arXiv:2304.03739v1 [math.OC] 7 Apr 2023

非凸优化问题的最优性差距界定：在非线性安全关键系统中的应用

Prithvi Akella 和 Aaron D. Ames[1]

摘要—高效地为非凸优化问题提供次优解，并了解该解的次优性，将有助于非线性最优控制算法的广泛应用。为此，借助风险感知验证领域的近期研究成果，我们提供了两种算法，用于：(1)以概率方式界定新型百分位优化技术所报告解的最优性差距；以及(2)以概率方式界定百分位数方法在重复应用中所报告的最大最优性差距，例如，模型预测控制（MPC）。值得注意的是，我们的结果适用于一大类优化问题。我们在若干基准非凸优化问题上展示了这些结果的有效性和可重复性，并展示了这些结果在非线性模型预测控制环境下对控制的实用价值。

一、引言

近年来，最优控制器已成为控制器综合的首要选择，因为它们为表达（可能）彼此不同的控制目标提供了一种自然方式 [1]–[3], 例如 模型预测控制（MPC） [4]–[6], 基于控制障碍函数的二次规划 [7]–[9], 和最优路径规划 [10]–[12], 等。具体而言，在前两个示例中，这类最优控制器利用现有系统模型，为当前或后续时间步的控制器选择提供依据，例如，MPC 的预测特性体现为利用系统模型预测给定输入将如何影响系统演化，并利用该预测确定未来几个时间步的最优输入选择。值得注意的是，单步基于控制障碍函数的二次规划确保了非线性系统模型的凸性，尽管基于这些模型进行预测仍然是一个非凸问题 [13]–[16]。

这些控制器的实用性激发了人们开发并利用快速求解技术来处理这些非凸优化问题的努力，但仍有一些改进空间。例如，文献中的典型方法包括模型预测路径积分控制（MPPI） [17]–[18], 配点法 [19], [20], 贝叶斯优化 [21], [22], 基于学习的方法 [23], [24],以及近来的百分位方法 [25], [26]。具体来说，对于后三种基于学习的方法，贝叶斯优化和其他基于学习的方法都保证最终收敛到最优解，但不提供样本复杂度界。百分位方法则提供稳健的样本复杂度界，并且在高效求得次优解方面已取得显著成功，可用于解无码一区二区三区

*本研究得到 AFOSR 测试与评估计划的资助，资助编号 FA9550-19-1-0302[1]所有作者均就职于加州理工学院{pakella, ames}@caltech.edu

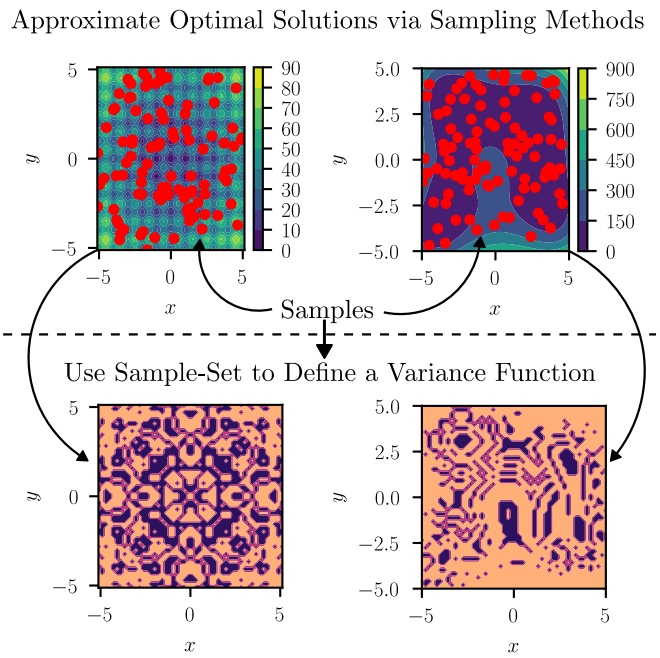


图 1. 我们提出的方法概览。风险感知验证中采用的采样方法能够为非凸优化问题提供不错的结果，但其最优性间隙尚未得到充分理解。通过围绕先前生成的样本集定义方差函数，我们可以隐式识别出方差超过所报告采样解的最优性间隙的决策（底部橙色部分），并通过再次应用相同的采样方法来识别该最优性间隙。

受约束非线性最优控制器。然而，与前两种方法不同，它们甚至无法提供所报告的百分位解与真实最优值之间最优性间隙的概率界。

我们的贡献：我们旨在为百分位解的最优性间隙提供概率保证——即百分位解的成本评估与最小函数值之间的偏差——并针对各自的优化问题给出保证。为此，我们希望开发一系列算法中的首个算法，使其能够提供稳健的样本复杂度界，从而在已知解的次优性的情况下，高效识别次优解。为此，我们的贡献有两方面：

- 在公平性假设下，我们为识别一大类优化问题中百分位解的最优性差距提供了样本复杂度界。
- 对于需要反复求解的优化问题，例如MPC，我们提供了一种方法，用于确定百分位解的最优性差距低于

而非一个确定的上界。

我们开发了这样一种流程，可为约束最优控制问题提供高效解，并给出已知的样本复杂度和次优性界限。该流程与现有方法有所不同，因为它会考虑最优控制器的一般（可能是）非线性约束，并提供所求解的次优性样本复杂度结果——这与现有方法不同，例如 MPPI、配点法、贝叶斯优化以及其他基于学习的方法。

结构： 第二节回顾百分位优化。第三节-A概述了我们对百分位解的最优性间隙进行界定的方法。第三节-B将这些优化问题的结果扩展到需要重复求解的情形，例如 非线性模型预测控制。最后，第四节给出了用于验证我们理论结果的示例。具体而言，第四节-A验证了第三节-A的概率界定结果，第四节-C则展示了第三节-B中的结果在非线性模型预测控制场景下的实用性。

II. 百分位数优化综述

为便于阐述本文的贡献，我们首先在本节回顾百分位数优化。考虑以下优化问题：

$$J^* = \min_{\mathrm{s}\in\mathbb{S}} \; J(\mathrm{s}), \tag{1}$$

在以下假设下：

假设1. 决策空间 $\mathbb{S}$ 是一个体积有界的集合，即 $\int_{\mathbb{S}} 1 \, ds = V_{\mathbb{S}} < \infty$ 或 $\mathbb{S}$ 具有有限个元素。此外，成本函数 J 在$\mathbb{S}$上有界，即 $\exists\, m, M \in \mathbb{R}, \mathrm{s.t.}\ m \le J(\mathrm{s}) \le M,\ \forall \mathrm{s} \in \mathbb{S}$.

