arXiv:2304.03736v2 [math.AP] 4 Aug 2023

具有 VMO a 和 Morrey b, c的 Morrey 空间中的抛物型方程

N.V. KRYLOV

Abstract. 我们证明，具有混合范数的函数在 Morrey 空间中，对系数满足 VMO a 和 Morrey b, c 条件的二阶抛物型方程，其解具有存在性和唯一性。

1. Introduction

设 $\mathbb{R}^d$ 是由点 $x = (x^1, ..., x^d)$ 组成的 d–维欧几里得空间，满足$d \geq 2$。固定一个 $\delta \in (0, 1]$，并令 $\mathbb{S}_\delta$ 为特征值属于 $[\delta, \delta^{-1}]$的 $d \times d$ 对称矩阵集合。假设在 $\mathbb{R}^{d+1} = \{(t, x)$ 上，给定一个取实值的 Borel c、一个取值于 $\mathbb{R}^d$的函数 $b = (b^i)$，以及一个取值于$\mathbb{S}_\delta$的 $a = (a^{ij})$。定义

$$\mathcal{L}u = \partial_t u + a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u,$$

其中，对重复指标求和，并采用如下记号

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Du = (D_i u), \quad D_{ij} = D_i D_j, \quad D^2 u = (D_{ij} u), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

我们将研究方程

$$\mathcal{L}u - (c + \lambda)u = f \tag{1.1}$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$和 $[S, T] \times \mathbb{R}^d$中， λ充分大。我们关注相当规则的解，以及具有较差可积性的 b、c、f，因此我们在 Morrey 空间 $E^1, {}_p{}^2{}_q, , {}_\beta$ 中工作（见第 2 节）。

G. Lieberman 在 [13] 中研究了有界区域内的 $E^1, {}_p{}^2{}_p, , {}_\beta$ 方程（不涉及混合范数）。他对 b、c 的假设比我们的强得多。例如， $|b| = 1/|x|$ 或 $|c| = 1/|x|^2$ （若 $d \geq 3$）不满足他的可积性条件。在我们的框架下，若要涵盖这些情形，只需令 $p = q > 1$ 接近于 1，并取 $\beta_0 = 3$即可。这些函数与时间无关，也不属于 [4], [2], [14]；后者讨论的是具有 Morrey 系数且解属于 [4] 中 Morrey 类或属于 [2] 中 Sobolev 类的椭圆方程。关于椭圆方程，近期文章 [5]中有大量相关信息。

关于广义Morrey空间中的椭圆方程，已有大量研究，例如 [15], ，但其中没有低阶项。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35K10, 35K67.*Key words and phrases.*
抛物型方程，Morrey 空间，奇异系数。

许多作者正在研究一些相当奇特的问题，例如 [20], 中的带测度数据方程，其中同样没有低阶项。有关 Morrey 空间及其推广的一般信息可参见 [16], [18]。

关于 Morrey 空间中抛物型方程的文献，不如椭圆方程领域丰富，不过值得提醒读者关注 [13], [19], [20], [21] 及其中的参考文献。一个颇有意思的细节是：许多论文研究散度型方程，而大多数研究非散度型方程的论文都不含低阶项；与此同时，其中有些论文讨论定义在区域上的方程，并声称通过通常的单位分解法和平坦化边界，便可由 Morrey 空间中的内部估计和边界估计得到全局估计。但这种边界平坦化必然会引入低阶项，而在 Morrey 空间中处理这些项，直到相当晚才在[4] 中得到明确尝试，这并非一项绝对简单的任务（例如，参见 [8] 中插值引理 3.9 的证明，并将其与 [4] 中定理 4.3 的证明相比较；后者基于 [4]中错误的引理 4.2）。看来，这个乍看之下十分熟悉的 Morrey 空间插值引理，实则属于作者本人。

作者仅能指出两篇论文，其中抛物型方程的低阶项属于 Morrey 类（其范围比 [13] 宽得多），且解具有两个导数，分别是 [10] 和 [9]。正如董宏杰善意地向作者指出（并预见到）的那样， [9]的定理 1.1 可由我们的定理 3.5 推出（据作者所知，这是一个新结果）。

作者在 Morrey 空间中发展这套理论的主要动机，是获得必要的工具，以证明相应的 Itô 随机方程对于比以往已知范围更广的一类 b 存在解。在 [17] 中，当 a 为单位矩阵时，这一研究计划得以实现；而在基本情形下

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|b|^p\,dx\Big)^{q/p}dt\Big)^{1/q}<\infty,\quad \frac{d}{p}+\frac{2}{q}=1. \tag{1.2}$$

[6] 中的一个极具启发性的观察是：若要使 Itô 随机方程在单位 a的情形下存在解，只需满足 $s\in(1,d+2]$和 $\rho_0>0$，使得对于任意底面为半径 $r\le\rho_0$ 的球的标准抛物柱 C_r ，都有

$$\Big(r^{-d-2}\int_{C_r}|b|^s\,dxdt\Big)^{1/s}\le \mathfrak{b}r^{-1}, \tag{1.3}$$

其中 $\mathfrak{b}$ 充分小。利用 H¨older 不等式，容易证明，对于 $s=p\wedge q$, (1.3) 的左端小于一个常数乘以将 bI_{C_r} 替换为 b 后(1.2) 左端的结果。通过选取 ρ_0 充分小，后者可以任意小。

本文旨在从某种意义上结合条件(1.2) 和 (1.3)，并在不将其应用于 Itˆo随机方程的情况下，发展 (1.1) 在 Morrey 函- 数类中的可解性理论。本文是一

对 [10]，中偏微分方程部分的大幅扩展，其中 b 的类别更为狭窄，且 c 有界，但实现了 Itô 方程解的无条件弱唯一性。这一扩展源于我们上文所讨论的 [6] 中的巧妙观察。

以下是一个适用我们理论的例子： $|b| = ch$，其中常数 $c > 0$ 足够小，且

$$h(t,x) = I_{1>t>0,|x|<1}|x|^{-1}\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)^{1/(d+1)},\ a = 2(\delta^{ij}) + I_{x\neq 0}\zeta(x)\sin(\ln|\ln|x||),$$

其中， ζ 是任意光滑的对称 $d\times d$矩阵值函数，在 $|x| > 1/2$ 时为零，并满足 $|\zeta| \leq 1$。由于 b 过于奇异且 σ 不是常数，这个例子不符合 [17]的条件；但如果 σ 是常数，则符合 [6] 的条件，并且可得 Itô 方程的弱解在条件意义下弱唯一。 [10] 的结果表明，在这个例子中，解无需任何附加条件便是弱唯一的。利用本文的结果，我们在 [12] 中证明，任意解实际上都是强解且唯一。

本文结构如下。第2节介绍 Morrey 空间并列出其若干性质，引理2.5 的证明则推迟到第6节。第3节给出我们关于抛物型情形和椭圆型情形的主要结果。第4节研究不含低阶项的方程，第5节证明我们的主要结果定理 3.5

我们以一些记号结束引言。

对于 $p,q \in [1,\infty)$ 以及由 $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 通过 $L_{p,q}(Q)$表示的区域，我们指的是定义在 Q 上的博雷尔（实值、向量值或矩阵值）函数空间，其范数有限，并且范数在全文中固定采用以下两种方式之一：

$$\|f\|^q_{L_{p,q}(Q)} = \|fI_Q\|^q_{L_{p,q}} = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|fI_Q(t,x)|^p\,dx\Big)^{q/p}dt \tag{1.4}$$

or

$$\|f\|^p_{L_{p,q}(Q)} = \|fI_Q\|^p_{L_{p,q}} = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}}|fI_Q(t,x)|^q\,dt\Big)^{p/q}dx. \tag{1.5}$$

作者认为，本文似乎是首次在抛物型方程的可解性理论中系统地使用该范数 (1.5) 的论文。

当 f 是向量或矩阵时，我们用 $|f|$ 表示 f 的所有元素的平方和的平方根。顺便一提，(1.5) 中的范数用于处理上述例子中的 b。

令 $L_{p,q} = L_{p,q}(\mathbb{R}^{d+1})$。通常，我们将类似于 $f \in L_{p,q,\mathrm{loc}}$ 若$f\zeta \in L_{p,q}$ 对任意具有紧支集的无穷可微 ζ 的情形记作。我们记$\|u,v,\cdot\cdot\|_{L_{p,q}}$表示其中内容的 $L_{p,q}$-范数之和。

我们用 $W^{1,2}_{p,q}(Q)$ 表示满足 $\partial_t u,\ D^2u,\ Du,\ u \in L_{p,q}(Q)$ 的 u 集合。$W^{1,2}_{p,q}(Q)$ 中的范数可用显然的方式引入。若 $Q = \mathbb{R}^{d+1}$，则省略 Q。

