arXiv:2304.03725v1 [math.CT] 7 Apr 2023

无偏幺半范畴中的图示演算无穷模型

Vihaan Dheer

摘要

由幺半范畴（及其辫式和对称推广）中所谓的“弦图”表示的态射具有若干性质，尤其是它们在同位变形下保持值不变。这使图示演算自 1991 年 Joyal 和 Street 严格确立图示与张量范畴之间的对应关系以来，便在范畴论中广泛应用。然而，我们认为有必要为现有的幺半范畴及其图示理论作出若干补充，以期将其推广到所谓的“无穷幺半范畴”。最重要的是，我们采用一种本质上不受同位变形影响的结构，从而以范畴论细节取代拓扑细节。在此过程中，我们以协调一致的方式将无穷张量积和超限复合引入图示形式体系。

关键词：弦图，张量范畴，超限复合，无穷幺半积，无偏幺半范畴，同位

目录

1 引言 2
1.1 研究动机. 2
1.2 概述. 3

2 无穷幺半范畴 3
2.1 超限复合. 3
2.2 无偏幺半范畴. 5
2.3 余极限展开范畴. 10

2 图式演算的无穷模型

3 幺半图 **14**
3.1 定义.14318 32 3 20. 未解析边.读出与有效性.

4 结论 . **22**
4 1 摘要 .
224.2 未来工作.23

1 引言

1.1 研究动机

类似幺半范畴论学者所用的弦图概念，最早成功的设计与应用很可能归功于罗杰·彭罗斯。他在 1971年 创造了 *Penrose notation* 这一术语来描述张量；相关的一系列著作始于参考文献 1，其中还包括其他一些作品，如参考文献 2。1991年，Joyal 和 Street 的著名著作《张量演算的几何，第一部分》 [3] 将这一概念正式引入幺半范畴论的研究范畴。自 MacLane 定义幺半（张量）范畴 [4], 以来，人们投入了大量精力研究相干定理 [5], ，并重新表述公理 [6]。Joyal 和 Street 将弦图应用于该理论，不仅处理了标准幺半群，也涵盖了辫式范畴和对称范畴；此后，人们开始关注研究这些图，并将其改造后应用于相关范畴。二十年后，弦图已成为幺半范畴论中的惯例，其普及程度甚至催生了参考文献 7等介绍性著作。

近年来，随着幺半范畴开始适用于量子信息论等外部领域 [8] 和拓扑场论[9], ，其图表也因此得到更广泛的应用，图形理论可能需要进行修改才能继续使用。具体针对参考文献3中定理 1.2的证明，我们旨在进行几项重大更新，由此将产生一种支持更一般类型图表的新图示理论。

上述定理指出，对 *progressive plane* (

string)图表进行同位变形不会改变其“值”，即它所表示的态射。显然，这使得检验这些范畴中方程的有效性变得容易得多，但这只是完整图景的一半：人们不仅可能关心同位等价是否意味着相等，还可能关心态射相等是否意味着它们的图表可以彼此进行同位变形。这个问题中的细微之处与单个态射的各种表示有关，考虑这些细微之处对于推进该理论是有价值的。

此外，Joyal 和 Street 提出的渐进平面图概念不允许所谓的“无穷图”，作者尚未在相关文献中看到有人提及这一概念，但认为它日后可能会派上用场。原因可能如下：弦图历来

主要用于 *human* 计算，因此，无论在哪个维度上，可视化无穷图所面临的困难可能使大多数人都避开了这一概念。然而，我们在本文中引入的 *monoidal diagrams* 不仅指视觉概念，还是一种新型数学结构，本身就有用处，而不仅仅是作为视觉辅助工具。

我们进行这些调整的方法在某些方面 *categorifies* 原始证明；换言之，至少在最初，图并非拓扑实体，事实上，它们在设计上 *inherently* 不受同位变形的影响，这一概念将在后续章节中形式化。相反，它们是数学结构，将成为由某个幺半范畴诱导的“图范畴”的成员；在有限情形下，这两种表述当然是等价的。

为了支持图表的无限元数，我们将大量依赖 Tom Lein- ster的 [10] *unbiased* 幺半范畴定义，并对其加以修改，以定义 α元幺半范畴的概念，从而能够处理无限幺半积。最后，我们将采用范畴中标准的超-限复合概念，实际上允许范畴在水平方向和垂直方向上都具有无限长度。

1.2 概述

本文结构如下：在第 2 节，我们将回顾超限复合，介绍幺半范畴的广义定义，并讨论一种名为“余极限展开”的新构造。第 3 节首先定义 *monoidal diagrams*，随后重点讨论如何从这类图示中提取其所编码的底层范畴中的态射。最后，我们将在第 4 节讨论其应用和未来工作。

2 无穷幺半范畴

本节将建立必要的范畴论形式体系，以便将标准幺半范畴扩展为其“无穷对应形式”，在其中无穷积与复合均存在。这不仅对研究下一节将讨论的幺半图至关重要，而且这些范畴本身也很有研究价值。在回顾超限复合之后，我们通过将标准幺半范畴的公理转化为无偏形式，再借助序数进行扩展，来定义这些无穷范畴。最后，我们将讨论所谓的“余极限扩张”，它在特定条件下提供了一种将标准幺半范畴系统地扩展为无穷范畴的方法。

2.1 超限复合

“水平”扩展幺半范畴将涉及考虑无限序列的复合。这种“超限复合”在数学中随处可见，或许最常见于模型范畴的研究中（参见例如文献 11）。我们简要定义超限复合，并讨论一些与此相关的基本结果。

定义 2.1（超限复合）在范畴 $\mathscr{C}$ 中，对于某个序数α （视为对应的薄范畴），*α-transfinite sequence* 是一个函子

$$X_\bullet \colon \alpha \to \mathscr{C} \tag{2.1}$$

使得对每个非零极限序数 $\beta < \alpha$，$X_\beta = \varinjlim_{\gamma<\beta} X_\gamma$ 。此类序列的 *transfinite composition* 是唯一的态射

$$X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\gamma<\alpha} X_\gamma \tag{2.2}$$

由余极限诱导而来。该余极限的存在性由超限归纳法保证。

最直观的例子来自具体范畴中的连续包含（$\mathscr{C}$，$F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$），其中 F忠实。一个序列

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \cdots \tag{2.3}$$

在 F 下的包含具有超限复合，即显然的包含 $X_0 \subseteq \varinjlim_{-} X_\bullet$底层集合。

一个基本但实用的结果是，两个超限复合彼此相容（即可以重新排列）：

命题 **2.1** *Let $X_\bullet$, $X'_\bullet$ be α, α'-transfinite sequences respectively., , $\varinjlim$, such that $X'_0 = \varinjlim X$. Let β, be ordinals such that $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$; then we may form β, β'-transfinite sequences Y , , Y' respectively which are segments/concatenations of X X'. Then $Y_0 = X_0$ $Y'_0 =$ and, , $\varinjlim Y$, $\varinjlim Y' = \varinjlim X'$.*

在某些条件下，范畴中的一类态射在超限复合下可能是封闭的；换言之，任意包含这些态射的超限序列的复合都存在，且仍属于该类。我们称这样的类为 *saturated*。由于标准复合是 2-超限的，饱和类必然是子范畴。单态射就是一个例子。

命题 **2.2** *The wide subcategory of monomorphisms $\mathscr{C}$ is 。$\mathsf{Mono}()$ saturated.*

Proof 我们必须证明，对于任意超限单态射序列

$$X_\bullet \colon \alpha \hookrightarrow \mathscr{C}, \tag{2.4}$$

规范映射 $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} X_\gamma$ 是单态射。假设并非如此；通过超限归纳，极限余锥的任何一条腿都不是单态射。但这与 $\varinjlim_{\gamma} X_\gamma$ 的泛性质所给出的唯一性相矛盾。□

事实上，这是一个更一般结论的特例：相对于任意态射类具有「左提升性质」的态射类是饱和的[12]。这当然有各种推论；例如，模型范畴中的余纤维化类和平凡余纤维化类都是饱和的。

在接下来的讨论中，当我们将范畴构造为组合意义上的无穷范畴时，将使用序列余完备性来确保范畴具有所有超限复合。这些饱和子范畴尤其具有良好的性质，因为子范畴中的超限复合与范畴本身中的超限复合一致。

