arXiv:2304.03716v1 [quant-ph] 7 Apr 2023

反馈振荡器中的量子噪声及其规避

哈德森·A.·洛林[1], * 和维维谢克·苏德希尔[1,2] *LIGO Laboratory, Massachusetts Institute of Technology Cambridge MA 02139* , , , , [2] *Department of Mechanical Engineering Massachusetts Institute of Technology Cambridge , MA 02139*（日期：2023 年 4 月 10 日）

我们研究了一种振荡器的抽象模型，该振荡器由嵌入正反馈回路中的放大器实现。此类振荡器输出的功率和频率稳定性受到环路中两个元件所引入的量子噪声的限制：放大器和输出耦合器。由此产生的频率不稳定性给出了肖洛-汤斯公式。因此，肖洛-汤斯公式的适用范围扩展到了大类振荡器，并且表明它与线性放大器的Haus-Caves 量子噪声极限有关，同时明确了输出耦合器所引入的量子噪声所起的作用。通过阐明振荡器输出中振幅和频率量子噪声的确切来源，我们揭示了若干种系统地规避这些噪声的技术。

I. 引言

在适当的正反馈环路中嵌入一个放大器，就能实现一个振荡器 [1, 2]。这是反馈系统经典理论中的基本结论 [3]，它已被用作设计量子领域振荡器的范本。众所周知，激光器 [4, 5]可被视为一种再生式振荡器，其性能可能受到量子涨落的限制 [6–9]。具体而言，激光器或微波激射器的输出频率噪声由（修正后的）肖洛-汤斯公式给出 [8–11]，

$$\bar{S}^{\rm osc}_{\dot\varphi\dot\varphi}[\Omega] = \frac{\hbar\omega_{\rm osc}\kappa^2}{2P_{\rm osc}}\,(1+2n_{\rm th}) = \frac{(\ln(\eta))^2}{2\tau^2|\alpha|^2}(1+2n_{\rm th}), \tag{1.1}$$

对于相对于振荡器标称输出频率的频率偏差，其对称双边谱 $\dot\varphi$ 。这里， $\omega_{\rm osc}$是振荡器的平均输出功率，而 $P_{\rm osc} = \hbar\omega_{\rm osc}|\alpha|^2$ 是光子通量的平均振幅。在激光器中，反馈元件是一个腔体，其往返延迟时间为 α ，平均热占据数为 τexp($n_{\rm th}$ =]$\hbar\omega_{\rm osc}/k_BT$， $-1]^{-1}$光通过功率反射率为η的镜面耦合输出，该反射率等效于腔体线宽 $\kappa = \tau^{-1}\ln\eta$。肖洛-汤斯公式更常用线宽而非谱密度来表示。具有平坦频率噪声谱的振荡器，其半高全宽线宽 Γ 为¯，计算公式为 [12]， $\Gamma = S_{\dot\varphi\dot\varphi}/(2\pi)$，因此与式（1.1）对应的线宽为

$$\Gamma_{\rm ST} = \frac{(\ln(\eta))^2}{4\pi\tau^2|\alpha|^2}(1+2n_{\rm th}). \tag{1.2}$$

请注意，式（1.1）和（1.2）都包含了对超过阈值的振荡器所作的修正 [8]。因此，以下我们仅关注量子噪声受限振荡器的性能，即 $n_{\rm th}=0$ （我们还忽略了由时间和／或空间模式耦合所引起的已知修正 [13]）。

* hudsonl@mit.edu

我们分析了一种通用反馈振荡器模型，该振荡器由量子噪声受限放大器的输出经正反馈构成，并证明肖洛-汤斯公式适用于这一通用情形。尤其是，我们明确指出了肖洛-汤斯极限的确切构成要素：放大器不可避免地引入的量子噪声——即著名的豪斯-凯夫斯极限 [14, 15]——以及为将信号从反馈回路中耦合输出而不可避免地引入的噪声。这一认识指出了提升振荡器性能、使其超越肖洛-汤斯公式预测的方法：可以用相敏且无噪声的放大器取代传统的、对相位不敏感因而会产生噪声的放大器；也可以对输出耦合器和放大器引入的量子噪声进行压缩或使其相关。

我们的分析还推导出了一般反馈振荡器输出振幅与相位的一般不确定性原理。肖洛-汤斯公式恰好是这一约束的一种情形。另一个推论是，基于压缩真空注入来规避这一约束的技术，会导致输出振幅的涨落增大。如果反馈振荡器在其反馈回路中使用相敏放大器而非相位不敏感放大器，或者具有爱因斯坦-波多尔斯基-罗森（EPR）纠缠场，那么振荡器输出的振幅与相位所受的限制就会较宽松。这样便有可能设计出频率稳定性超越肖洛-汤斯极限、同时又不会因输出功率涨落增大而受损的振荡器。这些结果推广了先前关于肖洛-汤斯公式 [8–11, 16]及其规避方法 [17, 18] 的研究；那些研究依赖于对激光动力学的详细模型。因此，我们的分析阐明了一大类振荡器所受的量子稳定性极限，以及各种量子资源在提升其性能方面的效用。

II. 反馈振荡器中的量子噪声

我们考虑（见图1A）一种符合量子物理学定律的最简单反馈振荡器配置：一个具有线性增益

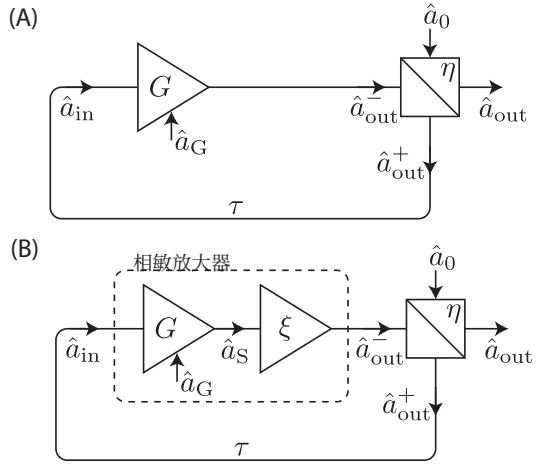

图 1。（A）一种最简反馈振荡器，其中包含一个嵌入反馈电路的相位不敏感放大器，并通过一个酉元件将信号耦合出环路。（B）一种类似的反馈振荡器，其中包含相敏放大器（虚线矩形所示），该放大器可分解为一个相位不敏感放大器后接一个压缩器。

G 嵌入在具有时间延迟的反馈回路中 τ，其输出由于不可克隆定理 [19]，是通过分束器从环路中提取的。显然，模式 $\hat{a}_0$ 会在输出耦合器处引入量子噪声。在没有反馈回路的情况下，Haus-Caves 的观察 [14, 15] 是，经典输入输出关系 $\langle\hat{a}^-_{\rm out}\rangle = G\langle\hat{a}_{\rm in}\rangle$，不能推广为算符之间的关系 $\hat{a}^-_{\rm out}(t) = \hat{a}_{\rm in}(t)$，因为这与对易关系不一致（此处 $i, j \in \{$输入,输出$\}$）

$$[\hat{a}_i(t), \hat{a}^\dagger_j(t')] = \delta(t-t')\delta_{ij}. \tag{2.1}$$

这就需要一个辅助模式 $\hat{a}_{\rm G}$，其满足 $\langle a_{\rm G}(t)\rangle = 0$，从而使修正后的输入输出关系，

$$\hat{a}^-_{\rm out}(t) = G\hat{a}_{\rm in}(t) + \sqrt{G^2-1}\,\hat{a}^\dagger_{\rm G}(t), \tag{2.2}$$

保持一致。辅助模式传递了放大器内部自由度[9, 20]所带来的不可避免的附加噪声。

当反馈回路闭合时，这些观察结果并不适用。首先，正反馈会导致放大器输入端出现很大的平均场，从而使其输出达到饱和，因此无法将放大器建模为线性放大器。这是任何物理放大器的基本要求，因为其增益来自外部源，而该外部源的能量密度必须是有限的。其次，式（2.1）中的对易关系仅适用于自由传播场，而不适用于反馈回路内部的场 [21, 22]。现在我们将解决这些问题，并说明对饱和行为进行适当处理会导出振荡的阈值条件：“增益 =损耗”，而适当地施加对易关系则会给出振荡器的正确量子噪声。

A. 饱和、稳态与线性增益

该 非线性 输入-输出行为的（无记忆）放大器可以表示为

$$\alpha^-_{\rm out}(t) = \mathcal{A}(\alpha_{\rm in}(t)), \tag{2.3}$$

其中，$\alpha_i = \langle\hat{a}_i\rangle$ $(i \in \{\text{in,out}\})$ 是平均振幅，而 $\mathcal{A}(\cdot)$ 是非线性增益函数，我们假设它具有以下性质：

1. $\mathcal{A}(-x) = -\mathcal{A}(x)$，即放大器是对称的双极放大器。

2. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}x} > 0 \quad \forall\, x$, i.e. the gain is monotonic.

