arXiv:2304.03737v1 [math.RT] 7 Apr 2023

论群 $B_2(2^f)$ 和 $G_2(3^f)$ 的归纳麦凯–纳瓦罗条件

比尔特·约翰松

Abstract. 我们验证了当 f 为奇数时，群 $B_2(2^f)$ 和 $G_2(3^f)$ 对所有素数均满足归纳麦凯–纳瓦罗条件。此外，我们证明，对所有整数 f，归纳条件中的等变性部分均成立。

1. Introduction

麦凯–纳瓦罗猜想是所谓局部-整体猜想之一，这类猜想将有限群的表示论与其某些子群的表示论联系起来。为表述该猜想，我们用 $\mathrm{Irr}_{\ell'}(G)$ 表示有限群 G 中次数不被素数 ℓ整除的不可约特征集合。麦凯猜想断言，$\mathrm{Irr}_{\ell'}(G)$ 与 $\mathrm{Irr}_{\ell'}(N_G(R))$ 之间存在双射，其中 R 是G的一个 Sylow ℓ-子群。Navarro 在 [Nav04] 中对该猜想作了改进，并提出可以选择这样一个双射，使其在某些伽罗瓦自同构对相应特征的作用下保持等变。这就是麦凯–纳瓦罗猜想，也称伽罗瓦–麦凯猜想。

在 [NSV20], Navarro、Sp¨ath 和 Vallejo 证明了 McKay–Navarro 猜想的约化定理，由此得出了一个需要针对所有有限单群验证的归纳条件。迄今为止，已在 [Ruh21] 和 [Joh22b] 中针对其定义特征下的李型群，以及在 [Joh21]中针对 Suzuki 群、李群和所有素数完成了验证。Ruhstorfer 和 Schaeffer Fry 进一步在 [RSF22b] 中证明，该归纳条件对所有有限单群和素数 $\ell = 2$ 均成立，并由此证明猜想本身对 $\ell = 2$ 成立。

归纳条件的部分内容涉及将特征标扩张到自同构群，以及群自同构和伽罗瓦自同构对这些扩张的作用。迄今为止所研究的群的特征标扩张大多在此作用下保持不变，尤其是没有对角自同构的李型群。然而，我们注意到，群 $3.G_2(3)$ 的某些特征标不允许存在对 $\ell = 3$ 不变的此类扩张。其中一个特征标来自 $G_2(3)$ 的例外舒尔乘子，另一个则是一个幺正特征标，它出现在特征为 3 的域上的所有 G_2 型有限单群中。这促使我们研究这些群的归纳麦凯–纳瓦罗条件。我们证明以下定理。

定理 A。对于群 $B_2(2^f)$、$G_2(3^f)$以及任意素数 ℓ，其中 $f \geq 1$，归纳麦凯–纳瓦罗条件的等变性部分成立。如果 f为奇数，则完整的归纳条件成立。

2. Preliminaries

2.1.归纳麦凯–纳瓦罗条件。设 G 为一个有限群，且 ℓ 为整除 $|G|$的素数。群 $\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$通过先计算特征标值，再将伽罗瓦自同构作用于特征标值，从而作用在 G 的普通不可约特征标集合不可约特征(G)上。我们关注子群 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$，它由将每个满足$\mathrm{ord}(\zeta)$与 ℓ 互素的单位根 ζ 映射为某个整数 k对应的 ζ^{ℓ^k} 的那些伽罗瓦自同构组成。

我们用 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 的自同构群，并将 $\mathrm{Aut}(G)_H$ 记作 $\mathrm{Aut}(G)$ 中 $H \leq G$ 的集合稳定子。自同构 a 通过 $\psi^a(x) = \psi(x^{a^{-1}})$ 对 G 的特征标 ψ 作用，其中

FB Mathematik, RPTU Kaiserslautern–Landau.2010 *Mathematics Subject Classification.* 20C15,20C33.
Key words and phrases. 局部-整体猜想、麦凯猜想、麦凯–纳瓦罗猜想、伽罗瓦–麦凯猜想、李型有限群。

$x \in G$。若 a 是内自同构，我们也用群元素本身表示与 $g \in G$ 的共轭作用。我们用 A_ψ 表示 Aut(G) 中稳定 G 的特征标 ψ 的元素。

我们考虑以下简化条件。

条件 n 1. 设 S 为非阿贝尔单群，G 为其万能覆盖群，ℓ 为一个素数，an d $R \in \mathrm{Syl}_\ell(G)$.

(1)（等变性条件）存在一个 Aut(G)$_R$-稳定子群 $N_G(R) \subseteq N \subsetneq G$ 以及一个 Aut(G)$_R \times \mathcal{H}$-等变双射 Ω：不可约特征$_{\ell'}(G) \to$不可约特征$_{\ell'}(N)$，保持中心特征不变。(2)（扩张条件）对于所有 $\psi \in$ 不可约特征$_{\ell'}(G)$，存在 (Aut(G)$_R \times \mathcal{H}$)ψ-不变的扩张，分别将 ψ 和 Ω(ψ) 扩张到 $G \rtimes$(Aut(G)$_R$)ψ 和 $N \rtimes$(Aut(G)$_R$)ψ。

该条件蕴含了 [NSV20，定义 3.5] 中针对具有循环外自同构群的群的归纳麦凯–纳瓦罗条件，因为在这种情况下，我们不必追踪与 $C_{G \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)\psi}(N)$上的扩张相对应的标量，参见 [Joh22a，引理 4.6]。

2.2. $\mathcal{H}$ 对单位根的作用。在开始处理实际条件之前，我们先给出一个简单的数论引理，其中汇集了下面将要用到的一些结论。

引理 2.1. 设 ℓ 为奇素数，f 为正整数。

(a) 如果 $\ell \mid 3^f - 1$ 和 f 为奇数，则 $\ell \equiv 1$，模 12 同余于 11。特别地，$\mathcal{H}$ 则固定 $\sqrt{3}$。

(b) 如果 $\ell \mid 3^f + 1$ 和 f 为奇数，则 $\ell \equiv 1$，模 12 同余于 7。特别地，$\mathcal{H}$ 则固定 $\sqrt{-3}$.

