arXiv:2304.03690v1 [math.NA] 7 Apr 2023

统一 HP-HDG 框架：Friedrichs 偏微分方程组*

JAU-UEI CHEN†,SHINHOO KANG‡, TAN BUI-THANH†§, 和 JOHN N. SHADID¶

This 本文谨献给 Leszek Demkowicz 教授，以纪念他的70岁生日 y.

摘要。本文为一大类Friedrichs 型偏微分方程（PDEs）的混合间断伽辽金（HDG）方法提出了一个统一的 hp-自适应性框架。具体而言，我们针对抽象的单场和双场结构提出了统一的 hp-HDG 公式，并证明了其适定性。为处理非协调界面，我们直接利用HDG内置的 Mortar 结构。借助分裂型Mortar和迹的近似空间，可以通过Godunov方法推导出数值通量，并将其自然地应用，而无需任何额外处理。因此，所提出的公式不含参数。我们针对含椭圆型、双曲型和混合型方程的时不变线性偏微分方程开展了若干数值实验，以验证所提出的统一 hp-公式，并展示 hp-自适应的有效性。我们考虑了两种自适应准则：一种基于简单快速的误差指示子，另一种则利用基于伴随的误差估计，虽然更加严格，但代价也更高。数值结果表明，即使对于具有强梯度、间断或奇异性的问题，这两种方法在收敛率方面也具有可比性。

关键词。杂交化间断Galerkin；Friedrichs系统；间断Galerkin；杂交化； hp-自适应

AMS 学科分类。68Q25,68R10, 68U05

1.引言。 混合间断伽辽金（HDG）方法首次提出于 [1]，并继承了间断伽辽金方法的诸多优点，包括适用于各种各样的偏微分方程（PDE）、能够处理复杂几何以及支持高阶精度等，仅举数例。此外，混合间断伽辽金方法通过消去局部未知量来提高计算效率[2] ，并且在网格骨架上求解迹未知量所需的线性系统小于间断伽辽金方法对应的系统。凭借这些显著优势，混合间断伽辽金方法在求解各种类型的偏微分方程方面取得了巨大成功，例如泊松方程 [2, 3, 4], 对流–扩散方程 [5, 6, 7], 斯托克斯方程 [8, 9, 10, 11, 12], 纳维–斯托克斯方程 [13, 14], 麦克斯韦方程 [15, 16], 声学和弹性动力学方程 [17], 亥姆霍兹方程 [18, 19], 以及磁流体动力学方程 [20], 等等。针对由椭圆型、抛物型、双曲型和混合型偏微分方程支配的一大类物理问题，文献中已建立了一个构造性且统一的混合间断伽辽金框架 [21] ，该框架不仅重新发现了大多数现有的混合间断伽辽金方法，还发现了新的方法。

与任何数值离散方法一样，在存在高梯度、不连续和/或奇异性特征的某些关键情形下，标准混合间断伽辽金可能效率低下。遗憾的是，这些极端特征在几乎所有工程/物理应用中都并不少见。解决这一问题的方法是采用hp-自适应性。该思想最早在 [22] 提出，并在 [23, 24]中得到系统研究。它包含两个关键发现。第一，如果解足够光滑 [25], 则通过均匀提高逼近次数（p-加密）可以达到指数收敛率。第二，如果解不光滑，则应采用较低的逼近次数并结合细化的网格（h-加密）。简而言之，理想情形是根据解的局部行为，在局部执行 h-或 p-加密。

事实上，自适应特性已通过h-自适应 [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]、 p-自适应 [45, 46, 47, 48, 49, 50], 或 hp-自适应 [51, 52, 53, 54], 常规地应用于混合间断伽辽金方法的背景下。为了驱动自适应过程，需要某种指示器。主要有三种常用方法：后验误差估计器、基于伴随的误差估计和启发式指标。尽管有时可以保证<\styleid='10'>后验误差估计器的可靠性和效率 [28, 31, 34], ，但其推导依赖于具体问题，通常并非易事，尤其是对于非线性问题 [26, 28, 31, 34, 36, 39, 40, 41]。此外，这类误差估计器可能还需要进行后处理 [28, 34, 41, 45, 46]。另一方面，基于伴随的误差估计在

*提交给编辑：日期。**资助：**本工作由部分资金资助

†德克萨斯大学奥斯汀分校航空航天工程与工程力学系，奥斯汀，德克萨斯州 78712，美国（chenju@utexas.edu）。

‡阿贡国家实验室数学与计算机科学部，美国伊利诺伊州莱蒙特市，邮编 60439。§德克萨斯大学奥斯汀分校奥登计算工程与科学研究所，美国德克萨斯州奥斯汀市，邮编 78712

¶桑迪亚国家实验室计算数学部，美国新墨西哥州阿尔伯克基市，邮政信箱 5800，邮编 87185，MS 1321

工程应用 [51, 29, 30, 53, 54, 35, 50, 43] 因为在这种情况下，人们通常更关注某些特定的感兴趣量，而不是解本身。人们已经开发出一种由基于伴随的误差估计驱动的自适应过程，用于计算此类感兴趣量的精确值。最后，还可以采用某种启发式指标来驱动自适应 [55] ，且通常计算成本低廉。例如，在 [33, 47], 中，通量跳跃的度量被用作误差指示子。然而，误差指示子并不一定与“误差”相关。例如，文献作者在 [27, 42] 中利用人工黏性作为指示器，而文献 [37] 则使用损伤场作为指示器。在本文中，我们研究基于伴随的误差估计和误差指示子。与后验 误差估计器相比，第一种方案更容易推导，但仍具有一定的稳健性 [51, 29, 30, 53, 54]。第二种方案更加特设，且缺乏稳健性。两种方法的讨论将在第 4 节进行，数值比较将在第 5节进行。

自适应过程涉及对所考虑的网格进行 h细化、 p细化或两者兼施。对于单纯形网格，可以在不使单元边界出现任何悬挂节点的情况下实现局部网格细化。在这种情况下，无需特殊处理。无需重新网格划分的经典算法包括二分法 [56, 57, 58] 和红绿加密法 [59]。另一种方法是直接重新生成网格，其中小单元和大单元的布局取决于某种度量 [53, 35, 36, 50, 42, 44]。这种机制通常计算开销较大，但生成的网格更经济。不过，我们要指出，在四边形和六面体网格的局部 h细化中，通常会出现 h非协调界面。得益于混合间断伽辽金方法中内置的天然 Mortar，可以轻松运用相关技术来处理非协调界面。此外，还可以通过 Mortar技术处理因近似空间局部增广而导致的 p非协调界面问题。不过，曲边界 [48, 49]需要特别注意。在这项工作中，虽然我们的 hp混合间断伽辽金方法适用于二维和三维中具有直边或平面的三角形/四面体/四边形/六面体单元，但数值结果仅针对采用三角形单元的二维问题。

至此，我们回顾了用于求解不同物理问题的各种HDG格式。由于每种物理问题都有其独特特性，为不同问题开发不同的数值格式是很自然的。然而，Friedrichs型偏微分方程 [60] 涵盖了数学结构相似的一大类偏微分方程，这为开发统一的框架提供了契机。这一思路最早应用于一系列关于间断伽辽金方法分析的论文中 [61, 62, 63] 。Friedrichs系统也是统一各种间断Petrov-Galerkin方法的基础 [64]。在这项工作中 [21], , 作者基于戈杜诺夫方法，利用Friedrichs系统为HDG格式提出了一个统一且可构造的框架，并假设各界面均为相容的。

本文将 [21] 中的工作沿两个重要方向进行了扩展。首先，我们的扩展现提供了一个适用于具有双场结构（定义见后文）的偏微分方程的统一混合间断伽辽金框架。其次，我们构建了两个统一的hp-混合间断伽辽金框架：一个适用于单场偏微分方程结构，另一个适用于双场偏微分方程结构。具体而言，我们考虑了具有更一般假设的Friedrichs系统，这些假设涵盖单场和双场结构。对于双场结构，我们同时研究了完全强制性和部分强制性。因此，所得系统涵盖了广泛的偏微分方程，包括双曲型、椭圆型或混合型偏微分方程。我们提出了两个 hp-HDG 公式：一个适用于单场偏微分方程，另一个适用于双场偏微分方程。其推导在很大程度上依赖于Godunov方法。

对于双场公式，我们进一步利用其内在结构，得到相应的约化迹系统。我们确定了若干假设，以保证数值通量的存在；这也是证明适定性的关键。我们开展了若干数值实验，以验证抽象的 hp-HDG 公式应用于特定偏微分方程时的有效性。为驱动自适应，我们实现了一个临时误差指示子和一种基于伴随的误差估计，并比较了它们的表现。如后文所示，采用上述任一准则， hp-自适应过程都能有效减少由高梯度、不连续性或奇异性引起的数值污染区域，并且在某些情况下可达到令人满意的收敛率。

本文组织如下。第 2 节简要回顾Friedrichs系统，并概述适定性分析中将采用的重要假设。第3节讨论Mortar技术的关键概念，并推导用于单场和二场 Friedrichs 系统的混合间断伽辽金数值通量及相应的 hp-混合间断伽辽金公式。此外，还证明了这些公式的适定性。第 hp-自适应策略将在第 4节介绍，其自适应准则基于特设误差指示子和伴随误差指示子。文中还给出了针对椭圆型偏微分方程的若干数值算例（包括具有角点奇异性的情形、具有不连续边界条件的各向异性扩散，以及具有不连续扩散率的非均质各向异性情形

场），线性双曲型偏微分方程（具有变速和不连续边界条件），以及对流-扩散偏微分方程（具有边界层和不连续边界条件）将在第 5 节。第6 节总结本文并提出未来工作。

2. Friedrichs型线性偏微分方程。Friedrichs 对偏微分方程的统一化的主要思想是将广泛类别的偏微分方程转化为具有相同数学结构的一阶系统。在本节中，我们概述Friedrichs型的单场和双场偏微分方程。本文使用以下记号。粗体小写字母专用于（列）向量，大写字母表示矩阵，粗体大写字母表示三阶张量。考虑以下定义在 Lipschitz 区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$中的线性偏微分方程一般系统，其中 d 指空间维数：

$$\sum_{k=1}^{d} \partial_k F_k(\boldsymbol{z}) + G\boldsymbol{z} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k (A_k \boldsymbol{z}) + G\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega, \tag{2.1}$$

其中，$F_k(\boldsymbol{z}) := A_k \boldsymbol{z}$ 是通量张量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$的第 k个分量，$\boldsymbol{z}$ 是在$\mathbb{R}^m$中取值的未知解，而 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^m$ 是强迫项。这里，∂_k 表示第 k个（按分量计的）偏导数。对 A_k 和 G 施加的不同类型的约束将导致不同类型的Friedrichs系统，我们将在以下各小节中分别讨论每种情况。

2.1. 单场 Friedrichs 系统。单场 Friedrichs 系统具有以下标准假设 [60, 65, 61]：

(A.1) $G \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^{m,m}$ **(A.2)** $\forall k \in \{1,\dots,d\}$, $A_k \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^{m,m}$ 以及 $\sum_{k=1}^{d} \partial_k A_k \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^{m,m}$. **(A.3)** $\forall k \in \{1,\dots,d\}$, $A_k = (A_k)^T$在 Ω 中几乎处处成立。 **(A.4)** $\exists \mu_0 > 0$, $G + G^T + \sum_{k=1}^{d} \partial_k A_k \geq 2\mu_0 I_m$ 在 Ω 中几乎处处成立。

其中 I_m 是 $m \times m$ 单位矩阵。本文中，形式如(A.4) 的不等式表示左侧矩阵与右侧矩阵之差半正定。不等式(A.4) 也称为完全强制性 [61]。这里，$[\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^{m,m}$ 表示Ω上 $m \times m$ 矩阵值本质有界函数空间。事实证明，任何对称且严格双曲型的偏微分方程系统都是单场 Friedrichs 系统的一个例子。例如，对流-反应方程就属于这一类。

2.2. 二场 Friedrichs 系统。令 $m^{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $m^{\boldsymbol{u}}$ 为满足 $m = m^{\boldsymbol{\sigma}} + m^{\boldsymbol{u}}$的两个正整数。记 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{\sigma}} := \left[\mathcal{L}^2(\Omega)\right]^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$、$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} := \left[\mathcal{L}^2(\Omega)\right]^{m^{\boldsymbol{u}}}$以及 $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}$，其中 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ 是 Ω 上平方可积函数构成的空间。假设对所有 $\boldsymbol{z} \in \mathscr{L}$，我们有分解 $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$，并且

$$G = \begin{bmatrix} G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} \\ G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} & G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}, \qquad A_k = \begin{bmatrix} A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & B_k \\ B_k^T & C_k \end{bmatrix}, \quad k \in \{1,\dots,d\}. \tag{2.2}$$

二场理论所依据的另外两个关键假设为 [62]：

(A.5) $A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} = 0, \forall k \in \{1,\dots,d\}$,

(A.6) $G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \geq k_0 I_{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$ 对于某个 $k_0 > 0$,

其中 $I_{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$ 是 $\mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$中的单位矩阵，$m^{\boldsymbol{\sigma}}$。假设 (A.5)-(A.6) 使我们能够消去偏微分方程系统中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 分量，而所得微分方程是关于 $\boldsymbol{u}$ 分量的椭圆型偏微分方程。满足假设 (A.1)-(A.6) 的二场 Friedrichs 系统涵盖了广泛的偏微分方程，包括对流-扩散-反应方程、带反应项的可压缩线性连续介质力学，以及简化的 MHD [62]。

我们注意到，正性条件 (A.4) 可以进一步放宽，以涵盖具有部分强制性的双场结构系统。这类系统包括对流扩散、各向异性扩散以及典型的可压缩线性连续介质力学方程（例如线性化可压缩弹性方程或线性化可压缩 Navier-Stokes 方程）等。可以通过以下方式实现（见 [63]）：将假设 (A.4) 替换为：

(A4.a) $\exists \mu_0 > 0$, $G + G^T + \sum_{k=1}^{d} A_k \geq 2\mu_0 I^o_{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$ 在Ω 中几乎处处，其中 $I^o_{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$ 是一个 $m \times m$ 矩阵，定义为$I^o_{m^{\boldsymbol{\sigma}}} := \begin{bmatrix} I_{m^{\boldsymbol{\sigma}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(A4.b) $G^{\sigma u} = (G^{u\sigma})^T = 0$ 且 B_k 在 Ω 上为常数。

REMARK 1。 这里，我们省略了二场 *Friedrichs* 系统具有部分强制性时所需的另一个不等式（（*A3B"* 见 *[63]*））， 因为在我们对混合间断伽辽金的分析中不会用到它。然而，该不等式对于证明 （2.1）中所述连续偏微分方程的适定性至关重要。这种不等式可视为 *Friedrichs–Poincar´*不等式 *[66]* 或 *Korn [67]* 不等式的推广形式，而其离散版本实际上可以用于我们的分析，但这将导致网格相关的混合间断伽辽金格式。

2.3. 边界条件。 尽管第 5节中的数值结果采用了非齐次边界条件，但只需证明单场情形(A.1)-(A.4)和双场情形 (A.1)-(A.6)（或 (A.1)-(A.3)、 (A4.a)-(A4.b)、 (A.5)-(A.6)）满足齐次边界条件的适定性。类似于 [61, 62, 63]，我们考虑如下形式的一般齐次边界条件

$$(A - M)\,\boldsymbol{z} = \mathbf{0} \tag{2.3a}$$

其中， $M \in \mathbb{R}^{m,\ m}$ 且 $A := \sum_{k=1}^{d} n_k A_k$ 满足 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots\ldots, n_d)^T$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。此外，我们假设娱乐主管

$$M \geq 0, \tag{2.3b}$$

$$\mathcal{N}(A - M) + \mathcal{N}(A + M) = \mathbb{R}^m \tag{2.3c}$$

其中， $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示其参数的零空间。需要注意的是，M 并无唯一的定义，不同的选择会导致不同的边界条件。

3. hp**-HDG公式**。 本节将推导第 hp2节概述的Friedrichs系统的-HDG公式。为了构造 hp-HDG格式，必须针对体未知量所采用的间断逼近空间推导数值通量。广为人知的Godunov方法通过精确或近似求解黎曼问题来构造数值通量，是最常用的方法之一。关键在于认识到Godunov通量可以混合化 [21]。换言之，Godunov通量[1] 可以与迹未知量一同隐式定义，因此能够用作HDG数值通量。此外，这种方法十分理想，因为它可以得到无参数格式。另一方面，处理hp-非协调界面的关键在于直接在Mortar上构造此类通量；Mortar是混合间断伽辽金方法中自然内置的。我们将说明，通过对Mortar的配置以及迹未知量近似空间作出特定选择，即可实现这一点。

3.1. 符号说明。本节汇总本文其余部分所用的记号和约定。区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的剖分 $\mathcal{T}_h$ 是由有限个互不相交的单元 K 组成的集合，满足 $\cup_{K\in\mathcal{T}_h} K = \Omega$，其中网格尺寸 h 定义为 $\max_{K\in\mathcal{T}_h} diam(K)$。为便于阐述，我们将使用二维单纯形单元来说明我们的思路，但我们的方法同样适用于三维情形。单元边界的集合记为 $\partial\mathcal{T}_h = \{\partial K \mid K \in \mathcal{T}_h\}$，每个边界都配有单位外法向量 $\boldsymbol{n}^K$。按照惯例，我们将 $\boldsymbol{n}$视为单元 K 的边界∂K 上的法向量（也记作 K^-），将 $\boldsymbol{n}^+ = -\boldsymbol{n}^-$ 视为相邻单元边界的法向量（也记作 K^+）。

若单元 K^+ 满足 K^- 且 $\partial K^+ \cap \partial K^-$ 具有正的 $d-1$ 勒贝格测度，则称其为单元 K 的邻居。对于剖分 $\mathcal{T}_h$ 中的一个单元，我们将单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 的一个面定义为 $F \in \partial K$。对于内部界面（无论是否为非协调界面），我们引入一个*Mortar* e，定义为 $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$；对于 Ω 的边界， $e = \partial K \cap \partial\Omega$ 上的 Mortar。对于任意协调界面，Mortar 显然有明确定义；对于任意非协调界面，其 Mortar 的定义见第3.2.1节。Mortar 的集合称为网格骨架，记作 $\mathcal{E}_h$， $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\circ \bigcup \mathcal{E}_h^\partial$其中 $\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h \mid e \subset \partial\Omega\}$ 和 $\mathcal{E}_h^\circ = \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^\partial$。HDG格式的推导以混合间断伽辽金数值通量为核心，该通量通常伴随着新引入的、位于骨架上的未知量。这类未知量通常称为迹未知量，而通常定义在单元内部的未知量（例如间断伽辽金方法中的未知量）则称为体未知量。

[1]需要指出的是，如果所研究的问题是线性的，Godunov通量就是迎风通量，因此本文中我们可以不加区分地交替使用这两个术语。

对于在网格骨架上可能具有双值的量 f，我们将 f 在$e \in \mathcal{E}_h$ 上的跳跃定义为：

$$[\![f]\!] = f^- + f^+, \quad \text{for } \forall e \in \mathcal{E}_h^\circ, \qquad\qquad [\![f]\!] = f, \quad \text{for } \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial,$$

其中 $f^\pm(x) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in F^\pm}} f(y)$ 和 $F^\pm \in \partial K^\pm$。

我们将 $\mathcal{P}^p(D)$ 定义为区域 D 上次数至多为 p 的多项式空间，将 $\mathcal{L}^2(D)$ 定义为 D 上平方可积函数的空间。特别地，我们用 p_K 表示单元 K 上多项式的次数，用 p_e 表示 Mortar e 上多项式的次数。接下来，我们引入分片间断多项式空间

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_h &= [P_h]^m, & P_h &:= \left\{ z_h \in \mathcal{L}^2(\mathscr{T}_h) : z_h|_K \in \mathcal{P}^{p_K}(K),\ \forall K \in \mathscr{T}_h \right\}, \\ \widehat{\boldsymbol{W}}_h &= \left[\widehat{P}_h\right]^m, & \widehat{P}_h &:= \left\{ \widehat{z}_h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E}_h) : \widehat{z}_h|_e \in \mathcal{P}^{p_e}(e),\ \forall e \in \mathcal{E}_h \right\}. \end{aligned}$$

为考虑各种边界条件，我们将 $\partial\Omega_D$ 记为 Dirichlet 型边界，将 $\partial\Omega_N$ 记为 Neumann 型边界，并将 $\partial\Omega_R$ 记为 Robin 型边界。现在，边界可分解为 $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R$，其中任意两种类型边界的交集均为空集。为便于稍后讨论二场 Friedrichs 系统，我们进一步引入一些额外的近似空间：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_h &= [P_h]^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}, & \boldsymbol{U}_h &= [P_h]^{m^{\boldsymbol{u}}}, \\ \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_h &= \left[\widehat{P}_h\right]^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}, & \widehat{\boldsymbol{U}}_h &= \left[\widehat{P}_h\right]^{m^{\boldsymbol{u}}}. \end{aligned}$$

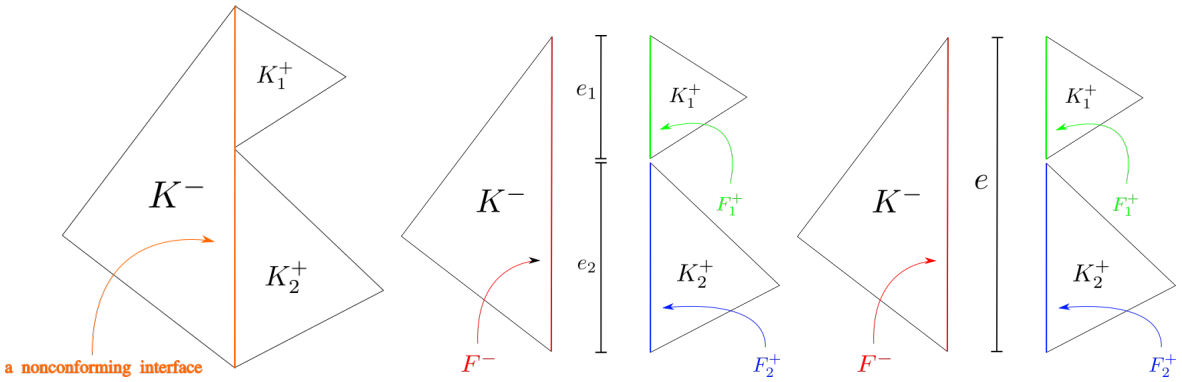
最后，我们为上述有限元空间定义内积。$(\cdot,\cdot)_D$ 定义为区域 $D \in \mathbb{R}^d$ 上的$\mathcal{L}^2$内积；若 $D \in \mathbb{R}^{d-1}$，则 $\langle \cdot,\cdot \rangle_D$ 定义为区域 D 上的 $\mathcal{L}^2$内积。为使表述更加简洁，我们引入以下定义：

$$\begin{cases} (\cdot,\cdot)_{\mathscr{T}_h} := \sum_{K \in \mathscr{T}_h} (\cdot,\cdot)_K, \\ \langle \cdot,\cdot \rangle_{\partial\mathscr{T}_h} := \sum_{\partial K \in \partial\mathscr{T}_h} \sum_{F \in \partial K} \sum_{e \subseteq F} \langle \cdot,\cdot \rangle_e, \\ \langle \cdot,\cdot \rangle_{\partial K} := \sum_{F \in \partial K} \sum_{e \subseteq F} \langle \cdot,\cdot \rangle_e, \\ \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{E}_h} := \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \langle \cdot,\cdot \rangle_e, \\ \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial} := \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} \langle \cdot,\cdot \rangle_e. \end{cases}$$