3. $\mathcal{A}(x\to 0) \to G_0 x$ 对于某个 $G_0 > 1/\sqrt{\eta}$，即存在线性增益为 G_0 的“小信号”工作区，此时该增益大于由输出耦合器引起的损耗，损耗由$-\sqrt{\eta}$ 参数化。

4. $\mathcal{A}(x\to\pm\infty) \to \pm\mathcal{A}_\infty$，即对于较大的输入，输出会饱和并趋于一个常数渐近值。

放大器的输出 $\alpha^-_{\rm out}(t)$ 沿反馈回路传播，并表现为

$$\alpha_{\rm in}(t) = -\sqrt{\eta}\,\alpha^-_{\rm out}(t-\tau) + \sqrt{1-\eta}\,\alpha_0(t-\tau) \tag{2.4}$$

在放大器的输入端。经典的非线性输入输出关系方程（2.3）和（2.4），连同非线性增益的公设，足以确定振荡器的经典稳态。正如附录 $\mathcal{A}$中详细讨论的那样，振荡器将从场振幅为零的不稳定平衡点开始。随后噪声会使振荡器脱离不稳定平衡点，并引发振荡（与激光器中的情况相同[23]）。小信号分析表明，如果环内场振幅 $\alpha_{\rm ss}$ 满足以下条件，则该振荡状态是稳定的：

$$|\mathcal{A}[\alpha_{\rm ss}]| = \alpha_{\rm ss}/\sqrt{\eta}. \tag{2.5}$$

此输出决定振荡器的振幅，并作为本文将要讨论的量子涨落的相位参考。线性放大器的增益在此稳态下为 [附录 B 1]

$$G \equiv \lim_{t\to+\infty} \alpha^-_{\rm out}(t)/\alpha_{\rm in}(t) = 1/\sqrt{\eta}. \tag{2.6}$$

该方程的形式为“增益 = 损耗”，并定义了叠加在经典稳态之上的量子涨落所感受到的线性增益。

B. 量子涨落

在稳态附近，表示量子涨落的（海森堡绘景）算符满足

线性方程组：

$$\begin{aligned}\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] &= G\,\hat{a}_{\rm in}[\Omega] + \sqrt{G^2-1}\,\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega]\\ \hat{a}^{+}_{\rm out}[\Omega] &= -\sqrt{\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] + \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}_0[\Omega]\\ \hat{a}_{\rm out}[\Omega] &= \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] + \sqrt{\eta}\,\hat{a}_0[\Omega]\\ \hat{a}_{\rm in}[\Omega] &= e^{i\Omega\tau}\hat{a}^{+}_{\rm out}[\Omega],\end{aligned} \tag{2.7}$$

我们用它们的傅里叶变换来表示这些关系。这里，G 是放大器的线性增益，辅助模式 $\hat{a}_{\rm G}$ 描述了放大过程中不可避免的噪声，而最后一个方程是时域关系的傅里叶变换，$\hat{a}^{-}(t) = \hat{a}^{+}_{\rm out}(t-\tau)$，表示反馈路径中的延迟。注意，对于与环路延迟的逆变换相当的频率，我们假定放大器的增益与频率无关。

辅助模式的量子统计特性，$\hat{a}_{\rm G}$，在闭环运行时（即 $0<\eta<1$），不一定与开环运行时（$\eta=0$）一致 [14, 15, 24]。在此处考虑的闭环配置中，辅助模式并非自由传播，因此不必满足自由传播场的对易关系（式（2.1）的傅里叶变换形式）

$$[\hat{a}_i[\Omega], \hat{a}^{\dagger}_j[\Omega']] = 2\pi\cdot\delta[\Omega+\Omega']\delta_{ij}. \tag{2.8}$$

。 [21, 22]然而，与振荡器耦合输入和耦合输出的场，$\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_{\rm out}$，是自由传播的，因此必须满足式（2.8）。为满足这一约束，我们求解式（2.7），使输出可以用耦合输入场和辅助场表示：

$$\hat{a}_{\rm out}[\Omega] = H_0[\Omega]\hat{a}_0[\Omega] + H_{\rm G}[\Omega]\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega], \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned}H_0[\Omega] &= \frac{\sqrt{\eta}+Ge^{i\Omega\tau}}{1+G\sqrt{\eta}e^{i\Omega\tau}} = \frac{\sqrt{\eta}+e^{i\Omega\tau}/\sqrt{\eta}}{1+e^{i\Omega\tau}},\\ H_{\rm G}[\Omega] &= \frac{\sqrt{G^2-1}\sqrt{1-\eta}}{1+G\sqrt{\eta}e^{i\Omega\tau}} = \frac{1/\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta}}{1+e^{i\Omega\tau}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

是从耦合输入模式和辅助模式到输出端的传递函数；第二个等式适用于稳态闭环运行，此时 [式（2.6）] $G\sqrt{\eta}=1$。注意，

$$|H_0[\Omega]|^2 - |H_{\rm G}[\Omega]|^2 = 1. \tag{2.11}$$

要求 $\hat{a}_{\rm out}$ 和 $\hat{a}_0$ 满足方程（2.8），会迫使辅助模式满足

$$\begin{aligned}[\hat{a}_{\rm G}[\Omega], \hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega']] &= \frac{|H_0[\Omega]|^2-1}{|H_{\rm G}[\Omega]|^2}2\pi\cdot\delta[\Omega+\Omega']\\ &= 2\pi\cdot\delta[\Omega+\Omega'],\end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，尽管它不是自由传播的，$\hat{a}_{\rm G}$ 仍满足通常的对易关系。

C. 输出谱与肖洛-汤斯公式

我们关注输出场的振幅和相位正交分量。对于任意场 $\hat{a}_i$，它们定义为 $q_i = (\hat{a}_i^{\dagger} + \hat{a}_i)/\sqrt{2}$ 和 $p_i = i(\hat{a}_i^{\dagger} - \hat{a}_i)/\sqrt{2}$。于是，方程（2.9）可以写成

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\rm out}[\Omega] &= H_0[\Omega]\hat{q}_0[\Omega] + H_{\rm G}[\Omega]\hat{q}_{\rm G}[\Omega]\\ \hat{p}_{\rm out}[\Omega] &= H_0[\Omega]\hat{p}_0[\Omega] - H_{\rm G}[\Omega]\hat{p}_{\rm G}[\Omega]\end{aligned} \tag{2.13}$$

假设耦入模式和辅助模式处于不相关的真空态，即 $\bar{S}^0_{qq} = \bar{S}^0_{pp} = \bar{S}^{\rm G}_{qq} = \bar{S}^{\rm G}_{pp} = \frac{1}{2}$ 且所有交叉谱均为零（见附录C）[-]，则输出正交分量谱为 $\bar{S}^{\rm out}_{qq}[\Omega] = \bar{S}^{\rm out}_{pp}[\Omega] = \frac{1}{2}(|H_0^2[\Omega]| + |H_{\rm G}^2[\Omega]|)$。代入传递函数 [方程（2.10）]

$$\bar{S}^{\rm out}_{qq}[\Omega] = \bar{S}^{\rm out}_{pp}[\Omega] = \frac{\left(\sqrt{\eta}-1/\sqrt{\eta}\right)^2}{4\cos^2(\Omega\tau/2)} + \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

如下文将要展示的，第一项是振荡器输出在载波附近呈洛伦兹形状的真空噪声——其相位正交分量部分等价于肖洛-汤斯公式——而第二项则是远离载波处与频率无关的真空噪声。

频率 $\Omega_n := (2n+1)\pi/\tau$ (对于某个整数n) 是传递函数 H_0，$H_{\rm G}$的极点，因此也是闭环稳态振荡的频率。从物理上讲，它们对应于信号在反馈回路中连续通过后发生的相长干涉。在实际振荡器中，增益 $G[\Omega]$通常经过设计，使其仅在某个频率 Ω_0下维持一个稳态。此时，输出场具有单一载波，其振幅为 $\alpha = \sqrt{\eta}\alpha_{\rm ss}$，并从环路中泄漏出来。上述正交分量则表示围绕该载波的涨落。定义相对于该载波的频率偏移 ω，即 $\Omega = \Omega_0 + \omega$，其中 $\omega\tau \ll 1$，则式（2.14）中的相位正交分量谱可近似写为

$$\bar{S}^{\rm out}_{pp}[\Omega_0+\omega] \approx \frac{\left(\sqrt{\eta}-1/\sqrt{\eta}\right)^2}{(\omega\tau)^2} + \frac{1}{2}. \tag{2.15}$$

振荡器输出的瞬时相位偏差可取为[1] $\hat{\varphi} \approx \hat{p}_{\rm out}/(\sqrt{2}|\alpha|)$。因此，载波附近输出的频率谱为

[1] 众所周知，基态的存在构成了一项技术性障碍：在整个希尔伯特空间中，无法定义一个与数算符共轭且本征值谱以 2π [25, 26]为模的厄米相位算符。对于平均光子数较大的量子态——例如振荡器的输出——可以定义一个描述大载波场周围涨落的相位算符 [27]（另见参考文献 [24] 的附录 G）。

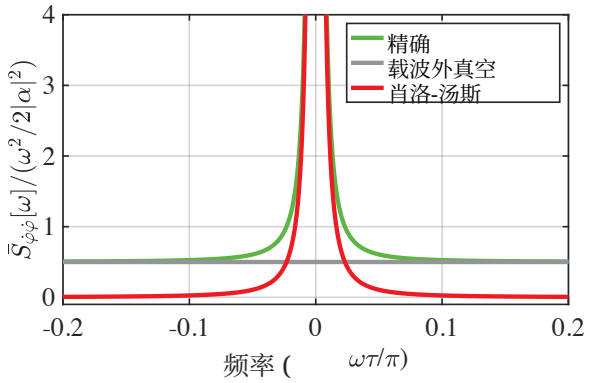

图 2. 反馈振荡器的输出相位正交分量谱 $\bar{S}_{pp}[\Omega] = \bar{S}_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}[\omega]/(\omega^2/2|\alpha|^2)$，其中环路内放大器对相位不敏感；在载波附近，该谱可由二阶极点很好地近似，从而产生洛伦兹线形。红色表示载波附近线形中的肖洛-汤斯分量，绿色表示完整预测 [式 (2.16)] ，其中包括远离载波处的白色真空噪声（灰线）。

$\bar{S}_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}[\Omega_0+\omega] = \omega^2 \bar{S}_{\varphi\varphi}[\Omega_0+\omega] = (\omega^2/2|\alpha|^2)\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega_0+\omega]$. Using eq. (2.15), this is

$$\bar{S}_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}}[\Omega_0+\omega] \approx \frac{\left(\sqrt{\eta}-1/\sqrt{\eta}\right)^2}{2\tau^2|\alpha|^2} + \frac{(\omega\tau)^2}{4\tau^2|\alpha|^2} \approx \frac{(1-\eta)^2}{2\tau^2|\alpha|^2}. \tag{2.16}$$

这里省略了第二项，该项源自式（$\frac{1}{2}$）中的频率无关真空噪声“2.15”，在载波附近可以忽略。所得表达式即为适用范围内的肖洛-汤斯公式（具有高反射率输出耦合器的激光器，即 $\eta \approx 1$，在这种情况下，式（1.1）和（2.16）在 $\mathcal{O}[(1-\eta)^3]$处相符）。图 2 比较了量子噪声受限振荡器的精确输出相位谱、肖洛-汤斯公式和真空噪声。

III. 规避肖洛-汤斯极限

量子极限反馈振荡器的肖洛-汤斯公式，我们下文将其视为式（2.16），显然源于环路内放大器和输出耦合器引入的量子噪声。现在我们将考察反馈振荡器输出的相位与振幅涨落之间的基本权衡，说明压缩场如何通过增加功率波动来规避相位的肖洛-汤斯极限，最后还将说明纠缠场或相位敏感环内放大器如何完全规避这一基本权衡。