(c) 若 $\ell \mid q^2 \pm q + 1$ 对于 $q := 3^f$，则 $\ell \equiv 1$ 模 3。特别地，$\mathcal{H}$ 于是固定 $\sqrt{-3}$。(d) 若 $\ell \mid 2^f - 1$ 且 f 为奇数，则 $\ell \equiv 1$，7 模 8。特别地，$\mathcal{H}$ 于是固定 $\sqrt{2}$。(e) 若 $\ell \mid 2^{2f} + 1$，则 $\ell \equiv 1$ 模 4。

证明。由费马小定理，我们有 $3^{\ell-1} = 1$ 模 ℓ。此外，由二次互反律可知，若 $\ell = 1$，11 模 12，则 $3^{(\ell-1)/2} \equiv 1$ 模 ℓ；若 $\ell = 5$，7 模 12，则 $3^{(\ell-1)/2} \equiv -1$ 模 ℓ。

在 (a) 中，我们已经知道 3 $^{(\ell-1)/2} = 1$ 模 ℓ，因为 f 为奇数。第二个断言由此可得

$$\sqrt{3} = \zeta_{12} - \zeta_{12}^5 = \zeta_{12}^{11} - \zeta_{12}^7$$

对于一个本原 12 次单位根 ζ_{12}。

在 (b) 中，我们有 $3^f \equiv -1 \bmod \ell$ and $3^{2(f,(\ell-1)/2)} \equiv 1$。设 $\ell \equiv 3 \bmod 4$。则 $(\ell-1)/2$ 为奇数，因此属于上文的第二种情形，由此可得 $\ell = 5, 7 \bmod 12$。若有 $\ell \equiv 1 \bmod 4$，则我们知道 $3^{2(f,(\ell-1)/4)} \equiv 1$，因此属于第一种情形。由此可得 $\ell \equiv 1, 7 \bmod 12$。第二个断言由 $\sqrt{-3} = -\zeta_3 + \zeta_3^2$（其中 ζ_3 为三次单位根）推出。

为证明 (c)，首先假设 $\ell \mid q^2 + q + 1$。由于 $(q^2 + q + 1)(q - 1) = q^3 - 1$，我们有 $3^{(3f,\ell-1)} \equiv 1 \bmod \ell$。若 $\ell \equiv 2 \bmod 3$，则这意味着 $3^{(f,\ell-1)} \equiv 1 \bmod \ell$，进而得到 $\ell \mid q - 1$。这是不可能的，因为这意味着 $\ell \mid (q^2 + q + 1) - (q - 1)^2 = 3q$，从而可得 $\ell \equiv 1 \bmod 3$。

对于 $\ell \mid q^2 - q + 1$，同样有 $3^{(6f,\ell-1)} \equiv 1$ 模 ℓ。若 $\ell \equiv 2$ 模 3，则可推出 $3^{(2f,\ell-1)} \equiv 1$模 ℓ，进而得到 $\ell \mid q+1$或 $\ell \mid q-1$。这是不可能的，因为这意味着 $\ell \mid (q^2 - 1) - (q^2 - q + 1) = q - 2$，而这不可能，因此可得 $\ell \equiv 1$ 模 3。

最后，(d) 可仿照 (a) 证明，而 (e) 则直接由二次互反律的第二补充定理得出。□

2.3. Lusztig 理论中的概念。设 G 是定义在正特征代数闭域上的连通约化群，F a 是 G 的一个 Frobenius 自同态。若 L 是 G 的一个 F-稳定 Levi 子群，我们用 $W_G(L) := N_G(L)/L$ 表示 L 在 G 中的相对魏尔群。设 (G^*, F^*) 与 $(G\ F)$ 对偶，且 $s \in G^{*F^*}$ 半单。我们用 $\mathcal{E}(G^F, T^F, s)$ 表示 Deligne–Lusztig 广义特征 $R_T^G(s)$ 的不可约成分集合，其中 $T \subseteq G^*$ 是一个包含 s 的 F-稳定极大环面。G^F 的不可约特征由配对 (s, ν) 参数化，其中 $s \in G^{*F^*}$ 半单，且 ν 是 $C_{G^{*F^*}}(s)$ 的一个幺正特征标。若 $\chi \in \mathrm{Irr}(G^F)$ 的 Jordan 分解为 (s, ν)，我们也将其记作 $\chi_{s,\nu}^G$。关于这些概念的详细说明，见 [GM20，第 2] 章。

3. G Equivariance condition for type G_2

在本节中，我们验证群 $G_2(3^f)$ 的条件 1 中的等变性部分。

3.1. 设定与 Sylow 扭曲。从现在起，设 G 是定义在特征为 3 的代数闭域上的 G_2 型单代数群。记 G 的标准 Frobenius 映射为 F_3，并设 $F := F_3^f$, $q := 3^f$，其中 $f \geq 2$ 为某个整数。于是，$G := \mathbf{G}^F = G_2(3^f)$ 是一个舒尔乘子平凡的单群。G 的外自同构群为 $D = \langle\gamma\rangle$，其中 γ 是 G 的例外图自同构。因此，我们有 $\gamma^2 = F_3$ 和 $|D| = 2f$。注意，G 的中心平凡，且 $(\mathbf{G}, F)$ 是自对偶的。

我们考虑素数 ℓ 整除时的归纳麦凯–纳瓦罗条件

$$|G| = q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1) = q^6\phi_1^2\phi_2^2\phi_3\phi_6$$

其中，ϕ_d 表示在 q处取值的第 d个分圆多项式。我们假设 $\ell \geq 5$，因为 $\ell = 2$ 和$\ell = 3$ 已在 [Joh21] 以及 [Joh22b]中讨论过。

令 d 为 q 模 ℓ的阶。于是我们有 $\ell \mid \phi_d$。令 $\mathbf{S}_d$ 为 G 的一个 Sylow d-环面，并令 $N := N_G(\mathbf{S}_d)$。注意到 $\mathbf{T}_0 := \mathbf{S}_1$ 是最大分裂的，并且 $\mathbf{S}_d = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}_d)$ 是 G 的一个极大环面，因为如 [Spr74] 中所述，d 是 G 的一个正则数。我们记 $\mathbf{N} := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_0)$，并将相对 Weyl 群记为 $W_d := \mathbf{W}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}_d)$。注意到 $W_1 \cong W_2$ 同构于阶为 12 的二面体群 D_{12}，且 F 在其上平凡作用。此外，我们有 $W_3 \cong W_6 \cong C_6$，见 [Kle88，表 1]。