3.2. 基于 Mortar 的技术。 Mortar 技术的特点是引入 Mortar、定义在 Mortar 上的有限元空间，以及利用 Mortar 拼接子区域/单元的方法。我们提出的 Mortar 方法以四种 Mortar 方法为基础，它们都包含上述三个步骤，主要区别在于计算 Mortar 未知量的方式。第一种方法由[68, 69, 70, 71, 72, 73], 提出，最初用于椭圆型偏微分方程，通过 Mortar 未知量弱形式地维持解在 Mortar 两侧的连续性。在这种情况下，Mortar 未知量与子区域或单元上的体未知量一起求解。第二种方法由[74, 75, 76, 77, 78]针对双曲型偏微分方程提出，应用于谱单元和 DG 方法。上风状态可视为 Mortar 未知量 [21], ，在 Mortar 上计算这些状态以构造数值通量，从而确保通量在 Mortar 两侧守恒。第三种方法由 [79, 80, 81, 82],提出，最初应用于椭圆型偏微分方程的混合有限元方法，将 Mortar 未知量称为拉格朗日乘子；与第一种方法类似，它们与体未知量一起求解。主要区别在于，该方法弱形式地施加通量连续性，而非解的连续性。最后，混合间断伽辽金方法 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 20, 21], 将 Mortar 未知量称为迹未知量，并使用 Mortar 未知量弱形式地施加通量连续性，与第三种方法类似。Mortar 未知量也与体未知量一起求解。

本文将 HDG 内置的 Mortar 扩展为可全面处理 hp 非协调界面。为此，需要两个要素：恰当选择 Mortar 配置，以及定义在 Mortar 上的有限元空间。我们将证明，无需额外的插值或投影，我们的选择便能构建出黎曼问题定义良好的框架，并通过戈杜诺夫方法推导数值通量。

3.2.1. ***h*-非协调界面**。在 h-非协调界面（见图 1a）中，F^+ 不一定等于 F^-。因此，我们需要仔细考虑 Mortar 的定义。如图 1所示，构造 Mortar 有两种方案。一种是由一组 分边式 Mortar 组成（即图 1b），它们与相邻单元较短的一侧协调；另一种是 全边 Mortar（即图 1c），它与相邻单元较长的一侧协调。在混合间断伽辽金方法的背景下，第一种方案用于 [83, 28, 84]，第二种方案则用于 [33, 29, 37]。尽管使用全边 Mortar 的计算开销较低，但本文选择第一种 Mortar，以便于实现戈杜诺夫方法。



(a) 非协调界面 (b) 分侧Mortar （c）全边Mortar

图 1：非协调界面上 Mortar 的不同选项。

REMARK 2. 值得注意的是，在 *[85]*中，作者从理论上证明，对于时变线性弹性问题，无论是全侧 *Mortar* 还是分侧 *Mortar*，在离散层面上都可以导出稳定的间断伽辽金格式。此外，他们还通过数值实验表明，这两种 *Mortar*都可以导出守恒格式。然而，从 *[85]* 的意义上来说，仍然建议采用分侧 *Mortar*，因为

1. 这是间断伽辽金方法最自然的处理方式；2. 对于所考虑的问题，全边砂浆的谱半径比拆分侧砂浆大两倍以上（因此显式方法所需的时间步长限制更严格）。

3.2.2. ***p*-非协调界面**。对于 p-非协调界面，$p_{K^+} = p_{K^-}$ 通常不成立。此外，用 p_e 表示的迹未知量的逼近次数可能不同于 p_{K^+} 或 p_{K^-}。在本文中，我们选择:

$$\begin{cases} p_e = \max\{p_{K^+}, p_{K^-}\}, \text{ for } \forall e \in \mathcal{E}_h^\circ, \\ p_e = p_K, \text{ for } \forall e \in \partial K \cap \mathcal{E}_h^\partial, \end{cases} \tag{3.1}$$

以便采用 Godnuov 方法并确保稳定性。 [1] 中也建议采用这一选择。

3.2.3. ***hp*-非协调界面**。结合第 3.2.1 节和第 3.2.2节中的设置，我们现在可以处理 hp-非协调界面，并采用 Godnuov 方法为 Friedrichs系统构造 hp-HDG格式。此外，由于我们对砂浆配置和迹未知量逼近次数作了特定选择，因此无需进行投影或插值。

为说明这一思想，我们考虑图中所示的非协调界面。 1b 并聚焦于线段 e_1。由于黎曼问题没有明确定义，Godunov方法的实现方式并不清楚。左状态和右状态定义在彼此不协调的区域上（即 $F^- \neq F_1^+$）。为解决这一问题，我们可以将状态投影并插值到 Mortar e_1上。然后，通过求解由这些中间状态适当定义的黎曼问题，即可应用 Godunov方法。在间断伽辽金方法的背景下，这一方法已经被证明是成功的

[74, 75, 76, 77, 78]。在全文中，我们假设所有边/面都是直的，即网格是仿射的。曲边单元的处理更为复杂，这将是我们未来的工作内容。由于混合间断伽辽金方法中自然内置了 Mortar，并且我们采用了处理非协调界面的方式，投影和插值实际上都是隐式完成的。为说明这一点，我们考虑以下分片多项式函数 $\boldsymbol{z}_h \in \boldsymbol{W}_h$、$(\boldsymbol{z}_h^*)^{\pm} \in \widehat{\boldsymbol{W}}_h$ 和 $\widehat{\boldsymbol{w}}_h \in \widehat{\boldsymbol{W}}_h$。此外，我们定义投影算子 $\mathbb{P}(\cdot)$，它是到空间 $\widehat{\boldsymbol{W}}_h$ 中的 $\mathcal{L}^2$-投影。将定义在 F^- 上的左状态投影到左中间状态 $(\boldsymbol{z}_h^*)^-$，可表述为 $\mathbb{P}(\boldsymbol{z}_h|_{F^-\cap e_1}) = (\boldsymbol{z}_h^*)^-|_{e_1}$，且等式成立的意义是

$$\langle \boldsymbol{z}_h, \widehat{\boldsymbol{w}}_h \rangle_{e_1} = \langle (\boldsymbol{z}_h^*)^-, \widehat{\boldsymbol{w}}_h \rangle_{e_1} \quad \forall \widehat{\boldsymbol{w}}_h \in \widehat{\boldsymbol{W}}_h. \tag{3.2}$$

由于我们使用分侧Mortar，并根据式 (3.1) 选取迹测试空间 $\boldsymbol{W}_h$ 的次数近似，因此显然，对于任意多项式函数 $f \in \mathcal{P}^{p_K}(K^-)$，都必须满足 $f|_{F^-\cap e_1} \subseteq \mathcal{P}^{p_e}(e_1)$。由于多项式表示的唯一性，此处的投影实际上不起作用，因此 $\mathbb{P}(\boldsymbol{z}_h|_{F^-\cap e_1}) = \boldsymbol{z}_h|_{F^-\cap e_1}$。由此，左中间状态不过是左状态的限制：$(\boldsymbol{z}_h^*)^-|_{e_1} = \boldsymbol{z}_h|_{F^-\cap e_1}$。同样的论证也可以通过插值来进行。类似地，我们有右中间状态 $(\boldsymbol{z}_h^*)^+|_{e_1} = \boldsymbol{z}_h|_{F^+\cap e_1}$。现在，可以沿线段 $F^-\cap e_1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$，通过局部求解黎曼问题来构造迎风数值通量。由于沿单一方向的情形本质上是一维的，法向量 $\boldsymbol{n}$ 可以用某个标量 n 参数化，其中 $n=0$ 对应于 Mortar e_1 的位置。将系数矩阵 $A := \sum_{k=1}^{d} n_k A_k$ 的定义扩展为 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)^T$，其中 $\forall K \in \mathcal{T}_h$ 的单位外法向量为 ∂K，则黎曼问题 [86] 表述为：求 $\boldsymbol{z}_h(n,t)$，使得

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}_h}{\partial t} + \frac{\partial (A\boldsymbol{z}_h)}{\partial n} = \boldsymbol{0}, \tag{3.3}$$

初始条件为 $\boldsymbol{z}_h(n,0) = (\boldsymbol{z}_h^*)^-$，适用于 $n<0$；$\boldsymbol{z}_h(n,0) = (\boldsymbol{z}_h^*)^+$，适用于 $n>0$。此处引入（人工）时间 t，以帮助通过黎曼问题理解 Godunov通量，但在推导中并非必需。图2展示了如何沿由 n 参数化的方向 $\boldsymbol{n}$ 定义黎曼问题。对于定义良好的问题 (3.3)，我们现在可以按照文献 [21] 中概述的步骤推导迎风 HDG通量。本文假设系数矩阵 A 在网格骨架[2]上连续。特别地，根据 (A.3)，A 是对称的，因此其特征分解必然存在。因此，我们还可以定义 $|A| := R|\Lambda|R^{-1}$，其中 $\Lambda := diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 和 λ_i 是 A 的特征值，而 R 是由相应特征向量组成的矩阵。

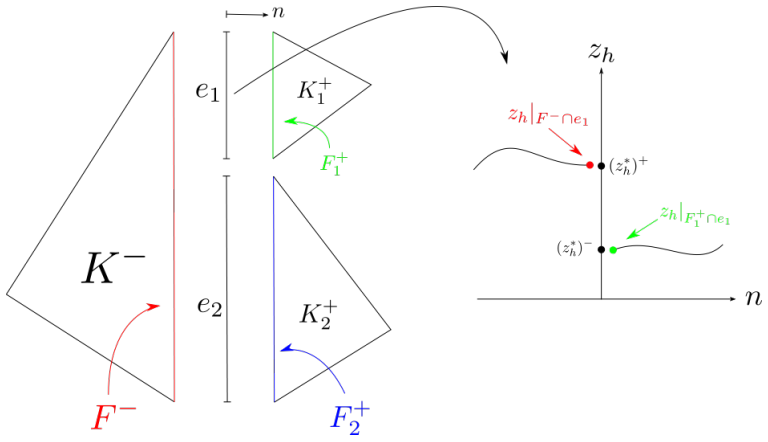


图 2：沿法向方向 $\boldsymbol{n}$ 定义黎曼问题的示意图

[2]该条件可以是 r 宽松，但我们将用它来保持论述。 简洁。

3.3. *hp*-**混合间断伽辽金公式的构造性推导。**

3.3.1. 具有单场结构的 Friedrichs 系统。在本节中，我们推导 hp-混合间断伽辽金公式，用于满足单场 Friedrichs 系统假设(A.1)-(A.4)的式（2.1）中的线性偏微分方程。首先，我们对单元 $K \in \mathscr{T}_h$ 上的式（2.1）应用伽辽金近似，并结合分部积分。所得局部问题如下：求 $\boldsymbol{z}_h \in \boldsymbol{W}_h$ 使得

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(A_k\boldsymbol{z}_h,\partial_k\boldsymbol{w}_h\right)_K+\left(G\boldsymbol{z}_h,\boldsymbol{w}_h\right)_K+\left\langle\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{z}_h\right)\boldsymbol{n},\boldsymbol{w}_h\right\rangle_{\partial K}=\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_h\right)_K,\quad\forall K\in\mathscr{T}_h, \tag{3.4}$$

对于所有 $\boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{W}_h$，通量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_h)$ 是一个张量，其中每个分量都是一个 $m \times d$ 矩阵。因此，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_h)\boldsymbol{n}$ 也是一个 $m \times d$ 矩阵。按照第 3.2.3 节介绍的方式处理非协调界面时，界面 $e \in \mathcal{E}_h$ 上的法向通量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_h)\boldsymbol{n}$ 仍未定义，因为单元 K^- 的 $\boldsymbol{z}_h^-$ 和单元 K^+ 的 $\boldsymbol{z}_h^+$ 的迹共存于 e 上。不过，可以通过戈杜诺夫型方法 [87] 解决这一问题：首先在 Mortar e 上精确或近似地求解黎曼问题 (3.3)，得到迎风状态，然后引入迎风数值通量 $\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{z}_h^-,\boldsymbol{z}_h^+\right)\boldsymbol{n}$。此外，正如 [21], 中所述，这种通量是可混合化的。接着，可以用指定的迹未知量替换迎风状态，从而构造基于迎风的混合间断伽辽金通量。按照这一过程，迎风混合间断伽辽金通量写作：

$$\widehat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{z}_h,\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\boldsymbol{n}:=A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right) \tag{3.5}$$

其中，(3.5) 右端不过是 $\widehat{\boldsymbol{z}}_h$为黎曼解时，迎风通量的单边形式。注意，$|A|$ 也可以替换为其他稳定性参数矩阵，T从而得到不同的数值通量（另请参见 [21]中的讨论）。将 $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{z}_h\right)\boldsymbol{n}$ 替换为 $\widehat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{z}_h,\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\boldsymbol{n}$，即可得到所谓的局部方程：求解 $\left(\boldsymbol{z}_h,\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\in\boldsymbol{W}_h\times\boldsymbol{W}_h$ 使得

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(A_k\boldsymbol{z}_h,\partial_k\boldsymbol{w}_h\right)_K+\left(G\boldsymbol{z}_h,\boldsymbol{w}_h\right)_K+\left\langle A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right),\boldsymbol{w}_h\right\rangle_{\partial K}=\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_h\right)_K,\quad\forall K\in\mathscr{T}_h, \tag{3.6}$$

对所有 $\boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{W}_h$均成立。为了闭合该系统，还需要一个约束。可以通过弱施加 Mortar 两侧法向数值通量 (3.5) 的连续性来实现：对于 $\left(\boldsymbol{z}_h,\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\in\boldsymbol{W}_h\times\boldsymbol{W}_h$,

$$\left\langle[\![A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)]\!],\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_e=0,\quad\forall e\in\mathcal{E}_h^\circ, \tag{3.7}$$

对 $\forall\widehat{\boldsymbol{w}}_h\in\boldsymbol{W}_h$施加。方程（3.7）称为守恒条件 [1]，因为它保证该格式局部守恒。此外，它耦合了所有体未知量，因此称为全局方程。在边界上，直接通过已在 $\mathcal{E}_h^\partial$上定义的迹未知量施加非齐次边界条件（2.3a）更为清晰：

$$\left\langle\left(A-M\right)\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_e=\left\langle\left(A-M\right)\boldsymbol{g},\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_e,\quad\forall\widehat{\boldsymbol{w}}_h\in\widehat{\boldsymbol{W}}_h\,\text{and}\,\forall e\in\mathcal{E}_h^\partial, \tag{3.8}$$

其中，我们令 $M:=|A|$，函数 $\boldsymbol{g}:\partial\Omega\to\mathbb{R}^m$ 定义为

$$\boldsymbol{g}:=\begin{cases}\boldsymbol{g_D} & \text{if }(A-M)\neq 0,\\ \boldsymbol{0} & \text{if }(A-M)=0,\end{cases} \tag{3.9}$$

其中，$\boldsymbol{g_D}$ 为 Dirichlet 数据，齐次边界条件下取零。应注意，方程（3.8）对应于 [21]上的“流入”边界条件。此外，（3.8）与（2.3a）中给出的连续版本公式类似。由于（3.8）仅规定了流入条件，因此显然无法在流出边界上唯一确定 $\widehat{\boldsymbol{z}}_h$。因此，我们进一步要求：

$$\left\langle A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right),\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_e=\left\langle A\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_e,\quad\forall\widehat{\boldsymbol{w}}_h\in\widehat{\boldsymbol{W}}_h\,\text{and}\,\forall e\in\mathcal{E}_h^\partial. \tag{3.10}$$

方程 (3.10) 是通过保持数值通量的一致性得到的，并对应于流出条件。事实上，(3.8) 和 (3.10) 可合并为一个方程：

$$\left\langle[\![A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)]\!],\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}=-\left\langle\frac{1}{2}\left(A-M\right)\boldsymbol{g},\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}+\left\langle\frac{1}{2}\left(A+M\right)\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}. \tag{3.11}$$

本文将采用单场 Friedrichs 系统的一般边界条件形式（3.11）。单场 Friedrichs 系统的完整 hp-HDG 公式由式（3.6）、式（3.7）和式（3.11共同组成：求（$\boldsymbol{z}_h$，$\widehat{\boldsymbol{z}}_h$）$\in \boldsymbol{W}_h \times \widehat{\boldsymbol{W}}_h$ 使得 [3]

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(A_k\boldsymbol{z}_h,\partial_k\boldsymbol{w}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G\boldsymbol{z}_h,\boldsymbol{w}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left\langle A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right),\boldsymbol{w}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h}=\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_h\right)_{\mathscr{T}_h}, \tag{3.12a}$$

$$\left\langle[\![A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)]\!],\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h}=-\left\langle\frac{1}{2}\left(A-M\right)\boldsymbol{g},\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}+\left\langle\frac{1}{2}\left(A+M\right)\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}, \tag{3.12b}$$

对所有（$\boldsymbol{w}_h$，$\widehat{\boldsymbol{w}}_h$）$\in \boldsymbol{W}_h \times \boldsymbol{W}_h$。现在我们证明，（3.12）中的数值格式显然满足局部守恒和整体守恒，而且是适定的。

LEMMA 3.1（局部守恒）。该 *hp-HDG* 格式（(3.12）是局部守恒的 .

证明。在局部方程（ $\boldsymbol{w}_h=\mathbf{1}$ 3.6）中取，得到

$$\left(G\boldsymbol{z}_h,\mathbf{1}\right)_K+\left\langle A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right),\mathbf{1}\right\rangle_{\partial K}=\left(\boldsymbol{f},\mathbf{1}\right)_K,\quad \forall K\in\mathscr{T}_h, \tag{3.13}$$

因此

$$\left(G\boldsymbol{z}_h,\mathbf{1}\right)_K+\sum_{F\in\partial K}\left\langle A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right),\mathbf{1}\right\rangle_F=\left(\boldsymbol{f},\mathbf{1}\right)_K,\quad \forall K\in\mathscr{T}_h, \tag{3.14}$$

这表明该格式满足局部守恒。特别地，当反应项和强迫项均为零（即$G=0$ 和 $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$）时，进入单元 K的通量量等于离开该单元的通量量。

□

正如我们稍后将展示的，对于具有双场结构的Friedrichs系统，也可以很容易地证明局部守恒性质。[28] 中也给出了类似的结果，其中采用了 hp-混合间断伽辽金方法来求解斯托克斯流问题。

LEMMA 3.2（全局守恒）。其中 *hp-HDG*格式见 （3.12）满足全局守恒。

证明。将（$\boldsymbol{w}_h$，$\widehat{\boldsymbol{w}}_h$）=（$\mathbf{1}$，$\mathbf{1}$）代入方程（3.12），可得

$$\left(G\boldsymbol{z}_h,\mathbf{1}\right)_{\mathscr{T}_h}+\left\langle[\![A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)]\!],\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h}=\left(\boldsymbol{f},\mathbf{1}\right)_{\mathscr{T}_h}, \tag{3.15a}$$

$$\left\langle[\![A\boldsymbol{z}_h+|A|\left(\boldsymbol{z}_h-\widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)]\!],\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h}=-\left\langle\frac{1}{2}\left(A-M\right)\boldsymbol{g},\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}+\left\langle\frac{1}{2}\left(A+M\right)\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}. \tag{3.15b}$$

将式（3.15b）代入式（3.15a），可得

$$\left(G\boldsymbol{z}_h,\mathbf{1}\right)_{\mathscr{T}_h}-\left\langle\frac{1}{2}\left(A-M\right)\boldsymbol{g},\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}+\left\langle\frac{1}{2}\left(A+M\right)\widehat{\boldsymbol{z}}_h,\mathbf{1}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}=\left(\boldsymbol{f},\mathbf{1}\right)_{\mathscr{T}_h}, \tag{3.16}$$

这意味着该格式是全局守恒的。 □

LEMMA 3.3（局部方程的适定性）。假设 *(A.1)-(A.4)* 成立，局部求解器 (3.12a) 是适定的。

证明。 由于采用了 hp-非协调处理，该证明与 [21, 引理 6.1],的证明相同，故略去。

□

THEOREM 3.4（ hp-混合间断伽辽金公式的适定性）。假设

1. 假设 *(A.1)-(A.4)* 和 (2.3b)成立。2. $\mathcal{N}(A)=\{\mathbf{0}\}$[4]。

存在唯一的解 $\widehat{\boldsymbol{z}}_h\in\boldsymbol{W}_h$ 对于 hp-混合间断伽辽金方法，其定义为 (3.12)。

[3]尽管 $\boldsymbol{g}$ 被设为零，我们仍将其保留在整体方程的右端，以便读者能够清楚地观察到，在伴随 hp-HDG 公式中，流入边界和流出边界发生了互换。[4]该条件实际上蕴含了条件（2.3c），这是使精确解唯一的关键（另见 [21]中的备注 6.3）。

证明。 根据 [21], 中定理 6.2 的讨论，我们首先取（$\boldsymbol{w}_h$， $\widehat{\boldsymbol{w}}_h$） = （$\boldsymbol{z}_h$， $\widehat{\boldsymbol{z}}_h$），并假设 $f = 0$。然后对（3.12a）进行分部积分，从所得方程中减去（3.12b），并代入关键等式

$$\left\langle A\left(\widehat{\boldsymbol{z}}_h - \boldsymbol{z}_h\right), \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right\rangle_e = \frac{1}{2}\left[\left\langle A\widehat{\boldsymbol{z}}_h, \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right\rangle_e + \left\langle A\left(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right), \left(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\right\rangle_e - \left\langle A\boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{z}_h\right\rangle_e\right], \tag{3.17}$$

对于 $\forall e \in \mathcal{E}_h$ 成立时，可得到下列方程，并伴有齐次狄利克雷边界条件：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left[G + G^T + \sum_{k=1}^{d}\partial_k A_k\right]\boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{z}_h\right)_{\mathscr{T}_h} + \frac{1}{2}\left\langle M\widehat{\boldsymbol{z}}_h, \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}\\ &+\left\langle\left(\frac{1}{2}A + |A|\right)\left(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right), \left(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right)\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h} = 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

其左端由于强制性条件 (A.4)、边界算子（2.3b）的半正定性以及 $\frac{1}{2}A+|A| \geq 0$的半正定性而非负。因此，我们得到 $\boldsymbol{z}_h = \boldsymbol{0}$ 在 K 对 $\forall K \in \mathscr{T}_h$成立。此外，（3.18）中的最后两项等于零，因为我们的假设 $\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{0}\}$ 意味着$\mathcal{N}(|A|) = \{\boldsymbol{0}\}$。因此，我们也可以得出 $\widehat{\boldsymbol{z}}_h = \boldsymbol{0}$ 。 □

3.3.2. 具有双场结构的 Friedrichs系统。在本节中，我们推导出 hp-HDG 公式，该公式适用于式（2.1）中的线性偏微分方程，并满足双场 Friedrichs系统，其中系数矩阵 G和 A_k可分解为块矩阵，如式（2.2）所示。此外，假设一组假设 (A.1)-(A.6) 成立。然而，不一定需要强制性，还可以通过将 (A.4)替换为 (A4.a)-(A4.b)来进一步弱化。

通过伽勒金近似以及分部积分，我们将再次得到公式（3.4）。此外，利用该分解可以进一步挖掘双场结构的优势，在此分解下我们可以引入 $\boldsymbol{z}_h = (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h)$， $\boldsymbol{w}_h = (\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h)$， $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}})$，以及 $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{u}})$。随后，借助公式（2.2），局部方程可重写为：求（$\boldsymbol{\sigma}_h$， $\boldsymbol{u}_h$） $\in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h$ 使得

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{s}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{s}_h\right)_K + \left\langle\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h\right)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}_h\right\rangle_{\partial K} = \left(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{s}_h\right)_K, \quad \forall K \in \mathscr{T}_h, \tag{3.19a}$$

(3.19b)

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k^T\boldsymbol{\sigma}_h + C_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{v}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h\right)_K + \left\langle\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h\right)\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_h\right\rangle_{\partial K} = \left(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}_h\right)_K, \quad \forall K \in \mathscr{T}_h,$$

对所有（$\boldsymbol{s}_h$， $\boldsymbol{v}_h$） $\in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h$。现在，双场系统的迎风通量 $\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^+, \boldsymbol{u}_h^+\right)\boldsymbol{n}$ 也可以通过求解方程（3.3）中所述的黎曼问题来推导。为此，需要计算系数矩阵 A。通过分解$|A|$ 可以再次利用双场结构，具体如下：

$$|A| = \begin{bmatrix}\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & \mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}\\ \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} & \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

其中， $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}$、 $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}$、 $\mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}}$和 $\mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}$分别是 $|A|$的 $m^{\boldsymbol{\sigma}} \times m^{\boldsymbol{\sigma}}$、 $m^{\boldsymbol{\sigma}} \times m^{\boldsymbol{u}}$、 $m^{\boldsymbol{u}} \times m^{\boldsymbol{\sigma}}$和 $m^{\boldsymbol{u}} \times m^{\boldsymbol{u}}$ 子块矩阵。此外，迎风通量 $\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{n}$ 的 $m \times d$ 矩阵也可以分解为 $m^{\boldsymbol{\sigma}} \times d$ 和 $m^{\boldsymbol{u}} \times d$ 块矩阵，即分别为（$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\sigma}}$）$^*\boldsymbol{n}$ 和（$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}}$）$^*\boldsymbol{n}$。通过引入迎风状态 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 和 $\boldsymbol{u}_h^*$，数值通量可以表示为单侧形式：