A. 反馈振荡器的不确定性关系

输出场正交分量满足正则对易关系 $[\hat{}q_{\text{out}}(t), \hat{}p_{\text{out}}(t')] = i\,\delta(t-t')$. 这一事实本身意味着（见定理1）

$$\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega] \geq \frac{1}{4}; \tag{3.1}$$

这些正交分量的谱满足海森堡不确定性原理。该约束与反馈振荡器的物理性质无关，因此过于宽松。

为推导出更严格的约束，我们使用式（2.13）将输出谱与耦入谱及辅助谱联系起来。对于每个正交分量 $x = \{q, p\}$,

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\text{out}}_{xx} =& |H_0|^2\bar{S}^0_{xx} + |H_{\text{G}}|^2\bar{S}^{\text{G}}_{xx} \pm 2\text{Re}\left[H_0^* H_{\text{G}}\bar{S}^{0,\text{G}}_{xx}\right] \\ \geq& 2|H_0 H_{\text{G}}|\left(\sqrt{\bar{S}^0_{xx}\bar{S}^{\text{G}}_{xx}} - \left|\bar{S}^{0,\text{G}}_{xx}\right|\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

这里采用了记号 $\bar{S}^{0,\text{G}}_{qq} \equiv \bar{S}_{q_0 q_{\text{G}}}$ 等。不等式由以下事实得出：对于任意 a，$b \geq 0$，$a+b \geq 2\sqrt{ab}$均成立；并且对于任意复数 z，$-|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$ 。在式（3.2）的第一行中，振幅正交分量取加号，相位正交分量取减号。不过，该不等式对两种正交分量均成立。利用式（3.2），可得输出正交分量谱满足约束

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\text{out}}_{qq}\bar{S}^{\text{out}}_{pp} \geq& 4|H_0 H_{\text{G}}|^2 \times \\ & \left(\sqrt{\bar{S}^0_{qq}\bar{S}^{\text{G}}_{qq}} - \left|\bar{S}^{0,\text{G}}_{qq}\right|\right)\left(\sqrt{\bar{S}^0_{pp}\bar{S}^{\text{G}}_{pp}} - \left|\bar{S}^{0,\text{G}}_{pp}\right|\right),\end{aligned} \tag{3.3}$$

适用于所有相位不敏感反馈振荡器。

如果进一步，模式 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_{\text{G}}$ 彼此不相关，则交叉项 $\bar{S}^{0,\text{G}}_{qq}$和 $\bar{S}^{0,\text{G}}_{pp}$消失。由于模式$\hat{a}_0$ 和$\hat{a}_{\text{G}}$ 满足正则对易关系，因此它们的正交分量满足不确定性原理（见定理1）$\bar{S}^i_{qq}\bar{S}^i_{pp} \geq \frac{1}{4}$ 对于每个模式$i = \{0, G\}$。因此，式（3.3）化简为

$$\bar{S}^{\text{out}}_{qq}\bar{S}^{\text{out}}_{pp} \geq |H_0 H_{\text{G}}|^2 = |H_0|^2\left(|H_0|^2 - 1\right). \tag{3.4}$$

这是在相位不敏感放大器的耦入模式与辅助模式之间不存在量子关联时，由该放大器的正反馈构成的反馈振荡器输出场涨落之间的权衡所受的与量子态无关的 约束。

在载波附近，其中 $|H_0| \gg 1$，式（3.4）比式（3.1）中的海森堡不确定性原理严格得多。事实上，肖洛-汤斯极限就是式（3.4）的一个实例。也就是说，注意到对于载波附近的频率，$|H_0| \gg 1$，因此式（3.4）意味着$\bar{S}^{\text{out}}_{qq}\bar{S}^{\text{out}}_{pp} \gtrsim |H_0|^4$。肖洛-汤斯极限对应于这样的情况：两个输出正交分量之间的涨落均等分配，使得这一不等式达到饱和，

即 $\bar{S}^{\rm out}_{qq} \approx \bar{S}^{\rm out}_{pp} \approx |H_0|^2$。这意味着，只要模式 $\hat{a}_0$,$\hat{a}_{\rm G}$ 彼此独立，且放大器对相位不敏感，那么任何试图通过改造输出耦合器或辅助态，将频率涨落降低到肖洛-汤斯极限以下的做法，都会导致振荡器输出功率的涨落增大。放宽上述任一或所有假设，都可以在不同程度上突破肖洛-汤斯极限。事实上，显而易见，令模式 $\hat{a}_0$,$\hat{a}_{\rm G}$ 相关，会使式 (3.3) 中的不确定性界限变弱。

B. 相位不敏感环内放大器：压缩与纠缠

现在，我们具体考察由相位不敏感环内放大器构成的反馈振荡器规避肖洛-汤斯极限的可能性。为了聚焦于载波附近的正交分量涨落，我们将式（2.13）写成偏移频率 Ω 处的形式$_0 + \omega$

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\rm out}[\omega] &\approx H_0[\omega]\left(\hat{q}_0[\omega] - \hat{q}_{\rm G}[\omega]\right)\\ \hat{p}_{\rm out}[\omega] &\approx H_0[\omega]\left(\hat{p}_0[\omega] + \hat{p}_{\rm G}[\omega]\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

为简洁起见，在此处及下文中，我们用 ω 代替 $\Omega_0 + \omega$。于是，输出相位和振幅正交分量的谱具有如下的一般形式

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\rm out}_{qq}[\omega] =&|H_0[\omega]|^2\left(\bar{S}^{0}_{qq}[\omega] + \bar{S}^{\rm G}_{qq}[\omega] - 2\,{\rm Re}\left[\bar{S}^{0,{\rm G}}_{qq}[\omega]\right]\right)\\ \bar{S}^{\rm out}_{pp}[\omega] =&|H_0[\omega]|^2\left(\bar{S}^{0}_{pp}[\omega] + \bar{S}^{\rm G}_{pp}[\omega] + 2\,{\rm Re}\left[\bar{S}^{0,{\rm G}}_{pp}[\omega]\right]\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

显然，压缩耦合输入模式或辅助模式，均可降低所需正交分量中的噪声功率。将这两个模式纠缠起来——从而产生非零 $\bar{S}^{0,\ {\rm G}}_{qq}$ 和 $\bar{S}^{0,\ {\rm G}}_{pp}$——则可同时降低两个正交分量中的涨落。作为示例，我们设想对耦合输入模式 $\hat{a}_0$ 和放大器的辅助模式 $\hat{a}_{\rm G}$进行频率无关的单模压缩，其压缩参数分别为 r_0 和 $r_{\rm G}$，随后对模式 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_{\rm G}$进行双模压缩，压缩参数为 $r_{\rm E}$。（后者对应于模式 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_{\rm G}$ [28]的连续变量 EPR 纠缠。）利用高斯态技术，可以推导出相应的输出谱（详情见附录C）：

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\rm out}_{qq}[\omega] &= \frac{1}{2}e^{-r_{\rm E}}\left(e^{2r_0} + e^{2r_{\rm G}}\right)|H_0[\omega]|^2\\ \bar{S}^{\rm out}_{pp}[\omega] &= \frac{1}{2}e^{-r_{\rm E}}\left(e^{-2r_0} + e^{-2r_{\rm G}}\right)|H_0[\omega]|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

通过压缩其相位正交分量，对应于$r_0,\ r_{\rm G} > 0$，我们可以无限制地抑制振荡器的相位正交分量涨落——从而抑制振荡器的线宽，但代价是增加振荡器的振幅正交分量涨落。通过对这些模式进行关联，对应于 $r_{\rm E} > 0$，我们可以同时降低振荡器的振幅和相位正交分量涨落。然而，海森堡不确定性关系 [式（3.1）] $\bar{S}^{\rm out}_{qq}\bar{S}^{\rm out}_{pp} \geq \frac{1}{4}$ 仍然成立，并且构成反馈振荡器输出正交分量噪声可被抑制的极限（关于 EPR 纠缠输入情况下这一事实的明确验证，参见附录C）。

C. 环路内相敏的放大器

降低振荡器输出振幅和相位谱的另一种方法，是修改反馈回路本身，如图 1（B）所示，将相位不敏感放大器替换为相位敏感放大器。为保持一般性，我们认为该相位敏感放大器是通过对理想（即无噪声的）相位敏感放大器的输出进行相位不敏感放大来实现的。后者是一个压缩器，其压缩参数为 $\xi = r_{\rm s}e^{i\varphi_{\rm s}}$。当相位不敏感组件具有单位增益时，该级联结构实现了无噪声的相位敏感放大器（见附录 D1）。与之前一样，相位不敏感放大器的非线性饱和响应限制了振荡器的输出；对先前分析的直接扩展表明，这发生在$Ge^{r_{\rm s}}\sqrt{\eta} = 1$时，这可以解释为环路中增益与损耗之间的平衡，只是现在增益（$Ge^{r_{\rm s}}$）是相敏的。围绕该稳态振荡的线性响应由下式描述：

$$\begin{aligned}\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] &= \cosh(r_{\rm s})\,\hat{a}_{\rm s}[\Omega] + e^{i\varphi_{\rm s}}\sinh(r_{\rm s})\,\hat{a}^{\dagger}_{\rm s}[\Omega]\\ \hat{a}_{\rm s}[\Omega] &= G\,\hat{a}_{\rm in}[\Omega] + \sqrt{G^2-1}\,\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega]\\ \hat{a}^{+}_{\rm out}[\Omega] &= -\sqrt{\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] + \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}_0[\Omega]\\ \hat{a}_{\rm out}[\Omega] &= \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}[\Omega] + \sqrt{\eta}\,\hat{a}_0[\Omega]\\ \hat{a}_{\rm in}[\Omega] &= e^{i\Omega\tau}\hat{a}^{+}_{\rm out}[\Omega].\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，与之前一样，$\hat{a}_0$，$\hat{a}_{\rm G}$ 是分别在输出耦合器和环路内放大器处传递噪声的模式。通过求解这些方程，可以用两个噪声输入表示输出正交分量涨落：