该假设使我们能够定义两个函数，$\mathcal{V}$，其对应于 $\mathbb{S}$ 的子集所占据的体积分数，以及 F，其对应于给定决策 $\mathrm{s}' \in \mathbb{S}$ 的严格更优决策集合（我们假设空间是连续的，以便记号简洁）：

$$\mathcal{V}(A) = \frac{\int_A 1 \, ds}{\int_{\mathbb{S}} 1 \, ds}, \tag{2}$$
$$F(\mathrm{s}') = \{\mathrm{s} \in \mathbb{S} \mid J(\mathrm{s}) < J(\mathrm{s}')\}.$$

因此，对于给定的决策 $\mathrm{s}' \in \mathbb{S}$，若 $\mathcal{V}(F(\mathrm{s}')) \le \epsilon$ for some $\epsilon \in (0,1]$, *i.e.* s' 满足严格优于它的决策的体积分数不超过 ϵ，那么就最小化 J 而言，s' 将处于第 $100(1-\epsilon)$ 百分位。同样，此类决策的相应最低成本 $J(\mathrm{s}')$ 也应是可实现成本的一个概率下界。下文的定理对这两个概念进行了正式表述，并结合了来自 [25], [27]的类似结果。为便于陈述接下来的结果，我们将先给出假设，再陈述定理。

假设 2。令 $I_1 = \{(\mathrm{s}_i, J(\mathrm{s}_i))\}_{i=1}^{N_p}$ 为一组决策及其成本，其中决策s_i 通过$\mathrm{U}[\mathbb{S}]$独立采样，$\zeta^*_{N_p}$ 为采样得到的最小成本，而 $\mathrm{s}^*_{N_p}$ 为具有最小成本的（可能不唯一的）决策。

定理 1. 设假设 *1* 和 *2* 成立。那么 $\forall\, \epsilon \in [0,1]$，采样到成本至少为$\zeta^*_{N_p}$ 的决策的概率最低为 $1-\epsilon$，置信度为 $1-(1-\epsilon)^{N_p}$，即

$$\mathbb{P}^{N_p}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[J(\mathrm{s}) \ge \zeta^*_{N_p}\right] \ge 1-\epsilon\right] \ge 1-(1-\epsilon)^{N_p}. \tag{3}$$

此外，$\forall\, \epsilon \in (0,1], \mathrm{s}^*_{N_p}$ 位于$100(1-\epsilon)\%$分位数，其最小置信度为 $1-(1-\epsilon)^{N_p}$，即。

$$\mathbb{P}^{N_p}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathcal{V}(F(\mathrm{s}^*_{N_p})) \le \epsilon\right] \ge 1-(1-\epsilon)^{N_p}.$$

III. 最优性间隙的界定

为了正式界定最优性间隙，我们必须首先对其进行定义。为此，考虑与(1)中相同的一般优化问题。最优性间隙定义如下。

定义 1. 对于式 (1) 中形式的一般优化问题，决策 $\mathrm{s} \in \mathbb{S}$ 的最优性间隙记为 $\mathrm{G}(\mathrm{s})$，是决策值与最优值之间的偏差，即 $\mathrm{G}(\mathrm{s}) = J(\mathrm{s}) - J^*$。

接下来给出我们的形式化问题陈述。

问题 1. 令假设 *2* 成立，并令最优性间隙 G 按照定义 *1* 给出。确定$\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})$ 的上界，以及该上界成立的概率。

A. 有界优化问题的结果

首先，我们注意到，如果假设2 成立，则可以在集合 I_1 上定义以下方差函数 $\mathbb{V}$：

$$\mathbb{V}: \mathbb{S} \to \mathbb{R} \ \ \mathrm{s.t.}\ \ \mathbb{V}(\mathrm{s}) = \min_{\mathrm{s}_i \in D \subseteq I_1} |J(\mathrm{s}) - J(\mathrm{s}_i)|. \tag{4}$$

上述定义中对 $\mathrm{s} \in D \subseteq I_1$ 的限制纯粹是出于实际考虑。从理论角度而言，可以使用整个信息集 I_1 来定义 $\mathbb{V}$，但这往往会增加样本需求，后续章节将对此进行讨论（例如图3）

因此，直观而言，我们旨在通过百分位数方法最大化 $\mathbb{V}$，以识别一个大于我们所选决策的最优性间隙 $\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})$ 的方差。为此，我们首先需要以下公平性假设——可以采样到至少与最优性间隙一样大的方差；否则，就无法采用百分位数方法。为了正式陈述这一假设，我们首先将 Ω_r 定义为 $\mathbb{V}$ 的 r-水平集：

$$\Omega_r = \{\mathrm{s} \in \mathbb{S} \mid \mathbb{V}(s) \le r\}. \tag{5}$$

假设 3。设方差函数 $\mathbb{V}$ 如式 (4) 所示，最优性间隙 G 如定义 1 所示，设 $\mathcal{V}$ 如式 (2) 所示，设 Ω_r 如式 (5) 所示，并且假设 2 成立。决策的水平集 $\Omega_{\mathrm{G}(s^*_{N_p})}$ 中，其方差不超过 $\mathrm{s}^*_{N_p}$ 的最优性间隙的决策不包含 $\mathbb{S}$，即。

$$\mathcal{V}\left(\mathbb{S} \setminus \Omega_{\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})}\right) > 0. \tag{6}$$

