arXiv:2304.03686v1 [math.AC] 7 Apr 2023

由组合结构参数化的理想系统

ROBERT P. LAUDONE 和 ANDREW SNOWDEN

ABSTRACT. 对称理想链是一条规则，它为每个有限集 S 指定一个I_S 多项式环 $\mathbf{C}[x_i]_{i\in S}$ 中的理想 ϕ，使得当 $S \to T$： ϕ_* 是有限集的嵌入时，诱导同态 I_S 将 I_T映射到其中。Cohen 证明了关于此类链的一个基本诺特性结果；近年来，由于其广泛的新应用，这一结果受到了极大关注。在本文中，我们研究类似的理想链，但其中有限集被更复杂的组合对象（如树）所取代。我们给出一个 Cohen 型定理的一般判据，并给出若干满足该判据的具体例子。对于某些极限情形，其中置换群作用于无限变量多项式环，我们也证明了类似的结果。这与模型论中的一些主题相关，例如 Fra¨ıss´e 极限和寡形群。

CONTENTS

1. 引言2. 理想系统 1
3. 等变理想 4. 5
Borontrees 参考文 9
献 12
14

1. INTRODUCTION

1.1. 背景。假设对于每个非负整数 n ，我们都有一个 $\mathbf{C}^n$ 中的扎里斯基闭子集 Z_n，满足以下条件：如果 $(x_1, \dots, x_n)$ 属于 Z_n，且 $i_1, \dots, i_m$ 是互不相同的指标，那么 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ 属于 Z_m。这意味着，每当我们从 Z_n 中的一个点抽取 m 个互不相同的坐标时，所得结果都属于 Z_m。取 $m = n$，可知 Z_n 在对坐标进行置换的对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的作用下保持不变；因此，我们称 $Z_\bullet$ 为对称簇族。典型示例见例 1.1。

在过去15年中，[1] 对称族在许多领域得到了广泛应用：代数统计学[BD, HC, HiSu, MN], 、代数几何 [Dra1, DE, DK], 、拓扑学 [Ram], ，甚至化学 [AH]。此外，关于对称族的抽象性质也有大量研究[KLS, LNNR1, LNNR2, NR1, NR2, NS1, NS2, NS3]；我们特别指出，[NS2]对簇的对称族进行了分类。这绝非完整的参考文献目录；更多详情请参阅综述 [JKVLR] 和 [Dra1] 。

日期：2023年4月7日。RL 得到了美国国家科学基金会资助的 DMS-2001992 项目的支持。[1]在这些参考文献中的许多文献里，使用了对称族的一个稍微更一般的版本；参见 §2.6(c)。

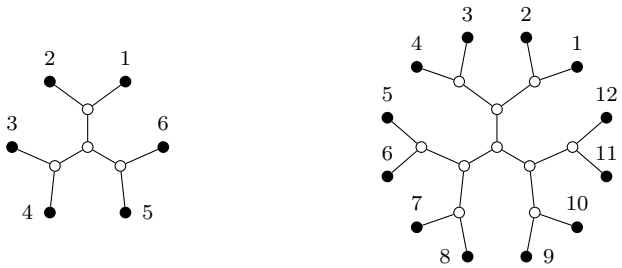

FIGURE 1. 两棵硼树。硼原子用白色表示，氢原子用黑色表示。

对称理想链由对每个非负整数 n 的 $\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ 的理想 I_n 组成，其中 I_n 是 $\mathfrak{S}_n$-稳定的，且 $I_n \subset I_{n+1}$。如果 $Z_\bullet$ 是一个对称簇族，那么 $\{I(Z_n)\}_{n\geq 0}$ 是一个对称理想链。Cohen [Coh1] 在这一背景下证明了以下基础性结果[2]：如果 $I_\bullet$ 是一个对称理想链，那么存在一个非负整数 m 和一个有限的多项式集合 f_1、…、$f_r \in \mathbf{C}[x_1,\dots,x_m]$，使得 I_n 对于所有 $n \geq m$ 都由 $\mathfrak{S}_n$-轨道 f_1、…、f_r 生成。这一有限性性质构成了上一段所述全部工作的基础。

对称理想链理论源于交换代数与有限集组合学的结合。本文将交换代数与更复杂的组合结构结合起来。我们的主定理是 Cohen 的结果在这些更一般情形下的类比。

例 1.1. 固定 $r \geq 1$。定义 $I_n \subset \mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ 为由所有 $r+1$ 元子集的判别式生成的理想。等价地，对于 $n \geq r+1$，I_n 是由 $\mathfrak{S}_n$-轨道生成的理想

$$\Delta(x_1,\dots,x_{r+1}) = \prod_{1\leq i<j\leq r+1} (x_i - x_j),$$

以及 $I_n = 0$（当 $n \leq r$ 时，按惯例）。令 $Z_n = V(I_n)$ 为相应的簇。那么 $I_\bullet$ 是一条对称理想链，而 $Z_\bullet$ 是一个对称簇族。

簇 Z_n 由所有包含至多 r 个不同值的复数元组 $(a_1, \dots, a_n)$ 构成。换言之，$\mathbf{C}^n$ 中的一个点属于 Z_n，当且仅当我们任取 $r+1$ 个不同的坐标时，至少有两个坐标相等。从几何上看，Z_n 是一个子空间配置：它是 $\mathbf{C}^n$ 中维数为 r 的线性子空间的并。特别地，我们看到 Z_n 的 Krull 维数不会随 n 增加，这或许是可能存在类似 Cohen 这样的有限性结果的第一个迹象。□

1.2. 硼树。在对称簇族中，无论何时抽取 m 个点的坐标，结果都属于 Z_n。如果限制允许抽取哪些 Z_m 元组，会发生什么？例如，我们可以只允许按顺序出现的 m 元组（见 §2.6(a)）。现在我们讨论一个更复杂的变体，并陈述这一情形下的结果。

一个 硼树 是一棵树 T，其中内部顶点（“硼原子”）的度为三。参见图 1.2 以查看示意图。我们用 T_H 表示叶节点集合（“氢

[2]事实上，Cohen 用一种略有不同的表述方式给出了他的结果；参见 §1.4。此处给出的表述似乎归功于 [NR1]。

原子”）。任意子集上都诱导出一种硼树结构 T_H，并且硼树有一种嵌入的概念；详情请参见§4 。

给定一棵硼树 T，令 R_T 为多项式环 $\mathbf{C}[x_i]_{i\in T_H}$，其变量对应于氢原子。若 $\phi\colon T\to T'$ 是硼树的一个嵌入，则有一个诱导映射 $\phi_*\colon R_T\to R_{T'}$，由 $\phi_*(x_i)=x_{\phi(i)}$ 给出。我们将硼链定义为一条规则，它为每棵硼树 T 指定 R_T 中的一个理想 I_T，并且对于任意嵌入 $\phi\colon I_T\to I_{T'}$，都有 $\phi_*(I_T)\subset I_{T'}$。这是对称链的类比，只不过有限集的组合学被硼树的组合学所取代。

在这一特定情形下，我们的主定理给出如下结果：

定理 1.2。设 $I_\bullet$ 是一条硼链。那么存在有限多个硼树 $T_1,\dots,T_r$ 和多项式 $f_i\in R_{T_i}$，使得对于任意硼树 T，理想 I_T 都由元素 $\phi_*(f_i)$ 生成，其中 i 遍历 $\{1,\dots,r\}$，而 ϕ 遍历嵌入 $T_i\to T$。

Boric 链比对称链复杂得多。下面的例子对此有所说明。

例 1.3。设 T_0 是图 1.2 中的硼树，有六个叶节点，并设 $\delta\in R_{T_0}$ 是关于六个变量的判别式。对于硼树 T，设 I_T 为由元素 R_T 生成的 $\phi_*(\delta)$，其中 ϕ 遍历所有嵌入 $T_0\to T$。则 $I_\bullet$ 是一个硼链。