2.2 无偏幺半范畴

有偏定义与无偏定义之间的对比在数学中无处不在。简而言之，我们经常会遇到这样一种运算：它本应具有 n 元数，却仅以零元和二元的情形来呈现。在这种情况下，这种定义称为 *biased*，与之相反的是 *unbiased* 定义，它从一开始就构造一个 n元运算。

这个术语绝无意暗示非偏定义更优越：许多情况下，例如这里讨论的幺半范畴，都需要简短得多、更高效的定义，以及辅助的相干条件。不过，采用非偏定义时，用序数进行推广要容易得多，这正是本文采用这种定义的动机。

我们首先形式化地定义序数的分割，这大大减少了无偏幺半范畴所需的相干条件；无偏幺半范畴将在下文介绍。最后，我们将重新发展标准幺半范畴的相关理论，以适用于其无偏变体。

定义 2.2（序数分割）序数 α 的一个 *γ-partition* 是一个和为 alpha 的 γ 序列。具体而言，它是一个函数 $p_\bullet\colon \gamma \to \alpha$，满足如】【。

$$\sum_{i<\gamma} p_i = \alpha. \tag{2.5}$$

所有 γ-分割的 α 的 Set 记作 α_Σ^γ，而一般而言， α 的所有分割的 Set为 $\alpha_\Sigma^{\leqslant}$。 A ($\delta_\bullet$, $p_\bullet$)-*double partition of* α 是一个索引族 $p_{\bullet,\bullet} = \{p_{i,\bullet} \in (p_i)_\Sigma^{\delta_i}$：对于序数 δ、α，分别有 γ-分割 $\delta_\bullet$、$p_{\bullet\,\bullet}$。对于每个这样的双重分割，都有一个*induced δ-partition of* α $p_{\bullet\,\bullet}{}^{\cup}{}_{\bullet}$ $\delta \to \alpha$ $p^{\cup}{}_{\bullet}$ ()：，或简称为 ()，其定义方式显而易见。当一个分割的定义域和值域明确时，一个序数 β 充当一个 *constant* 分割 $\beta\colon \gamma \to \delta$，使得 $i \mapsto \beta$。

定义 2.3（α 元无偏幺半范畴）一个 *α-ary unbiasedmonoidal category*，其对应某个序数 $\alpha \not< \omega$ （其中 $\alpha = \mathrm{Ord}$ 是允许的），是一个元组 $(\mathscr{C}, \mathcal{T}_\bullet, \iota, \eta)$，由一个普通范畴 $\mathscr{C}$ 和一族形式函子组成

$$\mathcal{T}_\bullet\colon \alpha \to \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Hom}\left(\mathscr{C}^\beta, \mathscr{C}\right) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{T}_\beta\colon \mathscr{C}^\beta \to \mathscr{C}, \tag{2.6}$$

一个自然同构 $\iota : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_1$，以及一族自然同构

$$\eta = \left\{ \eta_{p_\bullet} : \mathcal{T}_\gamma \circ \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_{p_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_\beta \,\middle|\, p_\bullet \in \beta_\Sigma^\gamma \ \ \forall \gamma, \beta < \alpha \right\}, \tag{2.7}$$

使得对于任意 γ-分割 $p_\bullet$ $\beta < \alpha$，以及任意 $(\delta_\bullet, p_\bullet)$-双重分割，以下图表交换，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\gamma \circ \prod_{i<\gamma} \left(\mathcal{T}_{\delta_i} \circ \prod_{j<\delta_i} \mathcal{T}_{p_{i,j}} \right) & \xrightarrow{\mathcal{T}_\gamma\left(\prod_{i<\gamma} \eta(p_{i,\bullet})\right)} & \mathcal{T}_\gamma \circ \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_{p_i} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta(p_\bullet)} \\ \mathcal{T}_\delta \circ \prod_{k<\delta} \mathcal{T}_{(p^\cup)_k} & \xrightarrow{\eta\left((p^\cup)_\bullet\right)} & \mathcal{T}_\beta \end{array} \tag{2.8}$$

以下图表也交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\beta & \xrightarrow{\mathcal{T}_\beta\left(\prod_{i<\gamma} \iota\right)} & \mathcal{T}_\beta \circ \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \iota \mathcal{T}_\beta} & \searrow^{\mathrm{id}_{\mathcal{T}_\beta}} & \downarrow{\scriptstyle \eta(1_\bullet)} \\ \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_\beta & \xrightarrow{\eta(\beta_\bullet)} & \mathcal{T}_\beta \end{array} \tag{2.9}$$

定义 2.4 （无穷、有限、严格）一个 α元无偏幺半范畴称为 *finitary*，如果 $\alpha = \omega$，并且 *infinitary* 否则称为 $\alpha =$ 序数类，则称其为 *fully infinitary*。一个 α元无偏幺半范畴称为 *strict*，如果 ι 中每个元素的每个分量 η 在定义 2.3 中都是恒等态射。

从任意无偏幺半范畴中，我们都可以通过从族 η 中提取结合子和单位子来构造一个有偏幺半范畴（见定理 2.4的证明）。同样，给定一个有偏幺半范畴，我们可以构造一个有限无偏幺半范畴；因此在有限情形下，这两个概念是等价的。

Remark 1 在定义中，我们隐含地提到了序数 β对应的范畴 $\mathscr{C}^\beta$。为了使这一概念完整，我们将这些对象纳入一个 *power category of* $\mathscr{C}$，其中包含 $\mathscr{C}$ 的所有序数次幂，以及作为态射的它们之间的函子。赋予笛卡尔积后，这个范畴便成为无偏严格（骨架）幺半范畴的典型例子，并由此为一般序数序列生成对象。其严格性源于我们 *not*区分 $\mathscr{C}^\beta \times \mathscr{C}^\gamma$ 与 $\mathscr{C}^{\beta+\gamma}$。

最显而易见的例子是对（余）笛卡尔范畴进行推广。任何具有所有小（余）积的范畴 $\mathscr{C}$，若将每个 $\mathcal{T}_\gamma$ 都取为广义（余）积，就会是完全无穷的。一个不那么平凡的例子是自函子范畴（单子是其中的一个对象）。

Example 2.1 设对于一个小范畴 $\mathscr{C}$，其满子范畴 $\{\mathscr{C}\} \subseteq$ 范畴范畴 是余完备的（或者原则上是序列余完备的）。按照定义 2.1 的意义，端函子的超限复合在严格幺半范畴 $(\mathbf{End}(\mathscr{C}) \circ, \mathbf{Id})$ 上构成一个完全无穷乘积。

正如文献中普遍指出的那样，[3, 4, 8], 标准幺半范畴满足一个“严格化定理”，即每个此类范畴都与某个严格幺半范畴幺半等价。 α元无偏幺半范畴也遵循类似规律；证明非常相似（例如参见文献 8），但有必要定义该定理所涉及的概念。

定义 2.5（无偏幺半函子）设 $(\mathscr{C}, \mathcal{T}_\bullet, \iota, \eta)$、$(\mathscr{C}', \mathcal{T}'_\bullet, \iota', \eta')$ 是元数为 α 的无偏幺半范畴。它们之间的一个 *unbiased monoidal functor* 是由函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ 及一族自然同构组成的一对 $(F, \chi_\bullet)$

$$\chi_\bullet \colon \alpha \to \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{mor}([\mathscr{C}^\beta, \mathscr{C}']) \quad \text{s.t.} \quad \chi_\beta : \mathcal{T}'_\beta \circ F^\beta \xrightarrow{\sim} F \circ \mathcal{T}_\beta, \tag{2.10}$$

使得对于每个序数划分 $p_\bullet\colon \ \gamma \to \alpha$，下图都交换，

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}'_\gamma \circ \prod_{i<\gamma} (\mathcal{T}_{p_i} \circ F^{p_i}) & & \xrightarrow{\mathcal{T}'_\gamma \prod_{i<\gamma} \chi_i} & & \mathcal{T}'_\gamma \circ F^\gamma \circ \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_{p_i} \\
\downarrow{\scriptstyle \eta'(p_\bullet)F} & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi_\gamma \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_{p_i}} \\
\mathcal{T}'_\beta \circ F^\beta & \xrightarrow[\chi_\beta]{} & F \circ \mathcal{T}_\beta & \xleftarrow[F\eta(p_\bullet)]{} & F \circ \mathcal{T}_\gamma \circ \prod_{i<\gamma} \mathcal{T}_{p_i}
\end{array} \tag{2.11}$$