其次，我们有以下关于水平集 Ω 的结果。

引理 1. 设 Ω_r 如(5) 中所定义，且 $\mathcal{V}$ 如(2)中所述。以下各陈述彼此等价。

(a) $r \geq s$, *(b)* $\Omega_r \supseteq \Omega_s$, *(c)* $\mathcal{V}(\Omega_r) \geq \mathcal{V}(\Omega_s)$, *(d)* $\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}[\Omega_r] \geq \mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}[\Omega_s]$。

证明： (a) 与 (b) 的等价性源于 (5) 中 Ω_r 的定义。(b) 与 (c) 的等价性源于 (2) 中体积分数函数的定义。最后，(c) 与 (d) 的等价性源于均匀分布对 $A \subseteq \mathbb{S}$ 的子集赋予概率权重，这些子集等价于 $\mathcal{V}(A)$。

■

第三，基于我们的公平性假设，我们知道存在非零概率抽取决策，使得这些决策的方差至少达到最优性间隙。

引理 2. 设假设 *3* 成立，则存在 $p > 0$，对应于均匀抽样决策 $\mathrm{s} \in \mathbb{S} \setminus \Omega_{\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})}$ 的概率，即

$$\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{S} \setminus \Omega_{\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})}\right] = p > 0. \tag{7}$$

证明： 根据 $\mathbb{S}$ 上均匀分布的定义以及方程 (6)，结论成立。■

因此，利用百分位数方法对最优性间隙进行上界估计的主要结果，源自前述引理和假设。具体而言，我们旨在对以下优化问题采用百分位数方法：

$$\max_{\mathrm{s} \in \mathbb{S}} \ \mathbb{V}(\mathrm{s}), \tag{8}$$

由此得到以下定理。

定理2. 设假设 *1* 和 *3* 成立，设 p 满足(7)，设 $I_2 = \{(\mathrm{s}_i, \mathbb{V}(\mathrm{s}_i))\}_{i=1}^{N_v}$ 是一组从$\mathrm{U}[\mathbb{S}]$ 中独立抽样得到的 N_v 个决策，且其对应的方差符合(4)，其中 $\mathbb{V}^*_{N_v}$ 为最大抽样方差。那么，$\forall \epsilon \in [0, p]$ $\mathbb{V}^*_{N_v}$ 以 $1-(1-\epsilon)^{N_v}$的置信度超过百分位数解的最优性间隙，即：

$$\mathbb{P}^{N_v}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{V}^*_{N_v} \geq \mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})\right] \geq 1-(1-\epsilon)^{N_v}. \tag{9}$$

证明： 首先，根据引理 2，存在一个满足 (7) 的 $p > 0$。其次，我们知道，对于优化问题 (8)，决策空间 $\mathbb{S}$和目标函数 $\mathbb{V}$有界——这是由假设 1 得出的。因此，我们可以采用百分位数方法求解 (8)。根据定理 1，并将 (8) 视为一个最小化问题，将 (3) 中的项代入后，对所有 $\epsilon \in [0, 1]$，可得以下结果：

$$\mathbb{P}^{N_v}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{V}(\mathrm{s}) \leq \mathbb{V}^*_{N_v}\right] \geq 1-\epsilon\right] \geq 1-(1-\epsilon)^{N_v}.$$

内部概率中的集合对应于 $\mathbb{V}^*_{N_v}$ 的水平集，即

$$\mathbb{P}^{N_v}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\Omega_{\mathbb{V}^*_{N_v}}\right] \geq 1-\epsilon\right] \geq 1-(1-\epsilon)^{N_v}.$$

最后，根据式（7），我们知道，在与最优性间隙对应的水平集中采样到一个决策的概率为 $1-p$。限制为 $\epsilon \in [0, p]$，这意味着 $1-\epsilon \geq 1-p$ 并将各项代入上述不等式，可得以下结果。

$$\mathbb{P}^{N_v}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\Omega_{\mathbb{V}^*_{N_v}}\right] \geq \mathbb{P}_{\mathrm{U}[\mathbb{S}]}\left[\Omega_{\mathrm{G}(\mathrm{s}^*_{N_p})}\right]\right] \geq 1-(1-\epsilon)^{N_v}.$$

因此，根据引理 1，最终结果成立。■

总之，定理2 告诉我们，若要界定百分位解的最优性间隙，就需要评估 N_v 从 $\mathbb{S}$ 中抽取的均匀样本相对于用于生成百分位解的信息集子集 I_1 的方差。然而在实践中，p 方差足够大的抽样决策的确切概率，对实践者而言往往是未知的先验。在这种情况下，只需假设ϵ足够小，即也就是说 10^{-2} 或更小的值，小于 p。下一节将提供这方面的示例。值得注意的是，这一结果意味着我们可以利用百分位方法，既识别出优于决策空间中很大一部分决策的决策，也确定其最优性间隙。事实上，即使对于非凸优化问题，只要它们满足假设 1，这一结果也成立。

B. 生成具有最大最优性差距的解

上一节通过二次抽样方案，提供了一种确定给定解的最优性间隙上界的方法。本节针对需要依次求解的类似优化问题，提供一种免除二次抽样要求的方法。换言之，考虑以下一般形式的优化问题，其中每个实例 l 都满足假设 1：

$$J^{l*} = \min_{\mathrm{s} \in \mathbb{S}^l} \ J^l(\mathrm{s}), \ (\mathbb{S}^l, J^l) \in \mathbb{O}, \ l \in L. \tag{10}$$

此外，我们假设可以从 L中随机抽取索引 l，例如，通过均匀分布进行抽样。

示例场景： 这里，$\mathbb{O}$ 是一个包含目标函数与决策空间配对的集合。为了给出一个与后续章节一致的示例，考虑以下状态为 x 、输入为 u的非线性动力系统：

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \ x \in \mathcal{X}, \ u \in \mathcal{U} \tag{11}$$

给定状态和输入的代价函数、状态约束以及力矩边界，我们可以为上述系统构造以下时域为 H 的有限时间最优控制器。这里，所有状态约束都通过对模型 (11) 进行预测，转换为输入约束：