考虑树 T，见图 1.2，它有十二个叶节点。由其诱导的硼树$\{1,3,7,8,9,12\}$ 同构于 T_0，因此 I_T包含判别式

$$\Delta(x_1,x_3,x_7,x_8,x_9,x_{12}).$$

$\{1,2,3,5,7,8\}$ 上诱导的硼树与 T_0不同构。因此，I_T 不一定包含判别式

$$\Delta(x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8).$$

事实上，并非如此：关键在于，六个变量上的判别式在 R_T 中线性无关，因为它们的首项各不相同（若 $i_1<\cdots<i_6$，则 $\Delta(x_{i_1},\dots,x_{i_6})$ 的首项为 $x_{i_1}^5x_{i_2}^4\cdots x_{i_6}^0$）。

现在设 T 为任意一棵硼树，令 $n=\#T_H$，并令 $Z_T\subset\mathbf{C}^n$ 为理想 I_T的零点集。可以如下描述：点 $\mathbf{C}^n$ 属于 Z_T，当且仅当我们抽取六个处于“相对位置 T_0”的互异坐标时，其中至少有两个相等。从几何上看，Z_T 是$\mathbf{C}^n$中的一个子空间配置，正如例 1.1 中那样。不过，这个子空间配置的组合结构比对称情形更为复杂。我们还注意到，存在无穷多棵硼树 T，无法嵌入到 T_0 中，因此 $I_T=0$。特别地，Z_T 的 Krull 维数随着 T 的变化而无界。□

除定理 1.2 外，我们没有证明任何关于硼链的结果。然而，还有许多引人入胜的方向值得探索：例如，可以研究硼链的射影维数、正则性或希尔伯特级数，正如论文 [KLS、LNNR1、LNNR2、NR1 和 NR2]在对称情形中所做的那样；或者可以尝试对硼链进行分类，正如论文[NS2 和 NS3] 在对称情形中所做的那样。定理 1.2 几乎肯定是进一步研究硼链的先决条件。

1.3.理想系统。现在我们描述一般性结果。固定一个域 k。令 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，并配备一个忠实保守函子 $|\cdot|\colon\mathcal{C}\to\mathbf{FI}$，其中 FI 是有限集及单射所构成的范畴。因此，我们可以将 A 中的一个对象视为具有底层集合 $|A|$。对于 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 A，我们令 R_A 为多项式环 $k[x_i]_{i\in|A|}$。给定一个态射 $\phi\colon A\to B$

在 $\mathcal{C}$ 中，存在一个诱导的环同态 $\phi_*\colon R_A \to R_B$ 由 $\phi_*(x_i) = x_{\phi(i)}$。我们将 R 的理想系统定义为一条规则，为每个对象 A 指定 R_A 的一个理想 I_A，使得对于任意态射 $\phi\colon A \to B$，都有 $\phi_*(I_A) = I_B$。如果 R 上的理想系统满足升链条件，我们就称其为诺特的。

以下是我们主定理的一个弱版本：

定理 1.4. 假设以下两个条件成立：

(a) 范畴 $\mathcal{C}$ 是可赋序的，即可以为每个有限集 $|A|$ 赋予一个全序，使得对于每个态射 $\phi\colon A \to B$ 函数 $|\phi|$ 都是保序的。(b) 偏序集 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 由 $\mathcal{C}$ 中加权对象的同构类构成，是一个良拟序（定义见 §2.2）。

则 R 是诺特。

上述定理的要点在于，其假设纯粹是组合的，而结论是代数的。

我们称 $\mathcal{C}$ 为G-范畴，如果它满足定理中的条件 (a) 和 (b)。我们还定义了一类更广泛的范畴，即QG-范畴，在这类范畴中，我们只要求辅助范畴是可赋序的。我们的主定理指出，只要 $\mathcal{C}$ 是 QG-范畴，R 就是诺特的。这是一项重要的改进，因为许多我们感兴趣的范畴是 QG-范畴，却不是 G-范畴；例如，G-范畴不可能具有非平凡自同构。该定理及其证明受到[SS2]的方法启发。

我们证明，有限集及单射构成的范畴**FI** 是 QG-范畴；由此可得 Cohen 定理。我们还证明，硼树范畴是 QG-范畴；这推出定理1.2。此外，我们还给出一些其他例子。

1.4. 等变理想。设 $I_\bullet$ 是一个对称理想链。那么 $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$是无限变量多项式环 $S = k[x_1, x_2, \ldots]$ 中的一个理想，它在无限对称群 $\mathfrak{S}$的作用下保持不变。Cohen 定理表明，I （或 S的任意 $\mathfrak{S}$-稳定理想）由有限多个元素的 $\mathfrak{S}$-轨道生成。换言之，环 S是所谓的 $\mathfrak{S}$-诺特环。事实上，这正是 Cohen 最初对其定理的表述。

在某些情况下，我们的结果可以用类似的方式重新表述。我们以硼树的情形为例。硼树这一类具有所谓的 Fra¨ıss´e 极限（见 §3.4）：这是一个可数无限的硼树 T，它具有极高的对称性，并且每一棵有限硼树都能嵌入其中。令 Γ 为 T的自同构群，并令$\Omega = T_H$ 为氢原子的集合。利用定理 1.2，我们证明多项式环 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$ 是Γ诺特的。

更一般地，只要 $\mathcal{C}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类（或与之关联的范畴），就可以推广到无限置换群。许多有趣的情形都符合这一条件（例如硼树），不过也有许多情形不符合（例如 §2.7 中讨论的排列类）。由 Fra¨ıss´e 极限产生的无限置换群称为寡形群，并且与模型论密切相关；一般背景见 [Cam1]。

1.5。相关工作。本文与多个研究方向相关 h.

- 当然，本文最直接的先行研究是 Cohen 的工作[Coh1，Coh2]；我们已经讨论过大量相关论文。
- 格¨布纳理论方法改编自 [SS2]。

- 我们受到近期将这些群应用于表示论的启发，开始研究多项式环上的寡态群作用 [HaSn1， HaSn2， HaSn3，Nek]。
- 我们研究无限多项式环上的置换群作用。线性群的作用，尤其是 $\mathbf{GL}_\infty$ 在无限变量多项式环上的作用，近年来也受到广泛关注；例如参见 [BDES、Dra2、NSS、SS1、SS3]。
- 由树的顶点索引的变量构成的多项式环在代数统计学中经常出现；例如参见 [AD、GMN、SA]。我们目前没有这项工作的具体应用，但鉴于 Cohen 的原始定理在这一领域取得的成功，这项工作似乎可能具有相关性。

1.6. 概述。 在 §2中，我们研究有限变量多项式环中的理想系统。在 §3中，我们研究无限变量多项式环中的等变理想。在 §4 中，我们详细考察硼树，这是激发本研究的示例之一。

致谢。感谢 Jan Draisma 的有益讨论。

2. Systems of ideals

2.1. 基本对象。以下定义引入了将组织我们的多项式环系统的范畴。我们回顾一下，如果函子 Φ 具有同构反映性，则称其为保守的；也就是说，如果 f 是源范畴中的一个态射，且 $\Phi(f)$ 是一个同构，那么 f 就是一个同构。

定义2.1.FI-具体范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$，其配备了一个忠实且保守的函子 $|\cdot|\colon \mathcal{C} \to \mathbf{FI}$。如果 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$是这样的范畴，则具体函子 $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个配备了自然同构 $|A| \to |\Phi(A)|$的函子。□

设 $\mathcal{C}$ 是一个FI-具体范畴。对于 $\mathcal{C}$的对象 A，令 $R_A = k[x_i]_{i\in|A|}$ 为域 k 上以有限集 $|A|$索引的变量构成的多项式环。如果 $\phi\colon A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，则存在一个诱导的 k-代数同态 $\phi_*\colon R_A \to R_B$，其定义为$\phi_*(x_i) = x_{\phi(i)}$。因此， R 定义了一个从 $\mathcal{C}$ 到 k-代数的函子。当需要指出对 $\mathcal{C}$的依赖关系时，我们用 $R(\mathcal{C})$代替 R。