引入

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| < R\},\quad B_R = B_R(0),$$

$$C_{\tau,\rho}(t,x)=[t,t+\tau)\times B_\rho(x),\quad C_\rho...=C_{\rho^2,\rho}...,\quad C_\rho=C_\rho(0,0),$$

并令 $\mathbb{C}_\rho$ 为 $C_\rho(t,x)$ 的集合。

若 $\Gamma\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 为 Borel 集，则用 $|\Gamma|$ 表示其勒贝格测度，并且

$$\fint_\Gamma f(x)\,dxdt:=\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma f(x)\,dxdt.$$

若 $C\in\mathbb{C}_\rho$，则令

$$\fint f\|_{L_{p,q}(C)}=\|1\|^{-1}_{L_{p,q}(C)}\|f\|_{L_{p,q}(C)}=N(d)\rho^{-d/p-2/q}\|f\|_{L_{p,q}(C)}.$$

在证明结果时，我们会使用各种（有限）常数，称为 N。这些常数在不同地方出现时可能有所变化，且仅以结果陈述中所指明的方式依赖于相关数据。

2. Morrey spaces

取 $p,\ q\in(1,\infty)$。对于 $\beta\geq 0$，引入 Morrey空间 $E_{p,\,q,\,\beta}$，将其定义为满足以下条件的 $g\in L_{p,\,q,\,\mathrm{loc}}$

$$\|g\|_{E_{p,q,\beta}}:=\sup_{\rho\leq 1,C\in\mathbb{C}_\rho}\rho^\beta\fint|g\|_{L_{p,q}(C)}<\infty. \tag{2.1}$$

定义

$$E^{1,2}_{p,q,\beta}=\{u:u,Du,D^2u,\partial_t u\in E_{p,q,\beta}\}$$

并给出 $E^1_{,\,p\,q}{}^2_{,\,,\,\beta}$ 一个显然的范数。我们将使用 [8] 中证明的一些关于这些空间的性质。$E^1_{,\,p\,q}{}^2_{,\,,\,\beta}$ 是用具有 (1.4) 中所给范数的 $L_{p,\,q}$-空间来定义的。这些证明毫无困难地推广到采用 (1.5) 中范数的情形。此外，在 [8] 中，$E_{p,\,q,\,\beta}$-范数的定义与 (2.1) 不同，不受 ρ 的限制，只需 $\rho<\infty$。关于这一点，注意若 $\beta\leq d/p+2/q$ 且 g 的支集位于某个 $C\in\mathbb{C}_1$ 中，那么 g 的 $E_{p,\,q,\,\beta}$-范数相同：无论取自 (2.1) 还是 [8]。另一个有用的观察是：

$$\|g\|_{E_{p,q,\beta}}=\sup_{C\in\mathbb{C}_1}\|gI_C\|_{E_{p,q,\beta}}. \tag{2.2}$$

注2.1. 若 u 在 $C\in\mathbb{C}_1$外为零，则若 $d/p+2/q\geq\beta$，很容易看出，对于任意 $r\geq 1$ 和 $C'\in\mathbb{C}_r$

$$r^\beta\fint|u\|_{L_{p,q}(C')}\leq N(d)\|u\|_{L_{p,q}(C)}.$$

注 2.2. 一个简单的覆盖论证表明，对于 $\beta>1$、$1\geq\rho\geq\rho'$ 和 $C\in\mathbb{C}_\rho$

$$\rho^\beta\fint|f\|_{L_{p,q}(C)}\leq\nu(d,\beta,p,q,\rho')\sup_{r\leq\rho'}r^\beta\sup_{C\in\mathbb{C}_r}\fint|f\|_{L_{p,q}(C)},$$

其中 $\nu(d,\beta,p,q,\rho')=N(d)(\rho')^{d/p+2/q-\beta-d-2}$。

下面是一个有用的逼近结果。对于函数 $f(t,x)$和 $\varepsilon>0$，我们定义 $f^{(\varepsilon)}=f*\zeta_\varepsilon$，其中 $\zeta_\varepsilon=\varepsilon^{-d-1}\zeta(t/\varepsilon,x/\varepsilon)$ 带有一个非负的$\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$，其积分为 1 且 $\zeta(0)=1$。

引理 2.3。设 $f \in E_{p,q,\beta}$。则对任意 $C \in \mathbb{C}$ 和 $\beta' > \beta$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(f - f^{(\varepsilon)}) I_C\|_{E_{p,q,\beta'}} = 0. \tag{2.3}$$

证明。显然，对于任意 $r \in (0,1]$

$$\|(f - f^{(\varepsilon)}) I_C\|_{E_{p,q,\beta'}} \leq 2 r^{\beta' - \beta} \sup_{\rho \leq r} \rho^{\beta} \sup_{C \in \mathbb{C}_\rho} \|f\|_{L_{p,q}(C)}$$

$$+ N(d, r, p, q) \|f - f^{(\varepsilon)}\|_{L_{p,q}(C)}.$$

这里，右侧第一项可通过选择 r 而在 ε 上一致地任意小化；第二项则在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时趋于零。引理得证。□

若 $0 < \beta \leq d/p + 2/q$，则由 [8]中的插值引理 5.10 可得以下结论。

引理 2.4。对于任意 $u \in E^1_{,p\,q}{}^{2}_{,,\beta}$ 和 $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\|Du\|_{E_{p,q,\beta}} \leq \varepsilon \|\partial_t u, D^2 u\|_{E_{p,q,\beta}} + N(d,p,q,\beta) \varepsilon^{-1} \|u\|_{E_{p,q,\beta}}. \tag{2.4}$$

若 $\beta > d/p + 2/q$，则结论由 [1], 中的定理 10.2 得出，因为此时

$$\|f\|_{E_{p,q,\beta}} = N(d,p) \sup_{C \in \mathbb{C}_1} \|f\|_{L_{p,q}(C)}.$$

若 u 与 t相互独立，则 (2.4) 给出了“椭圆”情形下的一个插值不等式。该情形首次见于 [4] 中的定理4.3，但其证明基于 [4]中错误的引理4.2。

下述嵌入引理将在第6节证明。

引理2.5. (A) 设 (a) $\beta < 2$ 或 (b) $d/p + 2/q < 2$。则任意 $u \in E^1_{,p\,q}{}^{2}_{,,\beta}$均有界且连续，并且对任意 $\varepsilon \in$ （情形(a)中 $0,1]$

$$|u| \leq \varepsilon^{2-\beta} \|\partial_t u, D^2 u\|_{E_{p,q,\beta}} + N(d,\beta) \varepsilon^{-\beta} \|u\|_{E_{p,q,\beta}} \tag{2.5}$$

其中 $\beta = 2 - d/p - 2/q$是 ε的幂次，且情形(b)中 (2.5)里的 $N(d,p,q)$。 (B) 设 (a) $\beta < 1$ 或 (b) $d/p + 2/q < 1$。则对任意 $u \in E^1_{,p\,q}{}^{2}_{,,\beta}$， Du 均有界且连续，并且对任意 $\varepsilon \in$ （情形(a)中 $0,1]$

$$|Du| \leq \varepsilon^{1-\beta} \|\partial_t u, D^2 u\|_{E_{p,q,\beta}} + N(d,\beta) \varepsilon^{-\beta-1} \|u\|_{E_{p,q,\beta}} \tag{2.6}$$

其中 $\beta = 1 - d/p - 2/q$ 的幂次中的 ε 和 (2.6) 中的 $N(d,p,q)$，适用于情形 (b)。

$E^1_{、p\,q}{}^{2}_{、、\beta}$ 的另一个有用性质是嵌入定理，该定理可由 [8] 的推论 5.7 得出。

引理 2.6. 设 $1 < \beta \leq d/p + 2/q$。则对于任意 $u \in E^1_{、p\,q}{}^{2}_{、、\beta}$，有

$$\|Du\|_{E_{r,s,\beta-1}} \leq N(d,p,q,\beta) \|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}, \tag{2.7}$$

其中 $(r,s)(\beta - 1) = (p,q)\beta$。

另一个嵌入结果是 [8] 与$\alpha = 2$的定理 5.6 的一个推论。

引理 2.7. 设 $2 < \beta \leq d/p + 2/q$、$(r,s)(\beta-2) = (p,q)\beta$, $u \in E^{1,p}_{q,,\beta}$。则存在 $N = N(d,p,q,\beta)$，使得

$$\|u\|_{E_{r,s,\beta-2}} \leq N(d,p,q,\beta)\|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}. \tag{2.8}$$

下面这个未在本文中使用的补充结果将在第 6 节中证明。

引理 2.8。设 $1 < \beta \leq d/p + 2/q$, $\beta < 2$。那么，对任意 $u \in E^2_{p,q,\beta}$,$\rho \leq 1$, $(t_i, x_i) \in C_\rho$, $i = 1, 2$，我们有

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \leq N(d,p,q,\beta)\rho^{2-\beta}\|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}. \tag{2.9}$$