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\rm out}[\Omega] &= H^q_0[\Omega]\hat{q}_0[\Omega] + H^q_{\rm G}[\Omega]\hat{q}_{\rm G}[\Omega]\\ \hat{p}_{\rm out}[\Omega] &= H^p_0[\Omega]\hat{p}_0[\Omega] - H^p_{\rm G}[\Omega]\hat{p}_{\rm G}[\Omega].\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意，输出正交分量是相对于压缩角 $\varphi_{\rm s}$定义的。四个传递函数的完整表达式 $H^{q,\ p}_{0,\ G}$，见附录 D2。重要的是，放大器的噪声特性由反馈回路的响应决定。与之前一样，我们通过要求输入耦合场和输出耦合场满足正则对易关系来分析该响应。由此得到（见附录 D2）

$$[\hat{a}_{\rm G}[\Omega], \hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega']] = 2\pi\cdot\delta[\Omega + \Omega'], \tag{3.10}$$

我们再次发现，辅助模式满足正则对易关系。

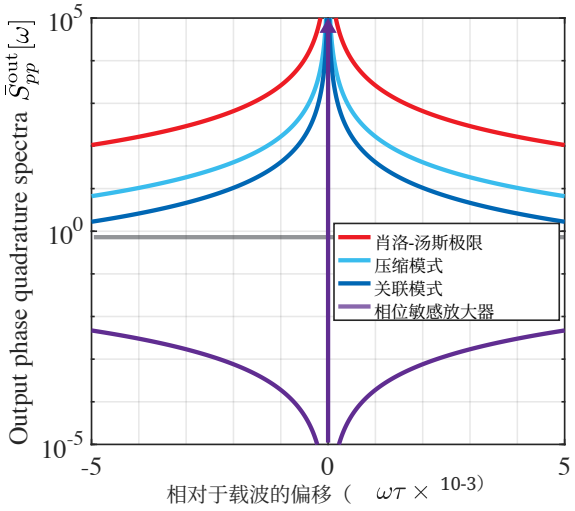

图 3. 四种受量子噪声限制的振荡器的输出相位正交分量谱。红色表示采用相位不敏感放大器、且耦合输入模式和辅助模式处于真空态的振荡器的肖洛-汤斯谱。浅蓝色和深蓝色分别表示这些模式被压缩（浅蓝色）和纠缠（深蓝色）的情况（两者的压缩均为 12 分贝）。紫色表示环路内放大器为纯相敏放大器的情况。灰色显示 $\bar{S}_{pp}^{\rm out} = 1/2$ 以供参考。

对于具有相敏放大器、且输入耦合模式和辅助模式处于真空态的反馈振荡器，其输出振幅与相位正交分量谱为

$$\begin{aligned}\bar{S}_{qq}^{\rm out}[\Omega] &= \frac{1}{2}|H_0[\Omega]|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\eta\, e^{2r_{\rm s}}}{1-\eta}\right)|H_{\rm G}[\Omega]|^2,\\ \bar{S}_{pp}^{\rm out}[\Omega] &= \frac{1}{2}|H_0^p[\Omega]|^2 + \frac{1}{2}|H_{\rm G}^p[\Omega]|^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

在第一个方程中，我们利用了以下事实：$H_0^q = H_0$ 和 $H^q{}_{\rm G} = \sqrt{(1-\eta\, e^{2r_{\rm s}})/(1-\eta)}H_{\rm G}$。我们注意到，在 $0 < r_{\rm s} \leq -\ln(\eta)/2$ 时，$|H_0^p[\Omega]| < |H_0[\Omega]|$ 和 $|H^p{}_{\rm G}[\Omega]| < |H_{\rm G}[\Omega]|$ 在共振附近，因此使用相位敏感放大器会降低振荡器的相位正交分量谱。（增益-损耗平衡要求 $r_{\rm s} \leq -\ln(\eta)/2$，因为纯相位敏感放大器的增益为 $e^{r_{\rm s}}$，而输出耦合器带来的损耗为 $\sqrt{\eta}$。）此外，相位敏感振荡器的输出振幅正交分量谱始终低于相位不敏感振荡器的输出振幅正交分量谱，尽管最多只低一个 $1/2$ 的因子。

显然，基于相敏放大器反馈的振荡器提供了一种规避肖洛-汤斯极限的方法。这种情况的极端版本是环路内放大器完全相敏的（$G = 1$见式（3.8））， 即它是一个单模压缩器没有相位不敏感增益，因此可实现无噪声环路内放大。在这种情况下，令模式 $\hat{a}_0$ 处于真空态，载波附近的输出正交分量谱为（见附录 D2）

$$\begin{aligned}\bar{S}_{qq}^{\rm out}[\omega] &= \frac{\left(\sqrt{\eta} - 1/\sqrt{\eta}\right)^2}{\omega^2\tau^2}\bar{S}_{qq}^{0}[\omega]\\ \bar{S}_{pp}^{\rm out}[\omega] &= \frac{\omega^2\tau^2}{\left(\sqrt{\eta} - 1/\sqrt{\eta}\right)^2}\bar{S}_{pp}^{0}[\omega].\end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $\bar{S}_{qq}^{\rm out}\bar{S}_{pp}^{\rm out} = \bar{S}_{qq}^{0}\bar{S}_{pp}^{0}$，反馈振荡器不会使振幅正交分量与相位正交分量之间的不确定性乘积从输入到输出增大。具体而言，如果耦合输入场 $\hat{a}_0$ 是真空，振荡器的输出场就是围绕稳态振荡载波的最小不确定性压缩量子态——明亮压缩态。（实际上，任何相位敏感放大器中的技术相位噪声，都会将反压缩振幅正交分量中的噪声注入压缩相位正交分量 [29]，，从而排除了式（3.12）在 $\omega \to 0$ 时所预测的零相位噪声的可能性。）

IV. 讨论与结论

图 3比较了输入耦合模式和辅助模式经过压缩的振荡器、输入耦合模式和辅助模式经过压缩且彼此相关的振荡器，以及采用相敏放大器的振荡器的输出相位正交分量谱。如图所示，在反馈回路中嵌入相敏放大器，对振荡器相位正交分量谱的抑制效果远胜于在给定最大压缩水平下对输入模式进行压缩或使其相关。我们还强调，与压缩输入耦合模式和辅助模式不同，使这些模式相关或在反馈回路中嵌入相敏放大器，可以降低振荡器的相位正交分量谱，而不会增加其振幅正交分量谱。

我们以一种适用于广泛一类反馈振荡器的方式，确定了振荡器频率稳定性所受肖洛-汤斯极限的起源。事实上，对于相位不敏感、受量子噪声限制的振荡器，这只是关于振荡器输出场的一般性不确定性原理的一个方面。该不确定性原理所施加的约束，决定了广泛一类振荡器的频率与功率波动之间的基本权衡。不过，压缩真空注入、EPR纠缠和相敏放大等系统性策略，为规避肖洛-汤斯极限提供了足够的空间。

[1] H. Nyquist, 《贝尔系统技术期刊》11, 126（1932）。[2] H. Black, 《电气工程师学会汇刊》87, 379（1934）。[3] H. Bode, *Network analysis and feedback amplifier design*（Van Nostrand Company，1945）。[4] J. P. Gordon、H. J. Zeiger 和 C. H. Townes, 《物理评论》99, 1264（1955）。[5] A. L. Schawlow 和 C. H. Townes, 《物理评论》112, 1940 1958( )。[6] K. Shimoda、H. Takahasi 和 C. H. Townes, 《日本物理学会杂志》12, 686（1957）。[7] R. V. Pound, 《物理学年刊》1, 24（1957）。[8] R. Hempstead 和 M. Lax, 《物理评论》 161, 350 （ 1967 ）。[9] M. O. Scully 和 W. E. Lamb, 《物理评论》159, 208（1967）。[10] C. Henry, 《IEEE量子电子学杂志》19, 1391（1983）。[11] M. Pollnau 和 M. Eichhorn, 《量子电子学进展》72, 100255（2020）。[12] G. Domenico、S. Schilt 和 P. Thomann, 《应用光学》49, 4801（2010）。[13] A. Yariv, *Quantum Electronics*（John Wiley，1989）。[14] H. A. Haus 和 J. A. Mullen, 《物理评论》128, 2407（1962）。[15] C. M. Caves, 《物理评论D》26, 1817（1982）。[16] H. M. Wiseman, 《物理评论A》60（1999）。[17] T. J. Baker、S. N. Saadatmand、D. W. Berry 和 H. M. Wiseman, 《自然·物理学》17, 179（2020）。[18] L. A. Ostrowski、T. J. Baker、S. N. Saadatmand 和 H. M. Wiseman, 《物理评论快报》（2023）。[19] W. K. Wootters 和 W. H. Zurek, 《自然》299, 802（1982）。[20] R. J. Glauber, 《纽约科学院年刊》480, 336（1986）。[21] J. H. Shapiro、G. Saplakoglu、S. Ho、P. Kumar、B. E. Saleh 和 M. C. Teich, 《美国光学学会杂志B》4, 1604（1987）。[22] H. M. Wiseman, 《光学B辑杂志》1, 459（1999）。[23] P. W. Milonni, 《美国物理学杂志》57, 127（1989）。[24] A. A. Clerk、M. H. Devoret、S. M. Girvin、F. Marquardt 和 R. J. Schoelkopf, arXiv:0810.4729（2010）。[25] L. Susskind 和 J. Glogower, 《Physics Physique Fizika》1, 49 1964( )。[26] S. M. Barnett 和 D. T. Pegg, 《物理学A辑：数学与一般物理》19, 3849（1986）。[27] H. A. Haus 和 C. H. Townes, 《无线电工程师学会会刊》50, 1544（1962）。[28] S. L. Braunstein 和 H. J. Kimble, 《物理评论快报》80, 869（1998）。[29] S. F. Dwyer, *Quantum noise reduction using squeezed states in LIGO*，博士论文，麻省理工学院，马萨诸塞州剑桥市马萨诸塞大道77号，邮编02139（2013）。[30] R. Simon、N. Mukunda 和 B. Dutta, 《物理评论A》49, 1567（1994）。[31] S. L. Braunstein 和 P. van Loock, 《现代物理评论》77, 513（2005）。