R 中的理想系统是一条规则，它为 $\mathcal{C}$ 的每个对象 A 指定环R_A 中的一个理想 I_A，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的任意映射 $\phi\colon A \to B$，都有 $\phi_*(I_A) \subset I_B$。若 I 和 J 是两个理想系统，我们记 $I \subset J$，表示对于 $\mathcal{C}$的所有对象 A，都有 $I_A \subset J_A$。如果 R 的理想系统满足升链条件，我们就称 R 是诺特的。

注 2.2. 设（$\mathcal{C}$， $|\cdot|$）是一个 FI-具体范畴。固定 $m \geq 1$，并令 $[m] = \{1, \dots, m\}$。对于 $\mathcal{C}$的一个对象 A，令 $|A|_m = |A| \times [m]$。那么（$\mathcal{C}$， $|\cdot|_m$）也是一个 FI-具体范畴。令 $R^m = R$（$\mathcal{C}$， $|\cdot|_m$）；明确地说，$R^m_A = k[x_{i,j}]_{i\in|A|,\ j\in[m]}$。因此，只需调整函子 $|\cdot|$，我们的设定便能容纳多个变量集。□

2.2. 单项式。设 $\mathcal{C}$ 是一个 FI-具体范畴。对象 A 的权重是一个函数 $\alpha\colon |A| \to \mathbf{N}$。这类权重对应于环 R_A 中的单项式。 $\mathcal{C}$ 的加权对象是一个二元组 (A, α)，由 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 及其上的权重 α 组成。加权对象 $(A, \alpha) \to (B, \beta)$ 之间的态射是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\phi\colon A \to B$，满足对所有 $x \in |A|$ 都有 $\alpha(x) \leq \beta(\phi(x))$。由此，我们得到一个由加权对象构成的范畴 $\mathcal{C}^*$。注意， $\phi\colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$ 是同构，当且仅当 $\phi\colon A \to B$ 是同构且 $\alpha = \phi^*(\beta)$。

设 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}^*$ 中同构类的集合。我们将 (A,α) 的同构类记为 $[A,\alpha]$。在 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 上定义偏序：若 $\mathcal{C}^*$ 中存在映射 $(A,\alpha) \to (B,\beta)$，则 $[A,\alpha] \leq [B,\beta]$。不难验证这确实是一个偏序；我们注意到，该偏序的反对称性依赖于函子 $|\cdot|$ 是保守的。

设 I 是 R 的一个理想系统。如果对于所有对象 A，I_A 都是 R_A 的单项式理想，我们就称 I 为单项式理想系统。对于加权对象 (A,α)，我们令 m_α 为环 R_A 中的单项式 $\prod_{i\in|A|} x_i^{\alpha(i)}$。我们将 $\Phi(I) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$ 定义为满足单项式 m_α 属于 I_A 的元素$[A,\alpha]$ 的集合。

命题 2.3。构造 Φ 定义了偏序集的一个同构

$$\{monomial\ ideal\ systems\ of\ R\} \xrightarrow{\sim} \{order\ ideals\ of\ \mathcal{M}(\mathcal{C})\}.$$

证明。设 I 是 R 的一个（任意）理想系统。我们首先验证，$\Phi(I)$ 是 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$中的一个序理想。因此，设 $[A,\alpha] \in \Phi(I)$，且有 $[A,\alpha] \leq [B,\beta]$。根据偏序的定义，存在一个态射 $\phi\colon A \to B$，它属于 $\mathcal{C}$，使得对于所有 $x \in |A|$，都有 $\alpha(x) \leq \beta(\phi(x))$。这意味着 $\phi_*(m_\alpha)$ 在环 R_B 中整除 m_β。由于 I_B 包含 $\phi_*(I_A)$，从而$\phi_*(m_\alpha)$，因此它包含 m_β。所以 $[B,\beta] \in \Phi(I)$，如要求所证。

现在假设我们给定了一个 $\mathcal{I}$ $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 的序理想。对于 A $\mathcal{C}$ 的一个对象，定义 I_A 为满足 $[A,\alpha] \in \mathcal{I}$ 的单项式 m_α 的 k-张成空间。我们声称 I 是 R 的单项式理想系统。首先，显然 I_A 是 R_A 的单项式理想：确实，如果 $m_\alpha \in I_A$ 且 m_α 整除 R_A 中的某个单项式 m_β，那么 $[A,\alpha] \leq [A,\beta]$，所以 $[A,\beta]$ 属于 $\mathcal{I}$，从而 m_β 属于 I_A。现在假设 $\phi\colon A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。我们必须证明 $\phi_*(I_A) \subset I_B$。给定 $[A,\alpha] \in \mathcal{I}$。在 B 上定义一个权重 β：如果 $i \in \mathrm{im}(|\phi|)$，则 $\beta(i)$ 为 $= \alpha(\phi^{-1}(i))$；否则 $\beta(i)$ 为 $= 0$。于是 ϕ 在 $\mathcal{C}^*$ 中定义了一个从 (A,α) 到 (B,β) 的态射 $\to$，因此 $[A,\alpha] \leq [B,\beta]$ 属于 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$。由于 $\mathcal{I}$ 是一个序理想，便可推出 $[B,\beta] \in \mathcal{I}$，从而 $m_\beta \in I_B$。另一方面，$m_\beta = \phi_*(m_\alpha)$。由于 I_A 由这类 m_α 张成，因此可推出 $\phi_*(I_A) \subset I_B$，这就证明了该断言。我们令 $\Psi(\mathcal{I}) = I$。

如果 I 是 R 的单项式理想系统，那么 $I = \Psi(\Phi(I))$：事实上，$\Psi(\Phi(I))_A$ 是包含于 I_A 中的单项式的 k-张成，而由于 I_A 是单项式理想，这就是 I_A。类似地，如果 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 的序理想，那么 $\mathcal{I} = \Psi(\Phi(\mathcal{I}))$。事实上，显然 $\mathcal{I} \subset \Psi(\Phi(\mathcal{I}))$。我们证明其逆向包含。设 $[A,\alpha] \in \Psi(\Phi(\mathcal{I}))$。这意味着单项式 m_α 属于理想 $\Phi(\mathcal{I})_A$。但由于 $\Phi(\mathcal{I})_A$ 由一组单项式张成，因此可知 m_α 是这组张成集中的一个单项式，从而 $[A,\alpha] \in \mathcal{I}$。

因此我们看到，Φ 和 Ψ 互为逆双射。显然二者都是保序的，因此结论成立。□

推论 2.4。假设 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序。那么 R 的单项式理想系统满足升链条件。

请记住，wqo 是良拟序（well-quasi-order）的缩写。关于这一概念的背景介绍，请参阅 [BV，§1。2]

2.3. 序。设 $\mathcal{C}$ 是一个 FI-具体范畴。$\mathcal{C}$ 上的一个序，是一条规则，它为 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 A 指定集合 $|A|$ 上的一个全序，并满足：若 $\mathcal{C}$中的态射 $\phi\colon A \to B$，则 $|A| \to |B|$：$|\phi|$是保序的。换言之，$\mathcal{C}$ 上的一个序，是函子 $|\cdot|\colon \mathcal{C} \to$ FI 经遗忘函子 OI $\to$ FI 提升而得，其中 OI 是全序有限集及单调单射构成的范畴。若 $\mathcal{C}$具有一个序，则称其为可赋序的。

在 $\mathcal{C}$ 上固定一个序。因此，对于 $\mathcal{C}$ 的对象 A，我们在 R_A 中的变量上得到一个全序，它诱导出 R_A 上的单项式序（字典序）。对于元素 $f \in R_A$