By [Mal07,定理 5.19]，N 包含一个 Sylow ℓ-子群的正规化子，因此 re 考虑 th e 群 N 作为归纳条件中的局部群。

在下文中，我们研究所谓的 Sylow 扭曲。我们只介绍下文所需的记号和构造，详情请参阅 [Sp¨a09] 。

令 $V := \langle n_\alpha(\pm 1) \mid \alpha \in \Phi\rangle \leq \mathbf{N}$ 为扩展魏尔群，其中 Φ 是 G 关于 $\mathbf{T}_0$ 的根系，而 n_α 如 [GLS98, 定理 1.12.1] 中所述。我们令 $H := V \cap \mathbf{T}_0$。令 $v_d \in V$ 为 $(\mathbf{G}, F)$ 的一个非常好的 Sylow d-扭曲，如 [Sp¨a09, 命题 6 的证明中所选。注意，我们有$v_1 = v_3^3 = 1$ 和 $v_2 = v_6^3 \in Z(W_1)$。我们也常写作 $v = v_d$，并记住 v 取决于d。于是，v诱导出一个同构 $G \cong \mathbf{G}^{vF}$，而 $\mathbf{T}_0$是 $(\mathbf{G}, vF)$ 的一个 Sylo w d-环面。因此，我们可以将 $\mathbf{T}_0^{vF}$与 $\mathbf{S}_d^F$ 等同，并将 $\mathbf{N}^{vF}$ 与 N等同。

3.2. 特征标参数化。如 [Mal07] 和 [CS13 第 4], 节所述，不可约特征$\ell'(\mathbf{G}^{vF})$ 和不可约特征$\ell'(\mathbf{N}^{vF})$ 中的特征标可由集合参数化

$$\mathcal{M} = \{(s,\eta) \mid s \in \mathbf{T}_0^{vF} \text{ semisimple up to } \mathbf{N}^{vF}\text{-conjugacy}, \eta \in \mathrm{Irr}_{\ell'}(\mathbf{W}_{C_{\mathbf{G}}(s)}(\mathbf{T}_0)^{vF})\}$$

并且存在由下式给出的 D-等变双射

$$\psi_{\mathrm{glob}} : \mathcal{M} \to \mathrm{Irr}_{\ell'}(\mathbf{G}^{vF}), \quad (s,\eta) \mapsto \chi^{\mathbf{G}}_{s,\mathcal{I}(\eta)},$$

$$\psi_{\mathrm{loc}} : \mathcal{M} \to \mathrm{Irr}_{\ell'}(\mathbf{N}^{vF}), \quad (s,\eta) \mapsto \mathrm{Ind}_{(\mathbf{N}^{vF})_{\chi^{\mathbf{T}_0}_{s,1}}}^{\mathbf{N}^{vF}}(\Lambda(\chi^{\mathbf{T}_0}_{s,1})\eta).$$

这里，Λ 是 $\mathbf{T}_0^{vF} \trianglelefteq \mathbf{N}^{vF}$的扩张映射，定义见 [CS13 定义 2.9], ，而 $\mathcal{I}$：不可约特征$(\mathbf{W}_{C_{\mathbf{G}}(s)}(\mathbf{T}_0)^{vF}) \to \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}}(s)^{vF}, \mathbf{T}_0^{vF}, 1)$ 是一个 D-等变双射，参见 [CS13 定理 3.4]。

注意 这些参数化不仅适用于 $\mathbf{T}_0$，也适用于 $(\mathbf{G}, vF)$ 的任意 Sylow d-环面). 同样， 可以为 $(\mathbf{G}, F)$ 及其 Sylow 环面构造类似的映射。

正如我们已经从这些双射中看到的，了解 $C_{\mathbf{G}}(s)$ for$s \in \mathbf{T}_0^{vF}$的结构将十分重要。这些对应于半单元素 $s \in \mathbf{S}_d^F$for $(\mathbf{G}, F)$ 的中心化子 $\mathbf{H} := C_{\mathbf{G}}(s)$。关于这些中心化子的信息可以在 [L¨u] and [Eno76] 中找到。由于 $\mathbf{S}_d \subseteq \mathbf{H}$，我们只需考虑满足 ϕ_d notdividing $[\mathbf{G}^F : \mathbf{H}^F]$的半单元素。我们在表3.1 中汇总了一些稍后将使用的数据。相对魏尔群的结构可以从其阶以及 W_d 的子群中读出。

现在我们要证明，可以选取映射 ψ_{loc} 和 ψ_{glob}，使其在 $\mathbf{N}^{vF} D \times \mathcal{H}$ 的作用下等变。

d	共轭类	H 的类型	$\lvert H^F\rvert$	$\lvert s^N\rvert$	$W_H(S_d)^F$
1	$A_1 = 1$	$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	1	D_{12}
	B_1	$A_1(q)\cdot A_1(q)$	$q^2(q^2-1)^2$	3	$C_2\times C_2$
	$C_{11}(i)$	$A_1(q)\cdot T(\phi_1)$	$q(q-1)^2(q+1)$	6	C_2
	$C_{21}(i)$	$A_1(q)\cdot T(\phi_1)$	$q(q-1)^2(q+1)$	6	C_2
	$E_1(i,j)$	$A_0(q)\cdot T(\phi_1^2)$	$(q-1)^2$	12	1
2	$A_1 = 1$	$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	1	D_{12}
	B_1	$A_1(q)\cdot A_1(q)$	$q^2(q^2-1)^2$	3	$C_2\times C_2$
	$D_{11}(i)$	$A_1(q)\cdot T(\phi_2)$	$q(q+1)^2(q-1)$	6	C_2
	$D_{21}(i)$	$A_1(q)\cdot T(\phi_2)$	$q(q+1)^2(q-1)$	6	C_2
	$E_4(i,j)$	$A_0(q)\cdot T(\phi_2^2)$	$(q+1)^2$	12	1
3	$A_1 = 1$	$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	1	C_6
	$E_5(i)$	$A_0(q)\cdot T(\phi_3)$	q^2+q+1	6	1
6	$A_1 = 1$	$G_2(q)$	$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	1	C_6
	$E_6(i)$	$A_0(q)\cdot T(\phi_6)$	q^2-q+1	6	1