(3.21)

$$\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n}\\ \left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{u}}\right)^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n}\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{d} n_k\begin{bmatrix}A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & B_k\\ B_k^T & C_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_h\\ \boldsymbol{u}_h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & \mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}\\ \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} & \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^*\\ \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^*\end{bmatrix},$$

其中 $A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} = 0$ 根据假设 (A.5)。此时，我们可以将迎风状态（$\boldsymbol{\sigma}_h^*$、 $\boldsymbol{u}_h^*$）替换为迹未知量（$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_h$、 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$），从而得到基于迎风的混合间断伽辽金通量。然而，可以消去其中一个迎风状态（因而也可以消去其中一个迹未知量），这是理想的，因为这样可以使系统的求解成本进一步降低。由于 $\boldsymbol{u}_h^*$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 线性相关，因此可以实现这种约化。该关系为

通过认识到在Godunov方法中 [87] 数值通量 $\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{n}$ 就是物理通量$\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}$ 通过对定义在网格骨架上的状态进行近似而得到的 $e \in \mathcal{E}_h$。也就是说，

$$\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n}, \tag{3.22}$$

其中

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n} = \sum_{k=1}^{d} n_k \begin{bmatrix} A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} & B_k \\ B_k^T & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h^* \\ \boldsymbol{u}_h^* \end{bmatrix} \text{ and } A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} = 0 \text{ by the assumption (A.5).} \tag{3.23}$$

令（3.21）和（3.23）相等，即可消去 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 或 $\boldsymbol{u}_h^*$。本文将考虑$\boldsymbol{u}_h^*$的情形。关于其他可能性，可参见 [88]，其中讨论了仅含 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 的公式，并且很容易推导得出。

Lemma 3.5（约化迎风通量）。迎风数值通量可仅表示为$\boldsymbol{u}_h^*$ 的函数：

$$\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h^*\right)\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} B\boldsymbol{u}_h^* \\ B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^*\right) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

其中 $B := \sum_{k=1}^{d} n_k B_k$ 和 $C := \sum_{k=1}^{d} n_k C_k$，其中 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)^T$ 是 $\forall K \in \mathscr{T}_h$对应的 ∂K的单位外法向量。T 的取值取决于以下假设之一：

(F.1) ***(F1.a)*** 存在一个可逆矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{u}}, m^{\boldsymbol{u}}}$，使得 $B\Phi\mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}$；***(F1.b)*** 存在一个矩阵 $\Psi \in \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{u}}, m^{\boldsymbol{u}}}$，使得 $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} = B\Psi$；以及 ***(F1.c)*** $\bigcap_{k=1}^{d}$ 值域 $(B_k) = \emptyset$ 和 $\mathcal{N}(B_k) = \{\boldsymbol{0}\}$，其中 $\forall k = 1, \ldots, d$。

(F.2) $\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} = 0$。注意，$\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} = (\mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}})^T$ 由于假设 *(A.3)*。

特别地，若假设 *(F.1)*成立，则 *n:*

$$T := -\left(\Phi^T B^T B\Phi\right)^{-1}\Phi^T B^T B\left(\Psi + I_{m^{\boldsymbol{u}}}\right) + \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}, \tag{3.25}$$

其中 $I_{m^{\boldsymbol{u}}}$ 是一个 $m^{\boldsymbol{u}} \times m^{\boldsymbol{u}}$ 单位矩阵。另一方面，若假设 *(F.2)* 成立，则

$$T := \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}. \tag{3.26}$$

证明。结合相应假设，通过简单的代数运算即可证明。详细证明见附录 B。 □

需要指出的是，假设 (F.1)与(F.2) 彼此互斥。例如，对流扩散方程的混合间断伽辽金数值通量的推导只能依据 (F.1)，而椭圆方程的推导只能依据(F.2) （更多细节见第 5 节）。根据引理 3.5，将 $\boldsymbol{u}_h^*$ 替换为 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$，即可构造基于迎风的混合间断伽辽金通量：

$$\widehat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h\right)\boldsymbol{n} := \begin{bmatrix} B\widehat{\boldsymbol{u}}_h \\ B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T\left(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h\right) \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

其中 B 和 C 的定义沿用引理3.5 中的定义（本文其余部分也将使用这些记号）。事实上，数值通量（3.27）可以表示比基于迎风的HDG更广泛的HDG族。通过令稳定性矩阵 T 不同于（3.25）和（3.26），可以得到不同的HDG格式。相关探索也见于 [21]。

现在，通过将基于迎风的HDG通量（3.27）代回（3.19），可以构造双场Friedrichs系统的 hp-HDG格式的局部方程：求$\boldsymbol{\sigma}_h$、$\boldsymbol{u}_h$、$\widehat{\boldsymbol{u}}_h$）$\in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$使得

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{s}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{s}_h\right)_K + \left\langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \boldsymbol{s}_h\right\rangle_{\partial K} = \left(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{s}_h\right)_K, \quad \forall K \in \mathscr{T}_h, \tag{3.28a}$$

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{d}\left(B_k^T\boldsymbol{\sigma}_h + C_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{v}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h\right)_K \\ + \left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T\left(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h\right), \boldsymbol{v}_h\right\rangle_{\partial K} = \left(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}_h\right)_K, \quad \forall K \in \mathscr{T}_h, \end{aligned} \tag{3.28b}$$

对于所有 $(\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h$。同样，我们通过保守条件闭合该系统。由于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h)\ \boldsymbol{n}$ 中的第一$\widehat{}$分量已被唯一确定，因此我们弱施加第二$\widehat{}$分量的连续性。具体而言，对于 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$,

$$\left\langle [\![B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h)]\!], \widehat{\boldsymbol{v}}_h \right\rangle_e = \boldsymbol{0}, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^\circ, \tag{3.29}$$

$\widehat{}$对其施加约束 $\forall \widehat{\boldsymbol{v}}_h \in \boldsymbol{U}_h$。最后，边界条件以与公式（3.8）类似的方式指定。不同之处在于，我们不再取 $M := T$，而是利用双场结构的特性，以特殊方式选择 M 它

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -\alpha B \\ \alpha B^T & M^{\boldsymbol{uu}} \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

其中 $M^{\boldsymbol{uu}} \in \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{u}}, m^{\boldsymbol{u}}}$ 非负，且 $\alpha \in \{-1, +1\}$。采用这一特定设定后，便可通过式 (3.8) 配合边界数据 $\boldsymbol{g}$ 强制施加边界条件： $\partial\Omega \to \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{\sigma}} \times m^{\boldsymbol{u}}}$, $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{g}^{\boldsymbol{u}})$，其中 $\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{\sigma}} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$，且 $\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{u}} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{u}}}$。同样，为了清晰起见并便于呈现数值结果，我们采用非齐次边界条件；但在适定性分析中，只需考虑齐次边界条件。我们进一步设定 $M^{\boldsymbol{uu}} = 2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + C$，其中 $I_{m^{\boldsymbol{u}}}$ 是 $m^{\boldsymbol{u}} \times m^{\boldsymbol{u}}$ 单位矩阵，而 ϱ 则根据具体情况选取（见第5节）。同样，边界算子 M 并非唯一，但必须满足假设 (2.3b) 和 (2.3c)。具体而言，(2.3b) 要求：

$$2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + C \geq 0. \tag{3.31}$$

对于狄利克雷型 边界上，我们令 $\alpha = 1$ 且 $\varrho = \frac{1}{2}$，边界条件（3.8）现在重述为 [5]：

$$\langle \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h \rangle_e = 0, \quad \forall \widehat{\boldsymbol{v}}_h \in \widehat{\boldsymbol{U}}_h, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D. \tag{3.32}$$

另一方面，对于 Neumann或 Robin 类型的边界条件，我们设定 $\alpha = -1$ 且变量 ϱ取决于待求解的问题。在这种情况下，（3.8）现在变为：

$$\left\langle B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h), \widehat{\boldsymbol{v}}_h \right\rangle_e = \langle (\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + C)\, \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h \rangle_e, \quad \forall \widehat{\boldsymbol{v}}_h \in \widehat{\boldsymbol{U}}_h, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap (\partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R). \tag{3.33}$$

同样，将稳定化参数 T 设为 (3.25，若假设 (F.1)成立；若假设 3.26成立，则设为 ((F.2) 。最后，此处不需要类似于 (3.10) 的一致性条件，因为方程 (3.8) 本身结合设定 (3.30) 已足以确定边界上的迹未知量 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ 。结合 (3.28)、(3.29)、(3.32) 和 (3.33，即可得到完整的 hp-混合间断伽辽金公式，用于$\widehat{}$二场 Friedrichs 系统：求 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$ 使得

$$-\sum_{k=1}^{d} (B_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{s}_h)_{\mathscr{T}_h} + (G^{\boldsymbol{\sigma\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma u}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{s}_h)_{\mathscr{T}_h} + \langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \boldsymbol{s}_h \rangle_{\partial\mathscr{T}_h} = (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{s}_h)_{\mathscr{T}_h}, \tag{3.34a}$$

$$-\sum_{k=1}^{d} \left(B_k^T \boldsymbol{\sigma}_h + C_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{v}_h \right)_{\mathscr{T}_h} + (G^{\boldsymbol{u\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{uu}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{T}_h} + \left\langle B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h), \boldsymbol{v}_h \right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h} = (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{T}_h}, \tag{3.34b}$$

$$\left\langle [\![B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h)]\!], \widehat{\boldsymbol{v}}_h \right\rangle_{\mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega_D} = \langle (\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + C)\, \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h \rangle_{\mathcal{E}_h \cap (\partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R)}, \tag{3.34c}$$

$$\langle \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D} = 0, \tag{3.34d}$$

[5]事实上，在设定 $\alpha = 1$ 和 $\varrho = \frac{1}{2}$ 下，我们应从（3.8）得到两个方程：

$$\langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{s}}_h \rangle_e = 0, \quad \forall \widehat{\boldsymbol{s}}_h \in \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_h, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D, \quad \text{and} \qquad \langle \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h \rangle_e = 0, \quad \forall \widehat{\boldsymbol{v}}_h \in \widehat{\boldsymbol{U}}_h, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial \cap \partial\Omega_D.$$

这两个方程应当彼此一致，因此等价。然而，本文只考虑后一个表述，因为：1. 鉴于只引入了迹未知量 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ ，不应涉及 $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_h$ 中的任何测试函数；2. 后一种选择更为简洁。

$\widehat{}$对所有 $(\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$。现在我们证明，式 (3.34) 中的数值格式具有局部和整体守恒性，且适定。为证明适定性，我们将讨论完全强制性和部分强制性。结果表明，完成适定性证明还需要一些额外假设，而完全强制性和部分强制性情形所需的假设各不相同。

LEMMA 3.6（局部守恒）。式 *hp-HDG* 格式（(3.34）具有局部和全局守恒性。

证明。证明与引理3.1和引理3.2的证明相同，故略去。 □

LEMMA 3.7（局部方程的适定性——具有完全强制性）。由(3.34a) 和(3.34b) 组成的局部求解器在满足以下条件时是适定的：

1. 假设*(A.1)-(A.6)*成立，并且2. $\frac{1}{2}C + T \geq 0$，且
3. $\mathcal{B}_k$ 是一个常数，并且对于 $k = 1$，……，d非零。

证明。由于该形式是线性的，且 $\boldsymbol{z}_h = (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h)$ 属于有限维空间 $\boldsymbol{W}_h$，因此只需考虑单个单元 K，并证明：在 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ 和 $\boldsymbol{f}$ 均为零的条件下，对于 $K \in \mathcal{T}_h$，解 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h) = 0$ 是 K 中的唯一解。令 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ 和 $\boldsymbol{f}$ 为零，并在式 (3.34a) 和 (3.34b) 中令 $(\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h)$ 为 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h)$。将方程相加，得到

$$\begin{aligned} &-\sum_{k=1}^{d} \left(B_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K \\ &-\sum_{k=1}^{d} \left(B_k^T \boldsymbol{\sigma}_h + C_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{u}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h\right)_K + \left\langle B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C \boldsymbol{u}_h + T \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h \right\rangle_{\partial K} = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

利用以下假设：B_k 对于 $k = 1, \ldots, d$为常数，项 $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \left(\left(\partial_k B_k^T\right) \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h\right)_K$没有贡献，因此可以自由地加入式（3.35）中。于是得到

$$\begin{aligned} &-\sum_{k=1}^{d} \left(B_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K - \sum_{k=1}^{d} \left(B_k^T \boldsymbol{\sigma}_h + C_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{u}_h\right)_K \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \left(\left(\partial_k B_k^T\right) \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h\right)_K + \left(G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h\right)_K + \left\langle B^T \boldsymbol{\sigma}_h + C \boldsymbol{u}_h + T \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h \right\rangle_{\partial K} = 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

式（3.36）中的第一项可进一步展开为：

$$-\sum_{k=1}^{d} \left(B_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K = \sum_{k=1}^{d} \left(B_k \partial_k \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \left(\left(\partial_k B_k\right) \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h\right)_K - \left\langle B \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h \right\rangle_{\partial K}, \tag{3.37}$$

这是分部积分和乘积法则的结果。由于我们的假设，式（3.37）右端的第二项为零，因此可以乘以任意常数。类似地，容易证明以下恒等式成立：

$$-\sum_{k=1}^{d} \left(C_k \boldsymbol{u}_h, \partial_k \boldsymbol{u}_h\right)_K = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \left((\partial_k C_k) \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h\right)_K - \frac{1}{2} \left\langle C \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h \right\rangle_{\partial K}, \tag{3.38}$$

这同样是分部积分的结果，但还用到了关于对称性的假设 (A.3)。将式（3.37）和（3.38）代回式（3.36），并合并（撤销分解后的）体积分，得到

$$\frac{1}{2}\left(\left(G + G^T + \sum_{k=1}^{d} \partial_k A_k\right) \boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{z}_h\right)_K + \left\langle (\frac{1}{2}C + T) \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h \right\rangle_{\partial K} = 0. \tag{3.39}$$

在完全强制性 (A.4) 和半正定性 $\frac{1}{2}C + T \geq 0$的假设下，我们可以得出 $\boldsymbol{z}_h = (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h) = \boldsymbol{0}$ 在 K 中，对任意 $K \in \mathcal{T}_h$成立。 □

THEOREM 3.8（ *hp*-混合间断伽辽金公式的适定性——具有完全强制性）。设：

1. 假设 *(A.1)-(A.6)* 和 (2.3b)成立，并且2. $\frac{1}{2}C+T\geq 0$，并且3. B_k 对于 $k=1,\ldots,d$均为常数且非零，并且 4. $\bigcap_{k=1}^{d}$ 值域 $(B_k)=\emptyset$ 和 $\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k=1,\ldots,d$。

于是，$\widehat{}$存在唯一的解 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{U}_h$ 对于 *hp-HDG* 公式，其定义见(3.34)。

证明。由于全局系统具有有限维性质且是线性的，只需证明：当 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=0$ 时，解 $\boldsymbol{f}=0$ 以及齐次边界数据 $\boldsymbol{g}=\mathbf{0}$时，是唯一解。我们首先令 $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ 且（$\boldsymbol{s}_h$，$\boldsymbol{v}_h$，$\widehat{\boldsymbol{v}}_h$）=（$\boldsymbol{\sigma}_h$，$\boldsymbol{u}_h$，$\widehat{\boldsymbol{u}}_h$）。此时，边界条件（3.34d）可写为

$$\langle\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\mathcal{E}_h^{\partial}\cap\partial\Omega_D}=0, \tag{3.40}$$

这意味着 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=\mathbf{0}$ 在 e 对于 $\forall e\in\mathcal{E}_h^{\partial}\cap\partial\Omega_D$。将（3.34a）和（3.34b）相加，再从所得方程中减去（3.34c），得到：

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k\boldsymbol{u}_h,\partial_k\boldsymbol{\sigma}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G^{\boldsymbol{\sigma\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h+G^{\boldsymbol{\sigma u}}\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\sigma}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{\sigma}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k^T\boldsymbol{\sigma}_h+C_k\boldsymbol{u}_h,\partial_k\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G^{\boldsymbol{u\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h+G^{\boldsymbol{uu}}\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}\\
&+\left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h+C\boldsymbol{u}_h+T(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h),\boldsymbol{u}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&-\left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h+C\boldsymbol{u}_h+T\left(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right),\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&+\langle(\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}}+C)\,\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\mathcal{E}_h\cap(\partial\Omega_N\cup\partial\Omega_R),I}=0,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

其中，已应用了对于 $\forall e\in\mathcal{E}_h^{\partial}\cap\partial\Omega_D$ 而言 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=\mathbf{0}$ 在 e 处的结果。我们可以添加附加项 $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\left(\partial_kB_k^T\right)\boldsymbol{\sigma}_h,\ \boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}$，由于 B_k 对于 $k=1$、...、d 为常数，从而得到

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k\boldsymbol{u}_h,\partial_k\boldsymbol{\sigma}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G^{\boldsymbol{\sigma\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h+G^{\boldsymbol{\sigma u}}\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{\sigma}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{\sigma}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k^T\boldsymbol{\sigma}_h+C_k\boldsymbol{u}_h,\partial_k\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G^{\boldsymbol{u\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h+G^{\boldsymbol{uu}}\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\left(\partial_kB_k^T\right)\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h}\\
&+\left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h+C\boldsymbol{u}_h+T(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h),\boldsymbol{u}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&-\left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h+C\boldsymbol{u}_h+T\left(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right),\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&+\langle(\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}}+C)\,\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\mathcal{E}_h\cap(\partial\Omega_N\cup\partial\Omega_R),I}=0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

通过观察可得以下恒等式：

$$\begin{aligned}
-\langle C\boldsymbol{u}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}&=\frac{1}{2}\left\langle C\left(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right),\left(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right)\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left\langle C\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}-\frac{1}{2}\left\langle C\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

注意，$\langle C\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega}=0$ 因为 C 被假设为在网格骨架上连续。而迹未知量 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ 在 Mortar 上唯一确定 e 对所有 $e\in\mathcal{E}_h^{\circ}$成立。因此，式（3.43）中的最后一项可改写为$-\frac{1}{2}\left\langle C\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\cap(\partial\Omega_N\cup\partial\Omega_R)\ I}$。将等式（3.37）、（3.38）和（3.43）代回式（3.42），并合并体积分（撤销分解），得到如下结果：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\left(G+G^T+\sum_{k=1}^{d}\partial_kA_k\right)\boldsymbol{z}_h,\boldsymbol{z}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left\langle(\frac{1}{2}C+T)(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h),(\boldsymbol{u}_h-\widehat{\boldsymbol{u}}_h)\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\setminus\partial\Omega_D}\\
&+\left\langle(\frac{1}{2}C+T)\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\cap\partial\Omega_D}+\left\langle\left(\frac{1}{2}C+\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}}\right)\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\cap(\partial\Omega_N\bigcup\partial\Omega_R)}=0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

在满足完全强制性假设(A.4)、边界算子（2.3b）半正定（因此满足不等式（3.31））以及半正定性假设 $\frac{1}{2}C+T\geq 0$的条件下，我们可以得出 $\boldsymbol{z}_h=(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h)=\mathbf{0}$ 在 K 对所有 $K\in\mathscr{T}_h$成立。

现在将（$\boldsymbol{\sigma}_h$，$\boldsymbol{u}_h$）$=\mathbf{0}$ 代回局部求解器中的子方程（3.34a），并结合 $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$和 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=\mathbf{0}$ 在 e 上对于 $\forall e\in\mathcal{E}_h^\partial\cap\partial\Omega_D$，得到：

$$\langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{s}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h\backslash\partial\Omega_D}=0\quad\forall\boldsymbol{s}_h\in\boldsymbol{\Sigma}_h, \tag{3.45}$$

这意味着 $B\widehat{\boldsymbol{u}}_h=0$。根据我们的假设，$\bigcap_{k=1}^d(B_k)$ 的值域 $=\emptyset$ 且 $\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$，对于 $\forall k=1$、.....、d，可以得出条件 $\mathcal{N}(B)=\{\mathbf{0}\}$。进而可知，对于所有$e=\in\mathcal{E}_h\backslash\partial\Omega_D$，$\widehat{\boldsymbol{u}}_h=0$ 在 e 中成立。 □

Lemma 3.9（局部方程的适定性——具有部分强制性）。由 (3.34a) 和 (3.34b) 组成的局部求解器在满足以下条件时是适定的：

1. 假设 *(A.1)-(A.3)*、*(A4.a)-(A4.b)* 和 *(A.5)-(A.6)*成立，并且2. $\frac{1}{2}C+T>0$,
并且3. $\bigcap_{k=1}^d$ 值域 $(B_k)=\emptyset$ 以及 $\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k=1,\ldots,d.$

证明。 基本上，对于部分强制性的二场 Friedrichs 系统，hp-混合间断伽辽金公式与完全强制性情形下的公式相同。因此，按照引理 3.39 证明中讨论的相同论证，我们也可以得到方程（3.7）。利用部分强制性假设 (A4.a) 以及$\frac{1}{2}C+T>0$的正性，我们可以得出 $\boldsymbol{\sigma}_h=\mathbf{0}$ 在 K 上对任意 $K\in\mathscr{T}_h$ 成立，并且 $\boldsymbol{u}_h=\mathbf{0}$ 在 $F\in\partial K$上对所有 $K\in\mathscr{T}_h$成立。对（3.34a）中的第一项应用分部积分，并将刚得到的结果连同 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$代入其中，可得：

$$\sum_{k=1}^d(\partial_k(B_k\boldsymbol{u}_h),\boldsymbol{s}_h)_K=0\quad\forall\boldsymbol{s}_h\in\boldsymbol{\Sigma}_h, \tag{3.46}$$

这意味着 $\sum_{k=1}^d\partial_k(B_k\boldsymbol{u}_h)=\mathbf{0}$ 在 K中。此外，根据假设 (A4.b)，它可以改写为 $\sum_{k=1}^d B_k\partial_k(\boldsymbol{u}_h)=\mathbf{0}$ 在 K中。基于我们的假设：$\bigcap_{k=1}^d$ 是 B_k的值域，且 $\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$对于 $\forall k=1$、.....、d成立，我们还可以进一步得出，对于任意 $K\in\mathscr{T}_h$，$\boldsymbol{u}_h=\mathbf{0}$ 在 K 上成立。 □

Theorem 3.10（具有部分强制性的 hp-混合间断伽辽金公式的适定性）。假设：

1. 假设 *(A.1)-(A.3)*、*(A4.a)-(A4.b)*、*(A.5)-(A.6)*以及 (2.3b)成立，且 d
2. $\frac{1}{2}C+T>0$，3.$\bigcap_{k=1}^d$ 值域 $(B_k)=\emptyset$，且 $\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k=1$、.....、d成立。

存在唯一的解 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h\in$ $\widehat{\boldsymbol{U}}_h$ 对于 hp中定义的 -混合间断伽辽金公式 (3.34)。

证明。鉴于具有部分强制性的二场 Friedrichs系统的 hp-混合间断伽辽金公式与具有完全强制性的情形相同。我们可以直接遵循定理 3.8 证明中所采用的相同论证，并且同样应得到方程(3.44)。根据部分强制性的假设(A4.a)、系数矩阵的假设(A4.b)、边界算子半正定性的假设(2.3b)（因此得到不等式(3.31)）以及 $\frac{1}{2}C+T>0$正定性的假设，可以推导出以下结果：$\boldsymbol{\sigma}_h=\mathbf{0}$ 在 K 中对所有$K\in\mathscr{T}_h$成立，以及 $\boldsymbol{u}_h=\widehat{\boldsymbol{u}}_h$ 在 $F\cap e$ 中对所有 $F\in\partial K$ 对 $\forall\partial K\in\partial\mathscr{T}_h\backslash\partial\Omega_D$ 成立，并且对所有 $e\in\mathcal{E}_h\backslash\partial\Omega_D$成立。现在，我们对 (3.34a) 中的第一项进行分部积分，将所有在 ∂K 上的积分转移为在 e 上的积分之和，其中 $e\in\mathcal{E}_h$，并将刚刚得到的结论与 $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ 一起代入所得方程中，我们得到：

$$\sum_{k=1}^d(\partial_k(B_k\boldsymbol{u}_h),\boldsymbol{s}_h)_{\mathscr{T}_h}=0\quad\forall\boldsymbol{s}_h\in\boldsymbol{\Sigma}_h, \tag{3.47}$$