当 $0 < \beta \leq d/p + 2/q$, $\beta < 1$ 时，我们有

$$|Du(t_1,x_1) - Du(t_2,x_2)| \leq N(d,\beta)\rho^{1-\beta}\|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}. \tag{2.10}$$

注意，如果我们希望 $W^{1,p}_{,q}$ 中的函数是 H¨older 连续的（如 (2.9) 中所示），则需要 $d/p + 2/q < 2$。要使 $W^{1,p}_{q,}$-函数的梯度满足 H¨older 连续性，则需要 $d/p + 2/q < 1$。引理 2.8 对 $d/p + 2/q$ 没有上界限制。

3. Main result

我们有 p, q, β_0，使得

$$p, q \in (1,\infty), \quad \beta_0 \in (0,\infty), \quad \beta_0 \neq 1, 2, \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} \geq \beta_0. \tag{3.1}$$

固定某些 $\rho_a, \rho_{b,c} \in (0,1]$。参数 θ、$\check{}b$ 和 $\check{}c$ 将在下文给出。

假设 3.1。我们有

$$a^\sharp_{x,\rho_a} := \sup_{\substack{\rho \leq \rho_a \\ C \in \mathbb{C}_\rho}} \fint_C |a(t,x) - a_C(t)|\,dxdt \leq \theta, \tag{3.2}$$

其中

$$a_C(t) = \fint_C a(t,x)\,dxds \quad (\text{note} \quad t \quad \text{and} \quad ds).$$

假设 3.2。若 $\beta_0 < 1$,

$$\mathfrak{b} := \rho_{b,c}^{1-\beta_0} \sup_{r \leq \rho_{b,c}} r^{\beta_0} \sup_{C \in \mathbb{C}_r} \fint \|b\|_{L_{p,q}(C)} < \infty. \tag{3.3}$$

如果 $\beta_0 > 1$，则

$$\mathfrak{b}_{\rho_{b,c}} := \sup_{r \leq \rho_{b,c}} r \sup_{C \in \mathbb{C}_r} \fint \|b\|_{L_{p\beta_0,q\beta_0}(C)} \leq \check{b}. \tag{3.4}$$

假设 3.3。如果 $\beta_0 < 2$,

$$\mathfrak{c} := \rho_{b,c}^{2-\beta_0} \sup_{r \le \rho_{b,c}} r^{\beta_0} \sup_{C \in \mathbb{C}_r} \|c\|_{L_{p,q}(C)} < \infty. \tag{3.5}$$

如果 $\beta_0 > 2$,

$$\mathfrak{c}_{\rho_{b,c}} := \sup_{r \le \rho_{b,c}} r^2 \sup_{C \in \mathbb{C}_r} \|c\|_{L_{p\beta_0,q\beta_0}(C)} \le \check{c}. \tag{3.6}$$

我们来具体说明 θ in (3.2)。容易选取引理4.5中引入的 $\theta_1(d,\delta,p,q)$，使其成为 d 的减函数，我们假定已如此选取。在下文中， $\alpha \in (0,1)$ 是一个自由参数。

假设 3.4。对于 r ，定义为满足条件的最小数

$$r \ge (d+2)/\alpha, \quad r \ge p, q$$

且 $\Theta(\alpha) = \{(p',q') : \ p \le p' \le r, q \le q' \le r\}$ 满足假设3.1，其中

$$\theta = \inf_{\Theta(\alpha)} \theta_1(d+1,\delta,p',q') =: \theta(d,\delta,p,q,\alpha).$$

事实上，这一点 $\theta > 0$ 很容易由 [3] 中的论证得到，从而在引理 4.5 中定义了 $\theta_1(d,\delta,p,q)$。

回顾一下，

$$\mathcal{L}u(t,x) = \partial_t u(t,x) + a^{ij}(t,x) D_{ij} u(t,x) + b^i(t,x) D_i u(t,x).$$

˘这是我们的主要结果。在下面的定理中，常数 λ_0 和 N 仅依赖于 $\mathfrak{b}$ ，当且仅当 $\beta_0 < 1$ ，并且仅依赖于 $\mathfrak{c}$ ，当且仅当 $\beta_0 < 2$；但为了不使表述过于繁琐，我们仍然列出这些参数。常数 $\nu = \nu(d,\beta_0,p,q,\rho_{b,c})$ 取自注 2.2。

定理 3.5. 在上述假设下，存在

$$(\check{b},\check{c}) = (\check{b},\check{c})(d,\delta,p,q,\rho_a,\beta_0,\alpha) \in (0,1]^2,$$

$$\check{\lambda}_0 = \check{\lambda}_0(d,\delta,p,q,\rho_a,\beta_0,\alpha,\mathfrak{b},\mathfrak{c}) > 0$$

使得，若在 $\beta_0 > 1$ 情形下(3.4)成立且b 取此值，并且在 $\beta_0 > 2$情形下(3.6)成立且 c 取此值，则对于任意$\lambda \ge \rho_{b\,c}^{-1}$, $\check{\lambda}_0$ 和$f \in E_{p,\ q,\ \beta_0}$ ，存在唯一的 $E^1_{,\ p\,q\ ,,\beta_0}$-解 u ，满足 $\mathcal{L}u - (c+\lambda)u = f$。此外，存在一个常数 N ，它仅依赖于 d、 δ、 p、 q、 ρ_a、 β_0、 α、 $\mathfrak{b}$、 $\mathfrak{c}$，使得

$$\|\partial_t u, D^2 u, \sqrt{\lambda} Du, \lambda u\|_{E_{p,q,\beta_0}} \le N\nu^{-1} \|f\|_{E_{p,q,\beta_0}}. \tag{3.7}$$

备注 3.6。如果 $-\infty \le S < T \le \infty$，定理 3.5 在我们将 $E_{p、\ q、\ \beta_0}$ 替换为 $E_{p、\ q、\ \beta_0}$（（S，T）$\times \mathbb{R}^d$）时同样成立，其中后者定义为在（S，T）$\times \mathbb{R}^d$ 上的满足 $fI_{(S,T)\times\mathbb{R}^d} \in E_{p、\ q、\ \beta_0}$的函数 f的集合。当然，我们也将 $E^1_{、\ p\,q}$、β_0替换为 $\overset{0}{E}{}^1_{、\ p\,q}$、$\beta_0$（（$S$，$T$）$\times \mathbb{R}^d$），后者是满足（$u$，$Du$，$D^2u$，$\partial_t u$）$I_{(S,\infty)\times\mathbb{R}^d} \in E_{p、\ q、\ \beta_0}$且 u（t，$\cdot$）$= 0$（$t > T$）的 u的集合。

事实上，在 $T = \infty$ 的情况下，解的存在性和估计是显然的。至于唯一性，考虑到可以延拓

将定义在 (S,∞) 上的函数映射到 $\mathbb{R}$，只需证明：若 $v\in E^1_{,p\,q}{}^2{}_{,,\beta_0}$ 满足 $\mathcal{L}v-(c+\lambda)v=0$，其中 $t>S$，则 $v=0$，其中 $t>S$。这很容易，因为 $\mathcal{L}v-(c+\lambda)v=g$ 的解可以通过连续性方法得到；并且，若 $\mathcal{L}=\partial_t+\Delta$ 且 $c=0$，这一性质是众所周知的，可由解的显式公式推出。一般情形 $T<\infty$ 可由上述内容轻易推出（只需令 $f(t,\cdot)=0$，其中 $t>T$）。

注 3.7。定理 3.5 中的唯一解 u 具有以下性质

a) 显然，$u\in W^1_{,p\,q}{}^2{}_{,,\mathrm{loc}}$；

b) 对于 $\beta_0>1$，由引理 2.6 可得 $Du\in L_{r,s,\mathrm{loc}}$，其中 $(r,s)=(\beta_0-1)^{-1}\beta_0(p,q)$;

c) 如果 $\beta_0<2$, u 有界且为（H¨older）连续，并且如果 $\beta_0<1$，那么Du 有界且为（H¨older）连续。

˘ 例 3.8。事实证明，b 通常较小。为说明这一点，取 $d>4$并令

$$p=q=\frac{d-1}{2},\quad \beta_0=\frac{2d-1}{d-1},\quad p'=\frac{d+2}{\beta_0},$$

使得 $2<\beta_0<d/p+2/q$, $\beta_0 p<d$, $p'>p$。然后任取 $\lambda>0$，并考虑函数

$$u(t,x)=e^{\lambda t+|x|^2/(4t)}I_{t<0}.$$

此函数满足

$$\partial_t u+\Delta u-\frac{d}{|x|^2}x^iD_iu-\lambda u=0$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中。此外，容易验证，$p'<(d+2)/2$ 且 $v:=u,Du,D^2u,\partial_t u\in L_{p',}$ $_{p'}$ 因此，对于任意 $C\in\mathbb{C}_\rho$

$$\rho^{\beta_0}\,\#\!\!\#v\|_{L_{p,p}(C)}\le\rho^{\beta_0}\,\#\!\!\#v\|_{L_{p',p'}(C)}=N(d)\|v\|_{L_{p',p'}(C)}\le N(d)\|v\|_{L_{p',p'}},$$