TABLE 3.1. 半单元素的共轭类 $s\in S_d^F$ 采用[Eno76，表VII-1]，以及其中心化子 $H = C_{\mathbf{G}}(s)$ 结构的描述，如 [L¨u]中所给出。

引理 3.1. 存在一个 $N^{vF}D\times\mathcal{G}$-等变扩张映射 Λ，用于 $T_0^{vF}\triangleleft N^{vF}$。

证明。如果 $d\in\{1,2\}$，这已在 [SF22，推论 4.4]中得到证明。我们假设 $d\in\{3,6\}$ 并遵循 [SF22，引理 4.1] 的证明。

我们首先要证明存在一个适用于 $H^{vF}\triangleleft V^{vF}$ 的 $H^{vF}D\times\mathcal{G}$-等变扩张映射。回顾一下，我们有 $v_1 = v_3^3 = 1$ 和 $v_2 = v_6^3$，以及 $H = H^{v_2F}$ 和 $V = V^{v_2F}$。我们遵循 [Sp¨a09 中引理 4.6] 证明所采用的构造。如其中所述，对于一个群 H'，我们有 $H = H^{vF}\times H' :=\langle x^{-1}x^v,\ x^{-1}x^{v^2}\mid x\in H\rangle$。

由于这是一个直积，我们可以将每个 $\delta\in$ 不可约特征(H^{vF})平凡地扩张到 $\widetilde{\delta}\in$ 不可约特征(H)，并使其具有 $\widetilde{\delta}|_{H'} = 1$。我们已经知道，存在一个 $HD\times\mathcal{G}$-等变扩张映射，用于 $H\triangleleft V$，见 [SF22，引理4.1] 的证明。令 $\widehat{\delta}\in$ 不可约特征($V_{\widetilde{\delta}}$)为 $\widetilde{\delta}$的此类扩张。由于我们有 $V_{\widetilde{\delta}}\geq V_\delta^{vF}$，因此得到 δ的一个扩张$\widehat{\delta}|_{V_\delta^{vF}}\in$ 不可约特征(V_δ^{vF})。根据构造，所有扩张步骤都是 $HD\times\mathcal{G}$-等变的，因此也是$H^{vF}D\times\mathcal{G}$-等变的。

现在我们可以为$T_0^{vF}\triangleleft N^{vF}$构造一个$N^{vF}D\times\mathcal{G}$-等变扩张映射，如 [Sp¨a09，引理4.2] 以及 [SF22，引理 4.1]的证明中所示。□

我们现在通过在扭曲情形中开展工作来证明条件1的等变性部分。请注意，对于$d = 1$ 这一点已在 [SF22] 中得到证明。

命题 3.2。存在一个 $D\times\mathcal{H}$-等变双射 $\mathrm{Irr}_{\ell'}(G^{vF})\to\mathrm{Irr}_{\ell'}(N^{vF})$】【。

证明。只需证明参数化 ψ_{loc} 和 ψ_{glob} 是 $D\times\mathcal{H}$-等变的。对于整体特征，我们已经知道，(G vF) 的 Jordan 分解由 [SV20] 可知是伽罗瓦等变的。剩下只需证明 $\mathrm{Irr}_{\ell'}(W_{C_{\mathbf{G}}(s)}(T_0)^{vF})$ 与 $\mathcal{E}(G^{vF},T_0^{vF},1)$ 之间的 D-等变双射是 $\mathcal{H}$-等变的。对于 $d = 2$，这是因为出现的相对 Weyl 群只有有理特征，且 A_1 型和 G_2 型群的幺幂 ℓ'- 特征也是有理的。对于 $d\in\{3,6\}$，$W_{\mathbf{G}}(T_0)^{vF}\cong C_6$ 的不可约特征以及 G^F 的幺幂 ℓ'-特征的取值都包含在 $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ 中，其中 ζ_3 是三次单位根。由引理 2.1(c)，这些特征在 $\mathcal{H}$ 下不变，从而得证。

对于局部特征，我们知道，对于半单 $s \in \mathbf{T}_0^{vF}$，所有 $\eta \in \mathrm{Irr}_\ell(\mathrm{W}_{C_{\mathbf{G}}(s)}(\mathbf{T}_0)^{vF})$ 都是 $\mathcal{H}$-不变的。此外，由引理 3.1 可知， Λ 可以选为 $\mathbf{N}^{vF}D \times \mathcal{H}$-等变的。这就证明了所述结论。□

4. Character extensions for type G_2

现在，对于某个 $R \in \mathrm{Syl}_\ell(N)$，我们分别考虑局部和整体特征向 $N \rtimes \mathrm{Aut}(G)_R$ 和 $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)_R$ 的扩张。

如果我们有 $d = 1$，那么可以假设群 N 和 $\mathbf{T}_0^F$ 在 D的作用下保持不变。由于 $\mathbf{T}_0^F$ 是阿贝尔群，这同样适用于其 Sylow ℓ-子群。

注意，G的魏尔群由对应于两个单根$\alpha, \beta \in \Phi$的反射生成，即 $W_1 = \langle s_\alpha, s_\beta \mid (s_\alpha s_\beta)^6 = 1, s_\alpha^2 = s_\beta^2 = 1\rangle$. 我们进一步有 $W_d \cong W_1^{vF}$。

从现在起，我们假设 f 为奇数。我们首先研究局部特征的扩张。

引理 4.1. 假设 $d = 1$。那么，每个 $\psi \in$ 不可约特征$_\ell(N)$ 都有一个对 $(\mathrm{Aut}(G)_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变的扩张，其定义在 $N \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)_\psi$上。

证明。设 F_0 是 D_ψ 的生成元，并设 $\psi = \psi_{\mathrm{loc}}(s, \eta)$ 对应于一对 $(s, \eta) \in \mathcal{M}$。

我们先考虑 $s \neq 1$ 的情形。正如表 3.1 所示， η 是一个线性有理特征。由于$\chi_s^{\mathbf{T}_0}{}_{,\ 1}$ 也是线性的，$\psi_0 := \Lambda(\chi_{s\ 1,}^{\mathbf{T}_0})\eta$ 是一个线性特征。根据克利福德理论，存在一个 $n \in N$ 使得$\psi_0^{F_0 n} = \psi_0$。因此，我们可以将 ψ_0 平凡地扩张为 $N_\psi \rtimes \langle F_0 n\rangle$ 的一个 $(D \times \mathcal{H})_\psi$-不变特征。将其诱导到 $N \rtimes \langle F_0 n\rangle$ ，再对其余内自同构作规范扩张，便得到所述特征。