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}=(u^0,u^1,\ldots,u^{H-1}) \in \mathcal{U}^H}{\operatorname{argmin}} \quad & J(\mathbf{u}, x_k), \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{u} \in \mathbb{U}(x_k) \subseteq \mathcal{U}^H. \end{aligned} \tag{FTOCP}$$

如果我们考虑一个由状态 $x \in \mathcal{X}$ 索引的最优性集合 $\mathbb{O}$ ——这是一种更一般地通过 (10) 中的 $l \in L$ 表示的特定索引形式——那么前述有限时域最优控制器 (FTOCP) 就会简化为 (10) 的形式。

关键见解： 因此，本节的关键见解如下：如果我们按照分布π 在 $\mathbb{O}$上随机采样，求解式（10）形式的优化问题，并计算

该问题的百分位解的最优性间隙 G，那么相应的间隙就是某个实值随机变量的一个样本。通过对该随机变量进行多次独立采样，我们可以利用近期关于风险度量估计的结果，给出该随机变量的概率上界，即可达到的最优性间隙的概率上界。更正式地说，我们将要用到文献中的一个现有定理，内容如下。

定理3。 设 X 为一个实值随机变量，其分布 π可能未知；设 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 为 X的 N个独立样本构成的集合，且 x_N^* 为这些样本中的最大值。 $\forall\ \epsilon \in [0,1]$，以下陈述成立：

$$\mathbb{P}_\pi^N\left[\mathbb{P}_\pi[x \le x_N^*] \ge 1-\epsilon\right] \ge 1-(1-\epsilon)^N.$$

证明： 这可由情景论证得出，见 [28]，且是对 [25]中定理4的重新表述。 ■

要应用定理3，我们需要以下定义。

定义2。 设 $\mathcal{G}\ (N_p)$ 为一个实值随机变量，其分布为 π_{G}，并按如下方式生成样本$\mathbf{g}$：(1) 均匀随机抽取一个索引 $l \in L$；(2) 采用百分位数方法，对应于抽取的索引求解(10)l，得到解$\mathbf{s}_{N_p}^{l*}$；(3) 计算并报告样本$\mathbf{g}$，即最优性间隙 $\mathrm{G}^l\left(\mathbf{s}_{N_p}^{l*}\right)$。

然后，我们可以对集合 $\mathbb{O}$中形成的所有优化问题的百分位解的最优性差距给出上界，使其达到某个最小概率。正式表述如下。

定理4。 设 $\mathcal{G}(N_p)$ 符合定义*2*，并设$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^R$ 为 R 个来自 $\mathcal{G}(N_p)$ 的独立样本，其中$\mathbf{g}_R^*$ 是此类样本中的最大值。那么，对于(10) 形式的优化问题， $\forall\ \epsilon \in [0,1]$个百分位解将以不低于 $1-\epsilon$ 的概率和 $1-(1-\epsilon)^R$的置信度呈现小于$\mathbf{g}_R^*$ 的最优性间隙，即。

$$\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{G}}}^R\left[\mathbb{P}_{\pi_{\mathrm{G}}}[\mathbf{g} \le \mathbf{g}_R^*] \ge 1-\epsilon\right] \ge 1-(1-\epsilon)^R.$$

证明： 源于定理3。 ■

简而言之，如果我们希望消除确定最优性差距所需的二次抽样要求，就需要能够计算至少 R 个独立选取的形式为(10)的优化问题的最优性差距。这样做使我们能够以至少某个最小概率，对可达到的最大最优性差距作出一般性陈述。现在，我们将给出几个示例。

IV. 示例

A. 验证定理*2*——旅行商问题 *an*

旅行商问题 (TSP) 是一个经典的非凸路径规划问题，旨在找出一条遍历集合中每个节点恰好一次且距离最短的路径。数学上，考虑一组航路点 $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{|W|}\}$ $w_i \in \mathbb{R}^2$ 以及这些航路点上的所有路径集合 $P = \{(i_1,\ i_2,\ \ldots\ldots,\ i_{|W|}) \mid i_j \in \{1,2,\ldots,|W|\},\ \ i_j \ne i_k,\ \ \forall\ j \ne k\}$。那么，旅行商问题的正式定义是