称为 *pentagon equation*，以下图也如此，

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F & & \\
 & {\scriptstyle \iota' F} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle F\iota} & \\
\mathcal{T}'_1 \circ F & & \xrightarrow[\chi_1]{} & & F \circ \mathcal{T}
\end{array} \tag{2.12}$$

称为 *triangle equation*。

与幺半范畴的通常做法一样，可以用无偏幺半函子来定义弱等价和强等价。与标准情形类似，我们可以借助选择公理将前者提升为后者[4]。

定义 2.6（无偏幺半等价）无偏幺半函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ 是一个 *weak equivalence*，当且仅当它忠实且充满，并且本质满。如果存在一个指定的无偏幺半函子 $G\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$，使得 $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ 且 $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$，则它是一个 *strong equivalence*。

命题

2 3 *A weak unbiased monoidal equivalence induces a strong equivalence given the axiom of choice (AC).*

Proof 令 $(F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}', \chi_\bullet)$ 为一个无偏弱幺半群等价。对于对象 $A, B \in \mathscr{C}$，定义等价关系 $A \sim B \iff FA \simeq FB$。根据选择公理，存在函数 $f\colon \mathscr{C}/\!\sim \to \mathscr{C}$，使得 $F(f([A])) \simeq FA$；本质满性确定了一个函数 $g\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}/\!\sim$，因此对于每个 $A' \in \mathscr{C}'$，令 $GA' = f\ g\ A'$ G $A' \to B'$ $GA' \to (())$。GB'

令态射映射到通过同构进行前后复合的态射（同样由选择公理选取）。那么FG和 GF都分别与其相应的恒等映射自然同构（分别由映射 ζ和 ξ 给出）。还需证明 $G\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ 是无偏幺半群的；考虑 $\forall \beta < \alpha$ 自然同构

$$G\chi_\beta^{-1}G^\beta \colon GF \circ \mathcal{T}_\beta \circ G^\beta \xrightarrow{\sim} G \circ \mathcal{T}'_\beta \circ F^\beta G^\beta. \tag{2.13}$$

注意到这一点，我们可以通过下图的交换性定义一个自然同构 χ'_β，

$$\begin{array}{ccc} GF \circ \mathcal{T}_\beta \circ G^\beta & \xrightarrow{G\chi_\beta^{-1}G^\beta} & G \circ \mathcal{T}'_\beta \circ F^\beta G^\beta \\ \downarrow{\scriptstyle \xi(\mathcal{T}_\beta \circ G^\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle (G \circ \mathcal{T}'_\beta)\zeta^\beta} \\ \mathcal{T}_\beta \circ G^\beta & \xrightarrow{\chi'_\beta} & G \circ \mathcal{T}'_\beta \end{array} \tag{2.14}$$

显然，对所有 2.11 和2.12 ，以下等式都成立： β。 □

定理2.4（无偏严格化） *Every unbiased monoidal category is monoidally equivalent to a strict one. Every unbiased monoidal category. With AC it is strongly equivalent to one.*

Proof 如前所述，其证明与标准情形几乎完全相同，例如参见文献 8。关键观察是，我们可以从无偏公理中恢复单位对象、单位子和结合子，如下所示：单位对象为$\mathcal{T}_0(*)$，左单位子为复合映射

$$\mathcal{T}_2 \circ (\mathcal{T}_0 \times \mathrm{id}) \xrightarrow{\mathcal{T}_2(\mathrm{id} \times \iota)} \mathcal{T}_2 \circ (\mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\eta_{(0,1)}} \mathcal{T}_1 \xrightarrow{\iota^{-1}} \mathrm{id},$$

并且，通过注意到二重积的每一种“加括号”方式都通过 η 自然同构于

$\mathcal{T}_3$来以显然的方式定义结合子。右单位子类似于左单位子，通过序数划分 (0, 1) 得到。□

由于这一结果，研究 α元范畴与研究它们的严格变体并无不同（至少就尊重等价原则的 *categorical* 性质而言）；因此，我们选择后者，以避免处理 η 态射。

这一框架自然引出了一个意料之中但颇有趣的表述，即用无穷 Lawvere 理论来表述（例如参见文献 13）。令 序数类 为带有包含函子 $\mathcal{I}_{\mathbf{Ord}}$ 的冯·诺伊曼序数的 **Set** 骨架。令 $\mathcal{F}\colon\ \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ 为遗忘函子；它有一个左伴随函子 $\mathcal{L} \dashv \mathcal{F}$，将集合映射到相应的自由幺半群。由于 $\mathcal{L} \circ \mathcal{I}_{\mathbf{Ord}}$ 在对象上是单射，其像构成一个满子范畴 $\mathscr{T} \subseteq \mathbf{Mon}$。那么，忽略大小问题，任意函子

$$\mathcal{M}\colon \mathscr{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat} \tag{2.15}$$

保留小积的对象可被识别为严格的序数类元无偏幺半范畴。通过在上一段中将 Ord 替换为子范畴 $\alpha \subseteq \mathsf{Set}$，可以恢复 α 元版本。

可以相当费力地证明，每个 M 中的自由幺半群都可以唯一地写成某个常值函子的序列极限

$$M \cong \varinjlim \left(\Delta_M\colon \beta \to \mathscr{T};\ \gamma \mapsto 1\right) \tag{2.16}$$

其中 $\beta < \alpha$，而单元素 1 上的自由幺半群恰好是 $\mathscr{T}_{\mathrm{op}}$ 中的一个 β 重积。于是 $\mathcal{M}$(1) 是一个无偏 α 元幺半范畴，带有积函子

$$\mathcal{T}_\beta = \mathcal{M}\left(1 \to \beta;\ (0) \mapsto (012\ldots\beta)\right) \tag{2.17}$$

对所有 $\beta < \alpha$ 均成立。正如直觉所示，$\mathcal{M}$ 的像是 Cat 的满子范畴，也就是前述 $\mathcal{M}$(1) 的幂范畴。

标准幺半范畴公理的一个基本结论——也是其大部分图示理论的基础——是*interchange law*，它指出，对于可适当复合的态射，

$$(g \circ f) \otimes (j \circ h) = (g \otimes j) \circ (f \otimes h). \tag{2.18}$$

这是 $\otimes$ 双函子性的直接结果。然而在无穷情形下，尽管我们可以对张量函子的参数执行无穷交换 *internally*，但若要在外部执行这一操作，则需要额外的假设。

定义 2.7（光滑无偏范畴）一个 α 元无偏幺半范畴 $\mathscr{C}$ 是 *smooth*，如果对于每个对象 X，函子

$$\mathcal{T}_2(X, -)\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C} \tag{2.19}$$

是序列余连续的（即保持序列余极限）。它是 *cos-* 如果它保持余 *mooth* 序列余连续（即保持图表 $\alpha^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ 的余极限）。

不难看出，这个条件意味着每个张量函子在最后一个变量上都是序列余连续。若光滑性条件成立，则有如下显然的推论。

定理 2.5（无穷交换律） *If $\mathscr{C}$ is a smooth α-ary monoidal category with products $\mathcal{T}_\bullet$, then the following two conditions hold:*

1. *Consider two sequences of morphisms in $\mathscr{C}$, i.e. functors $F, G\colon \beta \to \mathscr{C}$ for the thin category of $\beta < \alpha$ such that both F G admit transfinite, : $\varinjlim F$ and g: compositions f $F_0 \to$ $G_0 \to$ $\varinjlim G$ respectively. Then*

$$\mathcal{T}_2(f,g) = h\colon \mathcal{T}_2(F_0, G_0) \longrightarrow \varinjlim \big(\mathcal{T}_2 \circ (F \times G)\big) \tag{2.20}$$

2. *If $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \ldots$ is a morphism sequence of length γ such that the composition of each pair exists, then*

$$\mathcal{T}_\gamma\big(a_0 \circ a_1, b_0 \circ b_1, \ldots\big) = \mathcal{T}_\gamma\big(a_0, a_1, \ldots\big) \circ \mathcal{T}_\gamma\big(b_0, b_1, \ldots\big) \tag{2.21}$$

当这样的光滑范畴还余完备时，凭借无穷交换律，它便成为进行无穷运算的一个非常理想的环境，因为所有超限复合都存在，且与积相容。此外，若所讨论的范畴还是一个饱和子范畴，那么对括号化所作的一切可能的无穷操作都相等。然而，这个条件在实践中对任何范畴而言都过于难以满足，也许薄范畴 $\alpha \subseteq$ 序数类本身除外。