这意味着，对于所有 $K\in\mathscr{T}_h$，$\sum_{k=1}^d\partial_k(B_k\boldsymbol{u}_h)=\mathbf{0}$ 属于 K。此外，根据假设 (A4.b)，可将其改写为 $\sum_{k=1}^d B_k\partial_k(\boldsymbol{u}_h)=\mathbf{0}$。由于我们假设 $\bigcap_{k=1}^d$ 值域 $(B_k)=\emptyset$，且对于 $\forall k=1,\ldots,d$，$\mathcal{N}(B_k)=\{\mathbf{0}\}$。因此可得，对于所有 $K\in\mathscr{T}_h$，$\boldsymbol{u}_h=\mathbf{0}$属于 K，但对于所有 $F\in\partial K$，当 $\forall\partial K\in\partial\mathscr{T}_h\backslash\partial\Omega_D$ 时，$\boldsymbol{u}_h=\widehat{\boldsymbol{u}}_h$属于$F\cap e$。对于所有 $e\in\mathcal{E}_h\backslash\partial\Omega_D$，这意味着 $\widehat{\boldsymbol{u}}_h=\mathbf{0}$ 属于 $\mathcal{E}_h\backslash\partial\Omega_D$。 □

4. hp**自适应**。 公式 (3.12) 和 (3.34) 给出了一个混合间断伽辽金格式，可用于 hp非协调网格。因此，在构造有限元空间时，我们拥有很大的灵活性。众所周知，即使在粗网格上，也可以通过高阶逼近很好地解析光滑解；而尖锐梯度的解则只能通过细网格上的低阶逼近得到恰当求解。鉴于这些不同特性可能局部出现，采用自适应过程以合理的计算成本改善数值结果是有益的。这一过程可以通过局部细化单元来实现，方法包括将单元划分为更小的单元（h自适应），或扩充其近似空间（p自适应）。为此，需要两个关键要素：一种用于探测每个单元误差的度量，以及一种定义新空间离散的方法 [55]。对于第一个要素，本文采用了两种不同的方法：一种是使用误差指示子，另一种是使用基于伴随的误差估计。对于第二个要素，本文采用了 [89] 中提出的正则性指示子。接下来的讨论将介绍通过两种不同方法得到的误差指示子，并概述 hp 自适应算法。

4.1. Doleji 方法。将 $\boldsymbol{q}_h$ 记为近似解，$|F|$ 记为单元的一个面的长度，$\boldsymbol{g_D}$ 记为 Dirichlet 数据，局部误差估计子在 [89] 中定义如下：

$$\mathscr{E}_{h,K}^{\text{Doleji}} := \left(\sum_{F\in\partial K\setminus\partial\Omega_D} \sum_{e\in F} \frac{1}{|F|} \langle [\![\boldsymbol{q}_h]\!], [\![\boldsymbol{q}_h]\!] \rangle_e + \sum_{F\in\partial K\cap\partial\Omega_D} \sum_{e\in F} \frac{1}{|F|} \langle \boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{g_D}, \boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{g_D} \rangle_e \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall K \in \mathscr{T}_h, \tag{4.1}$$

它最初是在内罚DG方法的背景下推导出来的。我们仅将其用作局部误差指示子，以探测我们工作中的误差。由于只需计算相邻单元之间的跳跃，因此计算成本低廉。具体而言，对于单场和双场Friedrichs系统，分别选取 $\boldsymbol{q}_h := \boldsymbol{z}_h$ 和 $\boldsymbol{q}_h := \boldsymbol{u}_h$ 。

4.2. 伴随方法。伴随方法的主要思想是测量所关注的输出泛函中的误差。当使用精度较低的解来评估输出泛函时，就会产生误差。基于开创性工作 [90], ，人们在有限元方法 [91]的背景下开发了对偶加权残差（DWR）方法，用于误差控制和网格优化。该方法需要额外求解一个线性系统，即原始控制方程的伴随方程，由此得到目标泛函误差的估计。此估计可用作驱动自适应的判据，从而减小目标泛函中的误差。近期，[43] 将该方法与 h-自适应性结合，采用 HDG 方法求解椭圆方程；误差估计则借助后处理技术 [92]完成。

在我们的工作中，我们采用离散伴随方法，其中仍然大体遵循 DWR方法，但此处考虑的原问题已经是离散形式。伴随问题的对应问题通常称为原问题。在本文中，原问题指的是（3.12）或（3.34）中所述的 hp-混合间断伽辽金 公式。对于混合间断伽辽金离散化，离散伴随方法已在 [51, 29, 30, 53, 54, 35, 50]中得到研究和实现。这里我们直接在混合间断伽辽金 公式上推导伴随方程，因此完全不需要构造或转置大型矩阵。正如将要展示的那样，通过分部积分和代数运算即可得到具有启发性的离散伴随。为了继续讨论，还需要一些额外的记号。 $\mathcal{J}[\cdot]$ 表示某个输出泛函$\mathcal{J}$： $\mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ 其中 $\mathcal{X}$ 是一个适当的希尔伯特空间。这类泛函的例子包括阻力系数、升力系数、贯穿整个区域的能量等。下标 H 用于表示在粗离散化上计算得到的近似，而 h 表示更细的层级。于是，我们将算子 I_H^h 定义为从层级 H 到层级 h 的注入，该操作可以通过插值完成。此外，插值后的量用下标 H 和上标 h表示。例如，量 $\boldsymbol{z}_H^h = \mathrm{I}_H^h \boldsymbol{z}_H$ 是通过对在较粗层级（即较低的逼近次数、较粗的网格或二者的组合）上求解得到的近似解 $\boldsymbol{z}_H$ 进行插值得到的。对于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $(\boldsymbol{z}_h, \widehat{\boldsymbol{z}}_h) \in \boldsymbol{W}_h \times \boldsymbol{W}_h$和 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$，它们是 hp-混合间断伽辽金 公式的解，我们定义如下的集总变量

(3.12) 和 (3.34) 分别：

$$\mathscr{Z}_h := \begin{cases} (\boldsymbol{z}_h, \widehat{\boldsymbol{z}}_h) & \text{for one-field Friedrichs' system,} \\ (\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{u}_h, \widehat{\boldsymbol{u}}_h) & \text{for two-field Friedrichs' system,} \end{cases} \tag{4.2a}$$

$$\mathscr{W}_h := \begin{cases} (\boldsymbol{w}_h, \widehat{\boldsymbol{w}}_h) & \text{for one-field Friedrichs' system,} \\ (\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h) & \text{for two-field Friedrichs' system,} \end{cases} \tag{4.2b}$$

其中，$\mathscr{W}_h$ 属于乘积希尔伯特空间 $\mathcal{Y}$，该空间由定义$\mathscr{W}_h$的相应场构造而成。hp-HDG 单场 Friedrichs 系统公式（3.12）的残差 $\mathcal{R}_h^{\mathrm{one}}[\cdot;\cdot]$ 是一个泛函$\mathcal{R}_h^{\mathrm{one}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$，作用于 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 的乘积上，由两个泛函 $\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{z}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{z}}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$ 组成。其定义如下：

$$\mathcal{R}_h^{\mathrm{one}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] = \sum_{K\in\mathscr{T}_h}\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{z}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{z}}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h], \tag{4.3}$$

其中

$$\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{z}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := -\sum_{k=1}^{d}(A_k\boldsymbol{z}_h, \partial_k\boldsymbol{w}_h)_K + (G\boldsymbol{z}_h, \boldsymbol{w}_h)_K + \langle A\boldsymbol{z}_h + T(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h), \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial K} - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_h)_K, \tag{4.4a}$$

$$\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{z}}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := \langle[\![A\boldsymbol{z}_h + T(\boldsymbol{z}_h - \widehat{\boldsymbol{z}}_h)]\!], \widehat{\boldsymbol{w}}_h\rangle_e + \left\langle\frac{1}{2}(A-M)\boldsymbol{g}, \widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{e\cap\mathcal{E}_h^\partial} - \left\langle\frac{1}{2}(A+M)\widehat{\boldsymbol{z}}_h, \widehat{\boldsymbol{w}}_h\right\rangle_{e\cap\mathcal{E}_h^\partial}, \tag{4.4b}$$

对所有 $\mathscr{W}_h\in\boldsymbol{W}_h\times\boldsymbol{W}_h$ 均成立。另一方面，hp-HDG 二场 Friedrichs 系统公式的残差 $\mathcal{R}_h^{\mathrm{two}}[\cdot;\cdot]$ 也是一个泛函 $\mathcal{R}_h^{\mathrm{two}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$，作用于 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 的乘积上，并由三个泛函 $\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{\sigma}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$、$\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{u}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{u}}}$：$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\mapsto\mathbb{R}$ 组成。其定义如下：

$$\mathcal{R}_h^{\mathrm{two}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] = \sum_{K\in\mathscr{T}_h}\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{\sigma}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] + \sum_{K\in\mathscr{T}_h}\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{u}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] + \sum_{e\in\mathcal{E}_h}\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{u}}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h], \tag{4.5}$$

其中

$$\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{\sigma}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := -\sum_{k=1}^{d}(B_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{s}_h)_K + (G^{\boldsymbol{\sigma\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{\sigma u}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{s}_h)_K + \langle B\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \boldsymbol{s}_h\rangle_{\partial K} - (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{s}_h)_K, \tag{4.6a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{h,K}^{\boldsymbol{u}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := &-\sum_{k=1}^{d}\left(B_k^T\boldsymbol{\sigma}_h + C_k\boldsymbol{u}_h, \partial_k\boldsymbol{v}_h\right)_K + (G^{\boldsymbol{u\sigma}}\boldsymbol{\sigma}_h + G^{\boldsymbol{uu}}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_K \\ &+ \left\langle B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h), \boldsymbol{v}_h\right\rangle_{\partial K} - (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}_h)_K,\end{aligned} \tag{4.6b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{h,e}^{\widehat{\boldsymbol{u}}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := &\left\langle[\![B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + T(\boldsymbol{u}_h - \widehat{\boldsymbol{u}}_h)]\!], \widehat{\boldsymbol{v}}_h\right\rangle_{e\setminus\partial\Omega_D} - \langle(\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + C)\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h\rangle_{e\cap(\partial\Omega_N\cup\partial\Omega_R)} \\ &+ \langle C\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h\rangle_{e\cap\partial\Omega_D},\end{aligned} \tag{4.6c}$$

对所有 $\mathscr{W}_h\in\boldsymbol{\Sigma}_h\times\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{U}_h$。此时，我们可以进一步基于（4.3）和（4.5）定义一个涵盖这两种情况的更一般的残差：

$$\mathcal{R}_h[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] := \begin{cases} \mathcal{R}_h^{\mathrm{one}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] & \text{if only identified as a one-field Friedrichs' system,} \\ \mathcal{R}_h^{\mathrm{two}}[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h] & \text{if identified as a two-field Friedrichs' system.} \end{cases} \tag{4.7}$$

显然，若使用正确的解来计算，残差始终为零；而使用插值解时，残差通常不为零。也就是说，对于单场 Friedrichs 系统，所有$\mathscr{W}_h\in\boldsymbol{W}_h\times\boldsymbol{W}_h$均满足 $\mathcal{R}_h[\mathscr{Z}_h;\ \mathscr{W}_h]=0$但 $\mathcal{R}_h\left(\mathscr{Z}_H^h;\ \mathscr{W}_h\right)\neq 0$；对于二场 Friedrichs 系统，所有$\mathscr{W}_h\in\boldsymbol{\Sigma}_h\times\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{U}_h$均满足。现在，输出泛函 $\mathcal{J}[\cdot]$ 的误差可近似为[29, 54, 52]：

$$\mathcal{J}[\mathscr{Z}_H] - \mathcal{J}[\mathscr{Z}_h] \approx -\mathcal{R}_h\left[\mathscr{Z}_H^h;\mathscr{W}_h\right], \tag{4.8}$$

其中 $\mathscr{W}_h \in \boldsymbol{W}_h \times \boldsymbol{W}_h$ 且 $\mathscr{W}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$ 分别对应单场和二场 Friedrichs 系统。这里，变量 $\mathscr{W}_h$ 是一个伴随变量，用于检测较不精确的解所导致的输出泛函误差的敏感性。此外，它必须满足伴随 hp-HDG 公式，即（a.1）或（a.4），具体取决于所研究的系统。伴随 hp-HDG 公式的推导及适定性分析见附录 A。

由（4.8）可知，需要两个不同的近似空间。本文通过提高逼近次数而不细化网格，构造更精细的空间。也就是说，用于求解原问题和伴随 hp-混合间断伽辽金公式的网格相同（即 $\mathscr{T}_h = \mathscr{T}_H$），而用于求解原问题和伴随 hp-混合间断伽辽金公式的有限元空间在每个单元上的逼近次数相差一级。这样计算成本相对较低，而且无需增加代码复杂度即可完成空间加密。为进行自适应，我们需要将（4.8）中给出的误差近似局部化。定义局部残差 $\mathcal{R}_{h,\ K}$ 如下：

$$\mathcal{R}_{h,K}\left[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h\right] := \begin{cases} \mathcal{R}^{\boldsymbol{z}}_{h,K}\left[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h\right] & \text{for one-field Friedrichs' system,} \\ \mathcal{R}^{\boldsymbol{\sigma}}_{h,K}\left[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h\right] + \mathcal{R}^{\boldsymbol{u}}_{h,K}\left[\mathscr{Z}_h;\mathscr{W}_h\right] & \text{for two-field Friedrichs' system,} \end{cases} \tag{4.9}$$

并根据相关研究 [29, 52, 54], ，基于伴随方法的局部误差指示子可定义为：

$$\mathscr{E}^{\text{adjoint}}_{H,K} := \left|\mathcal{R}_{h,K}\left[\mathscr{Z}^h_H;\mathscr{W}_h\right]\right|, \tag{4.10}$$

其中，伴随变量 $\mathscr{W}_h$ 是伴随 hp-混合间断伽辽金公式的解，该公式为（a.1）或（a.4）。需要强调的是，误差指示子（4.10）未包含来自迹未知量的贡献（即忽略了 $\mathcal{R}^{\widehat{\boldsymbol{u}}}_{h,e}$ 和 $\mathcal{R}^{\widehat{\boldsymbol{u}}}_{h,e}$ ），因为其影响微不足道 [29, 52]。

REMARK 3. 需要指出的是，(4.8) 中所述的输出误差，可以通过计算 $\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_H\right]$ 与 $\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right]$之间的差直接得到；为此，我们需要在两个不同的近似层次上求解 hp-混合间断伽辽金公式 (3.12)或 (3.34)。不过，在本文中，我们采用 DWR 方法给出的近似。从一般性来看，该方法更具普适性，因为伴随问题始终是线性的，并且在精细近似层次上只需求解这一问题。无论原问题是否为线性问题，这一结论都成立。

4.3. 一种自适应算法。 本研究采用的算法是 [89]，中所提出策略的简化版本，该策略提供了进行 hp 自适应所需的所有关键要素。结合前面对误差指示子的讨论，我们将一般的局部和全局误差指示子记为：

$$\mathscr{E}_{H,K} := \mathscr{E}^{\text{Doleji}}_{H,K} \text{ or } \mathscr{E}^{\text{adjoint}}_{H,K}, \tag{4.11a}$$

$$\mathscr{E}_H := \left(\sum_{K\in\mathscr{T}_h} \mathscr{E}^2_{H,K}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.11b}$$

为了实现完整的 hp 自适应，还需要一种决定如何构造新的空间离散化的方法。在本文中，我们希望能够根据解的光滑性构造空间离散化。为此，需要一个局部正则性指示子，本文采用了 [89] 中提出的正则性指示子。记 $|K|$ 为一个单元的面积，该指示子表示为：

$$\mathscr{G}_K\left(\boldsymbol{q}_h\right) := \frac{\sum_{F\in\partial K}\sum_{e\in F\setminus\partial\Omega}\left\langle[\![\boldsymbol{q}_h]\!],[\![\boldsymbol{q}_h]\!]\right\rangle_e}{|K|\,h_K^{2p_K-3}}, \tag{4.12}$$

其中， $\boldsymbol{q}_h := \boldsymbol{z}_h$ 和 $\boldsymbol{q}_h := \boldsymbol{u}_h$ 分别是单场和二场 Friedrichs 系统。一旦计算出误差指示器和正则性指示子，将执行以下一项或几项操作：

- h-细化[6]：将给定的 母单元 K 通过连接其各边的中点划分为四个子单元 K' 。

[6]我们还强制规定，网格中每个界面内由局部 h 加密产生的悬挂节点数始终为一个。

- p-细化：提高给定单元 K 的多项式逼近次数，即我们设置$p_K = p_K + 1$。
- p-粗化：对于给定单元 K，降低多项式逼近的次数，即设置$p_K = p_K - 1$。

原始策略见 [89], 其中还有两个额外操作，称为 h-粗化和 hp-替换。它们将先前自适应循环中产生的单元与 p-细化、p-粗化或不进行任何操作合并。然而，根据我们的数值实验，这一操作仅略微提高了效率，有时性能似乎还会下降。因此，我们从自适应策略中移除了这些操作。给定用户定义容差 $0 \leq \omega \leq 1$ 和最大循环次数后， hp-自适应过程现在可以按照算法 4.1中概述的策略执行。

算法 4.1 一种 hp-自适应算法

$\mathscr{E}_{H,K} \leftarrow 1 \quad \forall K \in \mathscr{T}_H$ 和 $\mathscr{E}_H \leftarrow 0$ ▷ 启动自适应循环的初始化。
当……时 $\max_{K\in\mathscr{T}_H} \mathscr{E}_{H,K} \geq \omega \mathscr{E}_H$ 或 #cycle≤#max。循环 **执行**
  求解 hp-HDG 公式见于（3.12）或（3.34）中的粗（当前）层级。
  (求解伴随 hp-HDG 公式，见于（a.1）或（a.4）
  在细尺度上（通过提高逼近次数），若采用伴随方法。
  计算并更新式（4.11）中给出的局部和全局误差指示子。
  对于 $K \in \mathscr{T}_H$ **执行**
    若 $\mathscr{E}_{H,K} \geq \omega \max_{K\in\mathscr{T}_H} \mathscr{E}_{H,K}$ **则**
      如果 $\mathscr{G}_K(u_H) \leq h_K^{-2}$ **则**
        将该单元标记为 p-细化
      否则，如果 $h_K^{-2} < \mathscr{G}_K(u_H) \leq h_K^{-4}$ **则**
        将单元标记为 h-细化
      else
        将该单元标记为进行 h 细化，并进行 p 粗化
      结束 if
    结束 if
  结束 for
  执行自适应调整，并构造相应的新有限元空间
结束 while

需要指出的是，在每个 hp 自适应循环中，若 $\omega = 0$ ，则会进行全局细化；若 $\omega = 1$，则只细化一个单元。不过，我们仍会采用相对较小的 ω ，因此不会导致全局细化，因为出于效率考虑，我们希望避免这种情况。这种情况有可能发生，因为本文所求解的所有问题，其解在区域的一部分或边界上都具有极尖锐的梯度。在这种情况下，局部误差指示子的最大值通常相对较大（即 $\max_{K\in\mathscr{T}_H} \mathscr{E}_{H,K} \gg \min_{K\in\mathscr{T}_H} \mathscr{E}_{H,K}$），且其分布偏向于最小值 $\min_{K\in\mathscr{T}_H} \mathscr{E}_{H,K}$。

5. 数值实验。本节将展示针对不同类型偏微分方程的若干数值实验。数值解通过求解 hp-HDG 公式（3.12）或（3.34），并结合第4节讨论的自适应策略得到。主要目的是验证统一的 hp 公式，并考察我们提出的自适应算法的性能。对于性能，我们通过误差的收敛率来衡量，该误差以静态凝聚的 $\mathcal{L}^2$-范数表示，并以静态凝聚的 hp-HDG 公式所产生的自由度（DOF）数量为横轴。需要指出的是，伴随方法所需的自由度略多于 Doleji 方法。这是因为我们还需要求解式（a.1）或（a.4）中给出的伴随 HDG 公式，以获得用于计算误差指示子（4.10）的伴随解。

实验中考虑的偏微分方程可分为椭圆型、双曲型和混合方程。接下来的小节将简要讨论各类偏微分方程，并利用第3节讨论的引理和定理，证明其 HDG 公式的适定性。本节中，我们仅使用下标 h表示数值解。读者不要将其与第 4 节中的记号混淆，在该节中， h 和 H 用于表示不同的层级。

5.1. 椭圆型偏微分方程。对于椭圆型偏微分方程，我们考虑：
(E.1) 具有角点奇异性的泊松问题（各向同性扩散）、（E.2）具有不连续狄利克雷边界条件的各向异性扩散问题，以及（E.3）具有不连续场 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 的非均质各向异性扩散问题。

我们使用具有部分强制性的二场 Friedrichs系统来分析这些问题。问题表述为：求一个函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 使得：

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \nabla u) &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g^u, \quad \text{on } \partial\Omega_D, \\ \widehat{\boldsymbol{\kappa}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} + \lambda u &= g^u, \quad \text{on } \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_R \text{ where } \lambda = 0 \text{ when on the } \partial\Omega_N, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中边界数据 $g^u : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ 属于 $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$，定义为

$$g^u = \begin{cases} g_D \text{ on } \partial\Omega_D, \\ g_N \text{ on } \partial\Omega_N, \\ g_R \text{ on } \partial\Omega_R. \end{cases} \tag{5.2}$$

此处， $f \in \mathcal{L}^2$（Ω）为源项；并且 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \in [\mathcal{L}^\infty$（$\Omega$）$]^d$ 为扩散系数，假设其为对称正定矩阵，且其最小特征值一致地远离零。为了便于之后解释数值结果，我们简要回顾一下（5.1）中所述偏微分方程的一些物理方面。在 Ω 内的每个位置，各向异性的主方向记为 X ，弱扩散方向记为 Y。如图 3 所示，结合物理区域（x_1， x_2）的坐标，可以通过将系统旋转角度 θ_m 来使 x_1 与 X 对齐，从而方程（5.1）变为：

$$\kappa_X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \kappa_Y \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = f \quad \text{in } \Omega,$$

其中， κ_X 和 κ_Y 分别指 X方向和 Y方向上的扩散率。由于 κ_X表示各向异性的主方向，因此始终有 $\kappa_X \geq \kappa_Y$。此时，我们可以定义各向异性比率 $\mathcal{A}_\kappa := \kappa_X / \kappa_Y$，该比率表示各向异性的强度。当 $\mathcal{A}_\kappa = 1$ 时，对应于各向同性扩散（即拉普拉斯方程或泊松方程）。

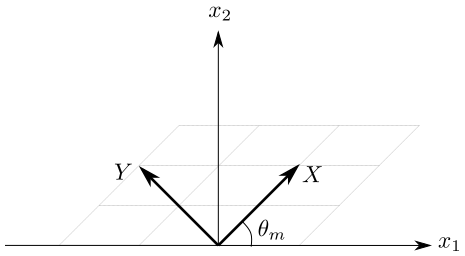


图 3：该 sk 沿各向异性主方向与 X 平行的各向异性场区域 .