$$\min_{p\in P} \sum_{i=0}^{|W|-1} \|p_i - p_{i+1}\| + \|p_0 - p_{|W|}\|.$$

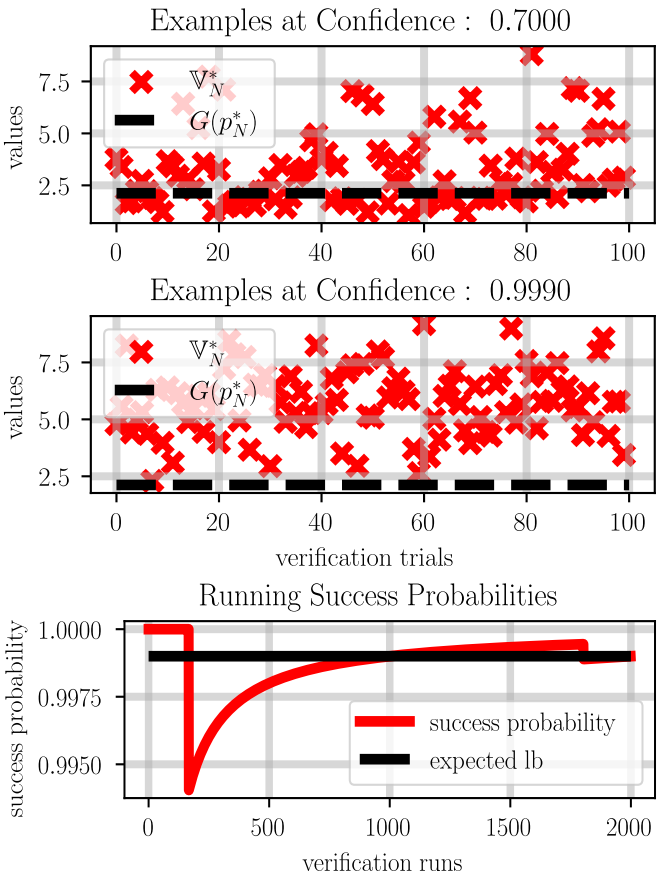


图2. 与定理2对应的 IV-A 节验证数据。（上）使用定理2得到的100个报告上界 $\mathbb{V}_{N_v}^*$，其中式(9)的期望置信度为 0.7。（中）置信度为 0.999 时报告的100个上界 $\mathbb{V}_{N_v}^*$。（下）在2000次试验中，报告上界 $\mathbb{V}_{N_v}^*$ 超过真实最优性间隙 $\mathrm{G}(p_{N_p}^*)$ 的累计比例，置信水平为 0.999。请注意，随着置信度提高（从上到中），超过最优性间隙的上界比例也随之增加；而超过最优性间隙的上界累计比例则收敛于预期置信度（下），从而验证了定理2。

对于一个包含 10 个节点且有 3628800 条可能路径的图，评估 $N_p = 5000$ 条路径并选出其中最优的一条，根据定理 1，可以以至少 99% 的置信度确定一条位于第 99.9 百分位的路径。使用相应信息集 I_1 的子集 D 来确定这样的百分位解（ I_1的定义见假设 2），我们按照公式 (4) 定义方差函数 $\mathbb{V}$ 。最后，为了验证定理2的概率结果，我们还可以计算均匀抽样得到方差高于我们提出的解 $\mathrm{G}(p_{N_p}^*)$ 的最优性间隙的路径的真实概率 p —— 这是根据假设 3 假定存在并在公式 (7) 中定义的最小概率。对于这一特定节点集和百分位解 $p_{N_p}^*$，该概率为 $p = 0.1083$。

图表分析： 为验证定理2的结果，我们求出了确定 $\mathrm{G}(p_{N_p}^*)$ 的上界 $\mathbb{V}_{N_v}^*$ 所需的最小样本数 N_v ：置信度至少为 0.7 时——图2上图需要11个样本；置信度至少为 0.999 时——图2中图需要61个样本。这两个最小样本数要求均通过在 (9) 中设定 $\epsilon = p$ 得到。

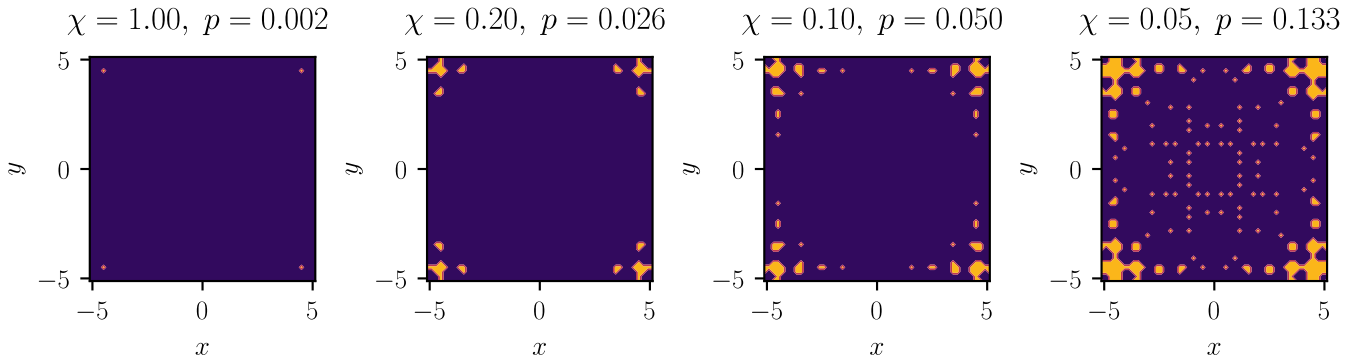


图3. 第 IV-B 节的验证数据。我们声称，通过改变用于生成方差函数 $\mathbb{V}$ 的信息量（见方程（4）），可以改变抽取到一个其方差超过给定解 $G(s^*_N)$ 的最优性间隙的决策的基准概率 p （此类决策以橙色突出显示）。请注意，随着所选信息集 D 所占的体积分数 χ 降低，我们看到基准概率 p 相应上升。第 IV-B 节将讨论这种反向关系成立的原因。

Name	N_p	N_v	期望成功概率（9）	真实成功概率	平均值运行时间（毫秒）
R-2	300	300	0.95	≈ 1	5.18
R-10	300	300	0.95	≈ 1	5.17
Ack	300	300	0.95	≈ 1	5.28
Ble	300	300	0.95	≈ 1	5.17
Levi	300	300	0.95	≈ 1	5.31
Himm	300	300	0.95	≈ 1	5.30

表I
(R-2) RASTIGRIN 2-D、(R-10) 对应的 IV-B 节数据
RASTIGRIN 10-D、（ACK）ACKLEY、（BLE）BEALE、LEVI 和（HIMM）
HIMMELBLAU 基准优化问题。

并求出使右侧大于或等于我们期望的置信度所需的最小整数 N_v 。对于每个置信度水平，我们分别进行了100次试验，并根据定理2报告每次试验产生的最大方差 $\mathbb{V}^*_{N_v}$。从相应数据可以看出，提高置信度会增加相应报告结果 $\mathbb{V}^*_{N_v}$ 超过真实最优性间隙 $G(p^*_{N_p})$ 的可能性——中间图中的红色 x'全部位于黑色虚线之上，而在顶部图中，当我们报告置信度较低的解时，有少数点低于同一条线。此外，通过在置信度为0.999的情况下再次重复该过程，进行2000次独立验证运行，并记录每次运行中是否$\mathbb{V}^*_{N_v} \geq G(p^*_{N_p})$，我们可以了解真实的运行概率，即 $\mathbb{V}^*_{N_v} \geq G(p^*_{N_p})$。如底部图所示，该概率收敛于0.999——这是定理2所预期的下界。不过值得注意的是，这一结果意味着我们能够在99%分位数中识别出一条长度不超过最优路径1.12倍的路径，而只需评估5061个均匀选择的路径样本，不到整个决策空间的0.14%。