我们将 in(f) 记为它的首项；对于理想 $I \subset R_A$，我们将 in(I) 记为它的初始理想。对于 R 上的理想系统 I，我们将 in(I) 定义为这样一条规则：将对象 A 映射到其 R_A 的理想 in(I_A)。

命题 2.5。如果 I 是 R 的理想系统，那么 in(I) 是 R 的单项式理想系统。

证明。根据定义，in(I_A)是一个单项式理想。令 ϕ: $A \to B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，并令 $m \in$in(I_A) 是一个单项式。那么 $m =$in(f)对某个 $f \in I_A$成立。由于 $|\phi|$: $|A| \to |B|$是保序的，映射 ϕ_* 与初始项的构造可交换，因此 $\phi_*(m) =$in($\phi_*(f)$)。由于 $\phi_*(f)$ 属于 I_B，可得 $\phi_*(m)$ 属于 in(I_B)。因此我们看到 ϕ_*(in(I_A)) $\subset$ in(I_B)，这就完成了证明。□

命题 2.6。设 $I \subset J$ 是 R 的理想系统，使得 in(I) $=$in(J)。那么 $I = J$。

证明。这是通常的 Gr¨obner 引理。 □

2.4.转移诺特性。下一个命题展示了我们有时如何在不同范畴之间转移诺特性结果。

命题 2.7. 设 Φ: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是 FI-具体范畴之间的一个本质满具体函子。如果 $R(\mathcal{D})$ 是诺特的，那么 $R(\mathcal{C})$ 也是诺特的。

证明。设 $R = R(\mathcal{D})$ 和 $R' = R(\mathcal{C})$，并令 I' 为 R'的一个理想系统。若 A 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，则有自然同构 $|A| = |\Phi(A)|$（因为 Φ 是一个具体函子），因此有自然的识别 $R_A = R'_{\Phi(A)}$。我们将 I_A 定义为与 $I'_{\Phi(A)} \subset R'_{\Phi(A)}$对应的 R_A 的理想。若 ϕ: $A \to B$是 $\mathcal{D}$ 中的一个态射，则 ϕ_*: $R_A \to R_B$可识别为$\Phi(\phi)_*$: $R'_{\Phi(A)} \to R'_{\Phi(B)}$。由于 I' 在后者作用下稳定，因此 I 在前者作用下稳定。故 I 是 R的一个理想系统。

现在假设 $I'_\bullet$ 是 R'中的一个递增的理想系统链。由此我们得到 R的理想系统的一个递增链 $I_\bullet$。由于 R 是诺特的，该链稳定下来，因此存在某个 n，使得 $I_n = I_m$ 对任意 $m \geq n$ 都成立。由此我们看到，$(I'_n)^{\Phi(A)} = (I'_m)^{\Phi(A)}$，对任意 $m \geq n$ 以及 $\mathcal{D}$中的任意对象 A 都成立。由于 Φ 是本质满的，便可推出 $I'_n = I'_m$，因此原链稳定下来。于是 R' 是诺特的。□

2.5.主定理。以下定义和定理给出了判定多项式环系统 R 是否为诺特的纯组合的标准。

定义 2.8。G-范畴是一个 FI-具体范畴，它是可赋序的，并且对其而言$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序。QG-范畴是一个FI-具体范畴，对它而言存在一个G-范畴$\mathcal{D}$ 和一个具体函子 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，后者是本质满的。□

定理2.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个QG-范畴。那么 R 是诺特的。

证明。 首先，假设 $\mathcal{C}$ 是一个G-范畴，并在 $\mathcal{C}$上固定一个序。令 $I_\bullet$ 是 R中的一个递增理想系统链。则 in($I_\bullet$) 是R 中的一个递增单项式理想系统链（命题 2.5），因此该链稳定（推论2.4）。所以原链稳定（命题 2.6），因此 R 是诺特的。

现在我们处理一般情形。设 $\mathcal{D}$ 是一个 G-范畴，并设 Φ: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个本质满的具体函子。根据上一段， $R(\mathcal{D})$ 是诺特的。因此，$R(\mathcal{C})$ 是诺特的（命题2.7），证明完毕。□

注 2.10。G-范畴和 QG-范畴这一术语让人联想到 ¨Gr¨obner 及 quasi-Gr [SS2], 中的 obner 术语，尽管定义有所不同。例如，考虑范畴 **BOI** (“块 OI”)，其对象是有限全序集，态射是块嵌入。也就是说，对于 $n \le m$，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{BOI}}([n], [m]) = \{\phi_0, \dots, \phi_{m-n}\}$，其中 $\phi_i(j) = j + i$。可以证明，按 ¨的意义，这是一个 Gr [SS2], obner 范畴，但不是 G-范畴（甚至也不是 QG-范畴）。□

备注 2.11。设 $\mathcal{C}$ 是一个 FI-具体范畴，并且 $R = R(\mathcal{C})$。一个 R-模系统是一种规则，它为 $\mathcal{C}$ 的每个对象 A 指定一个 R_A- 模 M_A，并为 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $\phi\colon A \to B$ 指定一个加法映射 $\phi_*\colon M_A \to M_B$，满足 $\phi_*(am) = \phi_*(a)\phi_*(m)$，其中 $a \in R_A$ 和$m \in M_A$。对于 R-模系统，也有有限生成性和诺特性的概念。将本文的方法与[SS2], 中的方法结合，可以给出一个组合的判据，确保所有有限生成的 R-模系统都是诺特的。在 $\mathcal{C} = \mathrm{FI}$ 的情形下，$R(\mathcal{C})$-模系统已在 [NR2] 中得到研究。□

2.6. 例子。 我们在此给出定理 2.9 的几个简单例子。

(a) 令 $\mathcal{C} = \mathrm{OI}$，并令 $|\cdot|$ 为恒等函子。这是一个具有自然序的 FI-具体范畴。集合 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 由字母表 N 上的所有词组成，并赋予 Higman 序；具体而言，$n_1 \cdots n_r \le m_1 \cdots m_s$ 当且仅当存在一个单射$\phi\colon [r] \to [s]$，使得对所有 $i \in [r]$，都有 $n_i \le m_{\phi(i)}$。根据 Higman 引理，集合 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序。因此，$\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴，从而 R 是诺特的。(b) 更一般地，我们可以考虑配备了备注 2.2 中函子 $|\cdot|_m$ 的 $\mathcal{C} = \mathrm{OI}$。此处，$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 由字母表 $\mathbf{N}^m$上的所有词组成。由于 $\mathbf{N}^m$ 是良拟序（由 Dickson 引理可知），Higman 引理再次表明 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序。因此，$\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴，从而 R 是诺特的。(c) 令 $\mathcal{C} = \mathrm{FI}$，并赋予其自然的 FI-具体结构。这个范畴不可赋序。不过，令 $\mathcal{D} = \mathrm{OI}$，则存在一个具体函子 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，即遗忘函子。因此，$\mathcal{C}$ 是一个 QG-范畴，从而 R 是诺特的。这就得到了 Cohen 的原始定理 [Coh1], ，其表述见于 [NR2]。使用 $|\cdot|_m$也有一个类似的例子，它得到了 Cohen 在 [Coh2]中的更一般定理。

2.7. 另一个例子。 现在给出一个更为实质性的例子。一个置换是一个带有两个全序的有限集，而置换的嵌入是一个关于这两个全序都保持单调性的有限集注入。一个排列类是一个类 $\mathfrak{C}$，满足：每当 X 属于 $\mathfrak{C}$时，任何嵌入到 X 中的置换也属于 $\mathfrak{C}$。参见[BV，§1。1] 以了解更多背景。

设 $\mathfrak{C}$ 为一个排列类。定义 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，其对象是 $\mathfrak{C}$ 的成员，态射为嵌入。对于一个排列 X，令 $|X|$ 为其底层集合；由此赋予 $\mathcal{C}$ 一个 FI-具体结构。范畴 $\mathcal{C}$ 显然可赋序：只需使用排列上的第一个全序。因此，如果 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序，那么 $\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴，并且环 $R(\mathcal{C})$ 是诺特的。