为将这些问题纳入 Friedrichs框架，我们通过引入5.1中所述的原始偏微分方程，将其改写为一阶形式，引入辅助变量 $\boldsymbol{\sigma} := -\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \nabla u$:

$$\nabla u + \widehat{\boldsymbol{\kappa}}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{in } \Omega, \tag{5.3a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = f, \quad \text{in } \Omega, \tag{5.3b}$$

$$\begin{aligned} u &= g^u, \quad \text{on } \partial\Omega_D, \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} + \lambda u &= g^u, \quad \text{on } \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R \text{ where } \lambda = 0 \text{ when on the } \partial\Omega_N. \end{aligned} \tag{5.3c}$$

因此，系统的规模确定为： $m = d + 1$、 $m^{\boldsymbol{\sigma}} = d$ 和 $m^{\boldsymbol{u}} = 1$。相应的二场 Friedrichs 系统为：

$$G = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\kappa}}^{-1} & 0_{d\times 1} \\ 0_{1\times d} & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_k = \begin{bmatrix} 0_{d\times d} & \boldsymbol{e}_k \\ \boldsymbol{e}_k^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

其中 $\boldsymbol{e}_k$ 表示 k-th canonical basis in $\mathbb{R}^{m^{\boldsymbol{\sigma}}}$，带下标的 0 表示相应维数的零矩阵。为恰当地施加边界条件，可将边界算子 M 定义为（3.30）：

$$\begin{cases} \alpha = +1,\ M^{\boldsymbol{uu}} = 2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}},\ \text{on } \partial\Omega_D \text{ where } \varrho := \frac{1}{2}, \\ \alpha = -1,\ M^{\boldsymbol{uu}} = 2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}},\ \text{on } \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_R \text{ where } \varrho := \lambda, \end{cases} \tag{5.5}$$

其中我们要求 $\lambda = 0$ 在 $\partial\Omega_N$ 上，且 $\lambda > 0$ 在 $\partial\Omega_R$ 上，以使条件 (2.3b) 和 (2.3c) 成立。

LEMMA 5.1. 偏微分方程 *hp-HDG* 公式（该偏微分方程见 (5.3)）在局部和整体上都是适定的。

证明。 假设 (A.1)-(A.3)、(A4.a)-(A4.b) 和(A.5)-(A.6) 显然可通过将 (5.5) 代入各个条件得到满足。

另一方面，数值通量属于 (F.2) 这一类，其中有：

$$|A| = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T}{\|\boldsymbol{n}\|_2} & 0_{d\times 1} \\ 0_{1\times d} & \|\boldsymbol{n}\|_2^2 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是标准欧几里得范数。因此，稳定化参数为 $T = \|\boldsymbol{n}\|_2^2 = 1$。显然：

- $\frac{1}{2}C + T = T = 1 > 0$，以及
- $\bigcap_{k=1}^{d}$ 值域（$\boldsymbol{e}_k$）$= \emptyset$ 以及 $\mathcal{N}$（$\boldsymbol{e}_k$）$= \{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k = 1, \ldots\ldots, d$。

因此，根据引理 3.9 和定理 3.10 可以得出，*hp*-混合间断伽辽金格式对于椭圆型偏微分方程（5.3）在局部和整体上都是适定的。 □

5.2. 双曲型偏微分方程。我们考虑以下双曲型偏微分方程：

(HP.1) 具有变速和不连续入流条件的稳态线性对流。稳态线性对流的偏微分方程如下：求函数 u：$\Omega \to \mathbb{R}$，使得：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u) &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g_D, \quad \text{on } \partial\Omega^- \end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{\beta} \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^d$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ 且 $g_D \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega^-)$。此处，我们采用以下约定来表示流入边界：$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega : \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} < 0\}$，在本问题组中，它们本质上是狄利克雷边界。众所周知，奇异性（或不连续性）可以通过线性对流传播。因此，如果在流入边界 $\partial\Omega^-$上指定了不连续性，我们可以预期区域 Ω 内会出现激波。该问题可以用单场 Friedrichs 系统进行分析。该系统的大小为$m = 1$，相应的系统如下：

$$G = 0, \qquad A_k = \beta_k \text{ for } k = 1, \cdots, d. \tag{5.8}$$

容易证明，假设 (A.1)-(A.3) 均成立。为满足强制性 (A.4)，我们进一步假设

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \geq 0. \tag{5.9}$$

最后，为了得到适定的HDG格式，我们还要求满足以下条件 ：

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0 \text{ on } e, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \qquad\qquad [\![\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}]\!] = 0 \text{ on } \partial K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{5.10}$$

其中，我们假设 $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}$ 在单元边上始终连续，且在边（或Mortar）上不为零。需要注意的是，连续性条件可以放宽，此时得到的数值通量具有权重平均型稳定化参数 [21]。

LEMMA 5.2. 该 *hp-HDG* 公式对于(5.7) 中所述的偏微分方程，在假设(5.9) 和(5.10)成立时，局部和整体均适定。

证明。 考虑以下变换：

$$u = \chi \tilde{u}, \quad \text{where } \chi := e^{-\gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}}, \tag{5.11}$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$， $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$，且 $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$。将（5.11）代回（5.7），可得 ：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{u}\right) &= f, \quad \text{in } \Omega, \\ \tilde{u} &= \tilde{g_D}, \quad \text{on } \partial\Omega^-, \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \chi\boldsymbol{\beta}$ 且 $\tilde{g_D} = \chi^{-1} g_D$。注意到 $\chi > 0$，因此其逆总是存在。偏微分方程（5.12）也可视为单场 Friedrichs 系统，其中：

$$G = 0, \qquad A_k = \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k. \tag{5.13}$$

显然，(A.1)-(A.3) 均成立，且

$$G + G^T + \sum_{k=1}^{d} \partial_k A_k = \sum_{k=1}^{d} \partial_k \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k = \chi \nabla\cdot\boldsymbol{\beta} - \|\boldsymbol{\beta}\|_2^2 \gamma\chi > 0, \tag{5.14}$$

最后一个不等式由假设（5.9）以及取 $\gamma < 0$即可成立。因此，条件 (A.4)也得到满足。最后， $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{n}\right) = \{0\}$ 在各单元的所有边界面上成立，因为假设 $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}$ 连续，且映射 χ 是微分同胚。借助引理 3.3 和定理 3.4，可得（ hp-混合间断伽辽金公式对于（5.12）在局部和整体上均适定。鉴于映射 χ 是双射，此结论对（5.7）同样成立。 □

5.3. 混合偏微分方程。对于混合偏微分方程，我们考虑：

(HB.1) 具有不连续流入条件的稳态对流扩散问题，

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u - \widehat{\boldsymbol{\kappa}} \nabla u) = f, \quad \text{in } \Omega, \\ &\begin{cases} u = g^u, & \text{on } \partial\Omega^+, \\ (\boldsymbol{\beta} u - \widehat{\boldsymbol{\kappa}} \nabla u) \cdot \boldsymbol{n} = g^u, & \text{on } \partial\Omega^- \cup \partial\Omega_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中边界数据 $g^u : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ 属于 $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$，并定义为

$$g^u = \begin{cases} g_D \text{ on } \partial\Omega^+, \\ g_{N,R} \text{ on } \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega^-. \end{cases} \tag{5.16}$$

这里， $\boldsymbol{\beta} \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega)]^d$、 $\nabla\cdot\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$、 $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$以及 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 是一个定义在Ω上的对称正定矩阵值，其最小特征值一致地远离零。此外， $\partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega_0 = \partial\Omega$，其中 $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega : \ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} < 0\}$ 是流入边界； $\partial\Omega^+ \{x \in \partial\Omega : \ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} > 0\}$ 是流出边界； $\partial\Omega_0 \{x \in \partial\Omega : \ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} = 0\}$ 是零流边界。显然， $\partial\Omega^+ = \partial\Omega_D$ 以及 $\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega^- = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R$。该问题可以通过具有部分强制性的二场Friedrichs 系统进行分析。该系统的规模为 $m = d + 1$、 $m^{\boldsymbol{\sigma}} = d$和 $m^{\boldsymbol{u}} = 1$。该问题的二场 Friedrichs 系统如下：

$$G = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\kappa}}^{-1} & 0_{d\times 1} \\ 0_{1\times d} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A_k = \begin{bmatrix} 0_{d\times d} & \boldsymbol{e}_k \\ \boldsymbol{e}_k^T & \beta_k \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

我们进一步假设：

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{\beta}\right) \geq 0, \tag{5.18}$$

以获得部分强制性。边界条件可通过指定边界算子 M 来施加。

$$\begin{cases} \alpha = +1, \ M^{\boldsymbol{uu}} = 2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}, \ \text{on } \partial\Omega_D, \\ \alpha = -1, \ M^{\boldsymbol{uu}} = 2\varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}, \ \text{on } \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_R. \end{cases} \tag{5.19}$$

此外，我们令 $\varrho = \frac{1}{2}$ 在 $\partial\Omega_D$上， $\varrho = 0$ 在 $\partial\Omega_N$ 上，并且 $\varrho = -\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}$ 在 $\partial\Omega_R$ 上，条件（2.3b）和（2.3c）成立。最后，还假设以下条件：

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} \neq 0 \text{ on } e, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \qquad\qquad [\![\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}]\!] = 0 \text{ on } \partial K, \quad \forall K \in \mathscr{T}_h, \tag{5.20}$$

其中，我们假设 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}$ 在单元边上始终连续，且在边上（或 Mortar 上）不为零。如前一个示例所述，可通过修改迎风通量的推导过程来放宽这一条件。

LEMMA 5.3. 对于 *hp*中所述的偏微分方程，*-HDG* 公式(5.15) 在局部和整体上均适定，只要假设(5.18)和(5.20)成立。

证明。假设(A.1)-(A.3)、(A4.b)和(A.5)-(A.6) 均成立，且易于验证。此外，(A4.a) 也成立，只要假设（5.18）成立。另一方面，对流扩散问题的特征分解为A：

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|^2+4}} \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T & (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} \\ (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}^T & |\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|^2+2 \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

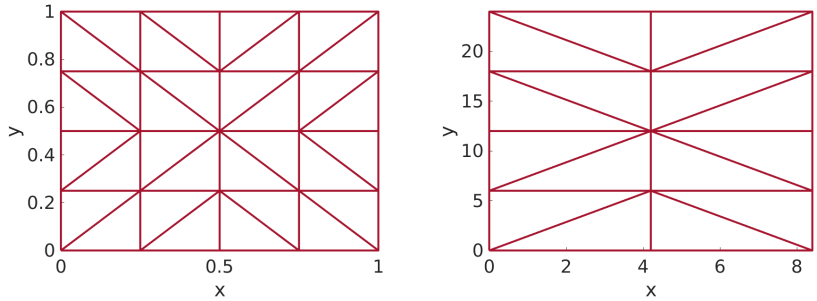
因此，采用以下 $\Phi = \frac{2}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}}$ 和 $\Psi = \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}}{\sqrt{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|^2+4}}$设定后，数值通量的假设(F.1) 将成立，因为 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} \neq 0$ 在所有单元上均成立。于是，稳定化参数为 $T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|^2+4} - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}\right)$。由此可得：

- $\frac{1}{2}C + T = \frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|^2+4} > 0$, and
- $\bigcap_{k=1}^{d} \text{Range}\,(\boldsymbol{e}_k) = \emptyset$ and $\mathcal{N}\,(\boldsymbol{e}_k) = \{\boldsymbol{0}\}$ for $\forall k = 1,\ldots,d$.

根据引理 3.9和定理 3.10，我们得出（5.20）的 HDG 公式在局部和整体上都是适定的。

□

5.4. 数值设置与结果。 对于此前陈述的所有问题的数值实验，(E.1)-(E.3)，(HP.1)，以及 (HB.1)均定义在正方形区域 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$，但 (E.3)定义在矩形区域 $\Omega = [0,8.4]\times[0,24]$上。此外，它们最初在图 4 所示的简单网格上求解，其中 $p_K = 2$ 用于 $\forall K \in \mathscr{T}_h$，处于自适应的第 0 次循环。



（a）初始网格 1　　(b) 初始网格 2

图4：（a）初始 所有数值算例所用的网格，除(E.3)以外。(b) 仅用于(E. 3).

本研究中开发的求解器基于 MATLAB 代码，该代码讨论于 [93]。在数值计算积分时，对单元采用求积公式，对单元表面采用高斯求积。所有问题均使用具有不同误差指示子的算法4.1 进行自适应，这些误差指示子见（4.11）。如果精确解已知，还将给出 $\mathcal{L}^2$-误差范数的收敛历程。

(E.1) 具有角点奇异性的泊松问题。 考虑（5.1）中所述的泊松问题，其中扩散系数 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 设为单位矩阵，强迫项 f 设为零，且精确解如下：

$$u\left(x_1, x_2\right) = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-3/4} x_1 x_2 \left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right). \tag{5.22}$$

在所有边界上施加狄利克雷边界条件，使得解满足 (5.22)。可以证明（见 [94]），(5.22) 中给出的解在原点 $(x_1, x_2) = (0,0)$ 处具有奇异性，但在区域 Ω 的其余部分是正则的。该问题也在 [89, 95] 中进行了研究。

我们将伴随形式的输出泛函（a.4）定义为

$$\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right] := -\left\langle \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_h, 1\right\rangle_{\partial\Omega_{\text{left}} \cup \partial\Omega_{\text{bottom}}}. \tag{5.23}$$

其本质是在存在奇异性的边界上对解进行积分。因此，奇异性引起的误差应当由伴随检测出来。因而，如果奇异性附近的解得到了良好的分辨，误差指示子将会很小。

图9 显示了自适应最后一轮的数值结果，此时使用两个不同的局部误差指示子来驱动自适应过程，容差为 $\omega = 0.01$。图9 所示的网格配置模式完全符合我们的预期，其中在奇异性附近进行激进的 h-细化，而在区域的其他部分进行密集的 p-细化。两种不同方法生成的网格配置相似。在奇异性附近，自适应过程生成了许多采用低阶近似的小单元；而远离奇异性的区域则生成了少量采用高阶近似的大单元。然而，总体而言，与 Doleji 方法相比，伴随方法生成了更高的近似阶数。

尽管奇异性附近存在强烈振荡，hp-自适应会迫使振荡区域缩小。如图9所示，在自适应的最后一个循环中，数值污染区域显著缩小至一个很小的区域。这一改进也可从图5 中看出，其中绘制了 $\mathcal{L}^2$-误差范数的 u_h 收敛历程。图5 还展示了不同容差值 ω 下的收敛性研究。对于较低的容差 $\omega = 0.01$，两种方法均表现出良好的收敛特性，但在给定误差水平下，Doleji 方法所需的自由度少于伴随方法。然而，对于较高的容差 $\omega = 0.1$，Doleji 方法的收敛率在接近 10^3 个自由度时趋于平缓，而伴随方法仍会随着自由度增加至超过 10^3而收敛到真实解。

(E.2) 具有不连续狄利克雷边界条件的各向异性扩散问题。在此例中，我们考虑式（5.1）中给出的强各向异性扩散问题，其中扩散系数 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 设为 $\theta_m = \pi/4$，且 $\mathcal{A}_\kappa = 1000$，强迫项 f 设为零。此外，在所有边界上施加以下分片常数狄利克雷边界条件：

$$g_D = \begin{cases} 1 & \text{when } x_1 = 1 \text{ or } x_2 = 0, \\ 0 & \text{when } x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 1. \end{cases} \tag{5.24}$$

应注意，在角点(0,0) 和(1,1) 处存在间断。 [96, 97] 中也研究了这一问题。通过一系列几何变换可以得到该测试问题的半解析解，这些变换使用 MATLABSchwarz-Christoffel 工具箱 [98]进行数值计算。鉴于映射的精度足够高，我们将这一半解析解视为“精确”解，以此作为基准与我们的 hp-混合间断伽辽金解进行比较。

该问题的伴随形式中使用的输出泛函规定如下：

$$\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right] := -\left\langle \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_h, \cos 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 \right\rangle_{\partial\Omega} \tag{5.25}$$

其中，它是对所有边界上的加权解进行积分，而在此测试案例中，这些边界全都是狄利克雷边界。因此，伴随将尝试检测正弦函数所覆盖的区域，该函数横跨整个区域 Ω。在边界上的此类正弦加权输出也在 [52] 中予以考虑。

在容差 $\omega = 0.01$下，我们在图 10 中绘制了两种方法的数值结果，此时处于 $\mathcal{L}^2$-误差范数的 u_h 相近的自适应循环（约为 $O(10^{-3})$）。由于强烈的各向异性特征，解表现出类似对流的行为，即沿特定方向输运的通量量远比沿其他方向更有利。在此示例中，主导方向与 x_1-轴成 45 度角。因此，区域内沿对角线出现了类似“不连续性”的行为。由于存在不连续的Dirichlet 边界数据，Gibbs 现象 [99] 会在角点 (0,0) 和 (1,1) 附近出现。与(E.1)中所示的数值结果类似，通过自适应过程可以显著减少数值污染区域，尽管无法将其完全消除。这一观察结果也与图6 中给出的收敛历程一致，其中展示了具有各种各向异性比率的不同容差所得到的结果。从收敛历程中可以观察到，在此情况下需要较小的容差值才能实现可接受的收敛率。然而，对于 Doleji 方法，自适应过程由于判据 $\max_{K\in\mathscr{T}_h}\mathscr{E}_{h,K} \geq \omega\mathscr{E}_h$ 而停止；而对于伴随方法，该过程还可以继续进行，并因达到最大迭代次数而停止。最后，我们想指出的是，增大各向异性比率 $\mathcal{A}_\kappa$ 会使问题更难求解，因为 $\boldsymbol{u}_h$ 的轮廓会变得更加陡峭。可能会形成类似激波的前沿，从而导致更多的 h-细化，进而产生更多的自由度。总之，在此情况下两种方法具有可比性，但可能需要更稳健的停止判据。设计稳健停止判据所需的工作可能并不简单，因此我们将在未来的工作中对其加以研究。

(E.3) 具有不连续场的非均质各向异性扩散问题 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$。此处考虑（5.1）中所述的问题，但扩散系数 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 为分片常数，且边界条件为 Neumann/Robin 混合类型

$$\widehat{\boldsymbol{\kappa}}\nabla u\cdot\boldsymbol{n} + \lambda u = g, \quad \text{on } \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R, \tag{5.26}$$

其中 $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_R$。鉴于 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 现在是物理区域（x_1, x_2）的函数，该问题不仅具有各向异性，还具有非均质性。可以用此偏微分方程对非均质材料中的热传导进行建模，其中 u 是未知温度场。例如，所谓的“电池问题” [100], 就是此类模型，本文将对此进行考察。随后将区域建模为由五种不同材料组成的电池，并以数字 1–5 为其编号，具体列于表 1。不同材料的 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 取值及相应的强迫项 f 汇总于表 2。边界数据列于表 3。

此处使用的输出泛函定义如下:

$$\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right] := -\left\langle \boldsymbol{\sigma}_h\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_h, 1\right\rangle_{\partial\Omega_{\text{left}}}, \tag{5.27}$$

这是对左侧边界上解的积分，而该边界实际上是诺伊曼边界。也就是说，区域 Ω 内的数值误差所引起的扰动也会传播到这里，因此可以被伴随检测到。

图 11展示了两种方法在自适应最后一轮、容差为 $\omega = 0.01$ 时的数值结果。该问题的挑战在于，偏微分方程的系数在整个区域内是不连续的。如果不使网格骨架与这些间断对齐，就很容易产生严重的吉布斯现象。在本实验中，每种材料都有一个光滑解，可享有高阶近似；然而，每种材料在材料之间的界面处都具有不连续扩散率，从而导致严重的各向异性，并需要 h-加密。如果我们简单地采用各向同性的 h-加密，那么如果不连续扩散率没有得到充分解析，数值污染区域仍可能在一定程度上扩散。解决这一问题的一种方法是采用各向异性 h-加密[101, 97, 102, 54, 103]。然而，这种加密需要更加精细的误差估计器/指示器，并且需要配备适当的网格生成算法。这项任务留待我们今后的工作中完成。

(HP.1) 变速且入流条件不连续的稳态线性对流。在本实验中，我们将求解（5.7）中描述的线性对流问题，以及对流速度 $\boldsymbol{\beta} =$ （$1 + \sin$（πx_2），2）和给定如下的入流数据:

$$g_D = \begin{cases} 1, & \text{for } x_1 = 0,\ 0 \leq x_2 \leq 1, \\ \sin^6(2\pi x_1), & \text{for } 0 \leq x_1 \leq 0.5,\ x_2 = 0, \\ 0, & \text{for } 0.5 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0, \end{cases} \tag{5.28}$$

材料	区域
1	$[0, 8.4] \times [0, 0.8)$, $(8, 8.4] \times [0.8, 23.2]$, $[0, 8.4] \times (23.2, 24]$
2	$[0, 6.1) \times [1.6, 3.6)$, $[0, 6.1) \times [18.8, 21.2)$
3	$[0, 6.1) \times [3.6, 18.8)$
4	$[6.1, 6。5) \times [0.8, 21。2)$
5	$[0, 6。1) \times [0.8, 1。6)$, $(6。5, 8) \times [0.8, 21.2)$, $[0, 8) \times [21.2, 23.2)$

表 1：由以下方程建模的电池材料几何结构(E.3)。

材料	κ_X	κ_Y	$\mathcal{A}_\kappa$	θ_m	f
1	25.0	25.0	1.00	0.0	0.0
2	7.0	0.8	8.75	0.0	0.0
3	5.0	0.00001	5.00×10^5	0.0	1.0
4	0.2	0.2	1.00	0.0	1.0
5	0.05	0.05	1.00	0.0	0.0

表 2：扩散系数数据 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ 和强迫项数据 f 适用于(E.3)。

边界条件数据	λ	g
Left	0.0	0.0
Up	1.0	3.0
正确。	2.0	2.0
底部	3.0	1.0

表 3：(E.3)的边界数据。

其中原点处恰好存在不连续性。该问题也在 [21, 104] 中进行了研究，并可使用特征线法精确求解。

伴随形式的输出泛函 $\mathcal{J}$ 规定为：

$$\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right] := \left(\frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} - |\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}|\right)\widehat{u}_h, \cos 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2\right)_{\partial\Omega}, \tag{5.29}$$

即在流出边界上对解进行积分。输出泛函（5.29）的设计类似于我们在椭圆问题（5.25）中所采用的设计。双曲型问题所具有的波传播特性意味着，只有当从流出边界回溯到流入边界时，每个数据点都得到适当解析，$\widehat{u}_h$ 才能在流出边界上得到良好求解。因此，如果 $\widehat{u}_h$ 在这些边界上得到良好解析，就可以预期误差指示子能够达到最小。

在图 12中，我们展示了两种方法在自适应最后一轮中的数值结果。由于流入边界数据的不连续性以及双曲型偏微分方程的特性，在区域 Ω 内形成了激波。除非所有间断都与网格骨架以及一阶近似充分对齐，否则消除由 Gibbs 现象引起的振荡极具挑战性。鉴于此处我们仅考虑各向同性 h-加密，因此无法满足这一条件。然而，我们仍然可以通过 hp-自适应过程缩小激波引起的振荡区域。正如预期的那样，激进的 h-加密是在激波附近进行的。然而，在接近流出区域时，自适应以较不激进的方式进行。我们通过数值计算发现，采用伴随方法时，这种较不激进的行为会变得不那么显著。数值结果表明，如果使用更精细的初始网格或更高的初始 p_K，仍然可以获得从流入边界到流出边界的激进 h-加密。

图 7 展示了 $\mathcal{L}^2$-误差范数的 u_h 收敛历程，比较了两种方法以及两种不同的容差值。可以观察到，同样地，只有将容差设置得足够小时，收敛率才能得到提升（不再为零）。否则，在此示例中，两种方法的表现也相当。

(HB.1) 具有不连续入流条件的稳态对流扩散问题。 在此示例中，我们关注稳态对流扩散方程（5.15），并重点考察 Eriksson 和 Johnson 首先在 [105]中提出的问题。该问题也在 [106] 中使用不连续 Petrov-Galerkin 方法进行了研究。扩散率矩阵设为 $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} := \epsilon I_2$ 其中 I_2 是 2×2 单位矩阵

ma阵，速度场定义为 $\boldsymbol{\beta} := (0, 1)$。边界条件如下 :

$$\begin{aligned}\partial\Omega^- &= \{(x_1, x_2) : x_1 = 0,\, 0 \le x_2 \le 1\},\\ \partial\Omega^+ &= \{(x_1, x_2) : x_1 = 1,\, 0 \le x_2 \le 1\},\\ \partial\Omega_0 &= \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\, x_2 = 0 \text{ or } 1\}.\end{aligned}$$

边界条件如下:

$$\begin{aligned} g_D &= 0,\\ g_{N,R} &= \begin{cases} (\boldsymbol{\beta} u_0 + \boldsymbol{\sigma}_0)\cdot \boldsymbol{n} \text{ on } \partial\Omega^-,\\ 0 \text{ on } \partial\Omega_0, \end{cases}\end{aligned} \tag{5.30}$$