附录 A：谱密度：定义和性质

对于一个随时间变化的算符（不一定是厄米的）$\hat{A}(t)$，我们将其傅里叶变换定义为

$$\hat{A}[\Omega] = \int_{\mathbb{R}} \hat{A}(t) e^{i\Omega t}\, \mathrm{d}t, \tag{A1}$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}$。请注意，我们记作 $\hat{A}^\dagger[\Omega]$，的厄米共轭的傅里叶变换不同于傅里叶变换的厄米共轭，后者表示为 $\hat{A}[\Omega]^\dagger$；二者的关系为，

$$\hat{A}^\dagger[\Omega] = \hat{A}[-\Omega]^\dagger. \tag{A2}$$

公式（A1）的逆变换为:

$$\hat{A}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{A}[\Omega] e^{-i\Omega t} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}. \tag{A3}$$

我们通过对称化表达式定义两个一般（不一定是厄米算符，也不一定彼此对易）算符 $\hat{A}, \hat{B}$ 之间的互相关，

$$\bar{S}_{AB}(t) = \frac{1}{2}\left\langle \{\hat{A}^\dagger(t), \hat{B}(0)\} \right\rangle.$$

我们将主要使用对称化双边互相关谱，其定义为对称化互相关的傅里叶变换 [24], 即，

$$\begin{aligned} \bar{S}_{AB}[\Omega] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left\langle \{\hat{A}^\dagger(t), \hat{B}(0)\} \right\rangle e^{i\Omega t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left\langle \{\hat{A}^\dagger[\Omega], \hat{B}[\Omega']\} \right\rangle \frac{\mathrm{d}\Omega'}{2\pi}, \end{aligned} \tag{A4}$$

其中最后一个等号是利用时间依赖算符的傅里叶表示式（A3）得到的。

对于弱平稳算符，即两两满足以下关系的算符，

$$\left\langle \hat{A}(t)\hat{B}(t') \right\rangle = \left\langle \hat{A}(t-t')\hat{B}(0) \right\rangle,$$

谱由恒等式给出，

$$\bar{S}_{AB}[\Omega] \cdot 2\pi\delta[\Omega + \Omega'] = \frac{1}{2}\left\langle \{\hat{A}^\dagger[\Omega], \hat{B}[\Omega']\} \right\rangle. \tag{A5}$$

注意，在这种情况下， $\bar{S}_{AB}[\Omega]^* = \bar{S}_{BA}[\Omega]$。

引理 1. 弱平稳（但不一定是厄米）的算符的谱为正；即，

$$\bar{S}_{AA}[\Omega] \geq 0. \tag{A6}$$

if $\langle \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t') \rangle = \langle \hat{A}^\dagger(t-t')\hat{A}(0) \rangle$.

证明。由于$\hat{A}$是弱平稳的，式（A5），结合式（A2），意味着谱 $S_{AA}[\Omega]$满足：

$$\bar{S}_{AA}[\Omega]\cdot 2\pi\delta[0]=\frac{1}{2}\left\langle\{\hat{A}[-\Omega]^{\dagger},\hat{A}[-\Omega]\}\right\rangle.$$

接下来证明右侧为正。考虑第一项，它是在某个量子态下对厄米算符 $\hat{A}[-\Omega]^{\dagger}\hat{A}[-\Omega]$ 的期望值，不妨设该量子态为 $\hat{\rho}$。由于一般量子态 $\hat{\rho}$ 可以表示为凸组合 $\hat{\rho}=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$，，其中 $p_i\geq 0$、$\sum_i p_i=1$ 和 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij}$，因此期望值可写为：

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{A}[-\Omega]^{\dagger}\hat{A}[-\Omega]\right\rangle&=\mathrm{Tr}[\hat{A}[-\Omega]^{\dagger}\hat{A}[-\Omega]\hat{\rho}]\\&=\sum_i p_i\langle\psi_i|\hat{A}[-\Omega]^{\dagger}\hat{A}[-\Omega]|\psi_i\rangle\\&=\sum_i p_i\|\hat{A}[-\Omega]|\psi_i\rangle\|^2\geq 0.\end{aligned}$$

同样的论证也适用于第二项。□

因此，我们可以将弱平稳算符 $S_{AA}[\Omega]$，的谱解释为算符值过程 $\hat{A}(t)$ 每单位带宽的方差，这与经典谱密度类似。

定理 1。对于满足对易关系 $[\hat{A}[\Omega],\hat{B}[\Omega']]=ic\cdot 2\pi\delta[\Omega+\Omega']$ 的弱平稳可观测量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$，其中 $c\in$ 是某个实常数，

$$\bar{S}_{AA}[\Omega]\bar{S}_{BB}[\Omega]\geq\frac{c^2}{4}+\left|\bar{S}_{AB}[\Omega]\right|^2.\tag{A7}$$

证明。设 $\{\hat{A}_j\}$ 为一组弱平稳可观测量；那么它们的线性组合 $M=\sum_j\alpha_j A_j$（其中 $\alpha_j\in\mathbb{C}$）也弱平稳。利用$\langle\hat{M}[-\Omega]^{\dagger}\hat{M}[-\Omega]\rangle\geq 0$（如式（A6）的证明所示），可得

$$\mathrm{Tr}\left[\sum_{j,k}\alpha_j^{*}\hat{A}_j[\Omega]\alpha_k\hat{A}_k[-\Omega]\hat{\rho}\right]\geq 0,\tag{A8}$$

这里用到了式（A2）以及以下事实：$\hat{A}_k^{\dagger}[\Omega]=\hat{A}_k[\Omega]$，因为根据假设，$A_k$ 是一个可观测量。等价地，

$$\sum_{j,k}\alpha_j^{*}\alpha_k\langle\hat{A}_j[\Omega]\hat{A}_k[-\Omega]\rangle\geq 0.\tag{A9}$$

我们可以将 $\hat{A}_j[\Omega]\hat{A}_k[-\Omega]$ 分解为厄米部分和反厄米部分，即

$$\begin{aligned}\hat{A}_j[\Omega]\hat{A}_k[-\Omega]=&\frac{1}{2}\left\{\hat{A}_j[\Omega],\hat{A}_k[-\Omega]\right\}\\&+\frac{1}{2}\left[\hat{A}_j[\Omega],\hat{A}_k[-\Omega]\right].\end{aligned}\tag{A10}$$

如果我们定义

$$\bar{C}_{AB}[\Omega]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\hat{A}^{\dagger}[\Omega],\hat{B}[\Omega]'\right]\frac{\mathrm{d}\Omega'}{2\pi},\tag{A11}$$

于是，利用式（A5）以及式（A9）至（A11），可得

$$\sum_{j,k}\alpha_j^{*}\alpha_k\left(\bar{S}_{A_j,A_k}[\Omega]+\bar{C}_{A_j,A_k}[\Omega]\right)\geq 0.\tag{A12}$$

该不等式要求由 $S_{A_j,A_k}[\Omega]+C_{A_j,A_k}[\Omega]$ 给出的矩阵的特征值为实数且非负。具体而言，该矩阵的最小特征值必须非负。

考虑以下情况：$\{\hat{A}_j\}=\{\hat{A},\hat{B}\}$ 满足$[\hat{A}[\Omega],\hat{B}[\Omega']]=ic\cdot 2\pi\delta[\Omega+\Omega']$；此处 $c\in\mathbb{R}$ 根据 $\hat{A},\hat{B}$ 均为可观测量。在这种情况下，方程（A12）要求（为简洁起见，省略频率自变量）

$$\bar{S}_{AA}\bar{S}_{BB}-\left(\bar{S}_{AB}+\bar{C}_{AB}\right)\left(\bar{S}_{BA}+\bar{C}_{BA}\right)\geq 0.$$

利用 $\bar{C}_{AB}[\Omega]=\bar{C}_{BA}^{*}[\Omega]=ic/2$以及 $\bar{S}_{AB}[\Omega]=\bar{S}_{BA}^{*}[\Omega]$, 这一事实进行化简，即得方程（A7）。□

附录 B：基于相位不敏感放大器的反馈振荡器的细节

1. 饱和行为与经典稳态

此处，我们分析图 1A 所示饱和反馈振荡器的经典稳态行为。从经典角度看，图 1A 所示系统的行为在时域中由以下方程支配：

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{out}}^{-}(t)&=\mathcal{A}[\alpha_{\mathrm{in}}(t)]\\\alpha_{\mathrm{out}}^{+}(t)&=-\sqrt{\eta}\,\alpha_{\mathrm{out}}^{-}(t)+\sqrt{1-\eta}\,\alpha_0(t)\\\alpha_{\mathrm{out}}(t)&=\sqrt{1-\eta}\,\alpha_{\mathrm{out}}^{-}(t)+\sqrt{\eta}\,\alpha_0(t)\\\alpha_{\mathrm{in}}(t)&=\alpha_{\mathrm{out}}^{+}(t-\tau).\end{aligned}\tag{B1}$$

其中 $\{\alpha_i\}$ 是经典场振幅，而 $\mathcal{A}[\cdot]$ 是放大器的非线性响应。方程（B1）可简化为

$$\alpha_{\mathrm{out}}^{+}(t)=-\sqrt{\eta}\,\mathcal{A}[\alpha_{\mathrm{out}}^{+}(t-\tau)]+\sqrt{1-\eta}\,\alpha_0(t-\tau)\tag{B2}$$

显然，输入 $\alpha_0(t)$ 为环路中循环的经典场提供源。实际上，由 α_0 表示的输入是纯噪声，在理想情况下，就是真空噪声。

为了分析反馈回路如何仅由噪声驱动而达到稳态，我们假设 α_0 表示无限小的涨落。为了理解环路如何启动，考虑 $\alpha_0(0)$ 是一个小的随机值，并且对于 $t>0$为零。令其产生一个小的振幅 $\alpha_{\mathrm{out}}^{+}(0<t<\tau)=\delta$。我们主要关注循环功率，而不是相位旋转，因此在 B2式下取其模平方

这些条件：

$$|\alpha^{+}_{\rm out}(t)|^2 = \eta \left|\mathcal{A}[\alpha^{+}_{\rm out}(t-\tau)]\right|^2 \\ \alpha^{+}_{\rm out}(0<t<\tau) = \delta. \tag{B3}$$

也就是说，如果初始随机种子 $\alpha_0(0)$产生稳态振幅，它必须满足

$$\left|\mathcal{A}[\alpha^{+}_{\rm out}]\right| = \alpha^{+}_{\rm out}/\sqrt{\eta}, \tag{B4}$$