在 [BV，§1.8], 带标号的良拟序（lwqo）概念是在排列类的背景下讨论的。由定义可知，如果 $\mathfrak{C}$ 是良拟序，则 $\mathcal{M}$（$\mathcal{C}$）是良拟序。因此，[BV] 的理论提供了许多排列类的例子，对于这些排列类，R（$\mathcal{C}$）是诺特的。例如，当 $\mathfrak{C}$ 是可分排列类时，情况便是如此；参见 [BV，推论 7。6]以及其后的讨论 [BV，推论 7。7]。

3. Equivariant ideals

3.1. 主定理。设 Γ 是一个定义域为 Ω 的置换群。设 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$是配备了 Γ 作用的多项式环。S 的 Γ-理想是一个在 Γ作用下稳定的理想。若升链条件对 Γ-理想成立，则称 S 是 Γ-诺特的。

如下定义范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Gamma, \Omega)$。其对象是 Ω 的有限子集。态射$A \to B$ 是一个函数 ϕ: $A \to B$，满足存在 $g \in \Gamma$ 使得 $\phi(x) = gx$ 对所有$x \in A$成立。遗忘函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{FI}$ 使 $\mathcal{C}$ 成为 FI-具体范畴。令 $R = R(\mathcal{C})$ 为与 $\mathcal{C}$相关联的多项式环系统。

定理3.1. 若 R 是诺特的，则 S 是 Γ-诺特的。

证明。令 J 为 S的一个 Γ-理想。对于 Ω 的有限子集 A，令 I_A 为 J 到$R_A \subset S$的收缩。于是 I 是 R中的理想系统。此外，$J = \bigcup_A I_A$，因此可以由 I恢复 J。由此可知，函数

$$\{\Gamma\text{-ideals of } S\} \to \{\text{ideal systems of } R\}$$

是单射。它显然也是保序的。由于上述目标满足升链条件，源也满足升链条件。□

直接从（Γ, Ω）可以不难看出 $\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴。令 Ω^* 为所有有限支撑函数 $\Omega \to \mathbf{N}$ 的集合，并令 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Gamma, \Omega)$ 为 Ω^* 上的 Γ-轨道集合。对于$\alpha \in \Omega^*$，我们用 $[\alpha]$ 表示它在 $\mathcal{M}$ 中的等价类。我们在 $\mathcal{M}$ 上定义偏序：若存在 $g \in \Gamma$，使得对所有 $x \in \Omega$ 都有 $\alpha(x) \le \beta(gx)$，则 $[\alpha] \le [\beta]$。

命题 3.2. 假设 $\mathcal{M}(\Gamma, \Omega)$ 是良拟序，且 Γ 保持 Ω 上的一个全序。那么 $\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴，并且 S 是 Γ-诺特的

证明。容易看出 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 同构于 $\mathcal{M}(\Gamma,\Omega)$，因此 $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ 是良拟序。固定 Ω 上一个由 $<$ 保持的序 Γ。它在 Ω 的每个有限子集上诱导出一个序，进而在 $\mathcal{C}$上诱导出一个序。因此 $\mathcal{C}$ 是一个 G-范畴。定理 2.9 于是推出 R 是诺特的，因此根据定理 S 是 Γ-诺特的，定理 3.1亦如此。□

3.2. 例子。下面给出定理 3.1的几个简单例子。

(a) 考虑作用于 $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$上的无限对称群 $\mathfrak{S}$。相应的范畴 $\mathcal{C}$ 于是等价于 FI。由 §2.6(c)，环 R 是诺特的，因此根据定理 3.1，环 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$ 是 $\mathfrak{S}$- 诺特的。这从 [Coh1], 中以原始形式重新得到 Cohen 定理。(b) 我们也可以通过考虑 $\mathfrak{S}$ 在 Ω^m 上的作用，以原始形式重新得到针对 m [Coh2] 变量集合 的 Cohen 定理。此时，$\mathcal{C}$ 是 FI-具体范畴（FI $|\cdot|_m$），其中 $|\cdot|$ 表示恒等函子 FI $\to$ FI。环 R 仍然是诺特的，因此 $S = k[x_{i,j}]_{i\in\Omega, j\in[m]}$ 是 $\mathfrak{S}$-诺特的。(c) 令 $\Omega = \mathbf{Q}$ 为有理数集合，并令 Γ 为 $\Omega \to \Omega$ 上保序双射构成的群。容易看出，此时 $\mathcal{C}$ 等价于 OI。因此，由 §2.6(a)，R 是诺特的，进而根据定理3.1，$S = k[x_i]_{i\in\mathbf{Q}}$ 是 Γ-诺特的。由 Cohen 定理直接推出这一结果并不困难，但据我们所知，此前尚未有人指出这一情形。

3.3. 必要条件。设 (Γ, Ω) 为一个置换群。令 $\mathcal{M}^\circ = \mathcal{M}^\circ(\Gamma, \Omega)$ 为 Ω 的有限子集的 Γ-轨道集合。我们在 $\mathcal{M}^\circ$ 上定义偏序：若对某个 $g \in \Gamma$ 有 $A \subset gB$，则 $[A] \leq [B]$。注意，$\mathcal{M}^\circ$ 是 $\mathcal{M}$ 的子集，由满足函数$\alpha \in \Omega^*$ 取值于 $\{0,1\}$的类 $[\alpha]$ 组成。

令 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$，如常。我们称 S 为 拓扑 Γ-诺特的，如果根 Γ-稳定理想满足升链条件；等价地， Γ-稳定的 $\operatorname{Spec}(S)$ 的闭子集满足降链条件。如果 S 是Γ-诺特的，那么显然它也是拓扑 Γ-诺特的。反之一般不成立（参见 [Dra1命题 3 之前关于 Krasilnikov 例子的讨论5]）。

命题 3.3。假设 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$ 是拓扑 Γ-诺特的。那么 $\mathcal{M}^\circ$ 是良拟序。

证明。仿照命题 2.3的证明，可以证明存在一个偏序集同构

$$\{\Gamma\text{-stable squarefree monomial ideals of } S\} \xrightarrow{\sim} \{\text{order ideals of } \mathcal{M}^\circ\}.$$

这里，无平方单项式理想是由无平方单项式生成的理想。容易看出，无平方单项式理想是根理想。由于 S 是拓扑 Γ-诺特的，因此上面的左侧满足升链条件。因此右侧也满足升链条件。□

上文出现的 $\mathcal{M}^\circ$ 的有限性条件意味着寡轨条件：

命题 3.4. 假设 $\mathcal{M}^\circ$ 是良拟序。那么 Γ 是寡轨置换群，也就是说，对于所有 n， Γ 在 Ω^n 上只有有限多个轨道。

证明. 假设 Γ 不是寡轨的。令 $\Omega^{(n)}$ 表示 Ω 的 n 元子集组成的集合。容易看出，当 n 足够大时， Γ 在 $\Omega^{(n)}$ 上有无限多个轨道。设 A_1、A_2、.....是属于不同轨道的 n 元子集。于是对于所有 $i \neq j$， $[A_i]$ 和 $[A_j]$ 在 $\mathcal{M}^\circ$ 中不可比较。事实上，若 $[A_i] \leq [A_j]$，则对于某个 $g \in \Gamma$，有 $gA_i \subset A_j$，从而 $gA_i = A_j$，因为 A_i 和 A_j 的基数相同；这与 A_i 和 A_j 属于不同轨道矛盾。因此我们看到， $[A_i]$'s 在 $\mathcal{M}^\circ$ 中构成一个无限反链，所以 $\mathcal{M}^\circ$ 不是良拟序。□