且 $u_0 := u(0, x_2)$， $\boldsymbol{\sigma}_0 := \boldsymbol{\sigma}(0, x_2)$。此外，函数 u_0 被设为不连续函数:

$$u_0(x_2) = \begin{cases} (x_2 - 1)^2, & x_2 > 0.5,\\ -x_2^2, & x_2 \le 0.5. \end{cases} \tag{5.31}$$

Eriksson-Johnson 问题可通过分离变量法求解，其解为:

$$u(x_1, x_2) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{e^{s_2(x_1-1)} - e^{s_1(x_1-1)}}{e^{-s_2} - e^{-s_1}} \cos(i\pi x_2), \tag{5.32}$$

其中

$$\begin{aligned} C_i &= \int_0^1 2u_0 \cos(i\pi x_2)\, dx_2,\\ s_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon\sigma_i}}{2\epsilon},\\ \sigma_i &= \epsilon i^2 \pi^2. \end{aligned}$$

在这个测试案例中，实际上有 $\partial\Omega^- = \partial\Omega_D$， $\partial\Omega^+ = \partial\Omega_R$，且 $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_N$。注意，精确解没有闭式解。因此，在进行收敛性研究时，我们使用级数（5.32）中的前 20 项来近似 u_0 。同样， $\boldsymbol{\sigma}_0$ 也可以用相同的方法近似。这个问题颇具挑战性，因为不仅入流数据不连续，而且流出边界附近还形成了边界层。此外，扩散系数 ϵ 越小，边界层就越薄。要充分分辨该边界层，网格必须具有适当的分辨率。

伴随形式的输出泛函 $\mathcal{J}$ 规定为:

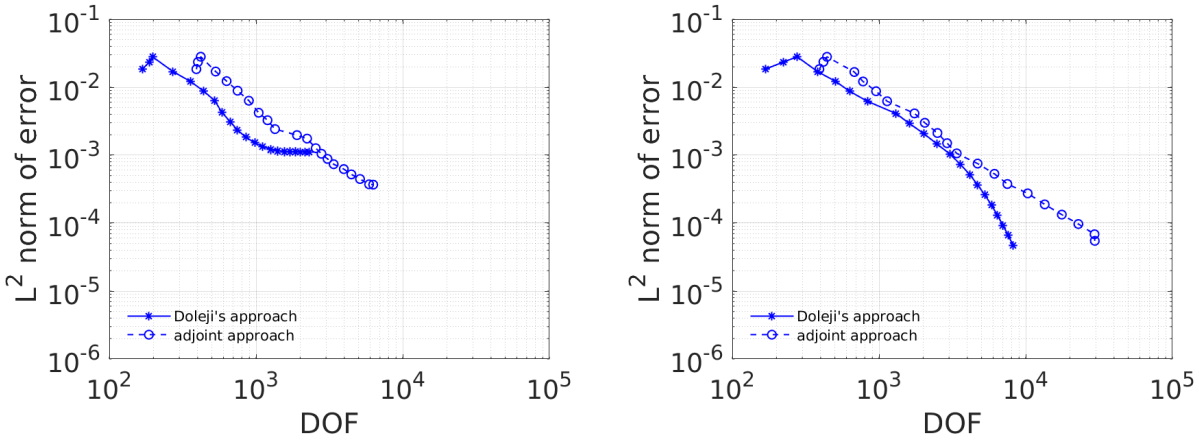
$$\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h] := (\widehat{\boldsymbol{u}}_h, 1)_{\partial\Omega_{\text{right}}} \tag{5.33}$$

其中积分定义在流出边界 $\partial\Omega^+$上。我们选择这一输出泛函的原因有两个方面。首先，在流出边界附近会形成一个边界层。其次，受（5.29）的设计启发，尽管波在传播过程中会耗散，但在混合型问题中仍然存在携波特征。简而言之，我们应当通过降低与（5.33）相关的误差指示子值，妥善处理这两个问题。

图13 展示了扩散率为 $\epsilon = 10^{-3}$ 、容差为$\omega = 0.05$ 时两种方法在自适应最后一轮的数值结果。如前文所述，流出边界 $x_1 = 1$附近存在边界层（解 u_h中的尖锐梯度）。在此示例中，两种方法得到的 p_K 映射存在显著差异。对于 Doleji方法，即使施加不连续的Dirichlet边界数据时流入边界处还存在另一个陡峭梯度，边界层中产生的尖锐梯度仍主导着 hp-自适应过程。因此，流入区域中的细化程度较低。具体而言，由于边界层周围的局部误差指示子值$\mathscr{E}_{h\,K}^{\text{Doleji}}$ ，高于流入边界周围区域的值，除非一个

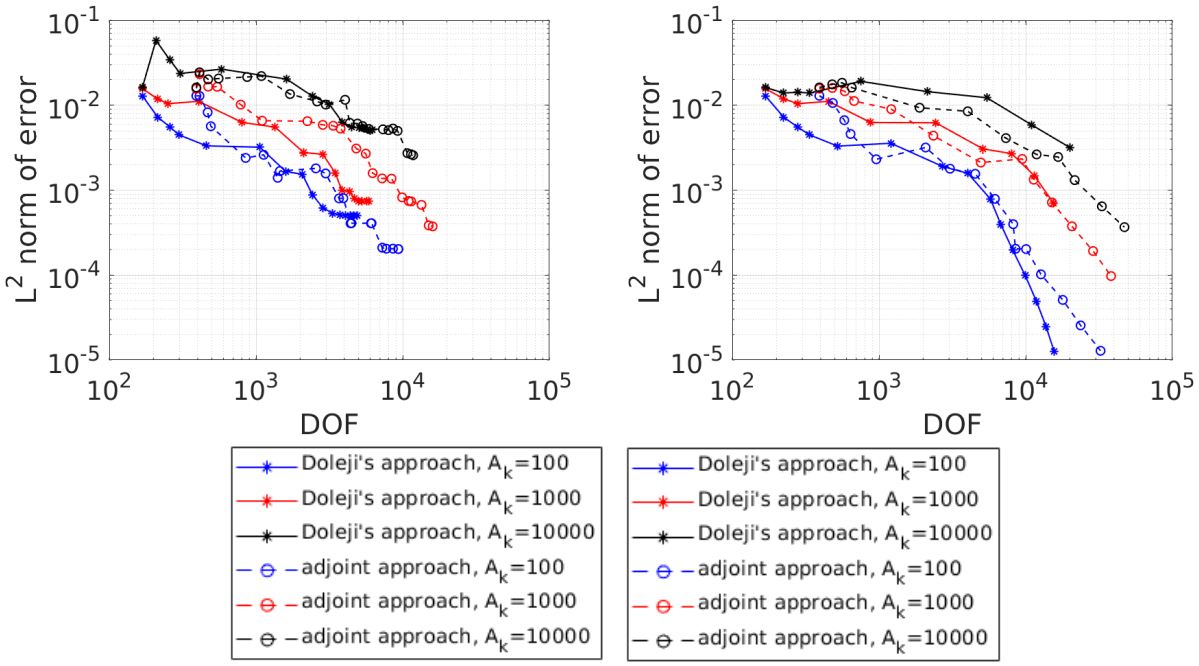
提供了更小的容差值。此外，该方法采用了较低的逼近次数，未能检测出光滑区域。另一方面，对于伴随方法，入口和流出边界处的尖锐梯度特征均通过 h-加密捕捉到。然而，我们需要在流出边界处进行更多网格加密，才能充分解析边界层。边界层解析不充分是图 8 中伴随方法收敛率趋于平缓的原因。

图 8 展示了两种不同方法在三种不同扩散率下的收敛历程： $\mathcal{L}^2$-误差范数 u_h 。为捕捉更薄的边界层，当解的扩散性较弱、因而对流占主导时，我们采用更严格的容差值。在此测试案例中，就精度和收敛率而言，Doleji 方法略优于伴随方法。



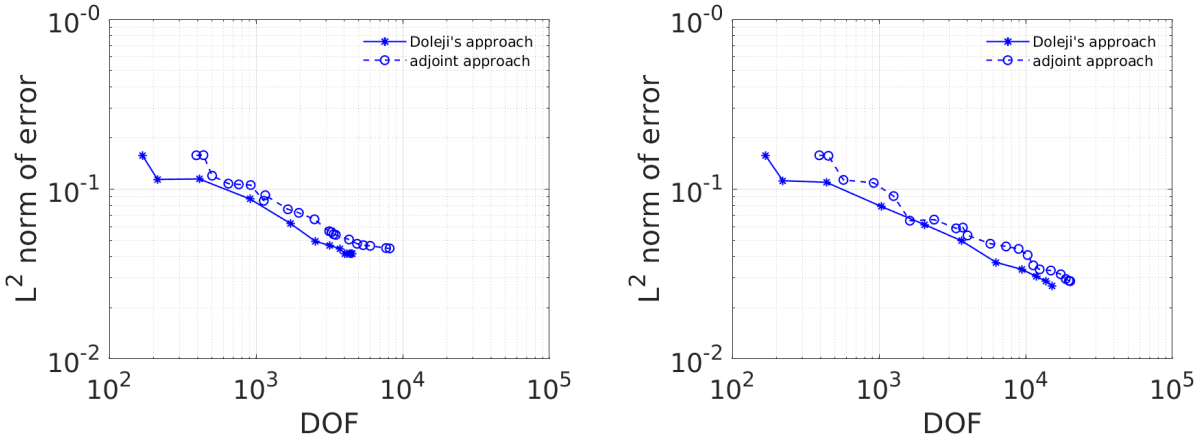
(a) 容差 $\omega = 0.1$ (b) 容差 $\omega = 0.01$

图 5：通过数值求解椭圆问题 $\mathcal{L}^2$ 的误差范数收敛历程 u_h ；该问题 (E.1) 具有（5.22）中给出的精确解，并采用不同的容差 (a) $\omega = 0.1$ 和 (b) $\omega = 0.01$。每幅图中均展示了 Doleji 方法和伴随方法所得的结果。特别是，伴随方法是针对（5.23）中定义的输出泛函推导得到的。



（a）容差 $\omega = 0.1$　　（b）容差 $\omega = 0.01$

图 6：通过数值求解椭圆问题 $\mathcal{L}^2$的误差范数收敛历程，其中 u_h 半解析解可借助精确映射获得。(E.2) 采用了不同的容差值：（a） $\omega = 0.1$ 和（b） $\omega = 0.01$ 。每幅图中展示了采用不同方法（以不同标记表示）得到的各种各向异性比 $\mathcal{A}_\kappa$ （以不同颜色表示）的结果。伴随方法是针对（5.25）中定义的输出泛函推导得到的。



（a）容差 $\omega = 0.1$　　（b）容差 $\omega = 0.05$

图 7：通过数值求解双曲问题 $\mathcal{L}^2$ 的误差范数收敛历程，其中 u_h (HP.1)。精确解可通过特征线法求得。采用两种不同方法以及两种不同容差得到的结果分别见 (a) $\omega = 0.1$ 和 (b) $\omega = 0.05$ 。伴随方法是针对式（5.29）中定义的输出泛函推导的。

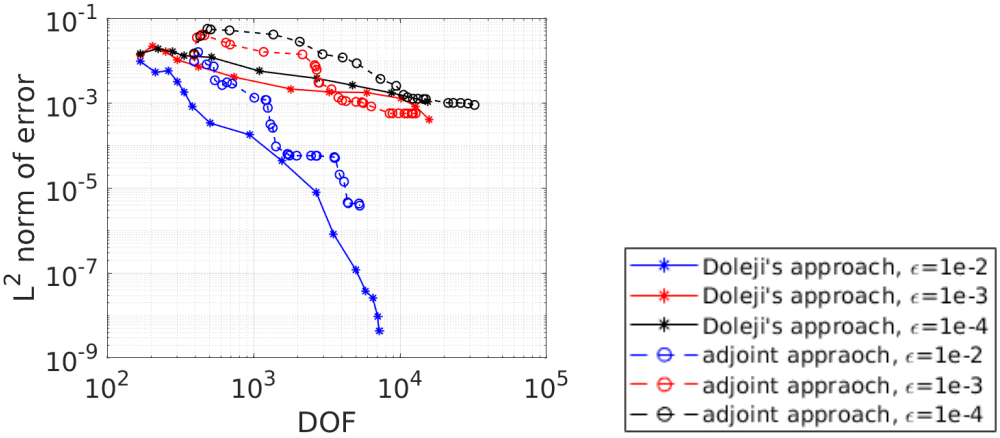


图8： $\mathcal{L}^2$-误差范数的 u_h ，通过数值求解混合问题(HB.1) ，该问题具有（5.32）中所述的精确解。展示了采用不同方法（以不同标记表示）获得的各种扩散率值 ϵ （以不同颜色表示）的结果。对于不同的扩散率值 $\epsilon = 10^{-2}$、10^{-3}和 10^{-4}，分别使用不同的容差 $\omega = 0.1$、0.05 和 0.01。伴随方法针对（5.33）中定义的输出泛函推导得到。

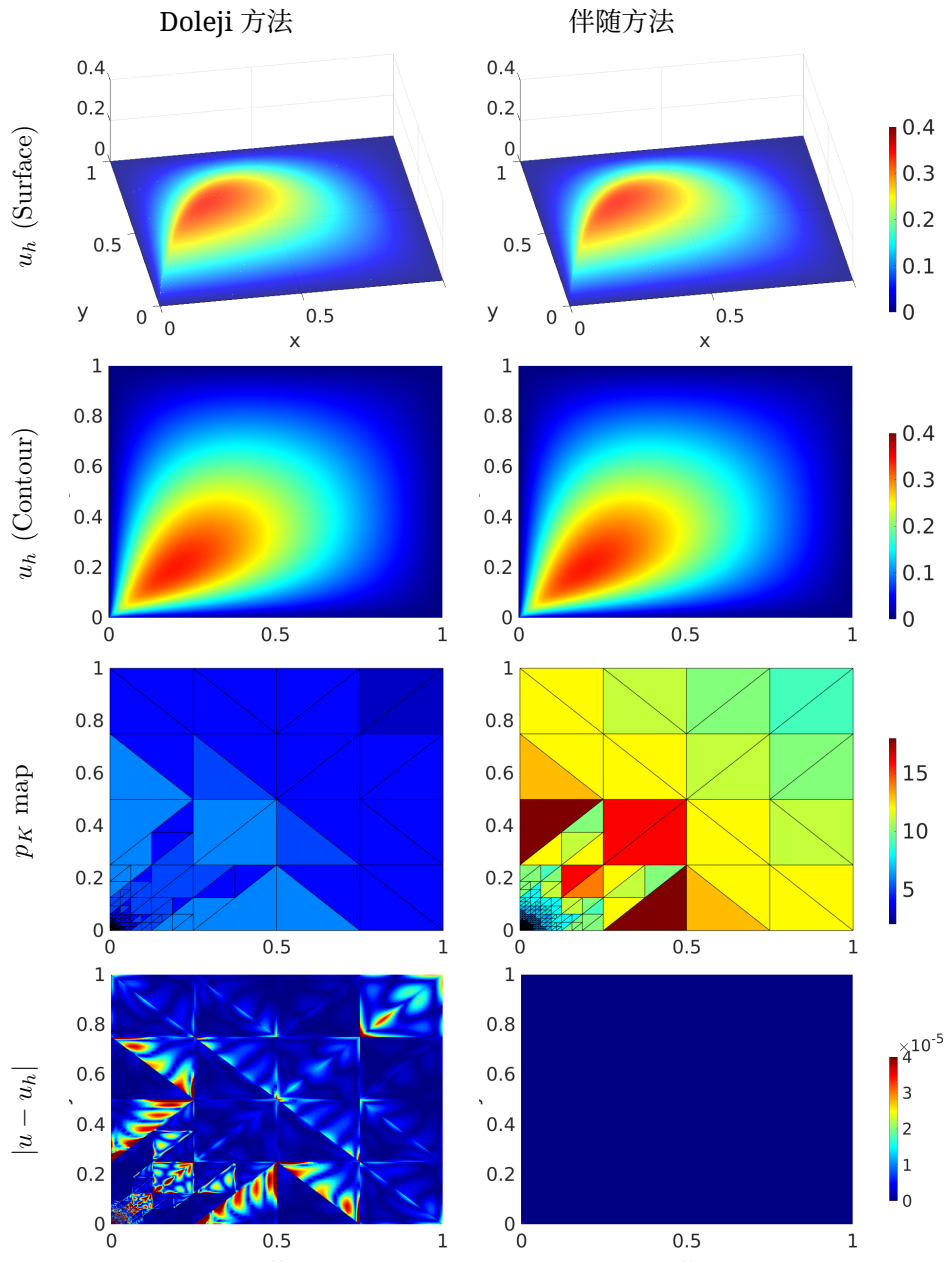


图 9：椭圆问题自适应最后一轮的数值结果 (E.1) 该问题具有（5.22）中所述的精确解。采用两种不同的局部误差指标/估计来驱动自适应过程，容差为 $\omega = 0.01$。左列采用 Doleji 方法（4.1），而右列采用伴随方法（4.10），对应于（5.23）中定义的输出泛函。前两行给出了数值解的曲面图和等高线图，第三行给出了网格配置以及逼近次数 p_K 的排列，第四行给出了绝对误差。

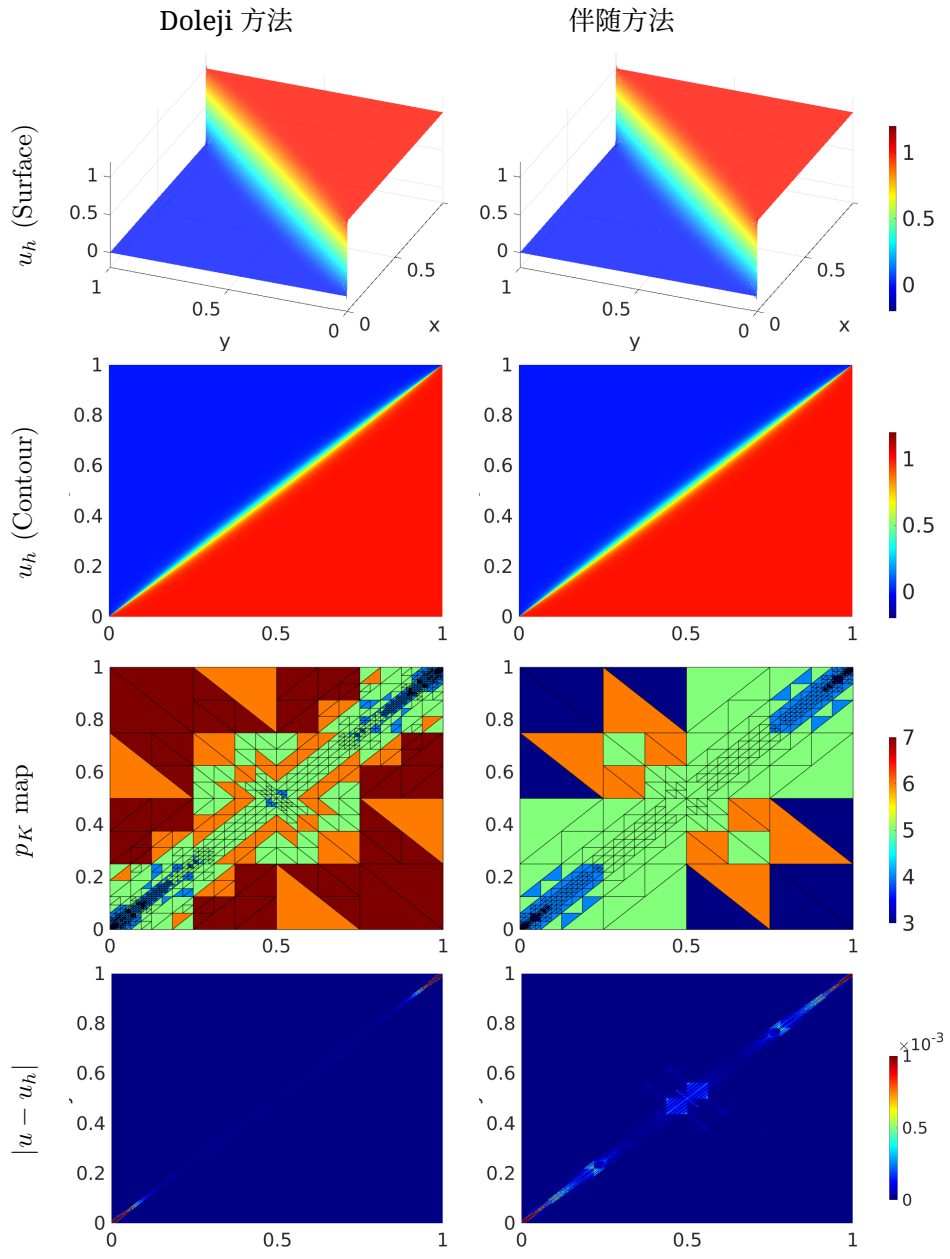


图 10：在以下自适应循环中，数值结果为 $\mathcal{L}^2$-误差范数 u_h 相近， $O(10^{-3})$ ，对于两种方法，自适应过程均由容差 $\omega = 0.01$驱动。通过求解椭圆问题 （E.2）获得结果，其中各向异性比 $\mathcal{A}_\kappa = 1000$ ，并且可借助精确映射获得半解析解。左列采用 Doleji 方法（4.1），右列采用伴随方法（4.10），并针对（5.25）中定义的输出泛函。前两行展示数值解的曲面图和等高线图，第三行展示网格配置以及逼近次数 p_K 的排列，第四行展示绝对误差。

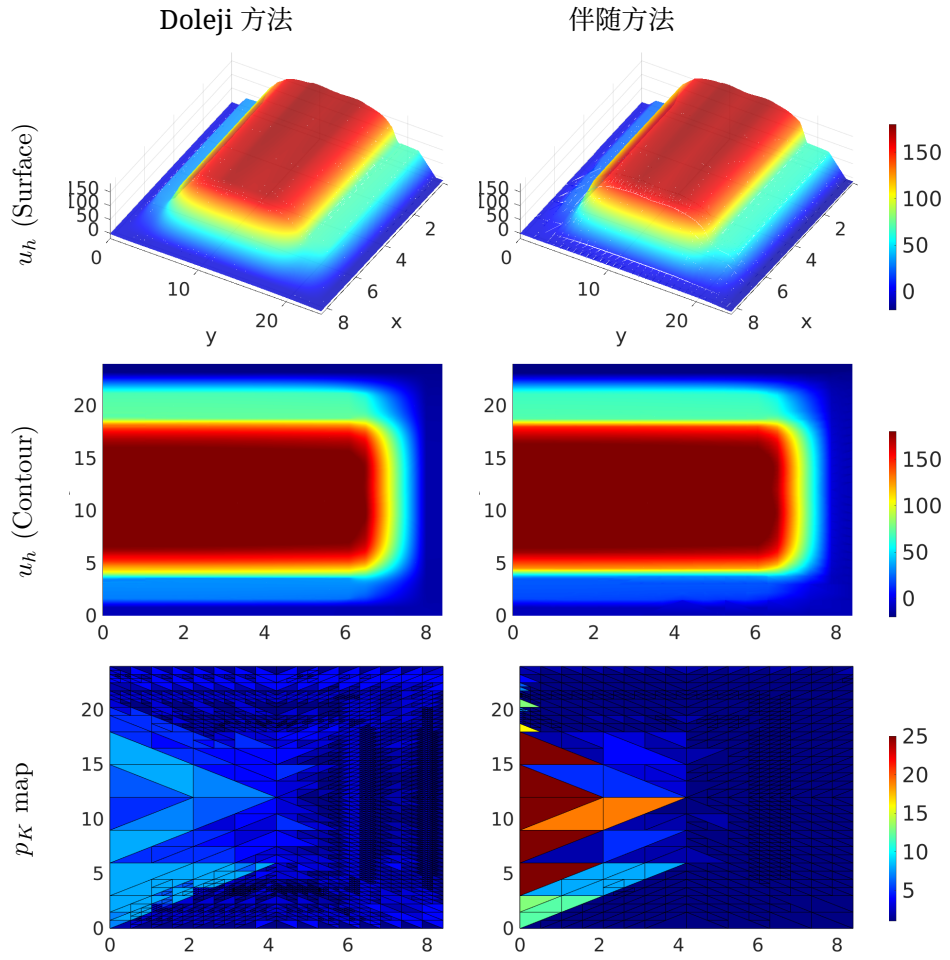


图 11：椭圆问题 (E.3)在自适应最后一轮的数值结果。采用两种不同的局部误差指示子/估计来驱动自适应过程，容差为 $\omega = 0.01$。左列采用 Doleji 方法（4.1），右列则采用伴随方法（4.10），针对的是式（5.27）中定义的输出泛函。第一、二行展示数值解的曲面图和等高线图，第三行展示网格配置以及逼近次数 p_K 的分布。