使得 $u\in E^1_{,\ p\,q}{}^2{}_{,,\beta_0}$。此外，对于 $b=-xd/|x|^2$，量 $\mathfrak{b}_{\rho_b,\ c}$ 是有限的（且与 ρ_b, $_c$无关），因为 $p\beta_0<d$。然而，估计式 (3.7) 不成立，这说明 b 中的常数因子 d 不够小。

定理 3.5 适用于 a,b,c,f与 t 无关的情形；由于唯一性，所得解也与 t 无关。由此得到对应的“椭圆型”结果，其中 E_{p,β_0} 和 $E^1_{,p}{}^2{}_{,\beta_0}$ 是 $E_{p,q,}$ $_{\beta_0}$ 和 $E^1_{,p\,q}{}^2{}_{,,\beta_0}$ 的子集，且由与时间无关的函数组成。该结果指出，在这种情况下，若将 E_{p,q,β_0} 和 $E^1_{,p\,q}{}^2{}_{,,\beta_0}$分别替换为 E_{p,β_0}和 $E^1_{,p}{}^2{}_{,\beta_0}$，并将 $\mathcal{L}u$ 替换为 $a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu$，则定理 3.5 仍然成立。

注 3.9. 对方程 $\mathcal{L}u-(c+\lambda)u=f$ 中的未知函数 u 作变换 $u(t,x)=v($ $t/\rho^2_{b,c},x/\rho_{b,c})$。则 v 将满足

$$\partial_t v+\tilde{a}^{ij}D_{ij}v+\tilde{b}^iD_iv-(\tilde{c}+\tilde{\lambda})v=\tilde{f},$$

其中 $\tilde{\lambda} = \rho_{b,c}^2 \lambda$,

$$(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f})(t,x) = (a, \rho_{b,c} b, \rho_{b,c}^2 c, \rho_{b,c}^2 f)(\rho_{b,c}^2 t, \rho_{b,c} x).$$

˜容易验证，由于 $\rho_{b,c} \leq 1$, $\tilde{a}, b, \tilde{c}$ 满足假设 3.1 和 ˇ 3.2，其中使用相同的 ρ_a, θ, ƀ, b, ć、 ˇc 以及 1 代替 $\rho_{b,c}$。然后假设˜ ˇ 定理 3.5 对于 $\rho_{b,c} = 1$ 成立，我们得出对于 $\lambda \geq \lambda_0$

$$\|\partial_t v, D^2 v, \sqrt{\tilde{\lambda}} Dv, \tilde{\lambda} v\|_{E_{p,q,\beta_0}} \leq N \|\tilde{f}\|_{E_{p,q,\beta_0}}. \tag{3.8}$$

由于 $\rho_{b,c} \leq 1$, $\|\tilde{f}\|_{E_{p,q,\beta_0}} \leq \rho_{b,c}^2 \|f\|_{E_{p,q,\beta_0}}$。此外

$$\|\partial_t v, D^2 v, \sqrt{\lambda} Dv, \lambda u\|_{E_{p,q,\beta_0}} = \rho_{b,c}^2 \|\partial_t u, D^2 u, \sqrt{\tilde{\lambda}/\rho_{b,c}^2} Du, u\tilde{\lambda}/\rho_{b,c}^2\|_{E'_{p,q,\beta_0}},$$

其中，E'_{p,q,β_0} 中的范数定义如E_{p,q,β_0} 所述，但将 (2.1) 中的 $\rho \leq 1$ 替换为 $\rho \leq \rho_{b,c}$。现在，注 2.2 使我们能够从 (3.8) 得到 (3.7)。

这个注记说明，不失一般性，我们可以作如下规定

假设 3.10。我们有 $\rho_{b,\ c} = 1$。

4. Model case

这里取 $p, q \in (1, \infty)$，它们不一定与 (3.1) 相关。引入

$$\mathcal{L}_0 u(t,x) = \partial_t u + a^{ij}(t,x) D_{ij} u(t,x).$$

这是 [3] 的定理 6.3 的一个推论。

定理 4.1。存在 $\theta = \theta_0(d, \delta, p, q) > 0$，使得对于假设 3.1 中的 θ，存在常数

$$(\lambda_0, N_0) = (\lambda_0, N_0)(d, \delta, p, q, \rho_a), \quad \lambda_0 > 0,$$

使得对任意 $\lambda \geq \lambda_0$ 和任意 $f \in L_{p,\ q}$，存在唯一的 $u \in W^{1,\ 2}_{p\ q}$，使得 $\mathcal{L}_0 u - \lambda u = f$。此外，

$$\|\lambda u, \sqrt{\lambda} Du, D^2 u\|_{L_{p,q}} \leq N_0 \|f\|_{L_{p,q}}. \tag{4.1}$$

如 [11] 中的注 3.3 所述，我们注意到，定理 4.1 在 [3] 中仅被证明为关于由（1.4）中的范数生成的空间的先验估计，但通过连续性方法，通常可以由此得到可解性；此外，我们可以用（1.5）替换（1.4）（这一点已在 [3] 中提及）。

若 $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 通过 $\partial' Q$ 表示点集$(t,x) \in \partial Q$，其中每个点都存在 $\tau > 0$ 和一条连续曲线(s, x_s) $s \in [t-\tau, t]$，使得$x_t = x$ 且$(s, x_s) \in Q$, $s \in [t-\tau, t)$。

推论4.2。假设 a 光滑。取 $R \leq 1$，光滑的 f，并令 u 为经典解

$$\mathcal{L}_0 u + f = 0$$

在 C_R 中，满足在 $\partial' C_R$上的零边界条件。然后

$$\eth u\|_{L_{p,q}(C_R)} \leq NR^2 \eth f\|_{L_{p,q}(C_R)},$$

其中 N仅依赖于 d、δ、p、q、ρ_a。

事实上，一般情形 $R \leq 1$ 可通过抛物型伸缩化归为 $R = 1$。若 $R = 1$，则最大值原理使我们只需考虑 $f \geq 0$，并且还表明 $u(t,x)e^{\lambda_0 t}$ 在 C_1 中小于方程 v 的解

$$\mathcal{L}v - \lambda_0 v + I_{C_1} f e^{\lambda_0 t} = 0$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$中。于是由 (4.1) 可得我们的断言。

推论 4.3. 存在 N，它仅依赖于 d、δ、p、q、ρ_a，使得对于任意 $u \in W^1_{p,q}$，都有

$$\|D^2 u, Du, u\|_{L_{p,q}} \leq N\|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}} + N\|u\|_{L_{p,q}}. \tag{4.2}$$

采用一种标准方法对这类估计进行局部化，例如 [7]，的引理 2.4.4 的证明中所述的方法，可得如下结论。

引理 4.4. 假设对于定理 4.1 中的 $\theta_0(d,\delta,p,q)$，假设 3.1 得到满足。那么存在 N，其仅取决于 d,δ,p,q,ρ_a，使得对于任意 $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$和 $u \in W^1_{p,q,\mathrm{loc}}(C_{\rho_2}) \cap C(\bar{C}_{\rho_2})$，我们有

$$\|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_1})} \leq N\|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N(\rho_2 - \rho_1)^{-2}\|u - l\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})}, \tag{4.3}$$

$$\|Du\|_{L_{p,q}(C_{\rho_1})} \leq N\|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N[\rho_1^{-1} + (\rho_2 - \rho_1)^{-2}]\|u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})}, \tag{4.4}$$

其中，l 是 x的任意仿射函数。

这里出现 l 的原因在于，如果用 $u - l$ 代替 u，$D^2 u$ 和 $\mathcal{L}_0 u$ 都不会发生变化，而 (4.4) 由 (4.3) 和插值不等式推出。