2.3 余极限展开范畴

除具有所有小（余）积的范畴这些标准例子之外，自然遇到无穷幺半范畴的情况并不多见。此外，这些公理在实际中也相对难以验证。不过，在满足某些条件时，我们可以通过一个通用过程，从一个标准范畴构造出一个（光滑的）完全无穷范畴。这种构造及其衍生形式不仅会提供许多例子，还会为范畴论中的各种现有构造带来颇为深刻的结果。

其基本思路是取一个幺半范畴，并利用有限张量积的余极限来定义函子 $\mathcal{T}_\beta$。虽然我们不会明确写出这一点，但每当提到序列余极限（即序数 的图表 $\alpha \to \mathscr{C}$ α *cosequential* 的余极限）时，也可以使用取自 的图表的余极限。 *colimits* α^{op}

现在，设 $(\mathscr{C}, \otimes, I)$ 是一个普通的幺半范畴。表面上看，最一般的情形取决于从 I 到恒等函子 $\mathrm{Id}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 的一个锥，例如 $\varepsilon\colon \Delta_I \to \mathrm{Id}$。我们进行超限递归。假设我们有一个序列 $(X_\gamma)_{\gamma<\alpha} \in \mathscr{C}^\alpha$；为了定义无穷张量积 $\mathcal{T}_\alpha$，我们首先

递归地令 $F(0) = I$ 和 $F(\gamma+1) = F(\gamma) \otimes X_\gamma$。在 F 下，令后继映射 $\gamma \to \gamma+1$ 映到复合映射

$$F(\gamma) \xrightarrow{\rho^{-1}} F(\gamma) \otimes I \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} F(\gamma) \otimes X_\gamma, \tag{2.22}$$

最后，通过取……将 F 扩展为函子 $\alpha \to \mathscr{C}$

$$F(\beta) = \varinjlim_{\gamma<\beta} F_\gamma \tag{2.23}$$

对于任意极限序数 β。由于底层范畴 $\mathscr{C}$的结合子和单位子，完全无穷范畴的公理几乎都得到满足，唯一的例外是极限序数情形下无法证明相干条件。为了解决这一问题，我们必须附加以下要求：对于任意 $F\colon \alpha \to \mathscr{C}$，存在一个同构

$$X \otimes \varinjlim_{\gamma<\alpha} F(\gamma) \cong \varinjlim_{\gamma<\alpha} \big(X \otimes F(\gamma)\big), \tag{2.24}$$

也就是说，$\mathscr{C}$是光滑的。此外，光滑性保证了式2.23 中所示形式的每个余极限都存在。值得注意的是，上述构造只是映射 ε的超限复合的一个例子。这些映射通过部分积将全积“粘合”在一起。由此得到以下定义。

定义 2.8（余极限展开）设 $\mathscr{C}$是一个幺半范畴，配备了一个从 I 到 Id 的锥 ε。若对于 $\mathscr{C}$的每个对象 X，函子 $X \otimes -\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 都是序列余连续的，则称 $\mathscr{C}$ 为 *colimit-expandable*。如上所构造的光滑完全无穷范畴称为 的*expansion* $\mathscr{C}$ $\mathscr{C}$ ε *colimit-expanded*，而有序对 (,) 称为一个范畴。

显然的例子包括 Set、Rel、范畴范畴 等，它们都配备了余积，并以始对象为单位。回想一下，如果改用从 Id 到 I 的锥，我们也同样可以轻易地使用积。Top 是一个有趣的反例：拓扑空间的和无法自然地推广到无穷情形。不过，正如我们稍后将看到的，“方便拓扑空间范畴” *is* （对偶地）是余极限可扩展的。

命题 **2 6** *A colimit-expanded category* $\mathscr{C}$ ε *is necessarily semic-*。 (,) *ocartesian (i.e.* I *is initial). Thus the legs of* ε *are trivially the unique maps out of* I*.*

Proof 首先注意，根据完全无穷范畴的定义，特别是式 2.9，可知对任意 α，都存在一个同构 $\mathcal{T}_\alpha(I, I, \dots) \cong I$，它由 η和 ι诱导而来。现在假设支腿 $\varepsilon_I\colon I \to I$不是同构，并令 α 为一个极限序数；由于积函子 $\mathcal{T}_\alpha$ 是通过对 ϵ进行超限复合构造而成，且它们反映同构，因此必有 $I \ncong \mathcal{T}_\alpha(I, I, \dots)$，这就造成了矛盾。

然后，由于 $\varepsilon_I : I \cong I$， ε的交换性条件保证任意两个态射 $f, g : I \to X$都相等。当然，根据 ε的定义，每个 $I \to X$都存在，因此 I是 $\mathscr{C}$中的始对象。□

因此，实际上并没有选择各种锥 $I \to \mathrm{Id}$ 的自由，所以此后我们不必再提及 ε。尽管下面的命题可直接由伴随的极限保持性质推出，但它为其余许多光滑幺半范畴的例子奠定了基础。回顾一下，闭幺半范畴是一种对称幺半范畴，其中对每个对象 X，函子 $- \otimes X$ 都有一个右伴随 $[X, -] : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$，称为“内部 Hom”。

定理 **2 7** *Any semicocartesian closed category is colimit-expandable. .,*
In particular any cocartesian closed category is colimit-expandable. By the same argument with cosequential colimits, semicartesian closed categories, and thus cartesian closed categories , are as well colimit-expandable.

首先，这带来了一个关于闭幺半范畴的有趣结果；它揭示了内部 Hom 的存在与无穷扩张的可能性及唯一性之间一种相当反直觉的内在关系。这些半笛卡尔闭范畴具有各种特殊性质，或许能解释这种关系（例如，借助伴随公式 $T \cong [X, I]$）；作者认为，专门研究这些范畴本身是值得的。

其次，它为我们提供了许多显而易见的例子，省去了繁琐的公理。例如，我们可以通过取紧生成豪斯多夫空间的笛卡尔闭子范畴**Top** 中的子范畴 **CGHaus** [4]来弥补之前给出的非例。此外，我们还立即得知，所有拓扑斯都是余极限可扩展的，因此都是唯一光滑的无穷范畴，这为拓扑斯提供了另一个有用的特征，或许将来会有应用。

有一些半（余）笛卡尔闭范畴并非笛卡尔闭；尽管其中大多数例子或许略显人为，但这些例子表明，余极限扩张用途广泛，并不必只处理范畴积。作者在实际应用中发现的主要例子是名义集（参见 Andrew Pitts 的 *Nominal Sets* [14]；此处我们沿用他的工作）。

Example 2.2 对于任意集合 A，我们用 byPerm(A) 表示 Sym(A) 的子群，其中仅包含那些只改变 A 中有限多个元素的置换。固定一个可数无限集 $\mathbb{A}$，并令 X 为 Perm($\mathbb{A}$)-集合（即 Perm($\mathbb{A}$)Set 拓扑斯中的一个对象）。如果一个子集 $A \subseteq \mathbb{A}$ *supports* 满足：对于 Perm( )，我们有 $\pi|_A = 1_A \implies \pi \cdot x$，则称其为 $x \in X \quad \forall \pi \in \mathbb{A}$ x *finitely*。如果存在一个支 *supported* $\mathbb{A}$ 撑它的有限子集，则称其为有限支撑。如果它是有限支撑的，那么我们将所有有限支撑的交集记作 $\mathrm{supp}_X x$。于是 Nom 定义为

$\mathbf{Perm}(\mathbb{A})\mathbf{Set}$ 的全子范畴，由每个元素都有限支撑的 $\mathbf{Perm}(\mathbb{A})$-集合组成（参见文献 14，第 2.1 章）。

Nom 从拓扑斯 $\mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ 继承了笛卡尔闭结构，其范畴积使它在此之下是余极限可扩展的。然而，在 *separated product*（参考文献 14，第 3.4 章）之下，它同样具有这一性质：我们定义“新鲜关系” $\#_{X,\,Y} \subseteq X \times Y$ 为 $x \#_{X,\,Y} y \iff \mathrm{supp}_X x \cap \mathrm{supp}_Y y = \varnothing$。该关系本身是一个名义集，从而给出一个双函子 $(X,\ Y) \mapsto \#_{X,\,Y}$ 称为分离积；在此运算下，**Nom** 成为一个幺半群，其单位元为终对象。最后，根据参考文献 14，定理 3.12，它是半笛卡尔闭的。

