arXiv:2304.03744v1 [math.DS] 7 Apr 2023

射影平面上的调和叶状流与奇异 Levi平坦曲面的示例

穆罕默德·阿尔卡提布与胡利奥·雷贝洛

Abstract. 我们给出了复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上的一些叶状结构示例，它们承载着正叶状调和流，其支集与奇异 Levi-平坦集重合；这些 Levi-平坦集既可以选为实解析（但非代数的），也可以只是连续的，并具有分形横截结构。此外，次数为 2 和 3 的叶状结构中就已存在上述非平凡示例。此外，我们完整刻画了这些叶状结构的正叶状调和流空间，其中包含一个支集位于所讨论 Levi-平坦集上的唯一调和（非闭）流。最后，我们还给出了能够承载弥散正叶状闭流的叶状结构示例，这些流与 Brunella 的一个定理有关；同时也给出了 Riccati 叶状结构存在奇异实解析 Levi-平坦集的一般判据。

1. Introduction

本文旨在为复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构提供一些例子，这些叶状结构携带着——在动力学意义上颇具趣味的——正叶状调和流，并且可以在相当大的程度上对其进行详细描述。这些例子将包括这样的流：其支集或者是奇异的实解析 Levi 平坦超曲面，或者是具有分形性质且豪斯多夫维数大于 3的连续Levi平坦曲面。在本文中，若流 T 满足$i\partial\overline{\partial}T = 0$，则称其为调和流。特别地，闭流自动是调和的。然而，在适当的意义下，复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上允许非平凡正叶状闭流的叶状结构很少，而正叶状调和流的存在却是一个相当普遍的现象。例如，根据 Fornaess和Sibony [19], ，复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上所有仅具有双曲型奇点且不保持任何代数曲线不变的叶状结构，都存在唯一的正叶状调和流（且不存在闭流）。特别地， [31] 中构造的极小叶状结构存在唯一的正叶状调和流，并且其支集与整个 $\mathbb{CP}^2$ 重合。

从某种相反的角度来看， $\mathbb{CP}^2$ 上承载正叶状闭流的叶状结构中，最简单的例子是使某条代数曲线 $C \subset\mathbb{CP}^2$保持不变的叶状结构：曲线 C （可能是奇异的）上的积分流是正的、叶状的且闭的。一般而言，（正叶状）调和流／闭流的研究是一个非常活跃的领域，依托于多种不同的观点；大量文献对此予以印证，其中包括 [21], [8], [2], [18], [19], [10], [22], [12], [38], [13], [11] 等（参见所引论文的参考文献列表）。

然而，尽管关于其存在性和唯一性已有一些重要定理，例如 [19], 中的 Fornaess-Sibony定理，但人们对这些调和流的实际结构却知之甚少。例如，对于非闭调和流，目前基本上唯一可获得的信息，就是前面提到的事实：与 [31] 的叶状结构相关联的调和流具有全支集。特别是，这引出了一个亟待解决的问题：判定这些流是否绝对连续。

此外，由于复射影平面与若干重要猜想有关，因此它无疑是研究调和流结构最有趣的曲面之一。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：37F75、37A；次要分类号：32C07。1

这是 $\mathbb{CP}^2$所特有的，参见例如 [14]。毫不意外的是，在 $\mathbb{CP}^2$ 上构造合适的叶状结构面临特殊困难，这也解释了相关例子相对匮乏，以及我们为何聚焦于此情形。

关于对（非闭）调和流的研究，本文的主要结果由定理 A 概括。该定理似乎回答了 [16] 中提出的一个问题，并直接涉及 [14] 中提到的一些问题（关于 [14]，另请参见我们的定理 B）。该定理也可以被视为关于 $\mathbb{CP}^2$上的 Riccati叶状结构 的一般性陈述。

定理 A. 设 $\mathcal{F}$ 是射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上的一个 Riccati叶状结构，其仅具有简单的不变直线 C_1、.....、C_k。假设该叶状结构 $\mathcal{F}$围绕每条不变直线 C_i的局部整体映射是 射影特殊线性群 $(2,\mathbb{C})$ 的一个椭圆元素，并且该叶状结构 $\mathcal{F}$ 的整体整体群 $\Gamma \subset$ 射影特殊线性群 $(2,\mathbb{C})$ 是一个第一类福克斯型（分别为拟福克斯）群。那么，以下结论成立：

(a)存在一个拓扑维数等于3的闭集合 $\mathcal{L} \subset \mathbb{CP}^2$，它是叶状结构 $\mathcal{F}$的一个极小集合。换言之，$\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{F}$ 下是不变的，并且 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{L}$ 中的每个叶都在 $\mathcal{L}$中稠密。(b)如果 Γ是福克斯型的，那么 $\mathcal{L}$ 是一个具有 k 个奇点的实解析非代数集合，这些奇点全都是轨形型的。如果 Γ是拟福克斯的，那么 $\mathcal{L}$ 是一个豪斯多夫维数严格大于 3 的“奇异拓扑流形”，其奇异集再次由 k 个轨形型奇点组成。(c) 集合 $\mathcal{L}$ 承载唯一的正叶状调和流 T。流 T 不是闭的，并且其支集与整个 $\mathcal{L}$重合。(d) 曲面 $\mathbb{CP}^2$ 上的所有正叶状调和流所构成的空间由 T 以及由对每条不变直线 C_1、.....、C_k进行积分所诱导的闭流生成。(e) 流 T 按照 [18]的意义具有零（几何）自交数。

