)}(f_\omega^j(x)+\omega_j)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{k=0}^{n-1}\zeta^{(k+1)1_{P(k)}(f_\omega^j(x)+\omega_j)}\right]\right] = \int_\Omega \prod_{j=0}^{n-1} M_j(\omega,x)d\pi_n.\end{aligned}$$

根据 Fubini定理

$$\int_\Omega \prod_{j=0}^{n-1} M_j(\omega,x)d\pi_n = \int_{[-\sigma,\sigma]^{n-1}} \prod_{j=0}^{n-2} M_j(\omega,x)\left[\int_{[-\sigma,\sigma]} M_{n-1}(\omega,x)d\mathbb{P}(\omega_n)\right]d\pi_{n-1}. \tag{7.19}$$

对于给定的 $(\omega_0, \dots, \omega_{n-2}) \in [-\sigma,\sigma]^{n-1}$，我们可以重写

$$\begin{aligned}\int_{[-\sigma,\sigma]} M_{n-1}(\omega,x)d\mathbb{P}(\omega_{n-1}) &= \int_{[-\sigma,\sigma]} \prod_{k=0}^{n-1}\zeta^{\frac{k+1}{l}1_{P(k)}(f_\omega^{n-1}(x)+\omega_{n-1})}d\mathbb{P}(\omega_{n-1}) \\ &\le \sup_{y\in\mathbb{S}^1}\int_{[-\sigma,\sigma]}\prod_{k=0}^{n-1}\zeta^{\frac{k+1}{l}1_{P(k)}(y+\omega_{n-1})}\mathbb{P}(\omega_{n-1}) \\ &\le \sup_{y\in\mathbb{S}^1} 1 - \frac{\mathrm{Leb}\left(\cup_{k=0}^{n-1}P(k)\cap B_\sigma(y)\right)}{2\sigma} + \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{\frac{(k+1)}{l}}\frac{\mathrm{Leb}\left(P(k)\cap B_\sigma(y)\right)}{2\sigma} \\ &\le \sup_{y\in\mathbb{S}^1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(\zeta^{\frac{(k+1)}{l}}-1)\frac{\mathrm{Leb}\left(P(k)\cap B_\sigma(y)\right)}{2\sigma} \\ &\le 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(\zeta^{\frac{(k+1)}{l}}-1)\frac{\mathrm{Leb}\left(P(k)\right)}{2\sigma}\end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega \prod_{j=0}^{n-1} M_j(\omega,x)d\pi_{n-1} \le W(\zeta)\int_\Omega \prod_{j=0}^{n-1} M_j(\omega,x)d\pi_{n-2}, \tag{7.20}$$

其中

$$W(\zeta) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(\zeta^{\frac{(k+1)}{l}}-1)\frac{\mathrm{Leb}\left(P(k)\right)}{2\sigma}.$$

重复这一论证，我们得到

$$\mathbb{P}(A_n^3(x)) \le \left(\frac{W(\zeta)}{\zeta^{\tilde{Z}}}\right)^n. \tag{7.21}$$

注意， $W(1) = 1$ 并且，根据（7.11）和（7.17）

$$dW(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)}{l} \frac{\mathrm{Leb}\,(P(k))}{2\sigma} < \left(\frac{1}{2\sigma \log(R)} + \frac{\alpha}{4\sigma \log(R)} \right) V < \tilde{Z}.$$

这意味着 $W(\zeta)$ 的增长速度比 ζ^Z 在 $\zeta = 1$ 附近的增长速度慢。因此

$$q := \left(\frac{W(\zeta)}{\zeta^{\tilde{Z}}} \right) < 1,$$

当 $\zeta > 1$ 充分接近 1 时，证明即告完成。 □

注记 7.6. 为了便于今后应用上述结果，值得强调的是，命题 7.5 的证明仅需用到定义 2.8 中的 (1)、(2) 和 (3) 项。

8. Proof of Theorem 1.2

在最后这一节中，我们证明定理 1.2。该结论由定理 2.9 和下面的命题推出。

命题 8.1. 令 f_ω^n 为由 (1.5) 中映射的随机复合所生成的随机动力系统，即具有如下形式的映射

$$f_\omega(x) := L \sin(2\pi(x + \omega_0)) \ (\mathrm{mod}\, 1).$$

假设 $L \geq 3$。那么，对于 $R := \max\{3, L^{\frac{1}{2}}\}$ 和 $\sigma > \frac{1}{R} + c_1 \frac{R}{\pi^2 L}$， f_ω^n 是 (σ, R)-主要扩张的，其中 $c_1 := \frac{4\pi}{\sqrt{16\pi^2 - 1}}$。