最后，我们通过（余）切片范畴，展示如何从幺半群闭范畴获得半（余）笛卡尔闭范畴，从而获得余极限可扩展范畴。

命题

2 8 *Let $\mathscr{C}$ be closed closed monoidal with unit I. Both the slice category $\mathscr{C}/I$ and the coslice category $I/\mathscr{C}$ are colimit-expandable.*

Proof 只需考虑切片情形。注意，切片范畴上存在一个由 $\mathscr{C}$ 继承而来的自然幺半群结构，其定义如下：

$$(X, f) \otimes (Y, g) = (X \otimes Y, f \otimes g \colon X \otimes Y \to I \otimes I \cong I), \tag{2.25}$$

其中 $(I, 1_I)$ 是终对象，这意味着 $\mathscr{C}/I$ 是半笛卡尔的。接下来，由于 $\mathscr{C}$ 是闭的，它有唯一的内部 Hom

$$[-,-] \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}, \tag{2.26}$$

因此，我们可以为切片范畴定义一个类似的双函子，定义如下：

$$(X, f), (Y, g) \mapsto \big([X, Y], [f, g]\big). \tag{2.27}$$

我们希望证明这一对

$$- \otimes (X, f) \dashv \big[(X, f), -\big] \tag{2.28}$$

对于 $\mathscr{C}/I$ 中的每个 (X, f)，它构成一个伴随。具体而言，给定 $\mathscr{C}/I$ 中从 $(X \otimes Y, f \otimes g)$ 到某个 (Z, h) 的态射，我们就能通过伴随得到唯一对应的映射。这是切片范畴中的一个合法态射，因为它使图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & [Y, Z] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [g,h]} \\ I & \xrightarrow[\lambda^{-1}]{} & I \otimes I \end{array} \tag{2.29}$$

根据 $\mathscr{C}$ 中相关伴随的自然性进行交换，这也给出了该双射的自然性。□

有趣的是，尽管一般的闭幺半群范畴并非余极限可扩展，但相应的（余）切片却是。这表明，从理念上说，所有闭幺半群范畴都应当是 *structure* 无穷幺半群；它们之所以不是，只是因为我们的定义在技术上的限制。或许，未来工作可以修订公理来解决这一问题。

3 幺半图

如前所述，类似于幺半范畴论中所用图表的使用，可以追溯到 Penrose 的研究工作[1, 2]。当具体应用于幺半范畴时，它们会非常有用，因为同位变形会保留所表示的态射。

一般而言，每个图表示一个由其他态射的复合与张量积构造而成的态射；这些态射是图的节点，而边则是对象。复合沿垂直方向进行，而积沿水平方向作用。为两个态射构造图，并观察它们是否彼此同伦，是确定两个态射等价性的一种高效方法；鉴于幺半群积 [7]，这通常并非易事。

实际上，这些“弦图”在范畴论中的使用并不局限于幺半范畴。一般而言，任何弱2-范畴都以一种遵循弦图的方式运作，其中0-胞腔表示为区域，1-胞腔表示为线，2-胞腔表示为点。由于幺半范畴是只有一个对象的弱 2-范畴，这种形式化大大简化了。

这些弦图通常是映射到范畴范畴 [3] 的拓扑实体。虽然这一框架无疑最为自然，也最便于证明其可靠性/正确性，但它使我们难以推广到我们希望考察的严格范畴论概念，即超限复合和无穷幺半积。为此，我们将纯粹以代数方式定义图示。这不仅增强了其范畴论性质，还使其能够作为独立的数学对象，用于计算以外的用途。

接下来的几节将详细介绍我们对幺半图所作的扩展定义。第3.1 节将着重定义幺半范畴上的图，举例说明这一概念，并证明一些初步结果。第3.2 节和 3.3 节都将致力于理解给定图所表示的态射；最终目标是定义一个图的范畴，并建立它与底层范畴之间的函子对应。

3.1 定义

我们将把幺半图构造为配备两种关系的代数结构；首先介绍必要的定义。

定义 3.1（图式关系）若齐次关系 $R \subseteq X \times X$ 满足以下条件 $\forall x$、$y \in X$，则称其为图式关系：

1 *(weak totality)* $\exists z \in X \left(xRz \vee zRx\right)$ 。 .
2 *(antisymmetry)* $xRy \implies \neg yRx$
3 。 *(irreflexivity)* $\neg xRx$

注意，最后两个条件可以替换为非对称性的条件；图式关系等价于一种非对称关系，其中每个元素都与另一个元素可比较。

定义 3.2（诱导一阶关系）我们称集合 X 上的齐次关系 R 为 *first-order relation*，集合 R 上的齐次关系 $S \subseteq R \times R$ 为 *second-order relation*，如此无穷延续。对于二阶关系，我们将 S 的 *induced first-order relation* 定义为

$$S^* = \bigcup_{i=1,2} \pi_i^2[S], \tag{3.1}$$

其中，π_i 是笛卡尔积 $R \times R$ 的第 i 个投影映射；$f^2\colon A \times A \to B \times B$ 表示函数的笛卡尔平方，而函数 $f\colon A \to B$ 的记号 $f[X]$ 指集合 $\{f(x)\colon x \in X \subseteq A\}$。

直观地说，如果上述关系 S 对有向图的边进行排序，那么 S^* 就根据节点是否属于某条边来对节点排序；我们将在此情形下采用该定义。

定义 3.3（条件构造）设集合 X 上的一个二阶关系 S 是 R 上的齐次关系。那么，S 满足条件构造公理，当且仅当

$$\forall P \in R^2 \left(\bigvee_{i,j \leq 2} (\pi_i \times \pi_j)(P) \in S^* \implies P \in S \right) \tag{3.2}$$

成立；在这种情况下，S 是 *conditionally constructed*。

如上所述，我们将仅使用条件构造公理，以确保用于排列有向图边的关系具有一致性。在此基础上，我们可以引入幺半图。以下内容中，固定一个严格无偏幺半范畴 $\mathscr{C}$。

定义 3.4（幺半群图）一个（幺半群 $\mathscr{C}$-图 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ 由一个集合 $\mathcal{D}$、定义在 $\mathcal{D}$ 上的图式关系 E（称为 *verticalcomparator*）、定义在 E 上的偏序 H（称为 *horizontal comparator*（或边集）），以及一个函数 μ: $\mathcal{D} \to \mathrm{mor}(\mathscr{C})$ 组成。这些数据须满足以下条件：

1. E, H 是良基关系 2. 每个 E-三角形（两个在 π_1 或 π_2 上取值相同的 E-元素组成的集合）都是关于 H 可比较的 3. 任意两个 E-极小元素都关于 $H^\star$ 可比较 4. H 是条件构造的

关于这个定义，有很多值得探讨之处。这四个条件都非平凡，而且作为一个公理系统来看，这个定义是否相容、完备或独立，并非一目了然；在此语境下，前两者相当重要。不过，随着我们进一步发展这一理论，这三个条件显然都会成立。

另外，定义 3.4 在规定一种实际“查看”此类图的方法之前，并不完全有用，这里的“查看”取其字面意义。为此，首先按 $\mathcal{D}$ 沿 E垂直排列节点，然后用线段连接任意一对由 E-相关的节点。接着，按 H将这些线段水平排序；不难看出，为何这种代数结构不易受到同位变形的影响。