上述命题给出了 S 为 Γ-诺特，甚至在拓扑意义上 Γ-诺特的必要条件： Γ 的作用必须是寡轨的，且 $\mathcal{M}^\circ$ 必须是良拟序。寡轨性条件已得到广泛研究，尤其是与模型论的联系（参见[Cam1、Mac]）；关于 $\mathcal{M}^\circ$ 的良拟序条件也已有研究（参见 [OP]）。在§2的背景下，也可以证明类似的必要性结果。下面给出一些相关示例和进一步的评论。

例 3.5. 考虑作用在 $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ 上的无限对称群 $\mathfrak{S}$。 $\mathfrak{S}$ 在 $\Omega \times \Omega$ 上的作用是寡轨的。然而， $\mathcal{M}^\circ = \mathcal{M}^\circ(\mathfrak{S}, \Omega \times \Omega)$ 不是良拟序。事实上，定义

$$A_n = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)\}.$$

这是一个 n-元子集 $\Omega \times \Omega$，因此定义了一个类 $[A_n]$ 中的 $\mathcal{M}^\circ$。容易看出，这些元素构成一个反链，因此 $\mathcal{M}^\circ$ 不是良拟序。因此，根据命题 3.3，我们看到 $S = k[x_{i,j}]_{i,\ j\geq 1}$ 在拓扑意义下不是 $\mathfrak{S}$-诺特的。这是众所周知的；例如，参见[Dra1，例 2。4]。□

例 3.6. 设 $\mathbf{F}$ 是一个有限域，$\Gamma = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ 是无限一般线性群，且 $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{F}^n$。如上所述， Γ 在 Ω 上的作用是寡轨的，但 $\mathcal{M}^\circ = \mathcal{M}^\circ(\Gamma, \Omega)$ 不是良拟序。事实上，令

$$A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_1 + \cdots + e_n\},$$

其中 $\{e_i\}$ 是 Ω 的标准基。于是 A_n 是 Ω 的一个 $n+1$ 元子集，它线性相关，但其所有真子集都线性无关。因此$[A_n]$ 是 $\mathcal{M}^\circ$中的反链，所以 $\mathcal{M}^\circ$ 不是良拟序。由命题 3.3可知，$S = k[x_v]_{v\in\Omega}$ 不是拓扑 $\mathfrak{S}$-诺特的。感谢 Jan Draisma 向我们解释这个例子。□

注 3.7.设(Γ, Ω)是一个寡轨的群。对于一个非负整数 n，令 $\phi(n)$表示 Γ在 $\Omega^{(n)}$ Ω的 n 元子集集合上的轨道数。函数 ϕ: N → N 称为 (Γ, Ω) 的轮廓。在[OP, §6.1] 中提出了以下问题：如果 $\mathcal{M}^\circ$ 是良拟序，那么是否必然存在某个正数 c，使得 $\phi(n) \le c^n$ ？据我们所知，这个问题仍未解决。肯定的回答将意味着，只有当ϕ 具有指数增长时， S 才可能是 Γ-诺特的。我们注意到，前两个例子中的轮廓函数都具有超指数增长。□

问题 3.8.如果 $\mathcal{M}$ 是良拟序，那么当然 $\mathcal{M}^\circ$也是良拟序，因为后者是前者的子集。反之是否成立？我们不知道有任何反例。

3.4. **Fra¨ıss´e 理论。** 我们已经看到， S 只有在 Γ是诺特时 Γ 才成立，而 Γ 是一个寡形置换群。现在我们回顾构造这类群的主要方法，然后给出一些例子。更多背景信息请参阅[Cam1] 。

签名 Σ 是一个字母表 $\{R_i\}_{i\in I}$，其中每个 R_i 都对应一个正整数 n_i，称为它的元数。结构是一个集合 X，它配备了对每个 $i \in I$ 定义在 X 上的一个 n_i 元关系 R_i （即 X^{n_i} 的一个子集）。结构有自然的嵌入和同构概念。我们通常关注某个固定签名下的结构类；例如，如果签名只包含一个二元关系，我们可以考虑偏序集、等价关系、图等。

固定 Σ，设 $\mathfrak{C}$ 为有限结构的一个类。若 $\mathfrak{C}$ 满足以下条件，我们称其为 Fra¨ıss´e 类：

- $\mathfrak{C}$ 非空且具有可数基数。
- 如果 X 属于 $\mathfrak{C}$ 且 Y 嵌入到 X 中，那么 Y 属于 $\mathfrak{C}$。
- 设我们有 $\mathfrak{C}$中结构的嵌入 i_1: $Y \to X_1$和 i_2: $Y \to X_2$。那么存在一个 $\mathfrak{C}$中的结构 Z，带有嵌入 j_1: $X_1 \to Z$和 j_2: $X_2 \to Z$，使得 $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$且 $Z = \mathrm{im}(j_1) \cup \mathrm{im}(j_2)$。

第三个条件称为 $\mathfrak{C}$的amalgamation 性质，而 Z 称为 X_1 和 X_2 在 Y上的 amalgamation。注意，第二个条件意味着空结构 $\emptyset$ 属于 $\mathfrak{C}$。如果 X_1 和 X_2 是 $\mathfrak{C}$ 中的任意结构，那么取 $Y = \emptyset$为amalgamation 性质中的结构，我们发现存在一个 $\mathfrak{C}$ 中的结构 Z，X_1和 X_2 都嵌入其中。这称为联合嵌入性质，有时会将其与amalgamation 性质分开表述。

如果对于有限结构 X 到 Ω 的任意两个嵌入 i 和 j，都存在 Ω 的一个自同构 σ，使得 $j = \sigma \circ i$，则称结构 Ω 为齐次结构。Fra¨ıss´e 证明，如果 $\mathfrak{C}$是一个 Fra¨ıss´e 类，那么存在一个可数齐次结构 Ω，使得 $\mathfrak{C}$恰好是 Ω 的年龄，也就是说，是所有可嵌入 Ω 的有限结构所组成的类。这样的 Ω 称为 Ω 的 Fra¨ıss´e 极限，并且在同构意义下唯一。令 $\Gamma = \mathrm{Aut}(\Omega)$。根据齐次性， Γ 在 $\Omega^{(n)}$ 的 n 元子集上的轨道，与 $\mathfrak{C}$ 中 n 元结构的同构类一一对应。因此，如果这样的结构只有有限多个（当签名 Σ 有限时，这一点必然成立），那么 Γ 在 Ω 上的作用就是寡轨的。由此，Fra¨ıss´e 极限是构造寡形群的主要方式。

注意，我们在 $\mathcal{C}$ 中与 (Γ,Ω) 相关联的范畴 §3.1 等价于这样一个范畴：其对象是 $\mathfrak{C}$中的结构，态射是结构的嵌入。偏序集 $\mathcal{M}^\circ$ 可识别为 $\mathfrak{C}$中的同构类集合，并按可嵌入性排序。

例 3.9。令 $\mathfrak{C}$ 为所有有限简单图构成的类；这里的签名由一个二元关系组成，用于记录两个顶点之间是否存在边。这是一个 Fra¨ıss´e 类。极限 R 是著名的 Rado图或随机图。其自同构群 Γ 在顶点集 $V(R)$ 或 R 上寡轨地作用。偏序集 $\mathcal{M}^\circ$ 不是良拟序：通过考虑 $n \geq 1$ 的 n-圈，可以得到一个反链。因此， $S = k[x_i]_{i\in V(R)}$ 不是 Γ-诺特的，甚至不是拓扑 G-诺特的。□

例 3.10。固定一个正整数 c。令 $\mathfrak{C}$ 为带有 c-着色的有限全序集类；这里的签名包含一个用于记录序的二元关系，以及 c 个用于记录着色的一元关系。这是一个 Fra¨ıss´e 类。其极限可以描述为带有一个 c-着色 σ的全序集 $\mathbf{Q}$：$\mathbf{Q} \to [c]$ ，使得每种颜色都是稠密的；Fra¨ıss´e 极限的唯一性表明，这样的结构与所选择的着色无关，即在同构意义下唯一。