现在假设 $s = 1$，即对于相应的 $\eta \in$ 不可约特征(W_1)， $\psi = \mathrm{Inf}_{W_1}^N(\eta)$。 $D_{12} \cong W_1$ 的四个不可约特征是线性的，因此对应于线性特征 ψ。这些可以平凡地扩张为 $N \rtimes \langle F_0\rangle$ 的 $(D \times \mathcal{H})$-不变特征。剩下的唯一特征是 η_5、$\eta_6 \in$不可约特征(W_1)，其次数 2，且均为 γ-不变。我们知道， $\gamma^2 = F_3$ 在 W_1上作用平凡。因此， η_5 和 η_6可以平凡地扩张到 $W_1 \rtimes \langle\gamma^2\rangle = W_1 \times \langle\gamma^2\rangle$ ，且该扩张显然是 $(D \times \mathcal{H})_\psi$-不变的。

另一方面，我们知道 γ 以及由此的 γ^f 通过交换反射s_α、 $s_\beta \in W_1$作用于 W_1 。因此，我们可以使用GAP [GAP19] 显式构造由 γ^f诱导的 φ 在 W_1 上的自同构，计算 $W_1 \rtimes \langle\varphi\rangle$的不可约特征，并由此分别确定 η_5和 η_6的扩张，见表4.1。事实证明，这些扩张特征中的一个是有理的，而另一个扩张特征的值包含于 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$中。根据引理 2.1(a)，两个特征扩张都是$\mathcal{H}$-不变的。

我们现在找到一个将 η_5 和 η_6 延拓到 $W_1 \rtimes \langle\gamma\rangle$的 $W_1 \rtimes \langle\gamma^2\rangle$ 和 $W_1 \rtimes \langle\gamma^f\rangle \cong W_1 \rtimes \langle\varphi\rangle$的字符的唯一公共扩张。这个扩张再次在 $\mathcal{H}$ 下保持不变，而膨胀给出了将 ψ 延拓到 $N \rtimes D_\psi$的一个 $\mathcal{H}$-不变扩张。由于 ψ 是有理的，该扩张在 $(D \times \mathcal{H})_\psi = D_\psi \times \mathcal{H}$下也保持不变。将其延拓到$\mathrm{Aut}(G)_R$ 中的内自同构即可得到所述结论。□

经过更多一些工作，我们可以证明对于 d 的其他取值也有类似的结论。

引理4.2。假设 $d = 2$。那么， $\psi \in$ 不可约特征$_\ell(N)$中的每个元素都有一个$(\mathrm{Aut}(G)_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变的扩张，扩张到$N \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)_\psi$。

证明。我们在扭曲情形下进行讨论，并考虑 $\mathbf{N}^{vF} \cong N$。根据 [MS15，第 3.A 节] ，我们知道存在一个稳定 $\mathbf{T}_0$ 的自同构 $\gamma_2 \in$Aut(G)，其在 G 上的作用方式与 γ 相同，使得$\gamma_2^{2f} = vF$。令 ψ为与对$(s, \eta) \in \mathcal{M}$ 相对应的特征标。如果 $s \neq 1$，我们可以像处理$d = 1$那样进行论证。

如果 $s = 1$， $W_1 = W_1^{vF} \cong D_{12}$ 的不可约特征如我们所见是有理的，并且由四个线性特征和两个次数 2 的特征 η_5、 $\eta_6 \in$ 不可约特征(W_1) 组成。和之前一样，我们只需进一步考虑非线性特征标。

为了做到这一点，我们首先必须研究由 $(\gamma_2)^f$ 在 W_1 上诱导的自同构 φ_2 。我们知道， $v = (n_\alpha(-1)n_\beta(-1))^3$ 对应于魏尔群的最长元素。令 $x =$

	W_1 的非线性特征标						扩张至 $W_1 \rtimes \langle\varphi\rangle$			扩张至 $W_1 \rtimes \langle\varphi_2\rangle$		
	$()$	s_α	r	r^2	s_β	r^3	$(s_\alpha r, \varphi)$	(s_α, φ)	$(s_\alpha r^2, \varphi)$	$(1, \varphi_2)$	(r, φ_2)	(r^5, φ_2)
η_5	2	0	-1	-1	0	2	2	-1	-1	2	-1	-1
							-2	1	1	-2	1	1
η_6	2	0	1	-1	0	-2	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$
							0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-3}$

TABLE 4.1. W_1 非线性特征标至 $W_1 \rtimes \langle\varphi\rangle$ 和 $W_1 \rtimes \langle\varphi_2\rangle$的扩张。我们记 $r = s_\beta s_\alpha$。

$n_\alpha(-1)n_\beta(-1)n_\alpha(-1) \in V$。于是，我们有 $x\gamma^f(x) = v$ 以及 $(x\gamma^f)^2 = vF$。因此，$(\gamma_2)^f$ 与 $x\gamma^f$ 相等，差一个 T_0 中的共轭。这表明，φ_2 通过 $s_\alpha s_\beta s_\alpha \varphi$ 作用于 W_1。

与之前一样，我们现在可以明确计算 $W_1 \rtimes \langle s_\alpha s_\beta s_\alpha \varphi\rangle$ 的特征标表，并确定 η_5 和 η_6 的扩张，见表 4.1。我们看到，其中一个特征标的扩张都是有理的，而另一个特征标的扩张的值都属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$。由引理 2.1(b)，这些扩张全都是 $\mathcal{H}$-不变的。

由于域自同构在 W_1 上作用平凡，我们可以仿照引理 4.1 的证明，得到 ψ 到 $\mathbf{N}^{vF} \rtimes (\mathrm{Aut}(\mathbf{G}^{vF})_R)_\psi$ 的一个 $(\mathrm{Aut}(\mathbf{G}^{vF})_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变扩张。□

引理 4.3。假设 $d = 3$ 或 $d = 6$。那么，每个 $\psi \in \mathrm{Irr}_{\ell'}(N)$ 都有一个到 $N \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)_\psi$ 的 $(\mathrm{Aut}(G)_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变扩张。