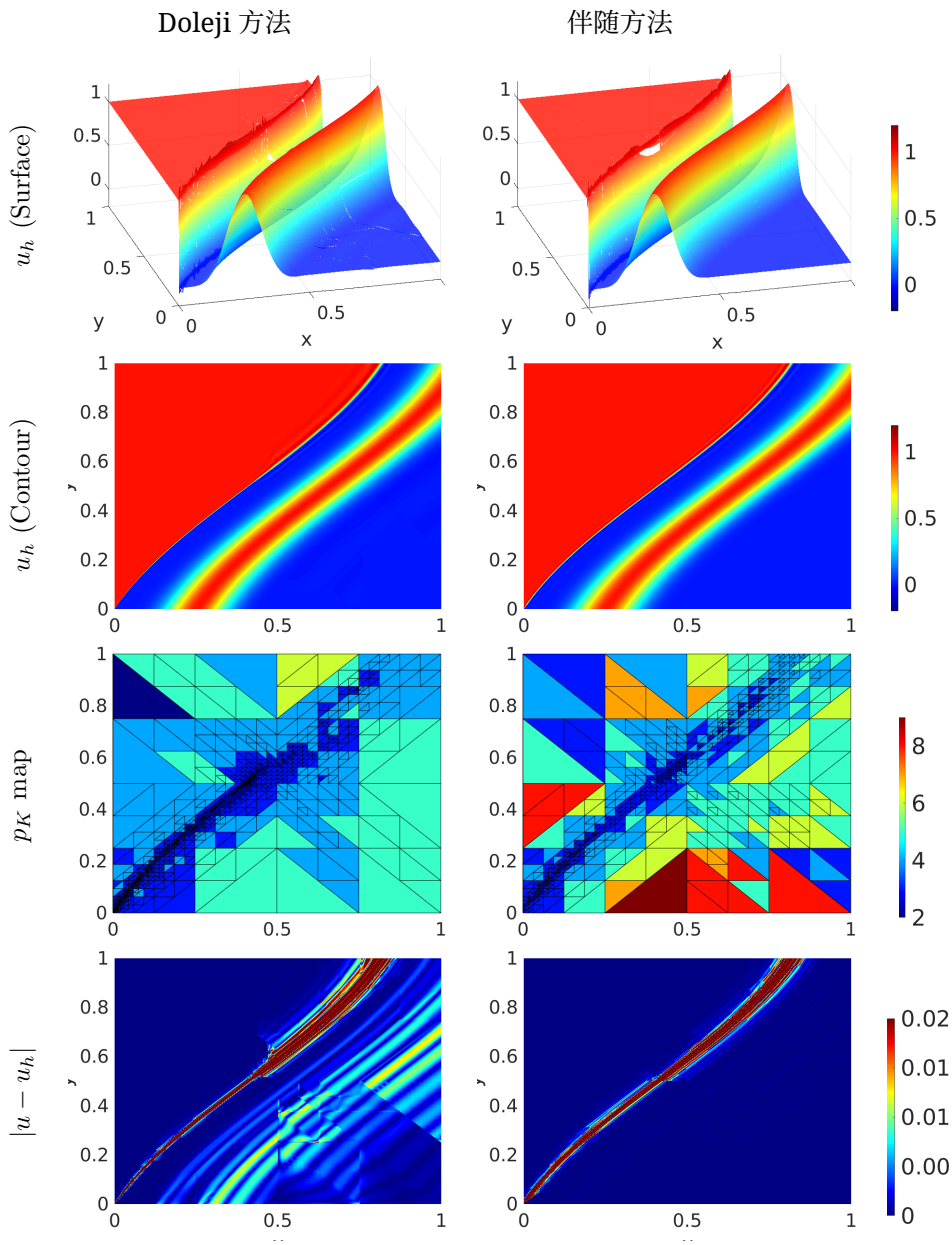


图 12：双曲问题 (HP.1) 在自适应最后一轮的数值结果，其中精确解可通过特征线法求得。采用两种不同的局部误差指示子/估计来驱动自适应过程，容差为 $\omega = 0.05$。左列使用 Doleji 方法（4.1），右列则使用伴随方法（4.10），针对式（5.29）中定义的输出泛函。前两行展示数值解的曲面图和等高线图，第三行展示网格配置及逼近次数 p_K 的分布，第四行展示绝对误差。

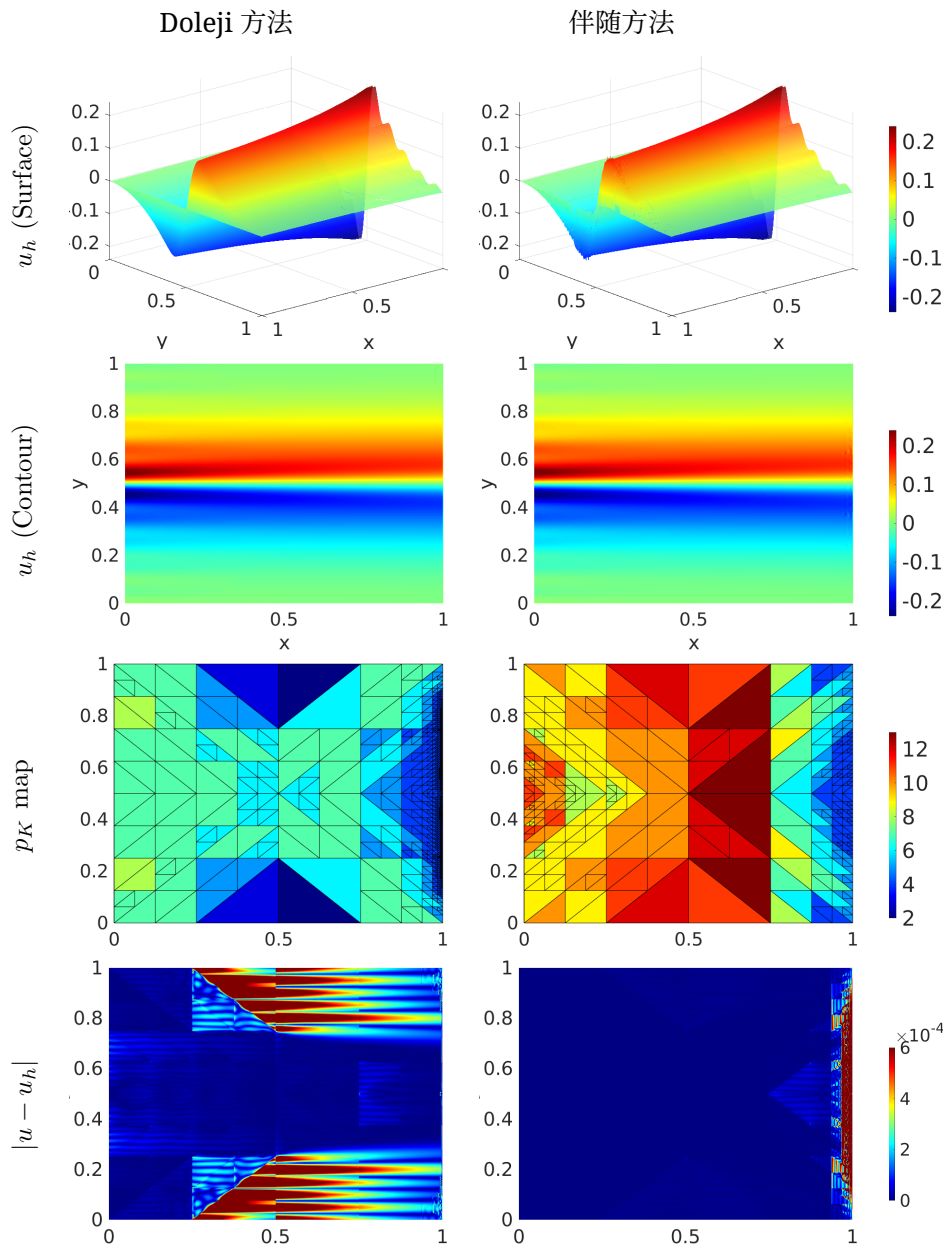


图 13：混合问题自适应最后一轮的数值结果 (HB.1) 该问题具有（5.32）中所述的精确解。使用两种不同的局部误差指标/估计，在容差 $\omega = 0.05$下驱动自适应过程。左列使用 Doleji 方法（4.1），而右列则针对（4.10）中定义的输出泛函使用伴随方法（5.33）。数值解的曲面图和等高线图显示在前两行中，网格配置以及逼近次数的排列 p_K 显示在第三行中，绝对误差显示在第四行中。

6. 结论。本文提出了适用于 Friedrichs 系统的统一 hp-HDG 框架，涵盖了大类偏微分方程。处理 hp 非协调界面的关键在于利用混合间断伽辽金方法中天然内置的 Mortar。通过选择这种 Mortar 类型和迹未知量近似空间，可以自然地推导并构造定义在这些 Mortar 上的基于迎风的数值通量。对于单场系统，我们给出了数值通量的一般形式。对于双场系统，我们利用系统的内在结构，在消去两个迹未知量之一的同时得到数值通量。尽管只有引入少量假设才能保证这种数值通量的存在，但这一显式的约化形式是证明适定性的关键。总而言之，将所有组成部分结合起来后，所得的 hp-HDG 公式不含参数，并且已证明对单场和双场 Friedrichs 系统均适定。证明基于 Friedrichs 系统中列出的假设以及少量附加假设。对于本文考虑的所有数值算例，这些假设均得到验证。正如我们所见，Friedrichs 系统使我们能够系统地构造并分析适用于单场和双场系统的 hp-HDG格式。这种统一性为我们开发单一通用代码以求解各类偏微分方程创造了机会。

除分析之外，还开展了若干数值实验。在这些实验中，考虑了三种不同类型的偏微分方程：椭圆型、双曲型和混合型。我们证明了这些偏微分方程属于我们的框架，因此其 hp-混合间断伽辽金公式是适定的。此外，为验证 hp-自适应的有效性，我们还提出了一个简单的算法，以及两种驱动自适应性的方法：Doleji 方法和伴随方法。它们的差异在于误差指示子的构造。第一种方法依赖于对近似解相对于待求解偏微分方程的光滑性的估计。第二种方法依赖于对所选输出泛函精度的估计。就性能而言，如果采用适当的容差，两种方法在自适应过程中几乎所有示例中都改善了收敛率。随着自适应过程的推进，由奇异性、不连续性或尖锐梯度引起的数值污染区域可以逐渐减小。总而言之，这两种方法的性能相当，尽管有时其中一种优于另一种。我们还发现，两种方法都对用户定义容差值相当敏感。具体而言，对于解在同一区域内具有极为不同特征的问题，该数值必须足够小

最后，我们补充几点说明。在本文中，我们只考虑了一场和二场 Friedrichs系统。另一种重要结构是三场系统，其中包括由线性化不可压缩流支配的偏微分方程。然而，这样的系统需要大量专门讨论，值得另行撰写论文加以阐述。因此，将其留待我们今后的工作。另一点说明涉及含时偏微分方程。尽管本文只考虑稳态偏微分方程，但借助 Rothe 方法，将我们当前的工作扩展到含时模型并不困难 [107] 其中，时间导数项首先通过某种单步时间格式进行离散化。离散化后的项可以视为反应项和强迫项，所得半离散偏微分方程随后可以改写为（2.1）中所述的一般守恒形式。因此，本文中的分析仍然适用。然而， hp- 自适应算法可能需要重新设计，因为不同的时间步长可能导致解表现出不同的行为。因此，为应对这一变化，可能需要进行 h-粗化操作。此外，还需要认真处理每次自适应之间解的适当传递。

致谢。 感谢 Geonyoung Lee 就椭圆方程的 hp-自适应性开展富有成果的讨论。本研究部分由美国国家科学基金会项目 NSF-OAC- 2212442、NSF-2108320、NSF-1808576 和 NSF-CAREER-1845799 资助；由能源部项目 DE-SC0018147 和 DE-SC0022211 资助。

附录 A. 伴随 hp-HDG 公式。 尽管本文采用离散伴随方法，但 [91] 中概述的伴随问题推导仍然适用。这里不将控制方程（2.1）视为原问题，而是将（ hp-HDG 公式（见（3.12）或（3.34））视为原问题。下面简要概述伴随问题的推导过程：

1. 将原始问题，即（3.12）或（3.34），重新表述为双线性形式。2. 定义近似解的输出泛函 $\mathcal{J}[\cdot] \quad \mathscr{Z}_h$ ，并将其作为优化问题的目标函数，同时以第一步给出的双线性形式作为约束。3. 将上一步构造的约束优化问题重新表述为无约束的

一种通过拉格朗日方法的途径，其中双线性形式中的测试函数 $\mathscr{W}_h$ 现在成为拉格朗日乘子。

4. 利用一阶最优性条件求解这一平凡优化问题，随后即可推导出伴随 hp-HDG 公式。

采用第一种方式时，也可以按照类似的步骤推导伴随偏微分方程。不过需要注意的是，通过第一种和第二种方式推导出的伴随 hp-HDG 公式不一定相同，事实上，本文中的二者就有所不同。为了表示伴随 hp-HDG 公式，我们还必须引入泛函导数 $\frac{\delta \mathcal{J}[X]}{\delta Y}$ 的记号，它表示泛函 $\mathcal{J}[X]$的微分（或变分，或一阶变分）。

关于单场 Friedrichs 系统的伴随 hp-HDG 公式如下：求 $(\boldsymbol{w}_h, \widehat{\boldsymbol{w}}_h) \in \widehat{\boldsymbol{W}}_h \times \boldsymbol{W}_h$，使得：

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(\boldsymbol{w}_h, \partial_k\left(A_k \delta \boldsymbol{z}_h\right)\right)_{\mathscr{T}_h}+\left(G^T \boldsymbol{w}_h, \delta \boldsymbol{z}_h\right)_{\mathscr{T}_h}+\left\langle -A \widehat{\boldsymbol{w}}_h+T\left(\boldsymbol{w}_h-\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right), \delta \boldsymbol{z}_h\right\rangle_{\partial \mathscr{T}_h}=-\frac{\delta \mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right]}{\delta \boldsymbol{z}_h} \tag{a.1a}$$

$$\left\langle[\![-A \widehat{\boldsymbol{w}}_h+T\left(\boldsymbol{w}_h-\widehat{\boldsymbol{w}}_h\right)]\!], \delta \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h}=-\left\langle\frac{1}{2}\left(-A+M\right)^T \widehat{\boldsymbol{w}}_h, \delta \widehat{\boldsymbol{z}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}-\frac{\delta \mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right]}{\delta \widehat{\boldsymbol{z}}_h}, \tag{a.1b}$$

对所有 $(\delta \boldsymbol{z}_h, \delta \widehat{\boldsymbol{z}}_h) \in \boldsymbol{W}_h \times \boldsymbol{W}_h$均成立。稳定化参数仍设为 $M:=T$。为了纳入边界条件，输出泛函必须包含以下项：

$$\mathcal{J}\left[\mathscr{Z}_h\right]=-\left\langle\frac{1}{2}\left(-A-M\right)^T \widehat{\boldsymbol{z}}_h, \boldsymbol{g}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}, \tag{a.2}$$

其中，函数 $\boldsymbol{g}: \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ 定义为

$$\boldsymbol{g}:=\begin{cases}\boldsymbol{g_D} & \text{if } (A+M) \neq 0, \\ \mathbf{0} & \text{if } (A+M)=0,\end{cases} \tag{a.3}$$

其中，$\boldsymbol{g_D}$ 为 Dirichlet 数据。比较（3.9）和（a.3），可以看出，原始形式（3.12）与其伴随形式（a.1）中的流入边界和流出边界互换了。还应注意，如果输出泛函不包含式（a.2）中指定的项（即 $g_D = 0$），则伴随问题（a.1）将自动满足齐次边界条件。

适定性分析与局部方程（a.1a）的引理3.3 以及伴随 hp-混合间断伽辽金公式（a.1）的定理3.4 类似。因此，为简洁起见，我们仅概述以下关于适定性的引理和定理，不作证明。

LEMMA A.1（局部方程的适定性）。假设*(A.1)-(A.4)* 成立，则局部求解器(a.1a) 是适定的。

THEOREM A.2（ hp-HDG 公式的适定性）。 假设
1. 这些假设 *(A.1)-(A.4)* 以及 (2.3b)均成立。2. $\mathcal{N}($
$A) = \{\mathbf{0}\}$。
有 *ex* 存在唯一解 $\widehat{\boldsymbol{w}}_h \in \boldsymbol{W}_h$ 对于伴随 *hp-HDG* 公式，定义见 (a.1)。

另一方面 h 以及，关于二场 Friedrichs 系统的伴随 hp-HDG 公式

$\widehat{}$读作：求 $(\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{v}_h, \widehat{\boldsymbol{v}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$ 使得

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(\boldsymbol{v}_h, \partial_k\left(B_k^T \delta\boldsymbol{\sigma}_h\right)\right)_{\mathscr{T}_h} + \left((G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}})^T \boldsymbol{s}_h + ((G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}})^T \boldsymbol{v}_h, \delta\boldsymbol{\sigma}_h\right)_{\mathscr{T}_h} - \langle B\widehat{\boldsymbol{v}}_h, \delta\boldsymbol{\sigma}_h\rangle_{\partial\mathscr{T}_h} = -\frac{\delta\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h]}{\delta\boldsymbol{\sigma}_h} \tag{a.4a}$$

$$-\sum_{k=1}^{d}\left(\boldsymbol{s}_h, \partial_k\left(B_k\delta\boldsymbol{u}_h\right)\right)_{\mathscr{T}_h} - \sum_{k=1}^{d}\left(\boldsymbol{v}_h, \partial_k\left(C_k\delta\boldsymbol{u}_h\right)\right)_{\mathscr{T}_h} + \left(G^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}})^T \boldsymbol{s}_h + (G^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}})^T \boldsymbol{v}_h, \delta\boldsymbol{u}_h\right)_{\mathscr{T}_h} + \left\langle -B^T\boldsymbol{s}_h - C^T\widehat{\boldsymbol{v}}_h + T\left(\boldsymbol{v}_h - \widehat{\boldsymbol{v}}_h\right), \delta\boldsymbol{u}_h\right\rangle_{\partial\mathscr{T}_h} = -\frac{\delta\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h]}{\delta\boldsymbol{u}_h} \tag{a.4b}$$

$$\left\langle [\![-B^T\boldsymbol{s}_h - C^T\widehat{\boldsymbol{v}}_h + T\left(\boldsymbol{v}_h - \widehat{\boldsymbol{v}}_h\right), \delta\boldsymbol{u}_h]\!], \delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right\rangle_{\mathcal{E}_h\setminus\partial\Omega_D} = \langle \varrho I_{m^{\boldsymbol{u}}}\widehat{\boldsymbol{v}}_h, \delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\mathcal{E}_h\cap(\partial\Omega_N\cup\partial\Omega_R)} - \frac{\delta\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h]}{\delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h} \tag{a.4c}$$

$$\langle\widehat{\boldsymbol{v}}_h, \delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial\cap\partial\Omega_D} = -\frac{\delta\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h]}{\delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h}, \tag{a.4d}$$

$\widehat{}$对于所有 $(\delta\boldsymbol{\sigma}_h, \delta\boldsymbol{u}_h, \delta\widehat{\boldsymbol{u}}_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{U}_h$。必须将以下项添加到输出泛函中，以纳入边界条件：

$$\mathcal{J}[\mathscr{Z}_h] = \left\langle -B^T\boldsymbol{\sigma}_h - (C+T)\left(\boldsymbol{u}_h + \widehat{\boldsymbol{u}}_h\right), \Pi\boldsymbol{g_D}\right\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial\cap\partial\Omega_D} - \langle\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \Pi\boldsymbol{g_N}\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial\cap\partial\Omega_N} - \langle\widehat{\boldsymbol{u}}_h, \Pi\boldsymbol{g_R}\rangle_{\mathcal{E}_h^\partial\cap\partial\Omega_R}, \tag{a.5}$$

其中 Π 表示 $\mathcal{L}^2$-投影到空间 $\left\{\widehat{\boldsymbol{u}}_h|_{\partial\Omega}\,\forall\widehat{\boldsymbol{u}}_h \in \widehat{\boldsymbol{U}}_h\right\}$。引理3.7 和定理3.8 中采用的类似分析仍可用于具有完全强制性的原始形式（ *hp*-HDG 公式（a.4）的伴随形式（3.34）。同样，引理3.9 和定理3.10中给出的类似论证也可用于相同的伴随形式（a.4），但此时原始形式（3.34）具有部分强制性。为简洁起见，下面给出适定性相关的引理和定理，不再证明。

LEMMAA.3（局部方程的适定性——具有完全强制性）。由(a.4a) 和(a.4b) 组成的局部求解器满足以下条件时是适定的：

1. 假设*(A.1)-(A.6)* 成立，且2. $\frac{1}{2}C + T \geq 0$，并且
3. B_k 是常数，且对 $k = 1, \ldots, d$非零。

THEOREM A.4（ *hp*-混合间断伽辽金公式的适定性——具有完全强制性）。假设：

1. 假设*(A.1)-(A.6)* 和(2.3b)成立，且2. $\frac{1}{2}C + T \geq 0$，并且
3. B_k 是常数，且对 $k = 1, \ldots, d$，并且4.$\bigcap_{k=1}^{d}$ 的值域(B_k) $= \emptyset$和 $\mathcal{N}(B_k) = \{\mathbf{0}\}$ 对 $\forall k = 1, \ldots, d$。

Th $\widehat{}$其中，存在唯一的解 $\widehat{\boldsymbol{v}}_h \in \boldsymbol{U}_h$ 对于 *hp*-混合间断伽辽金公式（定义于 (a.4).