这定义了方程 α_{ss} （2.5）的稳态。

以上只是一个必要条件，因为该稳态的稳定性问题仍未解决。现在我们将证明， $\mathcal{A}$ 在第二节 A 中列出的性质足以确保稳定性。性质 (1)、(3) 和 (4) 表明 $\mathcal{A}'(x) = \frac{d\mathcal{A}}{dx} < \frac{\mathcal{A}(x)}{x}$ $\forall x$。令$\alpha^{+}_{\rm out}(t) = \alpha_{ss} + \delta_t$ ，其中 δ_t 是时刻 t时 $\alpha^{+}_{\rm out}$稳态值的一个小扰动。同样，令 $\alpha^{+}_{\rm out}(t+\tau) = \alpha_{ss} + \delta_\tau$。于是，方程 (B3) 可写为 $|\alpha_{ss}+\delta_\tau|^2 = \eta|\mathcal{A}[\alpha_{ss}+\delta_t]|^2$。将$\delta_t$展开至一阶，并利用方程 (B4)，得到

$$|\delta_\tau| = \frac{\alpha_{ss}\mathcal{A}'[\alpha_{ss}]}{\mathcal{A}[\alpha_{ss}]}|\delta_t| \\ \Rightarrow \quad |\delta_\tau| < |\delta_t| \tag{B5}$$

其中我们利用了 $\mathcal{A}$ 的性质。因此，稳态附近的扰动会随时间逐渐消失；也就是说，稳态对小扰动是稳定的。

类似地，我们可以证明，所有振幅均为零的工作点是不稳定的。也就是说，任何初始涨落都会使环路趋向其稳态方程（B4）。现在，令 $\alpha^{+}_{\rm out}(t) = \delta_t$，并令 $\alpha^{+}_{\rm out}(t+\tau) = \delta_\tau$，其中 δ_t 和 δ_τ 足够小，使得性质（2）成立。于是有

$$|\delta_\tau|^2 = \eta|\mathcal{A}[\delta_t]|^2 \\ \Rightarrow \quad |\delta_\tau| = \sqrt{\eta}|G_0||\delta_t| \\ \Rightarrow \quad |\delta_\tau| > |\delta_t|. \tag{B6}$$

这里 $G_0 = \mathcal{A}'[0]$ 是放大器在零点附近非线性响应的线性斜率。

总之，环路将达到一个稳态，其中存在振幅为 $\alpha_{\rm ss}$ 的较大循环经典场，且线性化增益为

$$G \equiv \lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha^{-}_{\rm out}(t)}{\alpha_{\rm in}(t)} = \frac{\mathcal{A}[\alpha_{ss}]}{\alpha_{ss}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}. \tag{B7}$$

我们强调对饱和反馈振荡器进行经典分析时的两个关键点。首先，该系统会放大任何微小的初始涨落，并将自身从初始的不稳定零输出场量子态中驱离。最终，它将到达具有大振幅输出场的稳定平衡点， α_{ss}。这个大输出场承载着系统的振荡，是正反馈振荡器的基本特征。其次，在在大振幅平衡点，增益介质对于小扰动而言是线性的，其增益由系统在稳态下保持往返功率守恒的要求决定，即$G = 1/\sqrt{\eta}$。任何满足性质–(1）至（4）并嵌入反馈回路的放大器都会饱和到某一点，在该点可将其视为具有线性增益；这一事实使我们能够对振荡器的相位和振幅涨落进行线性量子力学分析。

2. 线性响应

考虑图1A 所示的正反馈放大器配置。增益为 G 的相位不敏感放大器，其输出经因子 $\sqrt{\eta}$ 衰减并延迟 τ 后，耦合回输入端。信号的剩余部分从环路耦合输出，以得到环外场 $a_{\rm out}$。

系统的运动方程通过沿图 1A 中的环路推导得到。对于时域中的海森堡表象算符，我们有

$$\hat{a}^{-}_{\rm out}(t) = G\,\hat{a}_{\rm in}(t) + \sqrt{G^2-1}\,\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}(t) \\ \hat{a}^{+}_{\rm out}(t) = -\sqrt{\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}(t) + \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}_0(t) \\ \hat{a}_{\rm out}(t) = \sqrt{1-\eta}\,\hat{a}^{-}_{\rm out}(t) + \sqrt{\eta}\,\hat{a}_0(t) \\ \hat{a}_{\rm in}(t) = \hat{a}^{+}_{\rm out}(t-\tau) \tag{B8}$$

辅助模式$\hat{a}_{\rm G}$ 描述了与任何相位不敏感的线性放大过程相关的不可避免的噪声 [14, 15, 24]。

方程（B8）可以在频域中求解输出场$\hat{a}_{\rm out}[\Omega]$，其表示为输入$\hat{a}_0[\Omega]$和$\hat{a}_{\rm G}[\Omega]$。结果为

$$\hat{a}_{\rm out}[\Omega] = \frac{\sqrt{\eta}+Ge^{i\Omega\tau}}{1+G\sqrt{\eta}e^{i\Omega\tau}}\hat{a}_0[\Omega] + \frac{\sqrt{G^2-1}\sqrt{1-\eta}}{1+G\sqrt{\eta}e^{i\Omega\tau}}\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega] \\ \equiv H_0[\Omega]\hat{a}_0[\Omega] + H_{\rm G}[\Omega]\hat{a}^{\dagger}_{\rm G}[\Omega], \tag{B9}$$

其中 $H_{0,\ {\rm G}}$ 是相应的线性响应传递函数。在稳态下，如上文所述，$G = 1/\sqrt{\eta}$，反馈路径由两个量表征：分束器的透射率 η 和延迟 τ，因此

$$H_0[\Omega] = \frac{\sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}e^{i\Omega\tau}}{1+e^{i\Omega\tau}}, \quad H_{\rm G}[\Omega] = \frac{1/\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta}}{1+e^{i\Omega\tau}}. \tag{B10}$$

附录C：压缩态的协方差矩阵

1. 协方差矩阵

本节定义单模和双模压缩算符的约定，并给出

压缩态和纠缠量子态的协方差矩阵表达式，这些矩阵编码了这些量子态的正交分量谱。

我们考虑模式 $\{\hat{a}_i\}$ 的谱协方差，并以其正交分量表示。定义 $Q_i := (\hat{q}_i, \hat{p}_i)$，谱协方差矩阵 $\boldsymbol{V}[\Omega]$ 由其元素定义为[30, 31] $V_{ij}[\Omega] := S_{Q_iQ_j}[\Omega]$。

在我们的情况下，模式是 $\{\hat{a}_0\hat{a}_G\}$。当它们处于真空态时，$|\text{vac}\rangle = |0\rangle_0|0\rangle_G$ [31]

$$\boldsymbol{V}_{\text{vac}}[\Omega] = \frac{1}{2}\text{diag}(1,1,1,1). \tag{C1}$$

我们也对量子态感兴趣。

$$|\psi\rangle := \hat{S}_E(r_E)\hat{S}_G(r_G)\hat{S}_0(r_0)\,|\text{vac}\rangle\,, \tag{C2}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{S}_0(r_0) &= e^{-\frac{r_0}{2}(\hat{a}_0^2-\hat{a}_0^{\dagger 2})}\\ \hat{S}_G(r_G) &= e^{-\frac{r_G}{2}(\hat{a}_G^2-\hat{a}_G^{\dagger 2})}\\ \hat{S}_E(r_E) &= e^{\frac{r_E}{2}(\hat{a}_0\hat{a}_G-\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_G^{\dagger})}.\end{aligned} \tag{C3}$$

此处，$S_{0,G}$ 为单模压缩算符，其符号约定为便于处理而选取，因此对于反馈振荡器，当 $r_0 > 0$ 或 $r_G > 0$时，输出相位涨落受到抑制。S_E 表示双模压缩（或 EPR纠缠），当 $r_E > 0$时，输出相位涨落受到抑制。$|\psi\rangle$ 的协方差矩阵为 [31]

$$\boldsymbol{V}[\Omega] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}(2r_G, 2r_0, \frac{r_E}{2}) & \boldsymbol{Z}(2r_0, 2r_G, r_E) \\ \boldsymbol{Z}(2r_0, 2r_G, r_E)^T & \boldsymbol{I}(2r_0, 2r_G, \frac{r_E}{2}) \end{bmatrix}, \tag{C4}$$

其中，我们定义矩阵 $\boldsymbol{I}(x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{Z}(x,y,z)$ 如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\times\\ &\begin{bmatrix} e^x\sinh^2(z) + e^y\cosh^2(z) & 0 \\ 0 & e^{-x}\sinh^2(z) + e^{-y}\cosh^2(z) \end{bmatrix}\\ \boldsymbol{Z}(x,y,z) &= \frac{1}{4}\times\\ &\begin{bmatrix} (e^x+e^y)\sinh(z) & 0 \\ 0 & -\left(e^{-x}+e^{-y}\right)\sinh(z) \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{C5}$$

由 r_0、r_G 以及 r_E 可从公式（C4）中直接读出。

2. 纠缠量子态的不确定性乘积

正如在讨论公式（3.7）时所提到的，我们的近共振近似似乎表明，对于足够高的

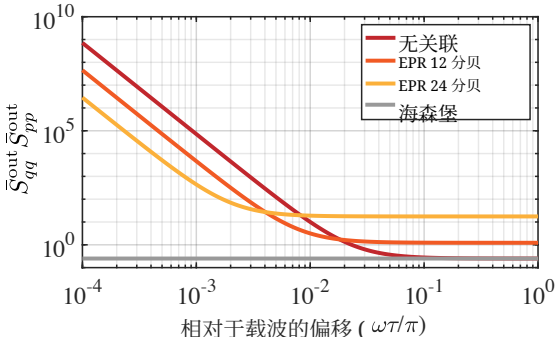

图4. 对于采用相位敏感放大器的反馈振荡器，其输入耦合模式和辅助模式输入不同水平的 EPR 纠缠态时的不确定性乘积 $\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega]$ 。随着用于产生纠缠的压缩水平从零（红色）增加到 12 分贝（橙色），再增加到 24 分贝（黄色），载波附近的不确定性乘积减小，而远离载波时则增大。所有情况下，不确定性乘积都高于海森堡极限（灰色）。请注意，不确定性乘积关于载波对称。