B. 提高成功概率——基准函数

在方程 (4)中定义方差函数后的一段简短备注中，我们提到，通过具体选择一个子集D，可以提高基准概率 p，即均匀选择样本的概率，使所选样本呈现出高于所报告百分位解的最优性间隙的方差。这本节针对几个基准优化问题提供了支持该陈述的证据。图3中提到的二维 Rastigrin 函数 [29],如下：

$$\min_{x\in[-5.12,5.12]^2} 20 + \sum_{i=1}^{2}(x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)). \qquad (12)$$

决策空间和目标函数都有界，因此可以求得 (12) 的百分位解。根据定理 1，并采用 $N_p = 100$ 个样本实施此方法，我们生成信息集 I_1 和百分位解 $x^*_{N_p}$。接着，通过选择 I_1 的一个子集 D 来定义 (4) 中的方差函数，我们声称可以改变基准概率 p ，即抽样决策的方差高于真实最优性间隙的概率。为说明这一点，定义 χ 为子集 D 在 (4) 中所占的体积分数，相对于 I_1 而言，即 $\chi = 1$ 意味着 $D = I_1$ ，而 $\chi = 0.05$ 意味着 D 所含元素数量是 I_1 的 $1/20$ 倍。

图示分析： 图3展示了改变用于根据公式 (4) 生成方差函数 $\mathbb{V}$ 的决策 D 的体积分数 χ 所得的结果。橙色标出的决策，其方差高于所报告解的最优性间隙。请注意，随着 χ 减小， p 会增大，正如标题所示。这种反向关系的原因是：若考虑分别用于生成方差函数 $\mathbb{V}_1$ 和 $\mathbb{V}_2$ 的两个集合 $D_1 \subset$ 和 D_2 ，那么根据将 $\mathbb{V}$ 定义为最小化问题的方式， $\in \mathbb{S}$、 $\mathbb{V}_1(s) \geq \mathbb{V}_2(s)$。换言之，减少提供给方差函数的信息量，会提高相应函数的保守程度，从而增加抽样得到一个如今更加保守的最优性间隙上界的可能性。在实践中，以及上一节所给的示例中，采用膨胀 $\chi = 0.1$ 的效果最好；不过，是否存在最优体积分数仍是一个开放问题，也是未来研究的课题。

表格说明： 通过提高方差超过最优性间隙的抽样决策的成功概率 p，我们可以“盲目地”运用定理2，为基准优化问题的百分位解的最优性间隙设定上界。表I展示了这方面的数据。对于每个

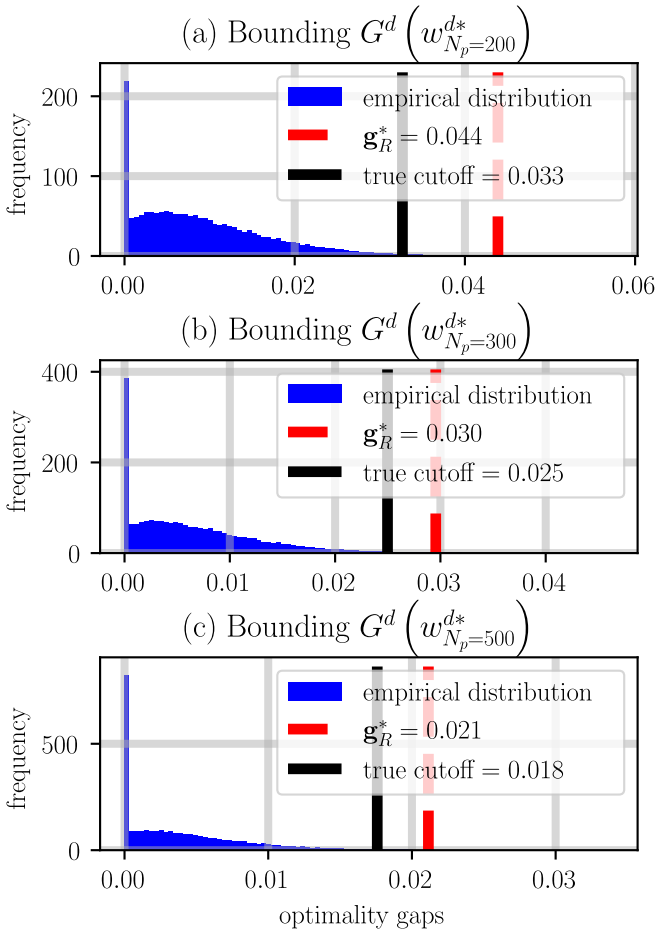


图4。用于支持定理4的第四节-C验证数据。我们声称，可以对连续应用百分位方法以求解(10)形式的优化问题时产生的最优性间隙给出上界。上方红色显示的是针对(NMPC-B)百分位解的最优性差距99%截断值所对应黑线计算得到的上界。对于所示的三种不同百分位方法，我们每次都能够对真实值给出上界，从而证实了定理4。第四节-C将进一步讨论这些信息。

基准优化问题，我们使用 $N_p = 300$ 个样本生成一个百分位解，利用通过百分位方法生成的信息集 I_1 中 10% 的信息构造方差函数 $\mathbb{V}$，并取 $N_v = 300$ 个样本来确定概率最大方差 $\mathbb{V}^*_{N_v}$。在假设 $p \geq 0.01$ 成立的情况下，定理 1 告诉我们，以 95% 的概率有 $\mathbb{V}^*_{N_v} \geq \mathsf{G}(x^*_{N_p})$——见表I第4列。事实上，对于每个优化问题，按照上述流程进行 5000 次试验，我们每次都成功确定了一个有效的上界。此外，由于抽样方法只需要评估抽取的点，速度相对较快，因此整个流程所需的实施时间很短，如最右列所示。