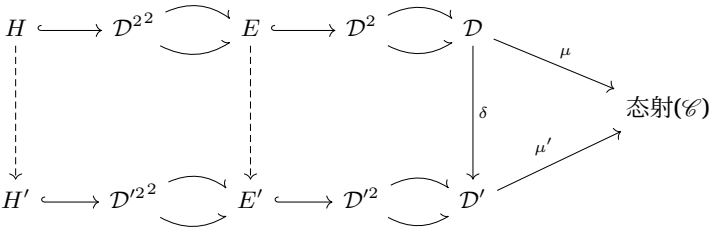
定义 3.5（幺半群图的同构）设 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ 和 $(\mathcal{D}', E', H', \mu')$ 是幺半 $\mathscr{C}$-图。一个 *isomorphism of diagrams* 是一个双射 $\delta\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$，使得

$$\delta\colon (\mathcal{D}, E) \to (\mathcal{D}', E') \tag{3.3}$$

是一个有向图同构，所诱导的双射 $\delta'\colon\ E \to E'$ 使得

$$\delta'\colon (E, H) \to (E', H') \tag{3.4}$$

是一个序同构，最后 $\mu' \circ \delta = \mu$。这些条件可由下面的交换图概括。



这里，箭头 $\rightharpoonup$、$\hookrightarrow$、$\dashrightarrow$分别表示投影、包含映射和诱导双射。

我们承认，图表同构是一个极强的条件：当且仅当图表除节点标签不同外完全相同时，它们才同构。

可以利用底层集合与关系上的余积，以及底层幺半范畴中的积函子，将图表并接起来。具体而言，对于一个 α-序列 $\{(\mathcal{D}_\gamma, E_\gamma, H_\gamma, \mu\gamma)\colon\ \gamma < \alpha\}$，我们定义

$$\coprod_{\gamma<\alpha} (\mathcal{D}_\gamma, E_\gamma, H_\gamma, \mu_\gamma) = \left(\bigsqcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{D}_\gamma, \coprod_{\gamma<\alpha} E_\gamma, \coprod_{\gamma<\alpha} H_\gamma, \langle \mu_\gamma \rangle_{\gamma<\alpha} \right), \tag{3.5}$$

其中，右侧的第四个分量是由余积诱导的唯一映射。我们将此过程称为 *attachment*。值得注意的是，图形的拼接与该范畴中的真正余积相一致。

$$\mathbf{Set} \times \mathbf{Rel} \times \mathbf{Pos} \times (\mathbf{Set}/\mathrm{mor}(\mathscr{C})). \tag{3.6}$$

这一构造将在后续建立所有图的范畴时派上用场。此后，我们将把注意力转向理解幺半群图的内部结构。以下内容中，固定一个 $\mathscr{C}$-幺半群图 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$。

命题

3 1 *Given a well-founded diagrammatic relation E on D the ., reflexive transitive closure E_r^+ is a well-founded partial order.*

Proof E_r^+ 由于 E 已经是反对称的，因此显然是偏序。令 $A \subseteq D$，并令 $a \in A$ 为一个 E-极小元素（由良基性可知其存在）。我们希望证明 a 是 E_r^+-极小的（从而 E_r^+是良基的）；否则，将存在 $\exists b \neq a \in A$ 使得 bE_r^+a。由于 $\neg bEa$，存在 $\exists c \in A$ 使得 bEc 且 cEa，但这样一来 a 就不是 E-极小的，矛盾。□

定义 3.6（图表的序数秩）设 E_r^+ 为 E 的自反传递闭包， $\mathfrak{C}_m(E_r^+)$ 为其中 $\subseteq$-极大链的 Set。每个 $C \in \mathfrak{C}_m(E_r^+)$ 都是良序的，因此同构于唯一的序数，称为其序数秩，记作 rank(C)。于是 $\mathcal{D}$ 的秩就是此类秩中的最大值：

$$\operatorname{rank}(\mathcal{D}) = \max\{\operatorname{rank}(C) : C \in \mathfrak{C}_m(E_r^+)\}. \tag{3.7}$$

定义 3.7（分段、分层）令 $\alpha =$rank$(\mathcal{D})$。 $\mathcal{D}$ 的 *segmenta-tion* 是函数

$$S_\bullet \colon \alpha \to \mathcal{P}(\mathcal{D}) \tag{3.8}$$

按如下方式通过超限递归定义： $S_0 = \varnothing$，以及 $\forall \beta < \alpha$

$$S_\beta = \Big\{m \in \mathcal{D} : m \text{ is minimal in } \mathcal{D} \setminus \Big(\bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma\Big)\Big\}, \tag{3.9}$$

根据良基性，该概念总是存在。我们定义与之密切相关的 $\mathcal{D}$的 *layering* ，它是映射

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \colon \alpha &\to \mathcal{P}(\mathcal{D}). \\ \beta &\mapsto \bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma \end{aligned} \tag{3.10}$$

于是，我们可以更简洁地将 S_β 写成集合差集 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}(\beta)$ 的极小元素集合。

命题 3.2 *The segmentation of $\mathcal{D}$ partitions its nodes.*

Proof $S_\bullet$ $\exists \beta \neq \gamma$ $S_\beta \cap$假设并 $S_\gamma \neq \varnothing$ $\exists x \in S_\beta \cap S_\gamma$ $\gamma < \beta$ 非一个不交族；那么存在某个，使得，并且。 不失一般性，假设；
$x \in S_\gamma \implies x \in \mathcal{S}(\beta)$，这与 $x \in S_\beta$矛盾。接下来我们必须证明扩张 $\mathcal{S}(\alpha+1) = \mathcal{D}$。如果这不成立，那么对于 $m \in S_\beta$， m 将不是一个极小元，从而得到所需的矛盾。□

Remark 2 目前，这些图中允许存在“孤立”节点（即未通过边与任何其他节点相连的节点），因为它们会破坏 E 上的弱全性条件。我们认为这并非大问题，原因有几个。首先，将它们纳入理论相对容易，但这样形式体系就会失去一定的优雅之处：实际的元组只存储重构原始态射所必需的信息。更重要的是，施加这一条件并不会损失一般性，因为给定一个 *not* 满足此弱全性条件的图，我们可以在所有其他层的下方添加一层，并为孤立节点附加恒等态射，从而将其提升为一个允许的幺半群图。

3.2 未解析边

“未解析边”的概念在这种图示理论中带来了一个初始问题。在定义如何 *read* 图时，我们会将其分解为各个片段。但是，为了使态射能够正确复合，我们必须插入一条恒等边，以统一每一层的宽度。以下构造将解决这一问题；再次固定一个幺半群图（$\mathcal{D}$， E， H， μ）。

定义3.8（γ-未解析边）一条边 $e \in E$ 是 γ-*unresolved*，如果$\pi_1(e) \in \mathcal{S}(\beta)$ 且 $\pi_2(e) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}(\beta)$。

定义 3.9（e-切割，黏合映射）假设 $\mathcal{D}$ 有一条未解析边 e（在任意 γ）。令 $\mathcal{I} = \{(\pi_1(e)\ 1_e)、(1_e, \pi_2, e)\}$ 为一个 e-*incision*，并令 $E' = E \setminus \{e\} \cup \mathcal{I}$ e-*incision of* E *cohesion map* 为该。于是我们将：$c\ E' \to E$ 定义为满足以下条件的函数：$c|_{E' \setminus \mathcal{I}}$ 为恒等映射，且 $c[\mathcal{I}] = \{e\}$。

命题 3。**3** *Given the cohesion map* c： $E' \to E$ *as in Def. 3.9， there is a unique partial ordering* H' *such that the extension* c： $(E'$， $H'_{st})$ $\to$ $($ E H_{st} *is order-reflecting (where* A_{st} *is the corresponding strict partial* ， $)$ *order of* A*).*

Proof 这立即由保序反射映射的定义得出。由于映射 $A \mapsto A_{st}$ 在偏序集上是双射，严格性也保留了唯一性。□

命题 3.4 *Proceeding with the language of Def. 3.9 and Prop. 3.3, let* $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{1_e\}$ *and* μ'： $\mathcal{D}' \to$ mor($\mathscr{C}$) *such that* $\mu'|_{\mathcal{D}} = \mu$ *and* $\mu'(1_e)$ $=$(cod $\circ\, \mu \circ \pi_1$)(e)*. Then*$(\mathcal{D}', E', H', \mu')$ *forms a monoidal diagram.*

*Proof*这是 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ 本身是一个幺半群图这一事实的显然推论。□

定义3.10（e-解析，局部解析器）设 $\mathfrak{D}$ 为所有 $\mathscr{C}$-图的类，对于每个图 $\mathcal{D}$，设 $\mathcal{U}^{\gamma}_{\mathcal{D}}$ 为 γ-未解析边的 Set

在 $\mathcal{D}$中，并令 $\mathcal{U}_{\mathcal{D}} = \bigcup_{\gamma<\mathrm{rank}(\mathcal{D})} \mathcal{U}_{\mathcal{D}}^{\gamma}$ 为 *all*中未解析边的集合 $\mathcal{D}$。根据命题 3.4，我们称图 $\mathsf{res}(\mathcal{D}, e) = (\mathcal{D}', E', H', \mu')$ 为 *e-resolution* 的 $\mathcal{D}$。因此，我们有一个定义良好的类函数

$$\mathrm{res}\colon \bigsqcup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \to \mathfrak{D} \tag{3.11}$$