LEMMA A.5（具有部分强制性的局部方程的适定性）。由 (a.4a) 和 (a.4b) 组成的局部求解器在以下条件成立时是适定的：

1. 假设 *(A.1)-(A.3)*、*(A4.a)-(A4.b)* 和 *(A.5)-(A.6)*成立，并且2. $\frac{1}{2}C + T > 0$，且3. $\bigcap_{k=1}^{d}$ 值域 $(B_k) = \emptyset$和 $\mathcal{N}(B_k) = \{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k = 1$，...， d。

THEOREM A.6（具有部分强制性的 *hp*-混合间断伽辽金公式的适定性）。假设：

1. 假设 *(A.1)-(A.3)*、*(A4.a)-(A4.b)*、*(A.5)-(A.6)*以及 (2.3b)成立，并且2. $\frac{1}{2}C + T > 0$，3. $\bigcap_{k=1}^{d}$ 值域 $(B_k) = \emptyset$和 $\mathcal{N}(B_k) = \{\mathbf{0}\}$ 对于 $\forall k = 1$，...， d。

存在唯一的解 $\widehat{\boldsymbol{v}}_h \in$ $\widehat{\boldsymbol{U}}_h$ 对于 *hp-HDG* 公式，其定义见 (a.4)。

需要指出的是，原始形式适定性所需的假设，恰好也是相应伴随形式具有适定性所需的要求。换言之，原始问题的适定性将意味着本文中的某个伴随问题也是适定的。事实上，这一观察对所有混合间断伽辽金方法都成立。为此，我们可以将体未知量和迹未知量表示为离散向量（即向量中的每一项代表一个节点值），而不是函数。该系统的

原始方程随后可改写为矩阵形式，而该矩阵的转置正是相应伴随方程组中的矩阵 [29, 52]。显然，如果原方阵可逆，则其转置也可逆。

最后，我们想指出，伴随 hp-HDG 公式（a.1）和（a.4）并未采用本文讨论的基于迎风的HDG数值通量。也就是说，使用本文所述的 Godnouv 方法，从一般偏微分方程（2.1）的伴随问题推导出的伴随 hp-HDG 公式，将与（a.1）和（a.4）中给出的公式不同。

附录B. 降阶形式下迎风通量存在性的证明。 我们首先考察式（3.23）中给出的迎风通量。根据假设(A.5)，子矩阵 $A_k^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}$没有贡献，因此有

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right) \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} B\boldsymbol{u}_h^* \\ B^T\boldsymbol{\sigma}_h^* + C\boldsymbol{u}_h^* \end{bmatrix}. \tag{b.1}$$

根据等式（3.22），式（b.1）可改写为

$$\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right) \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} B\boldsymbol{u}_h^* \\ B^T\boldsymbol{\sigma}_h^* + C\boldsymbol{u}_h^* \end{bmatrix}. \tag{b.2}$$

由于需要在数值通量中保留迎风状态 $B\boldsymbol{u}_h^*$，我们利用式（$\boldsymbol{F}^*$ 中的第二个分量替换为式（3.21），得到

$$\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{\sigma}_h^-, \boldsymbol{u}_h^-, \boldsymbol{\sigma}_h^*, \boldsymbol{u}_h^*\right) \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} B\boldsymbol{u}_h^* \\ B^T\boldsymbol{\sigma}_h + C\boldsymbol{u}_h + \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^*\right) + \mathcal{A}^{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^*\right) \end{bmatrix}. \tag{b.3}$$

目标是通过假设 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$，即假设（b.3）的形式，从方程（((F.1)或(F.2)）中消去右端的状态变量。

我们首先考虑(F.1) 成立。由于等式（3.22）中的第二行已用于将（b.2）改写为（b.3），而第一行尚未使用，我们可以加以利用，其形式为:

$$B\boldsymbol{u}_h^* = B\boldsymbol{u}_h + \mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^*\right) + \mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^*\right). \tag{b.4}$$

通过调用假设 (F1.a) 和 (F1.b)，公式（b.4）可重新整理为

$$\mathcal{A}^{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^*\right) = -\left(\Phi^T B^T B \Phi\right)^{-1} \Phi^T B^T B\left(\Psi + I_{m^{\boldsymbol{u}}}\right), \tag{b.5}$$

其中矩阵 $\left(\Phi^T B^T B\Phi\right)^{-1}$ 因假设 (F1.a) (Φ^{-1} 存在）和(F1.c) (蕴含 $\mathcal{N}(B) = \{\mathbf{0}\}$）而保证存在。现在将（b.5）代入（b.3），并按（3.25）中所述的方式定义 T，即可得到形式（3.24）。

现在假设(F.2) 成立，显然状态 $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ 将消失。根据定义（3.26），即可得到公式（3.24）。

参考文献

[1] Bernardo Cockburn、Jayadeep Gopalakrishnan 和 Raytcho Lazarov。二阶椭圆问题中间断 Galerkin、混合 Galerkin 与连续 Galerkin 方法的统一杂交化。《SIAM 数值分析期刊》，47(2)：1319–1365，2009年。[2] Bernardo Cockburn。静态凝聚、杂交化与混合间断伽辽金方法的设计，第129–177页。Springer International Publishing，Cham，2016年。[3] Bernardo Cockburn、Jayadeep Gopalakrishnan 和 Francisco Javier Sayas。基于投影的混合间断伽辽金方法误差分析。《Mathematics of Computation》，79(271)：1351–1367，2010年7月。版权所有：Elsevier B.V.版权所有2010年，保留所有权利。[4] Robert M. Kirby、Spencer J. Sherwin 和 Bernardo Cockburn。采用 CG 还是 HDG：一项比较研究。《Journal of Scientific Computing》，51(1)：183–212，2012年4月。[5] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。用于线性对流扩散方程的隐式高阶可混合间断伽辽金方法。《Journal of Computational Physics》，228(9)：3232–3254，2009年。[6] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。用于非线性对流扩散方程的隐式高阶可混合间断伽辽金方法。《Journal of Computational Physics》，228(23)：8841–8855，2009年。

[7] Guosheng Fu、Weifeng Qiu 和 Wujun Zhang。对流主导扩散问题的混合间断伽辽金方法分析，2014年。[8] Bernardo Cockburn 和 Jayadeep Gopalakrishnan。斯托克斯流的可混合间断伽辽金方法推导。《SIAM 数值分析期刊》，47(2)：1092–1125，2009年1月。[9] Bernardo Cockburn、Jayadeep Gopalakrishnan、Ngoc Cuong Nguyen、Jaume Peraire 和 Francisco-Javier Sayas。斯托克斯流的混合间断伽辽金方法分析。《Mathematics of Computation》，80(274)：723–723，2011年5月。[10] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。用于斯托克斯流的可混合间断伽辽金方法。《计算力学与工程方法》，199(9-12)：582–597，2010年1月。[11] Bernardo Cockburn 和 Francisco-Javier Sayas。用于斯托克斯流的散度协调混合间断伽辽金方法。《Mathematics of Computation》，83(288)：1571–1598，2014年3月。[12] Shinhoo Kang、Tan Bui-Thanh 和 Todd Arbogast。由两相混合物产生的线性退化椭圆方程的混合间断伽辽金方法。《计算力学与工程方法》，350：315–336，2019年。[13] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。用于不可压缩 Navier–Stokes 方程的隐式高阶可混合间断伽辽金方法。《Journal of Computational Physics》，230(4)：1147–1170，2011年2月。[14] Aycil Cesmelioglu、Bernardo Cockburn 和 Weifeng Qiu。稳态不可压缩 Navier-Stokes 方程的可混合间断伽辽金方法分析。《Mathematics of Computation》，86(306)：1643–1670，2016年11月。[15] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。时谐麦克斯韦方程的可混合间断伽辽金方法。《Journal of Computational Physics》，230(19)：7151–7175，2011年8月。[16] Liang Li、St´ephane Lanteri 和 Ronan Perrussel。结合施瓦茨算法的可混合间断伽辽金方法，用于求解三维时谐麦克斯韦方程。《Journal of Computational Physics》，256：563–581，2014年1月。[17] N.C. Nguyen、J. Peraire 和 B. Cockburn。用于声学和弹性动力学的高阶隐式可混合间断伽辽金方法。《Journal of Computational Physics》，230(10)：3695–3718，2011年5月。[18] Roland Griesmaier 和 Peter Monk。亥姆霍兹方程的可混合间断伽辽金方法误差分析。《Journal of Scientific Computing》，49(3)：291–310，2011年12月。[19] J. Cui 和 W. Zhang。亥姆霍兹方程的混合间断伽辽金方法分析。《IMA 数值分析杂志》，34(1)：279–295，2014年1月。[20] Jeonghun J. Lee、Stephen J. Shannon、Tan Bui-Thanh 和 John N. Shadid。线性化不可压缩电阻磁流体动力学方程的混合间断伽辽金方法分析。《SIAM 数值分析期刊》，57(4)：1697–1722，2019年。[21] Tan Bui-Thanh。从戈杜诺夫到偏微分方程的统一可混合间断伽辽金框架。《Journal of Computational Physics》，295：114–146，2015年。[22] M.R. Dorr 和 I. Babuska。有限元方法 h 版本与 p 版本相结合的误差估计。《数值数学》，37：257–278，1981年。[23] B. Guo 和 I. Babuˇska。有限元方法的 h-p 版本：第1部分：基本逼近结果。《计算力学》，1(1)：21–41，1986年3月。[24] B. Guo 和 I. Babuˇska。有限元方法的 h-p 版本：第2部分：一般结果与应用。《计算力学》，1(3)：203–220，1986年9月。[25] L. Babuˇska 和 Manil Suri。有限元方法 p 版本的最优收敛率。《SIAM 数值分析期刊》，24(4)：750–776，1987年8月。[26] Carsten Carstensen、Ronald HW Hoppe、Natasha Sharma 和 Tim Warburton。用于 $h(curl)$-椭圆问题的自适应可混合内罚间断伽辽金方法。《数值数学：理论、方法与应用》，4(1)：13–37，2011年。[27] Cuong Nguyen 和 Jaime Peraire。用于可压缩流的自适应激波捕捉混合可压缩间断伽辽金方法。载于《第20届AIAA计算流体动力学会议》，第3060页，2011年。[28] H Egger 和 C Waluga。斯托克斯流混合间断伽辽金方法的 hp 分析。《IMA 数值分析杂志》，33(2)：687–721，2013年。[29] Johann P.S. Dahm 和 Krzysztof J. Fidkowski。可混合间断伽辽金方法中的误差估计与自适应。技术报告 2014–0078，美国航空航天学会，2014年。[30] M. Woopen、G. May 和 J. Sch¨utz。可混合间断伽辽金方法中基于伴随的误差估计与网格自适应。《International Journal for Numerical Methods in Fluids》，76(11)：811–834，2014年12月。[31] Huangxin Chen、Jingzhi Li 和 Weifeng Qiu。对流扩散方程混合间断伽辽金方法的稳健 $a\ posteriori$ 误差估计。《IMA 数值分析杂志》，36(1)：437–462，2016年。[32] Bernardo Cockburn、Ricardo Nochetto 和 Wujun Zhang。自适应可混合间断伽辽金方法的压缩性质。《Mathematics of Computation》，85(299)：1113–1141，2016年。[33] Ali Samii 、 Craig Michoski 和 Clint Dawson。用于各向异性非均匀扩散的并行自适应可混合间断伽辽金方法。《计算力学与工程方法》，304 139，2016 118：–。[34] Rodolfo Araya、Manuel Solano 和 Patrick Vega。布林克曼问题的自适应混合间断伽辽金方法分析。《IMA 数值分析杂志》，39(3)：1502–1528，2019年。[35] Krzysztof J. Fidkowski 和 Guodong Chen。用于可混合与嵌入式间断伽辽金方法的基于输出的网格优化。《International Journal for Numerical Methods in Engineering》，121(5)：867–887，2020年3月。[36] Haitao Leng 和 Yanping Chen。非定常对流扩散问题的自适应可混合间断伽辽金方法。《计算数学进展》，46：1–23，2020年。[37] Alba Muix´ı、Antonio Rodr´ıguez-Ferran 和 Sonia Fern´andez-M´endez。带自适应加密的脆性断裂可混合间断伽辽金相场模型。《International Journal for Numerical Methods in Engineering》，121(6)：1147–1169，2020年。

[38] Tonatiuh S´anchez-Vizuet、ManuelESolano 和 Antoine J Cerfon。通过从多边形子域扩展实现Grad–Shafranov 方程的自适应可杂交间断伽辽金离散。Computer PhysicsCommunications，255：107239，2020年。[39] Haitao Leng 和 HuangxinChen。用于 Brinkman 方程并应用于最优控制的自适应混合间断伽辽金方法。Journal of Scientific Computing，87(2)：46，2021年。[40] HaitaoLeng。稳态不可压缩 Navier–Stokes 方程的自适应混合间断伽辽金方法。Journal of Scientific Computing，87(1)：37，2021年。[41] Dongwook Shin、YoonguHwang和 Eun-Jae Park。椭圆问题的新型自适应杂交间断伽辽金算法。Computational Methods in AppliedMathematics，21(4)：929–951，2021年。[42] YifanBai和KrzysztofJFidkowski。基于自适应网格的混合间断伽辽金连续人工黏性激波捕捉。AIAAJournal，60(10)：5678–5691，2022年。[43] ShiqiangXia和 BernardoCockburn。利用混合间断伽辽金方法对二阶椭圆方程泛函进行基于伴随的自适应误差估计。Journal of Computational Physics，457 111078，2022年：。[44] Tom´aˇsLevˇy和GeorgMay。自适应时间精确杂交间断伽辽金方法中各向异性网格之间的守恒解传递。载于AIAA SCITECH 2023 论坛，第1794页，2023年。[45] Giorgio Giorgiani、Sonia Fern´andez-M´endez 和Antonio Huerta。波传播问题的可杂交间断伽辽金 p自适应。International Journalfor Numerical MethodsinFluids，72(12)：1244–1262，2013年。[46] Giorgio Giorgiani、Sonia Fern´andez-M´endez和 Antonio Huerta。具有次数自适应的可杂交间断伽辽金方法求解不可压缩 Navier–Stokes 方程。Computers& Fluids，98：196–208，2014年。[47] J. M Hoermann、C Bertoglio、M Kronbichler、M. RPfaller、RChabiniok 和W. A Wall。用于心脏电生理的自适应可杂交间断伽辽金方法。International Journal for Numerical Methods in BiomedicalEngineering，34(5)：e2959–n/a，2018年。[48] RubenSevilla 和 Antonio Huerta。具有次数自适应的 HDG-NEFEM Stokes 流方法。Journal ofScientificComputing，77(3)：1953–1980，2018年。[49] Matteo Giacomini和Ruben Sevilla。计算力学中的间断伽辽金近似：杂交化、精确几何与次数自适应。SNApplied Sciences，1(9)：1047，2019年。[50] Georg May、Koen Devesse、AjayRangarajan和Thierry Magin。用于高阶可压缩流的杂交间断伽辽金求解器。Aerospace，8(11)：322，2021年。[51] Aravind Balan、Michael Woopen和Georg May。针对一类高阶可压缩流杂交有限元格式的基于伴随的 hp自适应。载于第21届 AIAA 计算流体动力学会议，第2938页，2013年。[52] Michael Woopen、Aravind Balan、GeorgMay 和Jochen Sch¨utz。用于基于目标的 hp 自适应可压缩流模拟的杂交方法与标准DG方法比较。Computers & Fluids，98：3–16，2014年7月。[53] MichaelWoopen 和 Georg May。用于可压缩湍流的各向异性、基于伴随的 hp 自适应 HDG 方法。载于第53届AIAA 航空航天科学会议，第2042页，2015年。[54] Aravind Balan、MichaelWoopen和 GeorgMay。高阶可压缩流模拟中各向异性网格上的基于伴随的 hp 自适应。Computers & Fluids，139：47–67，2016年。第13届 USNCCM 计算流体动力学高阶方法国际研讨会 —— 纪念 David Kopriva 教授 60 岁生日的特刊。[55] Antonio Huerta 、Antonio Rodr´ıguez-Ferran、PedroD´ıez和 Josep Sarrate。基于误差评估的自适应有限元策略。International Journal for Numerical Methodsin Engineering，46(10)：1803–1818，1999年。[56] Maria-Cecilia Rivara。基于单纯形广义二分的网格细化过程。SIAM数值分析期刊，21(3)：604–613，1984年。[57] MCecilia Rivara。适用于自适应和多重网格技术的三角网格细化算法。International Journal for Numerical Methods inEngineering，20(4)：745–756，1984年。[58] Rob Stevenson。标准自适应有限元方法的最优性。Foundations ofComputational Mathematics，7：245–269，2007年。[59] Randolph E Bank、AndrewH Sherman 和 Alan Weiser。规则局部网格细化的一些细化算法和数据结构。Scientific Computing，Applications of Mathematics and Computingto thePhysicalSciences，1：3–17，1983年。[60] K. O. Friedrichs。对称正线性微分方程。CommunicationsonPure and AppliedMathematics，11(3)：333–418，1958年8月。[61] A. Ern和J. L.Guermond。Friedrichs 系统的间断伽辽金方法。I. 一般理论。SIAM 数值分析期刊，44(2)：753–778，2006年1月。[62] Alexandre Ern 和Jean-Luc Guermond。Friedrichs 系统的间断伽辽金方法。第二部分。二阶椭圆偏微分方程。SIAM数值分析期刊，44(6)：2363–2388，2006年1月。[63] Alexandre Ern 和Jean-Luc Guermond。Friedrichs 系统的间断伽辽金方法。第三部分。具有部分强制性的多场理论。SIAM 数值分析期刊，46(2)：776–804，2008年1月。[64] Tan Bui-Thanh、Leszek Demkowicz 和 OmarGhattas。统一间断Petrov–Galerkin 方法及其对Friedrichs 系统的分析。SIAM数值分析期刊，51(4)：1933–1958，2013年1月。[65] MaxJensen。具有非正则解的 Friedrichs系统的间断伽辽金方法。博士论文，牛津大学，2005年。[66] Susanne C.Brenner。分片´函数的 Poincar´e-Friedrichs 不等式。SIAM 数值分析期刊，41(1)：306–324，2003年1月。 H^1 SusanneC. Brenner。分片 H^1 向量场的 Korn 不等式。Mathematicsof Computation，73(247)：1067–1088，2003年9月。[67] Yvon Maday、Catherine Mavriplis和 Anthony TPatera。非协调 mortar 单元方法：在谱离散中的应用。Institute for Computer Applications in Science and Engineering，NASA Langley 。。。，1988年。

[69] George Anagnostou、Anthony T Patera、Yvon Maday 和CatherineMavriplis。关于 Mortar 单元方法——推广与实现。载于《偏微分方程区域分解方法国际研讨会》，第 3届，美国得克萨斯州休斯敦，第 157–173 页，1990 年。[70] C. Bernardi、Y. Maday 和 A. Patera。区域分解的一种新型非协调方法：Mortar 单元方法。Brezis, H.（编）等，《非线性偏微分方程及其应用》。Coll`ège de France 研讨会，第XI卷。1989 年在法国巴黎应用数学每周研讨会上发表的讲座。[71] C. Bernardi、Y. Maday 和A.T. Patera。通过 Mortar 单元方法进行区域分解。载于 Hans G. Kaper、Marc Garbey和Gail W. Pieper（编），《带临界参数的偏微分方程的渐近与数值方法》，第269–286 页。SpringerNetherlands，Dordrecht，1993 年。[72] Christine Bernardi、Yvon Maday 和Francesca Rapetti。Mortar 单元方法基础及其若干应用。《GAMM-Mitteilungen》，28(2)：97–123，2005年。[73] Timothy J Barth、Michael Griebel、David E Keyes、Risto M Nieminen、DirkRoose 和 Tamar Schlick。《计算科学与工程讲义》，第49 卷。Springer，2005年。[74] DavidA.Kopriva 和 John H. Kolias。用于可压缩流的守恒交错网格 Chebyshev 多区域方法。《Journal of ComputationalPhysics》，125(1)：244–261，1996 年。[75] David A.Kopriva、StephenL.Woodruff和M. Y. Hussaini。使用非协调间断谱单元方法计算电磁散射。《International Journal for Numerical Methods in Engineering》，53(1)：105–122，2002 年。[76] George Em Karniadakis、George Karniadakis 和 Spencer Sherwin。计算流体动力学的谱/hp 单元方法。OxfordUniversity Press on Demand，2005年。[77] Tan Bui-Thanh 和 Omar Ghattas。关于 hp-非协调间断 Galerkin 谱单元方法的波传播分析。《SIAM数值分析期刊》，50(3)：1801–1826，2012 年。[78] Lucas Friedrich、AndrewR Winters、David C Del ReyFern´ández、Gregor J Gassner、MatteoParsani 和 Mark HCarpenter。具有分部求和性质的熵稳定 h/p 非协调间断 Galerkin 方法。《Journalof Scientific Computing》，77：689–725，2018年。[79] FakerBen Belgacem。带拉格朗日乘子的 Mortar 有限元方法。《Numerische Mathematik》，84(2)：173–197，1999年12月。[80] Mary F. Wheeler 和 IvanYotov。椭圆问题 Mortar 混合有限元方法的界面多重网格。《《计算力学与工程方法》》，184(2-4)：287–302，2000 年 4月。[81] Todd Arbogast、Lawrence C. Cowsar、Mary F.Wheeler 和 Ivan Yotov。非匹配多块网格上的混合有限元方法。《SIAM数值分析期刊》，37(4)：1295–1315，2000 年 1 月。[82] Gergina Pencheva 和Ivan Yotov。Mortar 混合有限元方法的平衡区域分解。《Numerical linearalgebra with applications》，10(1-2)：159–180，2003年。[83] YChen和 B Cockburn。对流扩散方程变次数混合间断伽辽金方法的分析。第一部分：一般非协调网格。《《IMA数值分析杂志》》，32(4)：1267–1293，2012 年。[84] YanlaiChen和Bernardo Cockburn。对流扩散方程变次数混合间断伽辽金方法的分析。第二部分：半匹配非协调网格。《Mathematics ofComputation》，83(285)：87–111，2014年。[85] Jeremy E.Kozdon 和 LucasC.Wilcox。使用非协调间断 Galerkin 方法离散双曲型方程的一种能量稳定方法。《Journal ofScientificComputing》，76(3)：1742–1784，2018年。[86] Eleuterio F. Toro。《流体动力学中的黎曼求解器与数值方法》。SpringerBerlin Heidelberg，柏林、海德堡，1999年。[87] Sergei K.Godunov和 I. Bohachevsky。流体动力学方程间断解数值计算的有限差分方法。《Matematiˇceskij sbornik》，47(89)(3)：271–306，1959 年。[88] J. Stephen Shannon。《磁流体动力学的混合间断 Galerkin方法》。博士论文，得克萨斯大学奥斯汀分校，2018年。[89] V´ıt Dolejˇs

87 87 118, 1。非线性

2013

对流扩散问题的 hp-dgfem。《Mathematicsand Computers in Simulation》，：–。[90] Kenneth Eriksson、Don Estep、Peter Hansbo 和 Claes Johnson。微分方程自适应方法导论。《ActaNumerica》，4：105–158，1995 年。[91] RolandBecker和 Rolf Rannacher。有限元方法中 $a\ posteriori$ 误差估计的最优控制方法。《ActaNumerica》，10：1–102，2001 年 5 月。[92] BernardoCockburn、WeifengQiu 和 Ke Shi。二阶椭圆问题混合间断伽辽金方法超收敛的条件。《Mathematics of Computation》，81(279)：1327–1353，2012 年 9 月。[93] Jan S. Hesthaven 和Tim Warburton。《节点间断 Galerkin 方法：算法、分析与应用》。Springer PublishingCompany, Incorporated，第 1 版，2007年。[94] Ivo Babuˇska 和ManilSuri。有限元方法的p 版本和 h-p 版本概述。《《计算力学与工程方法》》，80(1)：5–26，1990 年。[95] V´ıt.Dolejˇs´ı。《间断 Galerkin方法分析及其在可压缩流中的应用》/ V´ıt Dolejˇs´ı、Miloslav Feistauer 著。《计算数学系列》，48。SpringerInternational Publishing，Cham，第 1 版，2015年。版本，2015年。[96] M. V. Umansky、M.S.Day和T. D. Rognlien。错位网格上强各向异性扩散方程的数值解。《Numerical Heat Transfer,Part B:Fundamentals》，47(6)：533–554，2005年。[97] Xianping Li和WeizhangHuang。异质各向异性扩散问题有限元数值解的各向异性网格自适应方法。《Journal of Computational Physics》，229(21)：8072–8094，2010 年。[98] Tobin Driscoll。算法 756：用于 Schwarz-Christoffel 映射的 MATLAB 工具箱。《ACM transactions on mathematicalsoftware》，22(2)：168–186，1996 年。[99] David Gottlieb 和 Chi-Wang Shu。关于 Gibbs 现象及其消除。《SIAM Review》，39(4)：644–668，1997 年。[100] LeszekF. Demkowicz。《使用 hp-自适应有限元计算》，第 1 卷：一维和二维

椭圆型问题与 Maxwell问题。CRC Press，Hoboken，2006年。OCLC：437175820。[101] V´ıtDolej˘s´ı。三角形网格上有限体积方法和有限元方法的各向异性网格自适应。Computingand Visualizationin Science，1(3)：165–178，1998年11月。[102] Marco Ceze和KrzysztofJ.Fidkowski。用于泛函预测的各向异性hp 自适应框架。AIAAJournal，51(2)：492–509，2013年。[103] Ond˘rej Barto˘s、V´ıt Dolej˘s´ı、Georg May、AjayRangarajan和 FilipRoskovec。针对线性对流–扩散–反应问题的目标导向各向异性 h p -网格自适应方法。Computers& Mathematics with Applications，78(9)：2973–2993，2019年11月。[104] Sriramkrishnan Muralikrishnan、Minh-BinhTran和TANBUI-THANH。iHDG：一种用于偏微分方程的迭代混合间断伽辽金框架。SIAMJournal onScientificComputing，39(5)：S782–S808，2017年1月。[105] KennethEriksson和 Claes Johnson。定常对流–扩散问题的自适应流线扩散有限元方法。MathematicsofComputation，60(201)：167，1993年1月。[106] JesseChan、Norbert Heuer、TANBUI-THANH和 Leszek Demkowicz。用于对流占优扩散问题的稳健 DPG 方法 II：伴随边界条件和依赖于网格的测试范数。Computers& MathematicswithApplications，67(4)：771–795，2014年3月。[107] E. Rothe。二维抛物型边值问题作为一维边值问题的极限情形。Math. Ann.，(102)：650—670，1930年12月。