证明。令 ψ 为与对 $(s, \eta) \in \mathcal{M}$ 相对应的特征。若 $s \neq 1$，则可如前述进行论证。若 $s = 1$，则 $W_3 \cong W_6 \cong C_6$ 的不可约特征都是线性的，并且根据引理 2.1(c)，它们也是 $\mathcal{H}$-不变的。因此，相应的特征 ψ 也是线性的且 $\mathcal{H}$-不变，并且可以平凡地扩张到 $N \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)_\psi$。该扩张自然是 $(\mathrm{Aut}(G)_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变的。□

现在我们转而讨论整体特征及其扩张。

引理 4.4. 每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\ell'}(G)$ 都有一个关于 $(D \times \mathcal{H})_\chi$-不变的扩张至 $G \rtimes D_\chi$。

证明. G 的完整一般特征标表见 [Eno76]，也收录于 [GHL+96]。若 χ 是奇数次实特征标，则由 [NT08, Theorem 2.3] 可知，它有一个唯一的实扩张至 $G \rtimes D_\chi$，因此该扩张在 $(D \times \mathcal{H})_\chi$ 下不变。若 χ 是半单或正则的，我们可以利用盖尔范德–格雷夫特征标和非连通约化群的德利涅–吕斯蒂希理论，构造 χ 至 $G \rtimes D_\chi$ 的一个关于 $(\langle F_3\rangle \times \mathcal{H})_\chi$-不变的扩张，见 [Joh22a, Proposition 4.13]。其中的证明对于所构造的特征标扩张在 $(\langle\gamma\rangle \times \mathcal{H})_\chi$ 下的作用同样适用，由此可知它们也关于 $(D \times \mathcal{H})_\chi$-不变。

按照 [Eno76], 的记号，对于某个 ℓ，出现在不可约特征 $\ell'(G)$中的其余特征标是幺幂特征标 θ_1、θ_2、θ_{10}、θ_{11}、$\theta_{12}(1)$ $\theta_{12}(-1)$。设 χ 是这些特征标中的一个。特征标 $\theta_{12}(\pm 1)$仅在 $d = 3$ 和 $d = 6$ 的情况下出现，因此根据引理 2.1(c)，它们是 $\mathcal{H}$-不变的。其他特征标都是有理的，并且根据 [Mal08，定理 2.5]，它们全部都是 D-不变的。

我们考虑德利涅–卢斯蒂格特征标 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_3}(1)$ 和 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_6}(1)$。如表 3.1 所示，任何非平凡的半单 $s \in \mathrm{S}_3^F$ 都满足 $C_{\mathbf{G}}(s) = \mathrm{S}_3$，因此是正则的。利用 [GHL+96]，我们可以读出正则元素 $s \in \mathrm{S}_3^F$ 对任意幺正特征标 ρ 的特征标值 $\rho(s)$，从而确定重数 $\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_3}(1)\ \rho\rangle = \rho(s)$，例如参见 [GM20，第 2.3 条注释。10]。类似地，对 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_6}(1)$ 也可进行此操作，我们得到

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_3}(1) = \theta_0 - \theta_2 + \theta_{10} - \theta_{12}(1) - \theta_{12}(-1) + \theta_5, \quad R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_6}(1) = \theta_0 - \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12}(1) + \theta_{12}(-1) + \theta_5$$

按照 [Eno76] 的记号。

现在，我们可以仿照 [Joh22a, 命题 6.12] 的证明，为 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_3}(1)$ 和 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{S}_6}(1)$ 的每个不可约成分 ρ 构造一个延拓到 $G \rtimes \langle\gamma^2\rangle$ 的 $\mathcal{H}_\rho$-不变延拓。注意，这是可行的，因为

所考虑的德利涅–卢斯蒂格特征标都是重数自由的，γ^2 在相对 Weyl 群上的作用是平凡的，并且 G 的中心是连通的。除此之外，[Joh22a, 命题 6.12] 的证明并未对 G 和 F 作出任何假设。因此，我们得到 χ 的一个 $\mathcal{H}$-不变延拓 $\widehat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G \rtimes \langle \gamma^2 \rangle)$。

在 [Bru07], Brunat 中，Brunat 计算了 G 的 γ^f-稳定不可约特征向 $G \rtimes \langle \gamma^f \rangle$ 的扩张。我们知道，χ 可扩张为某个 $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(G \rtimes \langle \gamma^f \rangle)$。我们看到，$\widetilde{\theta}_1$ 和 $\widetilde{\theta}_{11}$ 是有理的，$\widetilde{\theta}_2$的值包含于 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中，而 $\widetilde{\theta}_{10}$、$\widetilde{\theta}_{12}(1)$、$\widetilde{\theta}_{12}(-1)$ 的值包含于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 中。因此，根据引理 2.1，它们全都在 $\mathcal{H}$ 下不变。

$\widehat{\chi}$ 和 $\widetilde{\chi}$ 到 $G \rtimes D_\chi$ 的唯一公共扩张在 $(D \times \mathcal{H})_\chi = D_\chi \times \mathcal{H}$ 下不变。这证明了该断言。□

这意味着，与我们上述研究 G 的初衷相反，当 f 为奇数时，我们发现所有局部和整体特征都存在 $\mathcal{H}$-不变扩张。

由此，我们现在可以证明类型 G_2 的定理 A。

定理 4.5。对于群 $G_2(3^f)$ 和所有素数 ℓ，若f 是奇整数，则归纳麦凯–纳瓦罗条件成立。

证明。对于 $\ell = 2$ 和 $\ell = 3$，我们已知该结论由 [Joh22b] 和 [Joh21] 成立。群 $3.G_2(3)$ 可以通过 [GAP19] 进行考察，我们发现条件 1 成立。

若 $f \geq 2$，则命题 3.2 保证等变性条件成立。对于奇数 f，引理 4.1、引理 4.2、引理 4.3 和引理 4.4 保证扩张条件成立，因为我们可以将构造出的特征扩张规范地延拓至 $\mathrm{Aut}(G)_R$ 中的内自同构。这证明了该结论。□

备注 4.6。若 f 为偶数，扩张的构造方式则不再适用。对于 $X \in \{G, N\}$ 的某些局部特征和整体特征，我们分别构造了到 $X \rtimes \langle F_3 \rangle$ 和 $X \rtimes \langle \gamma^f \rangle$ 的扩张。若 f 为奇数，则 γ^f 是一个域自同构，我们必须研究到 $X \rtimes \langle \gamma^{f_2'} \rangle$ 和$X \rtimes \langle F_3^{f_2} \rangle$ 的扩张，其中 $f_2 f_2' = f$ 满足 f_2' 为奇数且 f_2 为偶数。特别地，我们不能直接使用[Bru07] 中的结果，而必须针对次数为 $2f_2$ 的扩张仿照其中的计算。