耦入模式与辅助模之间的 EPR纠缠程度，可以违背海森堡不确定性。现在我们将说明事实并非如此。

舍弃近共振近似，输出模式的正交分量谱与输入耦合模式和辅助模的正交分量谱之间的关系为

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega] =& |H_0[\Omega]|^2\bar{S}^0_{qq}[\Omega] + |H_G[\Omega]|^2\bar{S}^G_{qq}[\Omega]\\ &+ 2\,\text{Re}\left[H_0[\Omega]H_G[\Omega]^*\bar{S}^{0,G}_{qq}[\Omega]\right]\\ \bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega] =& |H_0[\Omega]|^2\bar{S}^0_{pp}[\Omega] + |H_G[\Omega]|^2\bar{S}^G_{pp}[\Omega]\\ &- 2\,\text{Re}\left[H_0[\Omega]H_G[\Omega]^*\bar{S}^{0,G}_{pp}[\Omega]\right],\end{aligned} \tag{C6}$$

使用公式（C4）中的谱，并结合 $r_0 = r_G = 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega] =& \frac{e^{r_E}}{4\eta}\\ &+ \frac{e^{-r_E}}{4}\left[\left(\frac{1}{\eta}-2\right)\tan^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) + \eta\sec^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{C7}$$

以及 $\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega] = \bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]$。利用这一表达式，我们发现，对于 $\Omega\tau = 2\pi n$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，乘积 $\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega]$ 取最小值。该乘积的最小值为

$$\min_{\Omega}\left[\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega]\right] = \left(\frac{e^{r_E}}{4\eta} + \frac{\eta e^{-r_E}}{4}\right)^2 \tag{C8}$$

该乘积本身在 $r_E = \ln(\eta)$ 时达到最小值，结果为

$$\min_{\{\Omega,\eta,r_E\}}\left[\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega]\right] = \frac{1}{4}. \tag{C9}$$

因此，对于 Ω、η 和 r_E 的一般取值，我们有如下关系

$$\bar{S}^{\text{out}}_{qq}[\Omega]\bar{S}^{\text{out}}_{pp}[\Omega] \geq \frac{1}{4}, \tag{C10}$$

这正是海森堡不确定性界限。EPR 将输入耦合模式与辅助模纠缠起来，并不能使反馈振荡器违反海森堡不确定性；这一点在图4中针对几种特定的压缩程度得到了展示。

在第IIIB节中，我们已经看到，在近共振近似下，EPR纠缠可以同时将振幅和相位正交分量抑制到任意程度。然而，我们现在已经表明，当考虑完整的、未经近似的系统动力学时，无论EPR纠缠的程度如何，系统始终满足海森堡不确定性界限。从物理上说，这意味着我们的系统并未违背量子理论的一项关键原则，这也是检验我们结果有效性的重要依据。

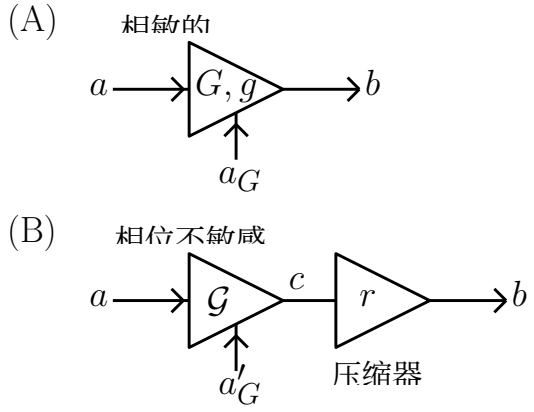

图5。（A）一个相位敏感放大器。（B）将（A）中的相位敏感放大器分解为一个相位不敏感放大器，后接一个压缩器。

附录 D：基于相位敏感放大器的反馈振荡器的详细信息

本节提供了环路中嵌入相位敏感放大器的反馈振荡器的量子噪声特性的现有细节。

1. 将相位敏感放大器分解为相位不敏感放大器和压缩器

本节将说明，量子极限相位敏感放大器总是可以分解为一个理想相位敏感放大器，后接一个理想单模压缩器。

考虑一个相位敏感放大器，它将输入 $\hat{a}$ 放大，产生输出 $\hat{b} = G\hat{a} + g\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger_{\mathrm{G}}$，其中 $\hat{a}_{\mathrm{G}}$ 是放大器的辅助模式（见图 5A）。（请注意，此处辅助模式 $\hat{a}_{\mathrm{G}}$ 不一定具有玻色统计特性。）我们断言，这样的相位敏感放大器等效于一个增益为 $\mathcal{G} = \sqrt{G^2 - g^2}$ 的理想相位不敏感放大器，该放大器将模式 $\hat{a}$ 变为模式 $\hat{c} = \mathcal{G}\hat{a} + \hat{a}'^\dagger_{\mathrm{G}}$；其后接一个理想压缩器，将模式 $\hat{c}$ 变为输出模式 $\hat{b} = \cosh(r)\hat{c} + \sinh(r)\hat{c}^\dagger$，其中 $\tanh(r) = g/G$（见图 5B）。要使这种等效关系成立，我们要求 $\hat{a}^\dagger_{\mathrm{G}} = (G\hat{a}'^\dagger_{\mathrm{G}} + g\hat{a}'_{\mathrm{G}})/\mathcal{G}$。

我们可以通过显式计算证明这一点。对于相位敏感放大器，输出模式 b 由输入模式 $\hat{a}$ 表示为 $\hat{b} = G\hat{a} + g\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger_{\mathrm{G}}$。对于先经过相位不敏感放大器、再经过压缩器的情况，我们有（假设 G 和 g 为正）

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \cosh(r)\hat{c} + \sinh(r)\hat{c}^\dagger \\ &= \cosh(r)(\mathcal{G}\hat{a} + \hat{a}'^\dagger_{\mathrm{G}}) + \sinh(r)(\mathcal{G}\hat{a}^\dagger + \hat{a}'_{\mathrm{G}}) \\ &= G\hat{a} + g\hat{a}^\dagger + \frac{G\hat{a}'^\dagger_{\mathrm{G}} + g\hat{a}'_{\mathrm{G}}}{\sqrt{G^2 - g^2}} \\ &= G\hat{a} + g\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger_{\mathrm{G}},\end{aligned} \tag{D1}$$

此外，我们可以证明 $\hat{a}_{\mathrm{G}}$ 和 $\hat{a}'_{\mathrm{G}}$ 具有相同的对易关系。

$$\begin{aligned}\left[a_{\mathrm{G}}, a^\dagger_{\mathrm{G}}\right] &= \frac{\left[Ga'_{\mathrm{G}} + ga'^\dagger_{\mathrm{G}}, Ga'^\dagger_{\mathrm{G}} + ga'_{\mathrm{G}}\right]}{G^2 - g^2} \\ &= \frac{G^2\left[a'_{\mathrm{G}}, a'^\dagger_{\mathrm{G}}\right] + g^2\left[a'^\dagger_{\mathrm{G}}, a'_{\mathrm{G}}\right]}{G^2 - g^2} \\ &= \left[a'_{\mathrm{G}}, a'^\dagger_{\mathrm{G}}\right],\end{aligned} \tag{D2}$$

因此我们可以看到，这是相位敏感放大器的正确分解。

这种分解的主要益处在于，它阐明了相位敏感放大器必须添加噪声的程度：其分解中只有不具相位敏感性的分量会添加噪声，而压缩器不会引入噪声。

2. 配备相位敏感放大器的振荡器响应

对于由环路内相位敏感放大器（图 1B）组成的振荡器，更自然的做法是用其中涉及的各种场的正交分量来研究其线性响应。我们将广义正交分量 $\hat{q}_\theta$ 和 $\hat{p}_\theta$ 定义为

$$\hat{q}_\theta = \frac{\hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a}e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_\theta = \hat{q}_{\theta+\pi/2}, \tag{D3}$$

其中两者是正则共轭的，并且与通常的振幅／相位正交分量的关系为 $\hat{q} = \hat{q}_{\theta=0}$ 和 $\hat{p} = \hat{p}_{\theta=0}$。

线性响应方程 eq. (3.8) 可以用正交分量表示。将 eq. (D3) 中的相位角取为 $\theta_{\mathrm{out}} = \theta^+_{\mathrm{out}} = \theta^-_{\mathrm{out}} = \theta_{\mathrm{s}} = \theta_{\mathrm{G}} = \theta_{\mathrm{in}} = \theta_0 = \varphi_{\mathrm{s}}/2$，则描述相位敏感振荡器耦合模式的振幅正交分量算符

满足

$$\begin{aligned}\hat{q}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= e^{r_\mathrm{s}}\hat{q}_{\theta,\mathrm{s}}[\Omega]\\ \hat{q}_{\theta,\mathrm{s}}[\Omega] &= G\,\hat{q}_{\theta,\mathrm{in}}[\Omega] + \sqrt{G^2-1}\,\hat{q}_{\theta,\mathrm{G}}[\Omega]\\ \hat{q}^{+}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= -\sqrt{\eta}\,\hat{q}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] + \sqrt{1-\eta}\,\hat{q}_{\theta,0}[\Omega]\\ \hat{q}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= \sqrt{1-\eta}\,\hat{q}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] + \sqrt{\eta}\,\hat{q}_{\theta,0}[\Omega]\\ \hat{q}_{\theta,\mathrm{in}}[\Omega] &= e^{i\Omega\tau}\hat{q}^{+}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega],\end{aligned} \tag{D4}$$

以及该振荡器的相位正交算符满足

$$\begin{aligned}\hat{p}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= e^{-r_\mathrm{s}}\hat{p}_{\theta,\mathrm{s}}[\Omega]\\ \hat{p}_{\theta,\mathrm{s}}[\Omega] &= G\,\hat{p}_{\theta,\mathrm{in}}[\Omega] - \sqrt{G^2-1}\,\hat{p}_{\theta,\mathrm{G}}[\Omega]\\ \hat{p}^{+}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= -\sqrt{\eta}\,\hat{p}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] + \sqrt{1-\eta}\,\hat{p}_{\theta,0}[\Omega]\\ \hat{p}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] &= \sqrt{1-\eta}\,\hat{p}^{-}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega] + \sqrt{\eta}\,\hat{p}_{\theta,0}[\Omega]\\ \hat{p}_{\theta,\mathrm{in}}[\Omega] &= e^{i\Omega\tau}\hat{p}^{+}_{\theta,\mathrm{out}}[\Omega].\end{aligned} \tag{D5}$$