令 Γ 为 $(\mathbf{Q}, <, \sigma)$ 的自同构群，它在 $\mathbf{Q}$上寡轨地作用。范畴 $\mathcal{C}$显然是一个 G-范畴：偏序集 $\mathcal{M}$ 是字母表$\mathbf{N} \times [c]$上的词集，按 Higman序排序。因此，根据定理 R2.9，$S = k[x_i]_{i\in\mathbf{Q}}$是诺特的；进而，根据定理 Γ3.1，是 $\mathcal{M}^\circ$ -诺特的。注意，在此情形下， $[c]$ 是有限字母表 [上的词集，并按 Higman序排序。这个寡轨群近期在[Sno]中得到研究。 □

示例 3.11。 回顾 §2.7 中讨论的排列类概念。Cameron定理 [Cam3] 指出，恰好只有五个排列类是 Fra¨ıss´é 类。因此，来自§2.7 的大多数例子都不会对应一个寡轨群。例如，可分排列类就没有与之对应的此类群。 □

4. Boron trees

一个硼树 是一个有限树，其内部顶点的度为三；见图 1.2。内部顶点称为“硼原子”，叶节点称为“氢原子”。令 T 为一棵硼树。我们通过规定，在氢原子集合 ρ 上定义一个四元关系 T_H：$\rho(w, x; y, z)$ 当连接（w, x）的测地线与连接（y, z）的测地线相交时为真。我们真正关心的是结构（T_H, ρ），尽管可以从该结构恢复这棵树。

我们令 $\mathcal{C}$ 为这样一个范畴，其对象是硼树，态射是嵌入，即保持四元关系的氢原子映射。这是一个**FI**-具体范畴，通过 $|T| = T_H$。我们令 $\mathfrak{C}$为所有有限结构（T_H, R）的集合，这些结构来自硼树。这是弗雷¨塞´类[Cam1，练习 2.6。4]。我们令 Ω为弗雷¨塞´极限，并令 Γ 为其自同构群。在此情形下，我们的主定理如下：

定理 4.1。有限多项式环的系统 $R = R(\mathcal{C})$ 是诺特的，而多项式环 $S = k[x_i]_{i\in\Omega}$ 是 Γ-诺特的。

我们通过证明4.1 如下结论来证明定理 $\mathcal{C}$ 是 QG-范畴。由于硼树可能具有非平凡的自同构， $\mathcal{C}$不可能是 G-范畴。因此，我们必须引入一个辅助范畴，其中的对象具有更多结构，以消除这些自同构。

平面硼树是指嵌入单位圆中的硼树，也就是说，氢原子位于圆周上，硼原子和边位于圆内，且不存在交叉。平面硼树的氢原子具有自然的循环顺序：若沿逆时针方向从 x 移动到 z时会经过 y ，则称 y 位于 x 和 z 之间（其中 x、 y和 z 互不相同）。有序硼树是带有一个指定氢原子的平面硼树，该氢原子标记为 ∞ ，并称为根。在这样的树中，非根氢原子具有全序；若 x 位于 ∞ 和 y之间，则 $x < y$ ；此外，对所有 $x \neq \infty$，我们还定义 $x < \infty$ 。更多细节参见[Cam2, §3-4] 。

令 $\mathcal{D}$ 为一个范畴，其对象是有序硼树，态射是保持根和 T_H 上全序的硼树嵌入。通过 $|T_H| = T_H$，这是一个 FI-具体范畴。范畴 $\mathcal{D}$ 带有一个典范序。

引理 4.2. 集合 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{D})$ 是良拟序。

证明。由于树都是有限的，这显然是良基的。如果 $\mathcal{M}$ 不是良拟序，取一个关于$|T_i|$极小的树的同构类坏序列 $(T_1, \alpha_1), (T_2, \alpha_2) \ldots$。由于只有一个顶点或两个顶点的树都能嵌入到标签足够大的任意树中，因此每个 T_i 至少有三个叶节点。

因此，每个叶都连接到一个具有两个额外后代的硼原子；我们利用平面嵌入将它们称为叶的左后代和右后代。通过取 T_i 的根，以及所有到根的测地线包含根的左后代（分别为右后代）的氢原子，并采用来自 T_i的诱导硼树结构，定义$T_{i,1}$ （分别为$T_{i,2}$），并令$\alpha_{i,j} = \alpha_i|_{T_{i,j}}$。根据构造，$(T_{i,1}, \alpha_{i,1})$和$(T_{i,2}, \alpha_{i,2})$都嵌入到$(T_i, \alpha_i)$中，因此根据极小性， $\mathcal{M}$,{$(T_{i,j}, \alpha_{i,j})$的子偏序集 $| \, i \in \mathbf{N} \;\; 1 \leq j \leq 2\}$是良拟序的。

由于每棵有根平面硼树 T_i 至少有三个顶点，$T_{i,\,1}$ 和 $T_{i,\,2}$ 都非空。这意味着我们可以在坏序列中用 $((T_{i,\,1}, \alpha_{i,\,1}), (T_{i,\,2}, \alpha_{i,\,2}))$ 替换 (T_i, α_i)。根据狄克森引理，存在一条无限良链，

$$((T_{i_1,1}, \alpha_{i_1,1}), (T_{i_1,2}, \alpha_{i_1,2})) \leq ((T_{i_2,1}, \alpha_{i_2,1}), (T_{i_2,2}, \alpha_{i_2,2})) \leq \cdots$$

在逐分量序下。由于 $T_{i,\,1}$ 中的每个叶节点在我们的全序中都小于 $T_{i,\,2}$中的叶节点，因此我们得到 $(T_{i_j}, \alpha_{i_j}) \leq (T_{i_k}, \alpha_{i_k})$，这与其为坏序列矛盾。□

参见 [NW] ， 了解最小坏序列的详细信息。一个常用但未必总是明确陈述的事实是：最小坏序列的子结构所构成的子偏序集是良拟序的。这正是 [NW中定理 1], 的证明B 第一段的要旨，其中[Dra1，定理 1。2]。

定理 4.3。范畴 $\mathcal{D}$ 是一个 G-范畴。

证明。我们已经指出， $\mathcal{D}$ 是可赋序的，因此结论由引理4.2得出。 □

推论 4.4。范畴 $\mathcal{C}$ 是一个 QG-范畴。

证明。这由遗忘函子 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 证明。 □

因此我们看到 R（$\mathcal{C}$）是诺特的（定理 2.9），因此 S 是 Γ-诺特的（定理 3.1）。这就完成了定理 4.1的证明。

注 4.5。 在本文提出一般性方法之前，我们曾尝试手动证明定理 4.1 ，但彻底失败了。我们甚至无法直接证明 S在拓扑意义下是 Γ-诺特的，而这本以为会容易得多。若能找到直接的论证，将会很有意思。 □