称为 *local resolver* $\mathscr{C}$-图的集合。

命题

3 5 *For a monoidal diagram* $\mathcal{D}$ *the set* $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ *can be well-* 。，*ordered without invoking AC*。

Proof 我们如下构造一个良序：在 $\mathcal{D}^2$ 上取字典序 $E \times E$；由于 $\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \subseteq E \subseteq \mathcal{D}^2$，存在一个由 $E \times E$ 唯一定义的良基偏序集，它存在且满足关于 $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ 的前述条件。□

由于这个良序的存在，我们可以良好定义如下分段函数：

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}_*\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \\ &\qquad \mathcal{D} \mapsto \begin{cases} \mathrm{res}(\mathcal{D}, \min(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})) & \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \neq \varnothing \\ \mathcal{D} & \mathcal{U}_{\mathcal{D}} = \varnothing \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

这个映射使我们能够逐边解析所有未解析边，直至其成为幂等映射（即整个图示都已解析）。

定义 3.11（电阻率、全局解析器、解析）图 $\mathfrak{r}(\mathcal{D})$ 的 *resistivity*，$\mathfrak{r}\colon \mathfrak{D} \to$ 序数类是满足以下条件的最小序数 α

$$\mathrm{res}_*^{(\alpha+1)}(\mathcal{D}) = \mathrm{res}_*^{(\alpha)}(\mathcal{D}). \tag{3.13}$$

我们将 *global resolver* 定义为

$$\begin{aligned} &\mathrm{res}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \\ &\qquad \mathcal{D} \mapsto \mathrm{res}_*^{(\mathfrak{r}(\mathcal{D}))}(\mathcal{D}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

我们称 $\mathsf{res}(\mathcal{D})$ 为图 $\mathcal{D}$ 的 *resolution*，并将子类 $\overline{\mathfrak{D}}$ 定义为 res 的像，其中的元素称为已消解图。

解决这些边后，每个图都可以恰当地分解为若干层；下一节将对此进行说明。

3.3 读出与有效性

我们可以着手提取图所编码的态射，并将其称为该图的 *readout*。不过，在此之前有一点微妙之处值得注意：由于我们并未对映射 μ 施加严格限制，图的结构所规定要进行复合的态射，可能会因其定义域与陪域不匹配而无法复合；我们希望将这类图视为 *invalid*。为严谨地处理这一问题，我们将先确定图可能的读出结果，再形式化地定义其有效性。以下结果将有助于此。

命题 3.6 *Let* $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ *be a monoidal diagram such that* $\mathcal{D} \in \bar{\mathfrak{D}}$*.For any* $\beta < \mathrm{rank}(\mathcal{D})$ *let*

$$H^*_\beta = H^* \cap \big(S_\beta \times S_\beta\big). \tag{3.15}$$

Then (S_β, H^*_β) *is a well-ordered set .*

假设 H^* 不是良基的；那么存在一个非空子集 $U \subseteq \mathcal{D}$，其中没有最小元素。令 $U' = \{e \in E : \bigvee_{i=1,2} \pi_i(e) \in U\}$。根据幺半图的条件1，$(E, H)$ 是一个良基集合，因此 U' 有一个最小元素，记为 (c, d)。选择 $x \in \{c, d\} \cap U$；由于 U 没有最小元素，存在 $\exists$，其不同于 $y \in U$，使得 yH^*x。根据弱全性，y 必须是 U' 中至少一个序对的组成部分，设为 $(a, b) \in U'$，且该序对与 (c, d) 唯一不同。但由于 H 作为二阶关系构造良好，这意味着 $(a, b)H(c, d)$，这与 (c, d) 是一个最小元素相矛盾，从而证明了 H^* 的良基性。

由于 $H^*_\beta \subseteq H^*$，因此其本身也是良基的，接下来只需证明 S_β 是全序的。我们将对 β 进行超限归纳；因此首先假设 (S_β, H^*_β) 是全序的。对于后继序数的情形，设 $x, y \in S_{\beta+1}$。注意，必然存在 $a \in S_\beta$ 使得 aEx；否则，x 就会是 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}(\beta)$ 中的极小元，从而成为 S_β 的成员，但这是不可能的，因为 $S_\bullet$ 将 $\mathcal{D}$ 分割成若干部分。同样，存在一个 $b \in S_\beta$ 使得 bEy。根据假设，要么 $aH^*_\beta b$ 或 $bH^*_\beta a$，要么同样地 aH^*b 或 bH^*a。但良构性随后意味着，要么 $(a, x)H(b, y)$，要么 $(b, y)H(a, x)$；根据定义，这意味着 x 和 y 是 H^* 可比较的，因此显然 $H^*_{\beta+1}$ 也是可比较的。

对于极限序数的情形，设 x、$y \in \beta$ 对于某个极限序数 β 成立，并且对于所有 $\delta < \beta$，$(S_\delta$、$H^*_\delta)$ 是全序的。根据上述相同的论证，$\exists a$、$b \in \mathcal{S}(\beta)$，使得 aEx 且 bEy。此外，对于 δ_1、$\delta_2 < \beta$，$a \in S_{\delta_1}$ 且 $b \in S_{\delta_2}$；如果 $\delta_1 \neq \delta_2$，不妨设 $\delta_1 > \delta_2$，那么该图将包含一条 δ_1-未解析边，这与 $\mathcal{D} \in \bar{\mathfrak{D}}$ 矛盾。因此 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$，所以根据上述相同的逻辑，$x$ 和 y 是 H^*_β 可比较的。最后，基例 $\beta = 1$ 是平凡的，因为 S_1 由所有 E-极小元素组成，但根据幺半群图的条件三，这些元素必须 H^* 可比较（因而 H^*_β 也可比较）。因此，S_β 是良序的。□

Remark 3 实际上，对于上述结果，我们不必将范围限制在 $\bar{}$ 已消解图 $\mathfrak{D}$ 这一子类；这样做确实能大大简化证明

然而，尤其是因为我们只需将这种良序用于已消解图。更一般的形式可以通过以下观察证明：线段中的任意两个节点，要么沿链在图中的某处追溯到一个 E-三角形，要么导向 E-极小元素；因此，它们的可比性借助条件构造公理沿图向上递归。

如前所述，该图的线段标明了应当进行复合和幺半群积的位置。垂直比较关系在一定程度上已使这些线段构成良序。现在，既然水平比较关系将每条线段良序化，我们便知道在构造读出时应按什么顺序进行幺半群积。

定义 3.12（读出）设 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ 是一个幺半群图，满足 $\mathcal{D} \in \bar{\mathfrak{D}}$。对所有 β，令 $\ell_\beta = \mathsf{rank}(S_\beta)$。令

$$S_\beta^\bullet \colon \ell_\beta \xrightarrow{\sim} S_\beta \tag{3.16}$$

根据命题 3.6，它是该良序与其序数秩之间唯一的序同构。采用第 2.2 节的记号，*reading* 的 $\mathcal{D}$ 是序数序列

$$\begin{aligned} \mathrm{read}(\mathcal{D})_\bullet \colon \mathrm{rank}(\mathcal{D}) &\to \mathrm{mor}(\mathscr{C}) \\ \beta &\mapsto \mathcal{T}_{\ell_\beta} \circ \prod_{\gamma<\ell_\beta} \mu\big(S_\beta^\gamma\big). \end{aligned} \tag{3.17}$$

由于现在我们在范畴中有一个由待复合态射构成的序列，因此在进行复合之前，必须施加有效性要求。

定义 3.13（有效图）设 $(\mathcal{D}, E, H, \mu)$ 是一个幺半群图，满足 $\mathcal{D} \in \bar{\mathfrak{D}}$。令

$$\mathrm{inv}(\mathcal{D}) = \{\gamma < \mathrm{rank}(\mathcal{D}) : \mathrm{dom}(\mathrm{read}(\mathcal{D})_{\gamma+1}) \neq \mathrm{cod}(\mathrm{read}(\mathcal{D})_\gamma)\} \tag{3.18}$$

我们将用 $\mathsf{val}(\mathfrak{D})$ 表示 $\varnothing$ 在 $\mathsf{inv} \circ \mathsf{res} \colon \mathfrak{D} \to \mathcal{P}$(序数类) 下的原像。$\mathsf{val}(\mathfrak{D})$ 的一个元素是一个 *valid* 图表。