证明。回忆一下， f_ω^n 是 (σ, R)-主要扩张的，当且仅当满足以下两个条件：

(1) 圆映射

$$f(x) := L \sin(2\pi x) \ (\mathrm{mod}\, 1)$$

满足定义 2.8 (1) 中所述的条件；

(2) 满足 (2.12) 和 (2.13) 中的不等式。

(1) 可由 f 的定义推出。为验证 (2)，我们检查 (2.12) 和 (2.13) 中的不等式。由不等式可得方程 (2.12)

$$-\frac{c_1}{\pi^2 L} \leq \int_C \log |df(x)| dx,$$

而（2.13）则由（2.14）以及以下事实得出：

$$\begin{aligned} \mathrm{Leb}\left(\mathbb{S}^1 \setminus G\right) &= \mathrm{Leb}\left\{x \in \mathbb{S}^1 \mid |2\pi L \cos(2\pi x)| < R\right\} \\ &\leq \mathrm{Leb}\left\{ \bigcup_{\left\{x_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}} \left\{ x \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{dist}(x, x_0) < c_1 \frac{R}{4\pi^2 L} \right\} \right\} \\ &= c_1 \frac{R}{\pi^2 L}. \end{aligned}$$

证明至此完成。

□

Acknowledgments

JL 和 GT 获得了 EPSRC 随机系统数学博士生培训中心：分析、建模与仿真（EP/S023925/1）的支持。

References

[1] Jos´e F. Alves。《 *Nonuniformly hyperbolic attractors—geometric and probabilistic aspects*》。Springer数学专著丛书。Springer，沙姆， [2020] ©2020。[2] Jos´e F. Alves 和 Vítor Araujo。双曲时：频率与可积性。[3] 。¨Jos *Inventiones mathematicae* F. Alves、Christian Bonatti 和 Marcelo Viana。具有主要扩张中心方向的部分双曲系统的 SRB测度。[4] ， 140：351–398，2000。¨Jos *Annales* e Ferreira Alves。具有多维扩张的非双曲系统的 SRB测度。*Scientifiques de l'École Normale Supérieure*[5] ， 33(1)：1–32，2000。 *Random dynamical systems* Ludwig Arnold。《[6] 》。Springer数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，1998。´Viviane Baladi、Michael Benedicks 和 V *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* eronique Maume-Deschamps。独立同分布单峰映射的几乎处处混合速率。[7] ，第4辑，35(1)：77–126，2002。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré C* Alex Blumenthal 和 Yun Yang。主导扩张的多峰圆映射随机扰动的正李雅普诺夫指数。[8] ，39(2)：419–455，2022。 *Lecture notes* Martin Hairer。马尔可夫过程的收敛。 *https://www.hairer.org/notes/Convergence.pdf*[9] ， 2010。 *Acta Mathematica Sinica* Wen Huang 和 Zeng Lian。由等度连续系统驱动的纤维上的阿诺索夫系统的马蹄。[10] ， 38(1)：281–290，2022。 *arXiv preprint arXiv:1612.08394* 2016 Wen Huang、Zeng Lian 和 Kening Lu。纤维上混合的随机阿诺索夫系统的遍历理论。[11] 。 *Communications on Pure and Applied Mathematics* Wen Huang 和 Kening Lu。无限维随机动力系统的熵、混沌与弱马蹄集。[12] ， 70(10)：1987–2036，2017。 *Publications* Anatole Katok。微分同胚的李雅普诺夫指数、熵与周期轨道。*Mathématiques de l'IHÉS*[13] ， 51：137–173，1980。 *Ergodic theory of random transformations* Yuri Kifer。《 *Progress in Probability and Statistics*》，第10卷，¨。Birkh[14] auser Boston 公司，马萨诸塞州波士顿，1986。 *Dynamical Systems* Zeng Lian 和 Mikko Stenlund。通过随机扰动获得的正李雅普诺夫指数。[15] ， 27 239：–252，2012。 *Markov chains* James R. Norris。《 *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*》，第2卷，[16] 。剑桥大学出版社，剑桥，1998。1997年原版重印。 *Differencial'nye Uravnenija* Viktor Aleksandrovich Pliss。关于 Smale 猜想。[17] ， 8：268–282，1972。 *Journal of Statistical Physics* 108 5 733 754, 2002 Lai-Sang Young。什么是 SRB测度，哪些动力系统具有 SRB测度？， ( )：–。