此外，我们想指出，对于整体特征的某些扩张，我们使用了非连通群的 Deligne–Lusztig 特征。由于这里要求扩张 G 的自同构在魏尔群上作用平凡，因此我们无法用这些方法将特征扩张到例外图自同构。使用 [RSF22a] 中针对非连通群的 Harish–Chandra归纳时，也会遇到同样的问题。

5. The groups $B_2(2^f)$

本节证明特征为2的域上 B_2 型群的类似结论。证明方法与对 $G_2(3^f)$ 的讨论类似。

从现在起，设 G 是代数闭域上特征为2的 B_2 型单代数群。用 F_2 表示 G 的标准 Frobenius映射，并设 $F := F_2^f$, $q := 2^f$，其中 $f \geq 2$ 是某个整数。与前文一样，$G := \mathrm{G}^F = B_2(2^f)$ 是一个舒尔乘子平凡的单群，而 G 的外自同构群为 $D = \langle \gamma \rangle$，其中 γ 是 G 的例外图自同构。注意，G 的中心平凡，并且 G 的有理半单元与其对偶群的有理半单元之间存在双射，且相应中心化子同构 [Lus77，第 164] 页。

与前文相同，我们考虑素数 $\ell \geq 3$ 整除 $|G| = q^4\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$时的归纳麦凯–纳瓦罗条件。令 d 为 q 模 ℓ的阶，即 $\ell \mid \phi_d$。我们继续使用第 3.1 节中引入的符号。注意，所有 Sylow d- 环面再次都是正则的，因此也是极大环面。

第 3.2 节中描述的特征参数化对于 G^F 和 N也存在。关于半单元素中心化子的相关信息列于表 5.1 中。同样，这可用于证明归纳条件中的等变性部分。

引理5.1。存在一个 $D \times \mathcal{H}$-等变双射 不可约特征$_{\ell'}(G) \to$不可约特征$_{\ell'}(N)$。

d	共轭类	H 的类型	$\lvert\mathbf{H}^F\rvert$	$\lvert s^N\rvert$	$\mathrm{W}_{\mathbf{H}}(\mathrm{S}_d)^F$
1	$A_1 = 1$	$\mathrm{B}_2(q)$	$q^4(q^2-1)(q^4-1)$	1	D_8
	$B_1(i,j)$	$\mathrm{A}_0(q)\cdot T(\phi_1^2)$	$(q-1)^2$	8	1
	$C_1(i)$	$\mathrm{A}_1(q)\cdot T(\phi_1)$	$q(q-1)^2(q+1)$	4	C_2
	$C_2(i)$	$\mathrm{A}_1(q)\cdot T(\phi_1)$	$q(q-1)^2(q+1)$	4	C_2
2	$A_1 = 1$	$\mathrm{B}_2(q)$	$q^4(q^2-1)(q^4-1)$	1	D_8
	$B_4(i,j)$	$\mathrm{A}_0(q)\cdot T(\phi_2^2)$	$(q+1)^2$	8	1
	$C_3(i)$	$\mathrm{A}_1(q)\cdot T(\phi_2)$	$q(q+1)^2(q-1)$	4	C_2
	$C_4(i)$	$\mathrm{A}_1(q)\cdot T(\phi_2)$	$q(q+1)^2(q-1)$	4	C_2
4	$A_1 = 1$	$\mathrm{B}_2(q)$	$q^4(q^2-1)(q^4-1)$	1	C_4
	$B_5(i)$	$\mathrm{A}_0(q)\cdot T(\phi_4)$	(q^2+1)	4	1

TABLE 5.1. 半单元素的共轭类 $s \in \mathrm{S}_d^F$ 采用[Eno72 表 IV-1] 中的记号，以及其中心化子 $\mathrm{H} = C_{\mathbf{G}}(s)$ 的结构描述。

证明。由于 q 为偶数， H 是平凡的，见 [Sp¨a09，设定2.1]。因此，我们可以为 $H \triangleleft V$ 选择平凡扩张映射，并像之前一样利用它为 $\mathrm{S}_d^F \triangleleft N$ 构造一个 $ND \times \mathcal{G}$-等变扩张映射。所出现的相对 Weyl 群的特征再次是有理的，或者在 $d = 4$的情况下，包含于 $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ 中，其中 ζ_4 是第四个本原单位根。根据引理 2.1(e)，它们是 $\mathcal{H}$-不变的。这已经表明，局部特征的参数化是 $D \times \mathcal{G}$-等变的。

对于整体特征，我们可以像之前一样论证，因为 A_1 型和 B_2 型群的幺幂特征标仍然是有理的。□

现在我们将范围限定在 f 为奇数的情形，并考虑特征标扩张。

引理 5.2. 每个 $\psi \in$不可约特征$_{\ell'}(N)$ 都有一个 $(\mathrm{Aut}(G)_R \times \mathcal{H})_\psi$-不变扩张到 $N \rtimes (\mathrm{Aut}(G)_R)_\psi$。

证明。若 ψ 是线性特征，则可按第 4 节中的论证进行。否则，我们有 $d = 1$ 或 $d = 2$ ，并且 ψ 对应于对 $(1, \eta)$，其中 $\eta \in \mathrm{Irr}(\mathrm{W}_d)$ 的次数为 2。若 $d = 1$，则 η 到 $W_1 \rtimes \langle\varphi\rangle$ 的扩张（其中 $\varphi \in \mathrm{Aut}(W_1)$）由 γ 诱导，且包含于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。我们进一步通过计算发现，对于 φ 的每个阶为 2 的共轭元，情况都是如此。利用引理 2.1(d) 并沿用前述论证，即可证明该结论。□

引理 5.3. 每个 $\chi \in$不可约特征$_{\ell'}(G)$ 都有一个 $(D \times \mathcal{H})_\chi$-不变的扩张到 $G \rtimes D_\chi$。