C. 验证定理*4* — 非线性模型预测控制

为了验证定理4的结果，我们需要一系列形式如式(10)所示的优化问题。沿用第III-B节中的示例，我们旨在界定控制 Robotarium 机器人 [30] 的非线性模型预测控制器的百分位解的最优性间隙——这些机器人是一组可通过独轮车动力学建模的智能体。形式化地，令 $x \in \mathcal{X} = [-1.6, 1.6] \times [-1.2, 1.2] \times [0, 2\pi]$ 为系统状态，$u \in \mathcal{U} = [-0.2, 0.2] \times [-\pi, \pi]$ 为控制输入。那么，我们的模型如下：

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k + \begin{bmatrix} \cos(x_k[3]) & 0 \\ \sin(x_k[3]) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k(\Delta t = 0.033)}_{f(x_k, u_k)}.$$

此外，每个智能体都有一个李雅普诺夫控制器 U 引导其前往给定的航点 $w \in \mathcal{W}$:

$$U : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \triangleq [-1.6, 1.6] \times [-1.2, 1.2] \to \mathcal{U}.$$

我们将使用 U 来构建我们的MPC 算法，该算法提供航路点，以引导系统绕过静态和移动障碍物，驶向至少一个目标。形式上，我们在 $\mathcal{W}$ 上叠加一个 8×5 网格，并将操作环境空间 $\mathcal{D}$ 定义为满足以下条件的环境：(1)包含8个静态障碍物（SO）和3个目标（g）；(2)受控（x_a）和非受控（x_o）智能体的起始位置均位于静态障碍物和目标之外；(3) 从受控智能体的起始位置到三个目标中的至少一个存在可行路径。向量 $d = [x_a, x_o, \text{SO } g] \in \mathcal{D}$对应于一种这样的环境配置。为考虑碰撞，考虑以下障碍函数 h，其中 $P = [\mathbf{I}_{2\times 2}\ \mathbf{0}_{2\times 1}]$ 将系统状态投影到平面 [7]:

$$h(x_a, x_o, d) = \begin{cases} -5 & \text{in SO cell,} \\ \|P(x_a - x_o)\| - 0.18 & \text{else.} \end{cases}$$

随后，名义NMPC 算法最小化 $S : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ ——一个输出从航点到最近目标点的最短路径距离的函数——同时确保现有的李雅普诺夫控制器 U 使屏障 h 在接下来的 5 个时间步内保持为正，即，$\forall\, j = 1、2、\ldots\ldots、5$，

$$\begin{aligned} w^*_k = \underset{w \in \mathcal{W}}{\text{argmin}} \quad & S(w), && \text{(NMPC-A)} \\ \text{满足} \quad & x^j_k = f(x^{j-1}_k, u^{j-1}), && \text{(a)} \\ & x^0_k = x_k, && \text{(b)} \\ & h(x^j_{k,a}, x_o, d) \geq 0 && \text{(c)} \\ & u^{j-1} = U\left(x^{j-1}_k, w\right), && \text{(d)} \\ & 0.05 \leq \|w - x_k\| \leq 0.2. \end{aligned}$$

为降低采样要求，我们考虑一种增广代价 J：当航点 w 未能满足 (NMPC-A) 中的约束 (a)–(d) 时，该代价输出 100，从而得到如下结果：

$$\begin{aligned} w^{d*} = \underset{w \in \mathcal{W}}{\text{argmin}} \quad & J(w, d), && \text{(NMPC-B)} \\ \text{subject to} \quad & 0.05 \leq \|w - x\| \leq 0.2. \end{aligned}$$

最后，我们注意到，如果将 L视为索引集、将环境集视为 $\mathcal{D}$，则 (NMPC-B) 与 (10) 等价。

图表分析：为验证定理4的结果，我们从 $R = 459$ 个不同环境中均匀采样 $d \in \mathcal{D}$，并分别使用 N_p =200个样本、$N_p = 300$ 个样本和 $N_p = 500$ 个样本，计算 (NMPC-B) 的百分位数解，结果见图4-(a)、图4-(b)和图4-(c)。我们计算

每个解的最优性间隙：对均匀选取的2000个样本中表现最佳的样本执行梯度下降，并将最终值作为真实最优值。根据定理4，在每种情况下，我们都应能得到一个最优性间隙上界$\mathbf{g}_R^*$，其以至少99%的概率和99%的置信度超过可采样最优性间隙$\mathbf{g}$。为验证这一结论，我们又均匀采样了50000个环境 $d \in \mathcal{D}$，并针对每种百分位数情况，按照前述方案确定可采样最优性间隙的分布。图4各子图中的分布数据反映了这些结果。可以看到，在每种情况下，所报告的上界$\mathbf{g}_R^*$都超过了真实的99%截断值。此外，随着用于计算百分位数解的样本数增加，上界会降低。这是预期的，因为每次我们都在更高的百分位数上提供解。为强调这一结果对控制的实用价值，假设我们希望采用一种百分位数方法，使用 $N_p = 300$ 个样本来提供针对 (NMPC-B) 优化的“优质”航路点。离线计算该最优性间隙，就能让我们确信，在实际应用中，我们以99%的概率和99%的置信度，在每次迭代中选出的航路点与最优航路点之间的差距不超过 $0.03m$ 。值得注意的是，为了得出这一结论，我们无需求解非凸规划，也无需在每个时间步反复采样方差。

V. 结论

我们提出了一种方法，用于界定百分位数方法在一大类非凸优化问题中的最优性间隙，并探索了这类方法在 NMPC 控制中的效用。我们还在若干基准优化问题上验证了数学结果，其中包括旅行商问题。未来，我们希望降低界限的保守性，并正式证明某些类别的优化问题存在基准概率，即 去除理论论述中对公平性假设的要求。