在 [3] 中可以找到关于初边值问题的讨论，进而得到以下结果。

引理 4.5。令 $f \in L_{p,q}(C_1)$。存在 $\theta_1 = \theta_1(d,\delta,p,q) > 0\,(\theta_1 \leq \theta_0)$，使得在假设 3.1 下，对于 $\theta = \theta_1(d,\delta,p,q)$，存在唯一的 $u \in W^{1,2}_{p,q}(C_1)$ 在 $\partial' C_1$ 上为零，使得 $\mathcal{L}_0 u = f$ 属于 C_1。此外，

$$\|u\|_{W^{1,2}_{p,q}(C_1)} \leq N_1\|f\|_{L_{p,q}(C_1)},$$

其中 $N_1 = N_1(d,\delta,p,q,\rho_a)$。

从这一点开始，我们假设假设 3.4 得到满足，因此对 θ 的限制最终确定。

推论 4.6。令 $v \in W^1_{p,q}(C_\rho)$，对任意 $\rho < 1$、$\mathcal{L}_0 v = 0$ 属于 C_1。那么，对任意 $\rho < 1$，有 $v \in W^1_{r,r}(C_\rho)$ 以及

$$\|v\|_{W^{1,2}_{r,r}(C_\rho)} \leq N\|v\|_{L_{p,q}(C_1)}, \tag{4.5}$$

$$\sup_{C_\rho} |v| \leq N\|v\|_{L_{p,q}(C_1)}, \tag{4.6}$$

其中常数 N仅依赖于 α、ρ、d、δ、ρ_a、p、q。

事实上，估计式 (4.6) 可由嵌入定理 ($r > d+2$)从(4.5) 得出。为证明 (4.5)，我们采用一个相当标准的论证（例如参见 [7]中定理4.3.12 的证明）。取一个 $\rho' < 1$ 和一个 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$，其在$C_{(1+\rho')/2} \setminus C_{\rho'}$ 中消失，并在 $C_{\rho'}$ 上等于一。于是 $\mathcal{L}_0(\zeta v)$ 只包含 v 和 Dv，它们通过嵌入定理属于 $L_{p',q'}(C_{(1+\rho')/2})$（参见 [1] 中的定理 10.2），前提是

$$\frac{2}{q}+\frac{d}{p} \le 1+\frac{2}{q'}+\frac{d}{p'}.$$

我们可以取 $p \le p' \le r, q \le q' \le r$，然后由引理 4.5 得到$v \in W^{1,\ p'}_{\ q'}(C_{\rho'})$。由于 ρ' 的任意性，可知 $v \in W^{1,\ p'}_{\ q'}(C_\rho)$ 对任意$\rho < 1$均成立。接着我们可以反复进行这一过程，经过有限步后便可得出结论：对任意 $\rho < 1$，均有 $v \in W^{1,\ r}_{\ r}(C_\rho)$。结合这些步骤中的相应估计，我们得到

$$\|v\|_{W^{1,2}_{r,r}(C_\rho)} \le N\|v\|_{W^{1,2}_{p,q}(C_{(1+\rho)/2})},$$

只需再利用引理 4.4 和插值不等式即可得到 (4.5)。

推论 4.7. 设 $\rho \le 1, v \in W^{1,\ r}_{\ r}(C_\rho)$，且 $\mathcal{L}_0 v = 0$ 属于 C_ρ。那么对任意 $\rho < 1$，有

$$\fint |D^2 v\|_{L_{r,r}(C_{\rho/2})} \le N\rho^{-2} \fint |v-l\|_{L_{p,q}(C_\rho)} \tag{4.7}$$

其中，N仅依赖于 $d, \delta, \rho_a, p, q, \alpha$ （与 ρ无关），且 l是任意仿射函数。

事实上，抛物缩放将整个情形化归为$\rho = 1$的情形，然后由 (4.5) 即可得出结论。

引理 4.8. 设 $p, q \in (1,\infty)$。那么存在 N, N_1, N_2，它们仅依赖于d, δ, p, q, α，并且满足如下性质：若 $0 < 4\rho_1 \le \rho_2 \le 1$，且 $u \in W^{1,\ p}_{\ q}(C_{\rho_2})$，则

$$\fint |D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_1})} \le N_1(\rho_2/\rho_1)^\gamma \fint |\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N(\rho_2/\rho_1)^\alpha \rho_2^{-2} \fint |u-l\|_{L_{p\ q}(C_{\rho_2})}, \tag{4.8}$$

$$\fint |D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_1})} \le N_1(\rho_2/\rho_1)^\gamma \fint |\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N_2(\rho_2/\rho_1)^\alpha \fint |D^2 u\|_{L_{p\ q}(C_{\rho_2})}, \tag{4.9}$$

其中，l 是 x 和 $\gamma = 2 + d/p + 2/q$的任意仿射函数。

证明。考虑到显然的逼近，我们可以假设 u和 a 在 C_{ρ_2}中无限次可微。于是，根据经典结果，方程 $\mathcal{L}_0 v = 0$ 在 C_{ρ_2} 中存在光滑解 v，其在 $\partial' C_{\rho_2}$ 上的边界数据为 $v = u$。对于任意 $r \ge 1$，该解都属于 $\mathbb{W}^{1,\ r}_{\ r}(C_{\rho_2})$。我们取自假设 3.4 的 r。于是，由推论 4.7 可得。

$$\fint |D^2 v\|_{L_{r,r}(C_{\rho_2/2})} \le N\rho_2^{-2} \fint |v-l\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})}$$

$$\le N\rho_2^{-2} \fint |u-l\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N\rho_2^{-2} \fint |w\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})},$$

其中 l 是任意仿射函数，而 $w = u - v$。由于 $w = 0$ 在 $\partial' C_{\rho_2}$ 和 $\mathcal{L}_0 w = \mathcal{L}_0 u$ 上，根据推论 4.2，我们有 $\dashint \|w\|_{L_{p,\,q}(C_{\rho_2})} \le N\rho_2^2 \dashint \|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,\,q}(C_{\rho_2})}$。由 H¨older 不等式可得，

$$\begin{aligned} \|D^2 v\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})} &\le \|D^2 v\|_{L_{r,r}(C_{2\rho_1})} \le N(\rho_2/\rho_1)^{(d+2)/r} \|D^2 v\|_{L_{r,r}(C_{\rho_2/2})} \\ &\le N(\rho_2/\rho_1)^{\alpha} \big[\rho_2^{-2} \|u - l\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + \|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})}\big], \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中最后一个不等式由 $(d+2)/r \le \alpha$得出。

于是根据（4.3），有

$$\|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_1})} \le N \|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})} + N\rho_1^{-2} \|u - l'\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})}, \tag{4.11}$$

其中 l' 是任意仿射函数。这里 $u - l' = w + (v - l')$，而（4.11）中的最后一项可由以下量控制：

$$N(\rho_2/\rho_1)^{2+d/p+2/q} \|\mathcal{L}_0 u\|_{L_{p,q}(C_{\rho_2})} + N\rho_1^{-2} \|v - l'\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})},$$

其中，适当选取 l' 后，第二个范数可估计为某个常数乘以

$$\|D^2 v\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})} + \|\partial_t v\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})} \le N \|D^2 v\|_{L_{p,q}(C_{2\rho_1})}$$

由于庞加莱不等式。之后，为了得到（4.8），只需参考（4.10）。（4.9）的估计由（4.8）利用庞加莱不等式得到。引理得证。□

引理 4.9. 令 $p, q \in (1, \infty)$，$\beta > \alpha$，$\rho \le 1$，$u \in W^{1,2}_{p,q}(C_\rho)$，并设$f := \mathcal{L}_0 u$。那么存在 $\nu = \nu(\alpha, \beta, d, \delta, p, q, \rho_a) > 1$，使得对任意$r \le \rho/\nu$，均有

$$r^\beta \|\partial_t u, D^2 u\|_{L_{p,q}(C_r)} \le N \sup_{r \le s \le \rho} s^\beta \|f\|_{L_{p,q}(C_s)} + N\rho^{\beta-2} \|u - l\|_{L_{p,q}(C_\rho)}, \tag{4.12}$$

其中，l 是任意仿射函数，常数 N 仅取决于 α、β、ρ_a、d、δ、p、q。

证明。由于 $\partial_t u = f - a^{ij} D_{ij} u$，只需集中讨论 $D^2 u$。取满足 $N_2 \nu^{\alpha-\beta} \le 1/2$ 的最小 $\nu \ge 4$（N_2 来自 (4.9)）。于是，对于 $r \le \rho/\nu$，定义 $r_n = \nu^n r$, $m = \max\{n \ge 0 : r_{n+1} \le \rho\}$,

$$A_n = r_n^\beta \|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{r_n})}, \quad B = \sup_{r \le s \le \rho} s^\beta \|f\|_{L_{p,q}(C_s)}.$$

对于 $0 \le n \le m$, $\rho_1 = r_n$, $\rho_2 = r_{n+1}$，估计式 (4.9) 给出

$$A_n \le N_1 \nu^{\gamma-\beta} B + N_2 \nu^{\alpha-\beta} A_{n+1} \le N_3 B + (1/2) A_{n+1}.$$

通过迭代，我们得到 $A_0 \le 2N_3 B + 2^{-m} A_m$ 并到达

$$r^\beta \|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_r)} \le N \sup_{r \le s \le \rho} s^\beta \|f\|_{L_{p,q}(C_s)} + 2^{-m} r_m^\beta \|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{r_m})}. \tag{4.13}$$

这里由(4.8)

$$r_m^\beta \|D^2 u\|_{L_{p,q}(C_{r_m})} \le N r_{m+1}^\beta \|f\|_{L_{p,q}(C_{r_{m+1}})} + N r_{m+1}^{\beta-2} \|u - l\|_{L_{p,q}(C_{r_{m+1}})}$$

$$\leq N \sup_{r\leq s\leq\rho} s^{\beta} \fint \|f\|_{L_{p,q}(C_s)} + N\rho^{\beta-2} \fint \|u-l\|_{L_{p,q}(C_\rho)},$$