References

[AD] Lamprini Ananiadi 和 Eliana Duarte. 分阶段树的格罗布纳基. Alg. Stat. 12 (2021), 第 1–20 页. DOI:10.2140/astat.2021.12.1 arXiv:1910.02721[AH] Matthias Aschenbrenner, Christopher J. Hillar. 对称理想的有限生成. Trans. Amer. Math. Soc., 359 (2007), 5171–5192；勘误见同刊第 361 卷 (2009)，第 5627–5627 页.DOI:10.1090/S0002-9947-07-04116-5 arXiv:math/0411514[BD] A. E. Brouwer, J. Draisma. 等变格罗布纳基与高斯双因子模型. Math. Comp. 80 (2011), no. 274, 第 1123–1133 页. DOI:10.1090/S0025-5718-2010-02415-9 arXiv:0908.1530[BDES] Arthur Bik, Jan Draisma, Rob H. Eggermont, Andrew Snowden. 多项式表示的几何. Int. Math. Res. Not. IMRN，即将出版. arXiv:2105.12621[BV] Robert Brignall, Vincent Vatter. 排列类的带标记良拟序. Comb. Theory 2 (2022), no. 3. DOI:10.5070/C62359178 arXiv:2103.08243[Cam1] Peter J. Cameron. 寡形排列群. 伦敦数学会讲义丛书，第 152 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990 年.[Cam2] Peter J. Cameron. 一些树状对象. Q. J. Math. 38 (1987), no. 38, 第 155–183 页.DOI:10.1093/qmath/38.2.155[Cam3] Peter J. Cameron. 齐次排列. Electron. J. Combin. 9 (2002), no. 3.DOI:10.37236/1674[Coh1] D. E. Cohen. 亚交换簇的定律. J. Algebra 5 (1967), 第 267–273 页.DOI:10.1016/0021-8693(67)90039-7[Coh2] D. E. Cohen. 闭包关系、布赫伯格算法以及无限多个变量的多项式. 载于《计算理论与逻辑》，Lect. Notes Comput. Sci. 第 270 卷，第 78–87 页，1987 年. DOI:10.1007/3-540-18170-9_156[Dra1] Jan Draisma. 模对称诺特性. 《组合代数几何》，Lecture Notes in Math. 2108，Springer，2014 年. DOI:10.1007/978-3-319-04870-3_2 arXiv:1310.1705v2[Dra2] Jan Draisma. 多项式函子的拓扑诺特性. J. Amer. Math. Soc. 32(3) (2019), 第 691–707 页. DOI:10.1090/jams/923 arXiv:1705.01419[DE] Jan Draisma, Rob H. Eggermont. 佐藤格拉斯曼流形的普吕克簇与高阶割线簇. J. Reine Angew. Math. 737 (2018), 第 189–215 页. DOI:10.1515/crelle-2015-0035 arXiv:1402.1667v2[DK] Jan Draisma, Jochen Kuttler. 有界秩张量可由有界次数方程定义. Duke Math. J. 163 (2014), no. 1, 第 35–63 页. DOI:10.1215/00127094-2405170 arXiv:1103.5336v2[GMN] Christiane G¨rgen, Aida Maraj, Lisa Nicklasson. 具有环面结构的分阶段树模型. J. Symbolic Comput.，即将出版. arXiv:2107.04516[HC] Christopher J. Hillar, Abraham Martin del Campo. 排列不变的劳伦特格理想链的有限性定理与算法. J. Symbolic Comput. 50 (2013), 第 314–334 页. DOI:10.1016/j.jsc.2012.06.006 arXiv:1110.0785[HaSn1] Nate Harman, Andrew Snowden. 寡形群与张量范畴. arXiv:2204.04526[HaSn2] Nate Harman, Andrew Snowden. 超齐次张量空间. arXiv:2207.09626[HaSn3] Nate Harman, Andrew Snowden. 前伽罗瓦范畴与 Fra¨ıss´e 定理. arXiv:2301.13784[HiSu] Christopher J. Hillar, Seth Sullivant. 无限维多项式环中的有限格罗布纳基及其应用. Adv. Math., 229 (2012), no. 1, 第 1–25 页. DOI:10.1016/j.aim.2011.08.009arXiv:0908.1777[JKVLR] Martina Juhnke-Kubitzke, Dinh Van Le, Tim R¨omer. 对称理想的渐近行为：简要综述. 载于：D. Stamate, T. Szemberg（编）《代数与几何中的组合结构》。Springer Proceedings in Mathematics & Statistics，第 331 卷，2018 年. DOI:10.1007/978-3-030-52111-0_7 arXiv:2009.03617[Kru] Joseph Kruskal. 良拟序理论：一个屡被发现的概念. J. Combin. Theory Ser. A 13 (1972), no. 3, 第 297–305 页. DOI:10.1016/0097-3165(72)90063-5

[KLS] Robert Krone, Anton Leykin 和 Andrew Snowden. 通过形式语言求无限多项式环中对称理想的希尔伯特级数. J. Algebra 485 (2017), 第 353–362 页.DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.05.014 arXiv:1606.07956[LNNR1] Dinh Van Le, Uwe Nagel, Hop D. Nguyen, Tim Roemer. 模对称的 Castelnuovo–Mumford 正则性. Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 14, 第 11010–11049 页. DOI:10.1093/imrn/rnz382arXiv:1806.00457[LNNR2] Dinh Van Le, Uwe Nagel, Hop D. Nguyen, Tim Roemer. 模对称的余维与射影维数. Math. Nachr. 293 (2020), 第 346–362 页. DOI:10.1002/mana.201800413 arXiv:1809.06877[Mac] Dugald Macpherson. 齐次结构综述. Discrete Math. 311 (2011), no. 15, 第 1599–1634 页. DOI:10.1016/j.disc.2011.01.024[MN] Aida Maraj, Uwe Nagel. 分层模型的等变希尔伯特级数. Algebr. Stat. 12 (2021), no. 1, 第 21–42 页. DOI:10.2140/astat.2021.12.21 arXiv:1909.13026[NW] Crispin St. J.A. Nash-Williams. 关于有限树的良拟序. Proc. Camb. Philos. Soc., 59 (1963), 第 833–835 页.[NR1] Uwe Nagel, Tim R¨omer. 非诺特多项式环中的等变希尔伯特级数. J. Algebra 486 (2017), 第 204–245 页. DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.05.011 arXiv:1510.02757[NR2] Uwe Nagel, Tim R¨omer. 系数可变的 FI-模与 OI-模. J. Algebra 535 (2019), 第 286–322 页. DOI:10.1016/j.jalgebra.2019.06.029 arXiv:1710.09247[Nek] Ilia Nekrasov. 寡形群的光滑表示. 编写中.[NS1] Rohit Nagpal, Andrew Snowden. 无限对称群的半线性表示论. arXiv:1909.08753[NS2] Rohit Nagpal, Andrew Snowden. 无限仿射空间的对称子簇. arXiv:2011.09009[NS3] Rohit Nagpal, Andrew Snowden. 无限多项式环的对称理想. arXiv:2107.13027[NSS] Rohit Nagpal, Steven V Sam, Andrew Snowden. 某些二次扭交换代数的诺特性. Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 2, 第 913–937 页. DOI:10.1007/s00029-019-0461-3arXiv:1501.06925v2[OP] Djamila Oudrar, Maurice Pouzet. 有序关系结构的轮廓与遗传类. J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. 27 (2015), no. 5–6, 第 475–500 页. arXiv:1409.1108[Ram] Eric Ramos. FI-代数理论在图构形空间中的一个应用. Math. Z. 294 (2020), 第 1–15 页. DOI:10.1007/s00209-019-02278-w arXiv:1805.05316[Sno] Andrew Snowden. 关于有色圆的测度. arXiv:2302.08699[SS1] Steven V Sam, Andrew Snowden. 无限多个变量的多项式环上的 GL-等变模. Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 第 1097–1158 页. DOI:10.1090/tran/6355 arXiv:1206.2233[SS1] Steven V Sam, Andrew Snowden. 表示论中的稳定性模式. Forum Math. Sigma 3 (2015), e11, 共 108 页. DOI:10.1017/fms.2015.10 arXiv:1302.5859v2[SS2] Steven V Sam, Andrew Snowden. 组合范畴表示的格罗布纳方法. J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 第 159–203 页. DOI:10.1090/jams/859 arXiv:1409.1670v3[SS3] Steven V Sam, Andrew Snowden. 无限多个变量的多项式环上的 GL-等变模. II. Forum Math. Sigma 7 (2019), e5, 共 71 页. DOI:10.1017/fms.2018.27 arXiv:1703.04516v1[SA] Jim Q. Smith, Paul E. Anderson. 条件独立与链事件图. Artificial Intelligence 172 (2008), no. 1, 第 42–68 页. DOI:10.1016/j.artint.2007.05.004

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor,
MI电子邮箱: laudone@umich.edu网址: https://robertplaudone.github.io/

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor,
MI电子邮箱: asnowden@umich.edu网址:
http://www-personal.umich.edu/~asnowden/