参考文献

[1] F. L. Lewis、D. Vrabie和 V. L. Syrmos，《最优控制》。John Wiley & Sons，2012。[2] R. E. Kalman等，“最优控制理论的贡献”，墨西哥数学学会公报，第5卷，第 2 期，第 102–119 页，1960 年。 [3] A.Locatelli 和 S. Sieniutycz，“最优控制：导论”，应用力学评论，第 55 卷，第 3期，第 B48–B49 页，2002 年。 [4] E. F. Camacho 和 C. B. Alba，《模型预测控制》。Springer science & business media，2013。 [5] J. B. Rawlings，“模型预测控制教程概述”，《*IEEE*控制系统杂志》，第 20卷，第3 期，第 38–52 页，2000 年。 [6] C. E. Garcia、D.M. Prett和 M. Morari，“模型预测控制：理论与实践——综述”，*Automatica*，第 25 卷，第3 期，第 335–348页，1989 年。 [7] A.D. Ames、X.Xu、J. W. Grizzle 和 P. Tabuada，“基于控制屏障函数的安全关键系统二次规划”，*IEEE*自动控制汇刊，第 62卷，3876，2016 8，3861 第 – 期。[8] X.Xu、P. Tabuada、J.W.Grizzle 和A. D. Ames，“安全关键控制中控制屏障函数的鲁棒性”，*IFAC-PapersOnLine*，第48卷，第 27 期，第 54–61 页，2015 年。 [9] R. Grandia 、 A. J. Taylor 、 A. D. Ames和 M.Hutter，“通过控制屏障函数和模型预测控制实现腿式机器人的多层安全”，载于 *2021*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议（*ICRA*）。IEEE，2021 年，第 8352–8358 页。

[10] P. Raja和 S. Pugazhenthi，“移动机器人的最优路径规划：综述”，《国际物理科学杂志》，第7卷，第9期，第1314–1320页，2012年。 [11] I.Noreen、A. Khan 和 Z. Habib，“基于rrt*方法的最优路径规划：调查与未来方向”，《国际高级计算机科学与应用杂志》，第7卷，第11期，2016年。 [12] B. Riviere、W. H¨onig、Y. Yue和 S.-J.Chung，“Glas：通过端到端学习实现用于多机器人运动规划的全局到局部安全自主综合”，《IEEE机器人与自动化快报》，第5卷，第3期，第4249–4256页，2020年。 [13] H. Ma、J. Chen、S. Eben、Z. Lin、Y.Guan、Y.Ren 和 S.Zheng，“使用广义控制屏障函数的基于模型的约束强化学习”，载于《2021年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议》（IROS）。IEEE，2021年，第4552–4559页。[14] A. Agrawal 和 K. Sreenath，“具有双足机器人导航应用的离散系统安全关键控制的离散控制屏障函数。”载于《机器人学：科学与系统》，第13卷。美国马萨诸塞州剑桥，2017年。 [15] J. Zeng、Z. Li和 K. Sreenath，“利用离散时间控制屏障函数增强非线性模型预测控制的可行性与安全性”，载于《2021年第60届IEEE决策与控制会议》（CDC）。IEEE，2021年，第6137–6144页。 [16] J.Zeng、B. Zhang 和 K. Sreenath，“具有离散时间控制屏障函数的安全关键模型预测控制”，载于《2021年美国控制会议》（ACC）。IEEE，2021年，第3882–3889页。 [17] G. Williams、A. Aldrich 和E. A. Theodorou，“模型预测路径积分控制：从理论到并行计算”，《制导、控制与动力学杂志》，第40卷，357，2017年2，第344页。[18]M.S. Gandhi、B. Vlahov、J. Gibson、G. Williams和 E. A. Theodorou，“鲁棒模型预测路径积分控制：分析与性能保证”，《IEEE机器人与自动化快报》，第6卷，第2期，第1423–1430页，2021年。 [19] J.Tamimi 和 P. Li，“使用多重射击法结合有限元上的配点法进行非线性模型预测控制”，《IFAC会议论文集》，第42卷，第11期，第703–708页，2009年。[20] ——，“快速系统非线性模型预测控制的综合方法”，《过程控制杂志》，第20卷，第9期，第1092–1102页，2010年。 [21] O. Andersson、M. Wzorek、P. Rudol和 P. Doherty，“使用贝叶斯策略优化进行随机碰撞规避的模型预测控制”，载于《2016年IEEE机器人与自动化国际会议》（ICRA）。IEEE，2016年，第4597–4604页。 [22] A.Jain和 M. Morari，“使用贝叶斯优化计算赛车行驶线”，载于《2020年第59届IEEE决策与控制会议》（CDC）。IEEE，2020年，第6192–6197页。[23] Y. Vaupel、N. C.Hamacher、A. Caspari、A. Mhamdi、I. G.Kevrekidis 和 A. Mitsos，“通过机器学习加速非线性模型预测控制”，《过程控制杂志》，第92卷，第261–270页，2020年。 [24] D. Limon、J.Calliess 和 J. M. Maciejowski，“基于学习的非线性模型预测控制”，IFAC-PapersOnLine，第50卷，第1期，第7769–7776页，2017年。 [25] P. Akella、A. Dixit、M. Ahmadi、J.W.Burdick 和 A. D. Ames，“相干风险度量的基于样本的界：策略综合与验证的应用”，arXiv预印本 arXiv:2204 09833，2022年。[26] P. Akella、W. Ubellacker 和 A. D.Ames，“非线性安全关键最优控制的概率保证”，arXiv预印本 arXiv:2303.06258，2023年。[27] P. Akella、M. Ahmadi 和 A. D.Ames，“风险感知安全关键系统验证的情景方法”，arXiv预印本 arXiv:2203.02595，2022年。[28] M.C.Campi和 S. Garatti，“不确定凸规划随机解的精确可行性”，《SIAM优化杂志》，第19卷，第3期，第1211–1230页，2008年。 [29] L.A. Rastrigin，“极值控制系统”，Nauka，1974年。 [30] S. Wilson、P. Glotfelter、L. Wang、S. Mayya、G. Notomista、M.Mote和 M. Egerstedt，“Robotarium：远程访问的多机器人系统分布式控制所带来的全球影响力机遇、挑战与经验教训”，《IEEE控制系统杂志》，第40卷，第1期，第26–44页，2020年。