其中，最后一个不等式是因为 $r \leq r_{m+1} \leq \rho, r_{m+1}/\rho \geq \nu^{-1}$。这就证明了该引理。□

引理 4.9（含 $\rho = 1$）和注 2.2 立即得出以下结论（回顾一下，假设 3.4 应当成立）。

推论 4.10。设 $p, q \in (1, \infty)$ 且 $\beta > \alpha$。设 $u \in W^{1,2}_{p,q,\mathrm{loc}}$。则

$$\|\partial_t u, D^2 u\|_{E_{p,q,\beta}} \leq N\|\mathcal{L}_0 u\|_{E_{p,q,\beta}} + N \sup_{C\in\mathbb{C}_1} \|u\|_{L_{p,q}(C)}, \tag{4.14}$$

其中常数 N 仅取决于 α、β、ρ_a、d、δ、p、q。

下一步是在 (4.14)中替换 $\mathcal{L}_0 u$ 并去掉最后一项。为此，我们需要以下内容，其中用 $d+1$ 代替 d 将发挥作用。

引理 4.11。设 $d/p + 2/q \geq \beta > \alpha$。那么存在

$$(\tilde{\lambda}_0, \tilde{N}_0) = (\tilde{\lambda}_0, \tilde{N}_0)(\alpha, \beta, d, \delta, p, q, \rho_a), \quad \tilde{\lambda}_0 > 0,$$

使得对于任意 $\lambda \geq \tilde{\lambda}_0$ 和任意 $u \in W^{1,2}_{p,q,\mathrm{loc}}$，均有

$$\sup_{C\in\mathbb{C}_1} \|u\|_{L_{p,q}(C)} < \infty, \tag{4.15}$$

我们有

$$\|\lambda u, \sqrt{\lambda} Du, D^2 u\|_{E_{p,q,\beta}} \leq \tilde{N}_0 \|\mathcal{L}_0 u - \lambda u\|_{E_{p,q,\beta}}. \tag{4.16}$$

证明。我们采用与 [7] 中引理 6.3.8 的证明相同的 Agmon 方法。考虑空间

$$\mathbb{R}^{d+2} = \{(t, z) = (t, x, y) : t, y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}$$

以及函数

$$\tilde{u}(t, z) = u(t, x)\cos(\mu y),$$

其中 $\mu = \sqrt{\lambda}$，$\lambda \geq 0$。此外，引入算子

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 v(t, z) = \mathcal{L}_0(t, x)v(t, z) + D_{yy} v(t, z).$$

显然，上述理论适用于 $\tilde{u}$ 和 $\mathcal{L}_0$，由（4.14）可得

$$\|D_{yy}\tilde{u}\|_{E_{p,q,\beta}(\mathbb{R}^{d+2})} \leq N\|\tilde{L}_0\tilde{u}\|_{E_{p,q,\beta}(\mathbb{R}^{d+2})} + N \sup_{C\in\mathbb{C}_1} \|u\|_{L_{p,q}(C)}.$$

请注意，对于任意 $\rho < 1$、$C \in \mathbb{C}_\rho$ 和 $y \in \mathbb{R}$

$$\fint \|u\|_{L_{p,q}(C)} \Big(\fint_y^{y+\rho} |\cos(\mu r)|^p \, dr \Big)^{1/p} \geq \gamma \fint \|u\|_{L_{p,q}(C)},$$

其中，$\gamma > 0$ 是一个绝对常数。由此可得

$$\lambda\|u\|_{E_{p,q,\beta}} \leq N\|\tilde{L}_0\tilde{u}\|_{E_{p,q,\beta}(\mathbb{R}^{d+2})} + N \sup_{C\in\mathbb{C}_1} \|u\|_{L_{p,q}(C)}.$$

˜由于 $\mathcal{L}_0\tilde{u} = \cos(\mu y)[\mathcal{L}_0 u - \lambda u]$，我们有

$$\|\tilde{L_0}\tilde{u}\|_{E_{p,q,\beta}(\mathbb{R}^{d+2})} \leq N\|\mathcal{L}_0 u - \lambda u\|_{E_{p,q,\beta}},$$

以便

$$\lambda\|u\|_{E_{p,q,\beta}} \leq N\|\mathcal{L}_0 u - \lambda u\|_{E_{p,q,\beta}} + N_1 \sup_{C\in\mathbb{C}_1}\|u\|_{L_{p,q}(C)}. \tag{4.17}$$

对于 $\lambda \geq 2N_1$，我们可以将（4.17）中的最后一项（该项有限）吸收到左端，从而得到所要求的 λu 估计。此外，由此（4.14）可推出

$$\|D^2 u\|_{L_{p,q,\beta}} \leq N\|\mathcal{L}_0 u - \lambda u\|_{E_{p,q,\beta}} + N\lambda\|u\|_{E_{p,q,\beta}} + N \sup_{C\in\mathbb{C}_1}\|u\|_{L_{p,q}(C)},$$

由此得到 $D^2 u$ 的估计。此后只需使用引理 2.4。引理得证。□

在下面的存在性定理之前，值得注意的是，函数 u in $E^1_{p,q,\beta}$ 也属于 $W^1_{p,q,\beta,\mathrm{loc}}$，并且它们满足 (4.15)。

˜定理 4.12。设 $d/p + 2/q \geq \beta > \alpha$, $\lambda \geq \lambda_0$。则对于任意 $f \in E_{p,q,\beta}$, 存在唯一的 $u \in E^1_{p,q,\beta}$，使得 $\mathcal{L}_0 u - \lambda u = f$。

证明。为证明唯一性，假设 $u \in E^1_{p,q}$ 和 $\mathcal{L}_0 u - \lambda u = 0$。于是取 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$，使得 $0 \leq \zeta \leq \zeta(0) = 1$，并令 $\zeta_n(x) = \zeta(x/n), u_n = u\zeta_n$。我们有 $u_n \in W^1_{p,q}$ 和

$$|\mathcal{L}_0 u_n - \lambda u_n| \leq N(n^{-1}|Du| + n^{-2}|u|),$$

其中 N 与 n 无关。由引理 4.11，我们有 $\|u_n\|_{L_{p,q,\beta}} \leq N(n^{-1}+n^{-2})$，令 $n \to \infty$ 即可证明 $E^1_{p,q}$ 解的唯一性。

为证明存在性部分，取 $f \in E_{p,q,\beta}$ 并令 $f_n = f\zeta_n$。于是由定理 4.1，对每个 n，存在（唯一的）$u_n \in W^1_{p,q}$，使得 $\mathcal{L}_0 u_n - \lambda u_n = f_n$。由引理 4.11，我们有 $u_n \in E^1_{p,q,\beta}$ 和

$$\|\partial_t u_n, D^2 u_n, Du_n, u_n\|_{E_{p,q,\beta}} \leq N\|f\zeta_n\|_{E_{p,q,\beta}} \leq N\|f\|_{E_{p,q,\beta}}, \tag{4.18}$$

这意味着存在一个子序列 $n' \to \infty$，使得对于任意 $C \in \mathbb{C}$，在 $L_{p,q}(C)$ 中弱收敛

$$(\partial_t u_{n'}, D^2 u_{n'}, Du_{n'}, u_{n'}) \to (\partial_t u, D^2 u, Du, u), \tag{4.19}$$

其中 $u \in W^1_{p,q,\mathrm{loc}}$。于是，(4.18) 也意味着 $u \in E^1_{p,q,\beta}$，结合 (4.19) 以及 $f_n \to f$ 在任意 $L_{p,q}(C)$ 中对任意 $C \in \mathbb{C}$ 成立这一事实，可得 $\mathcal{L}_0 u - \lambda u = f$。定理得证。□

5. Proof of Theorem 3.5

现在我们回到 (3.1) 中的设定以及第 3 节引入的假设。回顾一下，$\rho_{b,c}=1$。为处理完整算子 $\mathcal{L}$，我们需要以下结果；其中，我们首次需要区分 $\beta_0>1$ 和 $\beta_0<1$这两种情形。本文讨论的是这些方程，并且请回忆 $\beta_0\le d/p+2/q$。

引理5.1. 对任意 $u\in E^1_{p,q,\beta_0}$，对于 $\beta_0>1$，我们有

$$\|b|Du|\,\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le N\mathfrak{b}_1\|\partial_t u,D^2u\|_{E_{p,q,\beta_0}}+N\mathfrak{b}_1\|u\|_{E_{p,q,\beta_0}},\tag{5.1}$$

其中 $N=N(d,p,q,\beta_0)$，且对于 $\beta_0<1$ 和任意 $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|b|Du|\,\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le\varepsilon^{1-\beta}\|\partial_t u,D^2u\|_{E_{p,q,\beta_0}}+N\varepsilon^{-1}\mathfrak{b}^{1+\beta/(1-\beta)}\|u\|_{E_{p,q,\beta_0}},\tag{5.2}$$