我们注意到，与相位不敏感放大器的情况不同，在后者中所有相位角都是相对于振荡器的输出相位 θ_{out} 定义的，而现在所有相位角都是相对于压缩角 φ_s 定义的。说明这一点后，我们现在将取 $\varphi_\mathrm{s}=0$。

现在我们定义正交分量传递函数 $H_0^q[\Omega]$、$H^q{}_\mathrm{G}[\Omega]$、$H_0^p[\Omega]$, 以及 $H^p{}_\mathrm{G}[\Omega]$:

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\mathrm{out}}[\Omega] &= H_0^q[\Omega]\hat{q}_0[\Omega] + H_\mathrm{G}^q[\Omega]\hat{q}_\mathrm{G}[\Omega]\\ \hat{p}_{\mathrm{out}}[\Omega] &= H_0^p[\Omega]\hat{p}_0[\Omega] - H_\mathrm{G}^p[\Omega]\hat{p}_\mathrm{G}[\Omega].\end{aligned} \tag{D6}$$

符号约定的选择使得 $H_0^q = H_0^p = H_0$和 $H^q{}_\mathrm{G} = H^p{}_\mathrm{G} = H_\mathrm{G}$ 在 $r_\mathrm{s}\to 0$ 的情况下，相位敏感放大器变为相位不敏感放大器。

在反馈环路中加入相位敏感放大器后，饱和条件会发生改变。仍将相位敏感放大器建模为一个相位不敏感放大器和一个压缩器时，当放大正交分量的环路增益等于 1，相位不敏感放大器就会饱和。用数学公式表示，该条件为

$$Ge^{r_\mathrm{s}}\sqrt{\eta} = 1, \tag{D7}$$

这告诉我们，在稳态下，我们有 $G = e^{-r_\mathrm{s}}/\sqrt{\eta}$。如果放大器是纯相敏的，因而可由理想压缩器表示，那么 $G=1$，_ and$e^{r_\mathrm{s}} = 1/\sqrt{\eta}$。我们将 r_s by $r_{\max}$ 表示为该值。对于高于此值的压缩，饱和效应会将 r_s 降回 $r_{\max}$。明确地说，$r_{\max}$ 由下式给出

$$r_{\max} \equiv -\frac{1}{2}\ln(\eta). \tag{D8}$$

求解方程（D4）和（D5），并利用方程（D7）来消去 G ，由这些方程可得

象限传递函数由以下公式给出

$$\begin{aligned}H_0^q[\Omega] &= \frac{e^{i\Omega\tau}/\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta}}{1+e^{i\Omega\tau}} = H_0[\Omega]\\ H_\mathrm{G}^q[\Omega] &= \frac{\sqrt{1/\eta - e^{2r_\mathrm{s}}}\sqrt{1-\eta}}{1+e^{i\Omega\tau}} = \sqrt{\frac{1-\eta e^{2r_\mathrm{s}}}{1-\eta}}H_\mathrm{G}[\Omega]\\ H_0^p[\Omega] &= \frac{e^{i\Omega\tau}/\sqrt{\eta}+e^{2r_\mathrm{s}}\sqrt{\eta}}{e^{2r_\mathrm{s}}+e^{i\Omega\tau}}\\ H_\mathrm{G}^p[\Omega] &= \frac{\sqrt{1/\eta - e^{2r_\mathrm{s}}}\sqrt{1-\eta}}{e^{2r_\mathrm{s}}+e^{i\Omega\tau}}.\end{aligned} \tag{D9}$$

根据这些方程，我们看到 $H^q{}_\mathrm{G}[\Omega]\to 0$ 和$H^p{}_\mathrm{G}[\Omega]\to 0$ 为 $r\to r_{\max}$。从物理上看，放大器不会向输出添加任何噪声，因为它变得完全相敏。

我们看到，在共振附近，其中 $\Omega\tau\approx(2n+1)\pi$，$H_0^q$ 和 $H^q{}_\mathrm{G}$ 仍按 $1/\omega$进行缩放，而 H_0^p 和 $H^p{}_\mathrm{G}$ 具有不同的分母，当ω 变小时，这些分母不会趋近于零。在共振附近，其中 $\omega\tau\ll 1$，正交分量传递函数按 $\omega\tau$ 的最低阶表示为

$$\begin{aligned}H_0^q[\omega] &\approx \frac{1/\sqrt{\eta}-\sqrt{\eta}}{i\omega\tau}\\ H_\mathrm{G}^q[\Omega] &\approx -\frac{\sqrt{1/\eta - e^{2r_\mathrm{s}}}\sqrt{1-\eta}}{i\omega\tau}\\ H_0^p[\omega] &\approx \frac{-\sqrt{\eta}(1/\eta - e^{2r_\mathrm{s}}) - i\omega\tau/\sqrt{\eta}}{e^{2r_\mathrm{s}}-1-i\omega\tau}\\ H_\mathrm{G}^p[\omega] &\approx \frac{\sqrt{1/\eta - e^{2r_\mathrm{s}}}\sqrt{1-\eta}}{e^{2r_\mathrm{s}}-1-i\omega\tau}.\end{aligned} \tag{D10}$$

输出振幅和相位的谱与耦合输入模式和辅助模的谱相关，如下:

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\mathrm{out}}_{qq}[\Omega] =& |H_0^q[\Omega]|^2\bar{S}^0_{qq}[\Omega] + |H_\mathrm{G}^q[\Omega]|^2\bar{S}^\mathrm{G}_{qq}[\Omega]\\ &+ 2\mathrm{Re}\left[H_0^q[\Omega]H_\mathrm{G}^q[\Omega]^*\bar{S}^{0,G}_{qq}[\Omega]\right],\end{aligned} \tag{D11}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\mathrm{out}}_{pp}[\Omega] =& |H_0^p[\Omega]|^2\bar{S}^0_{pp}[\Omega] + |H_\mathrm{G}^p[\Omega]|^2\bar{S}^\mathrm{G}_{pp}[\Omega]\\ &- 2\mathrm{Re}\left[H_0^p[\Omega]H_\mathrm{G}^p[\Omega]^*\bar{S}^{0,G}_{pp}[\Omega]\right].\end{aligned} \tag{D12}$$

接近共振时，相敏反馈振荡器的输出振幅正交分量谱为

$$\begin{aligned}\bar{S}^{\mathrm{out}}_{qq}[\Omega] = |H_0[\Omega]|^2\Bigg(&\bar{S}^0_{qq}[\Omega] + \left(\frac{1-\eta e^{2r_\mathrm{s}}}{1-\eta}\right)\bar{S}^\mathrm{G}_{qq}[\Omega]\\ &-2\sqrt{\frac{1-\eta e^{2r_\mathrm{s}}}{1-\eta}}\mathrm{Re}\left[\bar{S}^{0,G}_{qq}[\Omega]\right]\Bigg).\end{aligned} \tag{D13}$$

我们看到，相敏的振荡器的输出振幅正交分量保留了与相位不敏感振荡器中相同的谱形，该谱形由$|H[\Omega]|$决定。然而，随着振荡器变得更加相敏，其放大器对输出振幅正交分量贡献的噪声越来越少。

此外，由方程（D10）可见，相位敏感振荡器的输出相位正交分量谱，与相位不敏感振荡器的输出相位正交分量谱具有根本不同的谱形。相位正交分量传递函数不再在 $\omega\tau = 0$ 处具有极点；对于完全相敏的反馈振荡器，耦合输入模式的相位正交分量传递函数 H_0^p 在 $\omega\tau = 0$处有一个零点。

利用$\hat{a}_0$ 和$\hat{a}_{\rm out}$ 是自由传播的玻色模式，以及式（D9）中的传递函数这一事实，我们可以计算放大器辅助模式的统计特性。与相位不敏感放大器的情况一样，$\hat{a}_{\rm G}$ 并非自由传播，因此其统计特性不必是玻色统计。计算辅助模式的统计特性后，我们得到

$$[\hat{a}_{\rm G}[\Omega], \hat{a}_{\rm G}^\dagger[\Omega']] = 2\pi \cdot \delta[\Omega + \Omega'], \tag{D14}$$

因此，对于相位不敏感的反馈振荡器而言，尽管放大器的辅助模式是一个环内场，它仍遵循玻色统计。

3. 非相关耦合输入模式与辅助模的正交分量谱

在耦合输入模式与辅助模之间不存在相关性的情况下，式（D11）和（D12）化简为

$$\begin{aligned}\bar{S}_{qq}^{\rm out}[\Omega] &= |H_0^q[\Omega]|^2 \bar{S}_{qq}^0[\Omega] + |H_{\rm G}^q[\Omega]|^2 \bar{S}_{qq}^{\rm G}[\Omega] \\ \bar{S}_{pp}^{\rm out}[\Omega] &= |H_0^p[\Omega]|^2 \bar{S}_{pp}^0[\Omega] + |H_{\rm G}^p[\Omega]|^2 \bar{S}_{pp}^{\rm G}[\Omega].\end{aligned} \tag{D15}$$

因此，具有真空态耦合输入模式和辅助模的相敏反馈振荡器的振幅与相位正交分量谱为

$$\begin{aligned}\bar{S}_{qq}^{\rm out}[\omega] =& \frac{1}{2}|H_0^q[\omega]|^2 + \frac{1}{2}|H_{\rm G}^q[\omega]|^2 \\ \bar{S}_{pp}^{\rm out}[\omega] =& \frac{1}{2}|H_0^p[\omega]|^2 + \frac{1}{2}|H_{\rm G}^p[\omega]|^2,\end{aligned} \tag{D16}$$

在共振附近。

将式（D10）中共振附近正交分量传递函数的显式表达式代入，可得输出振幅与相位正交分量谱为

$$\begin{aligned}\bar{S}_{qq}^{\rm out}[\Omega] \approx& \frac{(1-\eta)^2 + (1-\eta e^{2r_{\rm s}})(1-\eta)}{2\eta\tau^2\,\omega^2} \\ \bar{S}_{pp}^{\rm out}[\Omega] \approx& \frac{(1-\eta e^{2r_{\rm s}})^2 + \tau^2\,\omega^2 + (1-\eta e^{2r_{\rm s}})(1-\eta)}{2\eta\left[(e^{2r_{\rm s}}-1)^2 + \tau^2\,\omega^2\right]}.\end{aligned} \tag{D17}$$