证明。 G 的一般特征标表再次包含于 [GHL$^+$96] 中。如果 χ 是半单的或正则的，我们可以像引理 4.4 的证明中那样论证，以找到一个合适的延拓。否则， χ 是幺幂的，并且再次是一个无重德利涅–卢斯蒂格特征标的成分。和之前一样，我们找到 χ 到 $G \rtimes \langle F_3\rangle_\chi$ 的一个 $\mathcal{H}$-不变延拓。

γ 的作用交换了其中两个幺幂特征标。因此，我们只需考虑将 θ_1、θ_5（采用 [Eno72] 的记号）扩张到 $G \rtimes \langle\gamma^f\rangle$ 的情形。 [Bru06] 已计算出它们，并且我们看到二者都是有理的。由于所有幺幂特征标都是有理的，这已经证明了该结论。□

现在我们可以证明类型 B_2 的定理 A。

定理 5.4。若 f 是奇整数，则群 $\mathrm{B}_2(2^f)$ 对所有素数 ℓ 均满足归纳麦凯–纳瓦罗条件。

证明。对于 $\ell = 2$ 我们已经通过 [Joh22b]知道该陈述成立。群 $\mathrm{B}_2(2)'$ 可以借助 [GAP19] 进行考察，我们看到，条件 1 的扩张部分并不总是满足，因为我们并不总能得到不变特征标扩张。然而， $\mathcal{H}$ 作用在局部和整体特征标扩张上是等变的，因此 [NSV20, 定义 3.5] 成立。

如果 $f \geq 2$，则根据命题 5.1，等变性条件得到满足；并且，如果 f 为奇数，则根据引理 5.2 和 5.3，延拓条件得到满足。□

致谢。感谢 Gunter Malle 提出的建议和评论。本研究得到德国研究基金会（DFG）SFB-TRR 195 的经费支持。

References

[Bru06] O. Brunat, *The Shintani descents of Suzuki groups and their consequences*, 《代数杂志》303 (2006)，869–890。[Bru07] O. Brunat, *On the extension of $G_2(3^{2n+1})$ by the exceptional graph automorphism*, 《大阪数学杂志》44 (2007)，第 4 期，973–1023。[CS13] M. Cabanes 和 B. Sp¨ath, *Equivariance and extendibility in finite reductive groups with connected center*, 《数学杂志》275 (2013)，689–713。[Eno72] H. Enomoto, *The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$ $q=2^f$*, 《大阪数学杂志》9 (1972)，第 1 期，75–94。[Eno76] H. Enomoto, *The characters of the finite Chevalley group $G_2(q)$ $q=3^f$*, 《日本数学杂志》2 (1976)，第 2 期，191–248。[GAP19] GAP 团队, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2*, 2019，https://www.gap-system.org。[GHL+96] M. Geck、G. Hiss、F. L

¨ *– A system for computing and processing* ubeck、G. *generic character tables for finite groups of Lie type Weyl groups and Hecke algebras* Malle 和 G. Pfeiffer，CHEVIE，，《应用代数、工程与通信计算》7 (1996)，175–210。[GM20] M. Geck 和 G. Malle, *The Character Theory of Finite Groups of Lie Type: A Guided Tour*, 《剑桥高等数学研究丛书》第 187 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020。[GLS98] D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3*, 《数学调查与专著》第 40 卷，美国数学会，1998。[Joh21] B. Johansson, *The inductive McKay–Navarro condition for the Suzuki and Ree groups*, 2021，arXiv:2110.10946。[Joh22a] B. Johansson, *The inductive McKay–Navarro condition for finite groups of Lie type*，博士论文，凯撒斯劳滕工业大学，2022。[Joh22b] B. Johansson, *On the inductive McKay–Navarro condition for finite groups of Lie type in their defining charac-* , *teristic* **610** 2022 223 240 《代数杂志》（），–。[Kle88] P. Kleidman, *The maximal subgroups of the Chevalley groups G_2 q with q odd the Ree groups ${}^2G_2$ q and their* （），（），*automorphism groups* **117** 1988 30 71 《代数杂志》（），–。[Lus77] G. Lusztig, *Irreducible representations of finite classical groups*, 《数学发明》43 (1977)，125–175。[L¨u] F. L¨ubeck, *Centralizers and numbers of semisimple classes in exceptional groups of Lie type*, https://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/chev/CentSSClasses/。[Mal07] G. Malle, *Height 0 characters of finite groups of Lie type*, 《表示论》11 (2007)，192–220。[Mal08] G. Malle, *Extensions of unipotent characters and the inductive McKay condition*, 《代数杂志》320 (2008)，2963–2980。[MS15] G. Malle 和 B. Sp¨ath, *Characters of odd degree*, 《数学年刊》184 (2015)，869–908。[Nav04] G. Navarro, *The McKay conjecture and Galois automorphisms*, 《数学年刊》160 (2004)，第 3 期，1129–1140。[NSV20] G. Navarro、B. Sp¨ath 和 C. Vallejo, *A reduction theorem for the Galois–McKay conjecture*, 《美国数学会汇刊》373 (2020)，6157–6183。[NT08] G. Navarro 和 P. H. Tiep, *Rational irreducible characters and rational conjugacy classes in finite groups*, 《美国数学会汇刊》360 (2008)，第 5 期，2443–2465。[Ruh21] L. Ruhstorfer, *The Navarro refinement of the McKay conjecture for finite groups of Lie type in defining charac-* *teristic* **582** 2021 177 205 ，《代数杂志》（），–。[RSF22a] L. Ruhstorfer 和 A. A. Schaeffer Fry, *The inductive McKay–Navarro conditions for the prime 2 and some* ，《美国数学会会刊 B 辑》（），–。[RSF22b] L. Ruhstorfer 和 A. A. Schaeffer Fry, *Navarro's Galois–McKay conjecture for the prime* 2, 2022，arXiv:2211.14237。[SF22] A. A. Schaeffer Fry, *Galois-equivariant McKay bijections for primes dividing $q-1$*, 《以色列数学杂志》247 (2022)，269–302。[Sp¨a09] B. Sp¨ath, *The McKay conjecture for exceptional groups and odd primes*, 《数学杂志》261 (2009)，571–595。[Spr74] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, 《数学发明》25 (1974)，159–198。[SV20] B. Srinivasan 和 C.R. Vinroot, *Galois group action and Jordan decomposition of characters of finite reductive groups with connected center* **558** 2020 708 727 ，《代数杂志》（），–。