其中 $N=N(d,p,q,\beta_0)$。

证明。为证明第一个断言，令 $\zeta=I_{C_1}$ 和 $\xi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ 满足 $\xi=1$ 于 C_1 上。容易看出，对于任意 $\rho>0$ 和 $C\in\mathbb{C}_\rho$（这里我们利用了当 $\rho\ge1$ 时 $\beta_0\le d/p+2/q$）

$$\|\zeta b\|_{L_{p\beta_0,q\beta_0}(C)}\le N(d)\mathfrak{b}_1\rho^{-1}.\tag{5.3}$$

因此，由 [8], 的注 5.8，因 $1<\beta_0\le d/p+2/q$,

$$\|\zeta b|D(\xi u)|\,\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le N\mathfrak{b}_1\sup_{\rho>0}\sup_{C\in\mathbb{C}_\rho}\rho^{\beta_0}\,\|(\partial_t+\Delta)(\xi u)\|_{L_{p,q}(C)}.\tag{5.4}$$

与 (5.3) 类似，右端的上确界由以下量控制：

$$N\|(\partial_t+\Delta)(\xi u)\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le N\|(\partial_t+\Delta)u\|_{E_{p,q,\beta_0}}+N\|u\|_{E_{p,q,\beta_0}}+N\|Du\|_{E_{p,q,\beta_0}}.$$

将其与（2.4）结合，对于 $\varepsilon=1$，我们得到（5.1），其中左端替换为（5.4）的左端。因此得到不等式；显然，若对 ζ、ξ 取任意平移，该不等式仍然成立。之后只需注意，（5.4）左端对平移后的 ζ、ξ 取上确界，必然大于（5.1）的左端。

第二个断言直接由引理2.5（B）得出。引理得证。□

引理5.2. 对任意 $u\in E^1_{,p,q,,,\beta_0}$ 我们有，对于 $\beta_0>2$，

$$\|cu\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le N(d,p,q,\beta_0)\mathfrak{c}_1\|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\eta_0}},$$

并且对于 $\beta_0<2$ 对于任意 $\varepsilon\in(0,1]$

$$\|cu\|_{E_{p,q,\beta_0}}\le\varepsilon\|\partial_t u,D^2u\|_{E_{p,q,\beta}}+N\nu\|u\|_{E_{p,q,\beta}}\tag{5.5}$$

其中 $N=N(d,p,q,\beta_0)$，$\nu=\nu(\mathfrak{c},\varepsilon,\beta_0)=\mathfrak{c}^{2/(2-\beta_0)}\varepsilon^{-\beta_0/(2-\beta_0)}$.

证明。首先假设 $\beta_0>2$。令 $(r,s)=\beta_0(\beta_0-2)^{-1}(p,q)$。于是由 Hölder 不等式

$$\rho^{\beta_0}\,\|cu\|_{L_{p,q}(C_\rho)}\le\rho^2\,\|c\|_{L_{p\beta_0,q\beta_0}(C_\rho)}\cdot\rho^{\beta_0-2}\,\|u\|_{L_{r,s}(C_\rho)},$$

从而

$$\|cu\|_{E_{p,q,\beta_0}} \leq \mathfrak{c}\|u\|_{E_{r,s,\beta_0-2}},$$

因此，只需应用引理2.7。

在 $\beta_0 < 2$ 的情况下，我们的断言可直接由引理2.5 (A) 得出。引理得证。□

定理 3.5 的证明。根据定理 4.12 和连续性方法，只需将 (3.7) 证明为一个先验估计。我们仅展示 $\beta_0 > 2$ 时的证明。在其他情形： $1 < \beta_0 < 2$ 和 $\beta_0 < 1$，证明过程类似。

˜利用引理 4.11、5.1 和 5.2，我们可知，对于 $\lambda \geq \lambda_0$ 和 $\varepsilon \in (0,1]$

$$\|\partial_t u, D^2 u, \sqrt{\lambda} Du, \lambda u\|_{E_{p,q,\beta_0}} \leq \tilde{N}_0 \|\mathcal{L}u - \lambda u\|_{E_{p,q,\beta_0}} + \tilde{N}_0 \|b^i D_i u\|_{E_{p,q,\beta_0}}$$

$$+\tilde{N}_0 \|cu\|_{E_{p,\ q,\ \beta_0}} \leq \tilde{N}_0 \|f\|_{E_{p,\ q,\ \beta_0}} + \tilde{N}_0 N_1 (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1)\big(\|\partial_t u,\ \ D^2 u\|_{E_{p,\ q.\beta_0}} + \|u\|_{E_{p,\ q.\beta_0}}\big)$$

其中 $N_1 = N_1(d, p, q, \beta_0)$。由此可知，若 $\tilde{N}_0 N_1 (\check{b} + \check{c}) \leq 1/2$，则对于 $\mathfrak{b}_1 \leq \check{b}$、$\mathfrak{c}_1 \leq \check{c}$ 和 $\lambda \geq 1$，可得 (3.7)。定理得证。□

6. Proof of Lemmas 2.5 and 2.8

对于 s、$r > 0$、$\alpha > 0$以及 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的适当的 $f(t,x)$，定义

$$p_\alpha(s,r) = \frac{1}{s^{(d+2-\alpha)/2}} e^{-r^2/s} I_{s>0},$$

$$P_\alpha f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} p_\alpha(s,|y|) f(t+s, x+y)\, dyds.$$

引理2.5的证明。情形(A)，(a)。取 $\zeta \in C_0^\infty$使得 $\zeta = 1$属于 $C_{1/2}$，$\zeta(t,x) = 0$ 属于 $\{t \geq 0\} \cap C_1^c$，且 ζ 仅依赖于 t 和 $|x|$。对于 $\varepsilon \in (0,1]$，定义 $\zeta_\varepsilon(t,x) = \zeta(t/\varepsilon^2, x/\varepsilon)$。引入 $f = -\partial_t u - (1/4)\Delta u$。于是 $u(0) = u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$，其中常数为 $\gamma = \gamma(d)$，且 $\mathbb{R}^{d+1}_+ = (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$

$$\gamma^{-1} u_1^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^{d+1}_+} \zeta_\varepsilon(t,x) t^{-d/2} e^{-|x|^2/t} f(t,x)\, dxdt,$$

$$\gamma^{-1} u_2^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^{d+1}_+} (1 - \zeta_\varepsilon(t,x)) t^{-d/2} e^{-|x|^2/t} f(t,x)\, dyds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d+1}_+} u(t,x)\big(\partial_t - (1/4)\Delta\big)\big[(1-\zeta_\varepsilon(t,x)) t^{-d/2} e^{-|x|^2/t}\big]\, dxdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d+1}_+} u(t,x) \eta_\varepsilon(t,x) t^{-d/2} e^{-|x|^2/t}\, dxdt, \tag{6.1}$$

其中

$$\eta_\varepsilon(t,x) = -(\partial_t - (1/4)\Delta)\zeta_\varepsilon(t,x)) - x^i D_i \zeta_\varepsilon(t,x) t^{-1}.$$

注意，$\eta_\varepsilon = 0$ 位于 $\mathbb{R}^{d+1}_+$中 C_ε 的那部分之外，$D\zeta(t,0) = 0$，且

$$|x^i D_i \zeta_\varepsilon(t,x)| t^{-1} \leq N\varepsilon^{-2}|x|^2/t, \quad e^{-|x|^2/t}|x|^2/t \leq N e^{-|x|^2/(2t)}.$$

因此，通过考察 [8] 中处理$P_\alpha(fI_{C_\rho})$且当 $\alpha=2$、 $\rho=\varepsilon$时的引理2.2的证明，很容易看出

$$\gamma^{-1}|u(0)|\le P_2(|f\zeta_\varepsilon|I_{C_\varepsilon})+NP_2(|u\eta_\varepsilon|I_{C_\varepsilon})\le N\varepsilon^2\fint_{C_\varepsilon}|f|\,dxdt$$

$$+N\int_0^\varepsilon r\fint_{C_r}|f|\,dxdt\,dr+N\fint_{C_\varepsilon}|u|\,dxdt+N\varepsilon^{-2}\int_0^\varepsilon r\fint_{C_r}|u|\,dxdt\,dr$$

$$\le N\|f\|_{E_{p,q,\beta}}\big(\varepsilon^{2-\beta}+\int_0^\varepsilon r^{1-\beta}\,dr\big)+N\varepsilon^{-\beta}\|u\|_{E_{p,q,\beta}}.$$

这便在原点处得到 (2.5)，当然也证明了它处处成立。要证明 u 的连续性，只需注意到，根据 (2.4) 和引理 2.3， $u^{(\varepsilon)}\to u$ 一致成立，其中我们可以取任意的 $\beta'>\beta$、 $\beta'<2$。这就证明了情形 (A)、(a) 下的引理。