一般而言，$\mathsf{val}(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$并不成立；res 映射使我们能够将包含未解析边的图也视为有效图。有鉴于此，我们直观上希望将读出映射定义为阅读的超限复合（如定义 2.1 中所述）。为此，考虑图 $\mathcal{D} \in \mathsf{val}(\mathfrak{D})$ 的一个函子

$$\mathcal{D}_\bullet \colon \mathrm{rank}(\mathcal{D}) \to \mathscr{C}, \tag{3.19}$$

使得 $\mathcal{D}_\bullet = \mathsf{dom} \circ \mathsf{read}(\mathcal{D})_\bullet$ 作用于对象。对于态射 $\beta \to \beta + 1$，令 $\mathcal{D}_\bullet$ 取值为 $\mathsf{read}(\mathcal{D})_\beta$。由于 $\mathcal{D}$ 是一个有效图表，因此满足复合律。

定义 3.14（读出） *readout* 是函数 $\mathcal{R}\colon \mathrm{val}(\mathfrak{D}) \to \mathrm{mor}(\mathcal{C})$，它将图表 $\mathcal{D}$ 映射为由余极限诱导的唯一态射：

$$\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\mathcal{R}(\mathcal{D})} \varinjlim \mathcal{D}_\bullet \tag{3.20}$$

在这一形式体系下，我们可以定义一个由图组成的无偏幺半范畴，其乘积结构由拼接给出。读出映射将提升为函子，而图的复合则由超限复合的粘合给出。

定义 3.15（图的范畴）对于任意 α元无偏幺半范畴 $\mathscr{C}$，存在一个 *category of diagrams* $\mathbf{dgm}(\mathscr{C})$，其对象与 $\mathscr{C}$相同，其态射是有效图在图同构等价关系下的等价类。$\mathbf{dgm}(\mathscr{C})$通过图的无偏拼接赋予严格的无偏幺半结构，记作 $\coprod$。

由于图的同构保持读出不变，我们可以将其视为一个对象上恒等的函子

$$\mathcal{R}\colon \mathrm{dgm}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C} \qquad [\mathcal{D}]_{\simeq} \mapsto \mathcal{R}(\mathcal{D}). \tag{3.21}$$

此外，很容易看出 $\mathcal{R}$ 是一个无偏幺半函子，因为

$$\mathcal{R}\Big(\coprod_{\gamma<\beta} \mathcal{D}_\gamma\Big) = \mathcal{T}_\beta\big(\mathcal{R}(\mathcal{D}_\beta)_{\gamma<\beta}\big) \tag{3.22}$$

因此所需的数据都只是恒等态射。至此，我们对幺半图的研究告一段落。

4 结论

4.1 摘要

总的来说，我们构建了一套连贯的理论，使得无穷幺半图能够得到求值，并在此过程中完整地构建和探究了无偏幺半范畴这一概念。

在第2节中，我们介绍后者，首先仿照参考文献10定义无偏幺半范畴，然后将定义扩展到任意序数元数。此外，我们讨论超限复合，并证明它与我们的无穷乘积概念适当地交换。最后，我们定义 *colimit expansion*，它既提供了无穷幺半范畴的各种例子，也给出了关于它们颇为反直觉的结果。

第 3 节定义了幺半群图，这是一种新颖的代数结构，类似于有向图上的图结构。解决这些图中 $\gamma-$未解析边的问题后，我们构造了读出函子，通过该函子可将幺半群图唯一地对应到态射

这些态射属于底层的无穷幺半范畴。该理论的呈现方式尊重范畴的无穷结构；因此，无穷幺半图满足许多可由同位变形推导出的相同性质。最后，我们将这类图提升为一个范畴，使读出成为一个无偏的幺半对象上恒等函子。

4.2 未来工作

我们可以从许多方向进一步发展我们的理论。首先，正如相关文献中所指出的，[10], 从有限幺半范畴到无穷幺半范畴并不存在规范的 one 延拓。因此，如果选择不同的延拓，这里所呈现的图表可能会有不同的求值结果，并满足不同的性质。然而，作者认为，使用无偏幺半范畴是最自然的，因为本文末尾第2.2节讨论了无穷 Lawvere 理论的表述。

这里作出的另一个重要选择，是在图示的代数理论和图形理论之间作出选择（毕竟它是一种图形演算）。由于我们选择了代数理论，所得的图自然地不易受同位变形影响，而证明相干性的困难则转移到了范畴论中。相比之下，早期采用 $topological$ 形式主义可以简化证明的细节。因此，一种推广方式可以是将Joyal和Street 的拓扑渐进平面图推广到无穷元数情形。一个重要且有趣的步骤，将是证明拓扑方法与范畴论方法之间的直接等价性，从而展示无约束元数的幺半范畴中弦图真正的“自然性”。

作者认为，对本文所提出的余极限扩张进行研究将大有裨益。除了文中讨论的半余笛卡尔闭范畴之外，很可能还有许多其他范畴也可以进行余极限扩张。具体而言，本文仅考察了满足带右伴随的扩张所需光滑性的情况。当然，序列余连续性远弱于一般余连续性——因此，对其进行分类将有助于深入理解余极限扩张和无穷幺半范畴。

最后，最为明显的是，我们可以将无偏幺半范畴的概念推广到辫式（甚至对称）变体，随后也推广由此产生的图示。这带来了额外的挑战，因为序数加法缺乏交换性。考虑我们的 Lawvere 理论方法，由辫式建立的同构被映射到非交换序数上，这使其难以定义。此外，即使带有积的 Set 也不会构成一个例子。改进形式体系以支持此类概念 $would$ 将是一项重要进展，不过因此将成为作者未来的研究重点。

参考文献

[1] Penrose, R.：负维张量的应用。组合数学及其应用（1971年）[2] Penrose,R.、Rindler, W.：旋量与时空。数学物理剑桥专著，第1卷。剑桥大学出版社，???（1984年）。https://doi.org/10.1017/CBO9780511564048[3] Joyal,A.、Street, R.：张量演算的几何学，第一部分。数学进展 **88**（1），55–112（1991年）。https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-P[4] MacLane, S.：工作数学家的范畴论。数学研究生教材，第5卷。施普林格，纽约州纽约（1978年）。https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4721-8[5] MacLane, S.：自然结合性与交换性。莱斯研究所小册子——莱斯大学研究**49**（4），28–46（1963年）[6] Kelly, G.M.：论MacLane 关于自然结合律、交换律等的相容性条件。代数学杂志**1**（4），397–402（1964年）。https://doi.org/10.1016/0021-8693(64)90018-3[7] Selinger, P.：载于：Coecke,B.（编），《幺半范畴图形语言综述》，第289–355页。施普林格，柏林、海德堡（2011年）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-12821-9 4[8] Heunen,C.、Vicary,J.：量子理论的范畴。牛津数学研究生教材。牛津大学出版社，英格兰伦敦（2019年）[9]Lurie, J.：拓扑场论的分类。arXiv（2009年）。https://doi.org/10.48550/ARXIV.0905.0465。https://arxiv.org/abs/0905.0465[10] Leinster, T.：高阶拟运算子，高阶范畴。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，???（2004年）。https://doi.org/10.1017/CBO9780511525896[11] Dwyer,W.、Hirschhorn, P.、Kan,D.、Smith, J.：第二部分摘要。载于：《模型范畴与同伦范畴上的同伦极限函子》。数学调查与专著，第77–87页。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯（2005年）[12] Cisinski, D.-C.：高阶范畴与同伦代数。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，???（2019年）。https://doi.org/10.1017/9781108588737

[13] Hyland, M., 幂 , J.: 范畴 gory 理论理解 g

普遍代数：Lawvere 理论与单子。理论计算机科学电子笔记 172，437–458（2007）。https://doi.org/10.1016/j.entcs.2007.02.019。计算、意义与逻辑：献给 Gordon Plotkin 的论文集

[14]Pitts,A.M.：《NominalSets：计算机科学中的名称与对称性》。剑桥理论计算机科学论丛。剑桥大学出版社，???（2013）。
https://doi.org/10.1017/CBO9781139084673

[15] Street, R.：载于 Hazewinkel, M.（编），范畴论的结构，第 529–574 页。Elsevier，荷兰北部（1995）