在情形 (A)、(b) 中，我们有 $u\in W^{1,p}{}_q^2,(C_1)$，并且根据众所周知的嵌入定理，我们有 (2.5)，其中以$L_{p,q}$ 代替 $E_{p,q,\beta}$，这给出了原样的 (2.5)，因为

$$\|u\|_{L_{p,q}(C_1)}\le N(d)\|u\|_{Ep,q,\beta}.$$

情形 (B)，(a)。这里我们重复证明的第一部分，用 $De^{-|x|^2/t}=-(2x/t)$ $e^{-|x|^2/t}$ 替换 $e^{-|x|^2/t}$。这将导出 (6.1) 的一个类似结果，其中我们必须将 η_ε 替换为

$$\bar\eta_\varepsilon(t,x)=-(2x/t)\eta_\varepsilon-2(1-\zeta_\varepsilon)x/t^2-4D_i\zeta_\varepsilon D_ix/t.$$

再次 $\xi_\varepsilon=0$ 位于 C_ε 中的、落在 $\mathbb{R}_+^{d+1}$内的部分之外，并

$$|\xi_\varepsilon|\le N\varepsilon^{-2}(|x|/t^{1/2}+|x|^3/t^{-3/2})t^{-1/2},$$

$$(|x|/t^{1/2}+|x|^3/t^{-3/2})t^{-1/2}t^{-d/2}e^{-|x|^2/t}\le Nt^{-(d+1)/2}e^{-|x|^2/(2t)}.$$

这次利用 [8] 的引理2.2的证明，取 $\alpha=1$ 并记$\bar\zeta_\varepsilon(t,x)=-2\zeta_\varepsilon(t,x)x/t^{1/2}$，我们得到

$$\gamma^{-1}|Du(0)|\le P_1(|f\bar\zeta_\varepsilon|I_{C_\varepsilon})+N\varepsilon^{-2}P_1(|u\bar\eta_\varepsilon|I_{C_\varepsilon})\le N\varepsilon\fint_{C_\varepsilon}|f|\,dxdt$$

$$+N\int_0^\varepsilon\fint_{C_r}|f|\,dxdt\,dr+N\varepsilon^{-1}\fint_{C_\varepsilon}|u|\,dxdt+N\varepsilon^{-2}\int_0^\varepsilon\fint_{C_r}|u|\,dxdt\,dr$$

$$\le N\|f\|_{E_{p,q,\beta}}\big(\varepsilon^{1-\beta}+\int_0^\varepsilon r^{-\beta}\,dr\big)+N\varepsilon^{-\beta-1}\|u\|_{E_{p,q,\beta}}.$$

这在情形（B）、（a）中得到（2.6）。 Du 的连续性可按照情形（A）、（a）中的方法得到。

在情形 (B)(b) 中，我们的断言再次由嵌入定理for$_{W^{1,p}{}_q^2,}$得出。引理得证。 □

引理 2.8 的证明。用 $(f)_r$ 表示 f 在C_r 上的平均值，并注意到根据庞加莱不等式

$$\fint_{C_r}|u-(u)_r-x^i(D_iu)_r|\,dxdt\le Nr^2\fint_{C_r}|\partial_tu|\,dxdt+Nr\fint_{C_r}|Du-(Du)_r|\,dxdt,$$

$$\fint_{C_r} |Du-(Du)_r|\,dxdt \le Nr \fint_{C_r} (|\partial_t u| + |D^2 u|)\,dxdt. \tag{6.2}$$

此外，根据引理 2.6 和 $r \le 1$的霍尔德不等式

$$\fint_{C_r} |x^i (D_i u)_r|\,dxdt \le Nr \fint_{C_r} |Du|\,dxdt \le Nr^{2-\beta} \|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}.$$

结合这些估计可知，对于 $r \le 1$

$$\fint_{C_r} |u-(u)_r|\,dxdt \le Nr^{2-\beta} \|u\|_{E^{1,2}_{p,q,\beta}}.$$

该估计对于 C_r 的平移也成立。此后，为了证明 (2.9)，只需引用 Campanato 的结果。根据 (6.2)，他的结果也证明了 (2.10)。引理得证。□

致谢。作者谨向董宏杰表示诚挚的感谢，他指出在漂移项可积性较差时可以使用 Morrey 空间。

本文没有数据，也不存在利益冲突。

References

[1] O.V. Besov、V.P. Il'in 和 S.M. Nikol'skii, 《函数的积分表示与嵌入定理》，第 I 卷，俄文译本。Mathematics 文集。Mitchell H. Taibleson 编。V. H. Winston & Sons，华盛顿特区；Halsted Press [John Wiley & Sons], 纽约—多伦多（安大略省）—伦敦，1978 年。viii+345 页。[2] D. Cavaliere、M. Longobardi 和 A. Vitolo, *Imbedding estimates and elliptic equations with discontinuous coefficients in unbounded domains*, 《Le Matematiche》，第（1996）卷，第 1 期，87–104。[3] 董宏杰和金度允, *On L_p–estimates for elliptic and parabolic equations with A_p weights*, 《美国数学会汇刊》，第（ ）卷，第 – 期。[4] G. Di Fazio、D.I. Hakim 和 Y. Sawano, *Elliptic equations with discontinuous coefficients in generalized Morrey spaces*, 《欧洲数学杂志》，第 卷，（ ）年，–。[5] V. S. Guliyev 和 M. N. Omarova, *Estimates for operators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces and their applications to non-divergence elliptic equations*, 《Positivity》26（2022），第 2 期，论文第 40 号，共 27 页。[6] D. Kinzebulatov, *Parabolic equations and SDEs with time-inhomogeneous Morrey drift*, arXiv: 。v 1

[7] N.V. Krylov, 《Sobolev 空间中的椭圆与抛物型方程讲义》，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008 年。[8] N.V. Krylov, *On parabolic Adams's the Chiarenza-Frasca theorems and some other results related to parabolic Morrey spaces*, , , 《Mathematics in Engineering》，第（ ）卷，第 期 2, 1 20, 2023

[9] *On the heat equation with drift in L_{d+1}* 2110 09555, 10 3934 2023038 – http://arxiv.org/abs/ 。DOI: 。/mine。N.V. Krylov, , 《Methods and Appl. Analysis》，第 29 卷（2022），第 2 期，195–208。[10] N.V. Krylov, *Weak uniqueness for SDEs and parabolic equations with singular coefficients*, arXiv: 。v1[11] N.V. Krylov, *On weak solutions of time inhomogeneous Itô's equations with VMO diffusion and Morrey drift*, http://arxiv.org/abs/ 。 2303 11238

[12] N.V. Krylov, *On strong solutions of time inhomogeneous Itô's equations with Morrey diffusion gradient and drift. A supercritical case.*, http://arxiv.org/abs/ 。 2211 03719

A mostly elementary proof of Morrey space estimates for elliptic [13] G.M. Lieberman, *and parabolic equations with VMO coefficients* 201 2003 ,

《J. Funct. Anal.》，第（ ）卷，第 2 期，457 479–。[14] S. Monsurr`o 和 M. Transirico,

A priori bounds in L^p and $W^{2,\ p}$ for solutions of elliptic equations, 《Abstract and Applied Analysis》，第 2013 卷，文章编号 650870，共 7 页，http://dx.doi.org/ 10 1155 2013 650870 。//

[15]

D.K. Palagachev 和 L.G. Softova,

Generalized Morrey regularity of 2b–parabolic , 《Applied *systems* 112, 2021, 106838

Mathematics Letters》，第 卷，2 月。[16] Nogayama, *Mixed Morrey spaces*, 《Positivity》，第 23 卷（ 2019），961–1000。[17] M. R

SDEs with critical time dependent drifts: weak so- ockner 和 Guohuan *lutions* 10 48550 2012 04161

Zhao, ，https://doi.org/ 。/arXiv。。[18] Y. Sawano、G.

Di Fazio、D.I. Hakim, 《Morrey 空间——积分算子与偏微分方程简介及应用》。第 I 卷。数学专著与研究笔记。CRC Press，美国佛罗里达州博卡拉顿，2020 年，xxi+479 页，第 II 卷，2020 年，xviii+409 页。[19] L.G.

Morrey-type regularity of solutions to parabolic problems with discon- Softova, *tinuous data* 136 3 4 2011 365 82 , 《Manuscr.

Math.》，第 （ ）卷（ ） – [20] Chao Zhang,

Estimates for parabolic equations with measure data in generalized Mor- *rey spaces* 21 2019 5, 1850044, 21 , 《Commun. Conte

mp. Math.》，第（ ）卷，第 期，第 pp.页。[21] Lin Zhang，Yin Sheng Jiang 和 Jiang Zhou,

Parabolic Equations and Coef- *ficients in Generalized Morrey Spaces* , 《Acta Mathematica

Sinica, English Series》，第 26 卷（2010），第 1 期，117–130。*Email address*：nkrylov@umn.edu

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 55455