特别地，所讨论的流 T 似乎是第一个支集 $\mathbb{CP}^2$ 于内部为空的集合上，或换言之，支集于勒贝格测度为零的集合上的（非闭、叶状）正调和流。值得注意的是，这个支集可能非常规则（实解析），也可能仅仅连续且具有横向分形性质，其豪斯多夫维数严格大于 3。我们还应提及，与解析 Levi平坦曲面相关的定理 A 中的叶状结构在次数 2 时就已存在，而横向分形 Levi平坦曲面则可见于三次叶状结构。显式例子请参见第 3 节。

当全纯单值群 Γ 是福克斯型时，由 Lebl 定理 [29]可知，所得的 Levi平坦曲面 $\mathcal{L}$ 必然是非代数的：若它是代数的，那么 $\mathcal{L}$ 中的 $\mathcal{F}$ 的叶将是复代数曲线；但显然并非如此，因为这些叶在 $\mathcal{L}$ 中稠密（条目 (a)）。有趣的是，正如 [15]所示，$\mathcal{L}$中的 $\mathcal{F}$ 的叶的非代数性是阻止 $\mathcal{L}$ 成为代数对象的唯一障碍。最后请注意，定理 A 中的条目 (b) 给出了确保实解析 Levi平坦曲面存在的判据。 Γ 为福克斯型时，会得到具有非常简单奇点（轨形型）的奇异实解析 Levi 平坦超曲面 $\mathcal{L}$：从某种意义上说，$\mathcal{L}$ “奇异性最小”，值得特别指出这一点，因为它或许能为关于在 $\mathbb{CP}^2$上是否存在光滑莱维平坦曲面的著名问题带来一些启示。

此时有必要对闭叶状流作一些评论。尽管它们很少存在，但描述其存在情形的问题已引起了广泛关注，其中一个原因是它与小林双曲空间有关，见 [9], [35]。关于前者，我们的思路也使我们能够给出一些例子，以回答 N. Sibony 提出的问题；该问题的动机来自 Brunella 的结果，见 [6]。

首先回顾一下，若一个（正叶状）流与叶状结构 $\mathcal{F}$ 不变的某条代数曲线上的积分流重合，则称其为代数的。否则，称 T 为弥散的。还要回顾一下，若叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点 p 可在局部表示为一个全纯向量场，且其在线性部分 p 至少有一个特征值不为零，则称该奇点为简单奇点（参见第 2 节）。采用这一术语，并基于 Mcquillan [35]，的工作，Brunella 证明了：任何在 $\mathbb{CP}^2$ 上仅有简单奇点且存在 Ahlfors 型弥散（正叶状）闭流 T_A 的叶状结构 $\mathcal{F}$，其次数至多为 4，见 [6]。这促使 N. Sibony 思考：若去掉（或大幅弱化）对相应奇点的假设，是否仍能得到叶状结构 $\mathcal{F}$ 的次数上界。为此，本文第 3 节将证明以下定理：

定理 B. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个次数为 n 的叶状结构 $\mathcal{F}_n$，定义在 $\mathbb{CP}^2$ 上，并满足以下所有条件：

- 除了叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 的一个奇点外，其余奇点均为简单奇点。
- 叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 承载着不可数多个（相互独立的）弥散 Ahlfors 流。类似地，存在不可数多个从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{CP}^2$ 的全纯映射，它们与叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 相切，且具有 Zariski 稠密像。

不过请注意，并非所有（正）弥散叶状闭流都属于 Ahlfors 型，第 3 节也将列举一些例子。

让我们以概述本文的方式结束本引言。给定一个离散群作用，标准悬挂构造基本上会产生定义在某个纤维丛上的叶状结构。从这个意义上说，悬挂从不会在 $\mathbb{CP}^2$ 上产生叶状结构。然而，我们的策略将包括构造一些非常特殊的悬挂，然后系统地修改叶状结构/环境曲面，最终使整个结构适配于 $\mathbb{CP}^2$。自然地，这将要求我们克服一些困难，例如我们的基本对象（叶状流、实解析集）通常并非双有理不变。

在第2节中，我们展示如何在具有指定整体单值化的 $\mathbb{CP}^1$-丛上构造 Riccati 叶状结构（命题 2.1）。这一结果最早可追溯至 Birkhoff [3]，并在[30]中被重新发现。除背景介绍和补充材料外，第2节还包含命题 2.1 的一个相对简短的证明，其思路与 Lins-Neto 的论证相似。不过，我们的证明不仅使本文内容自成一体，还表明某些额外的选择总是可行的，而这种自由度有时在本文的研究过程中很有用。

在第3节中，我们运用命题 2.1，给出满足定理 A 条件的 $\mathbb{CP}^2$ 上的二次叶状结构示例，其整体单值化群为福克斯群，因而产生实解析 Levi 平坦超曲面。值得一提的是，这些二次示例实际上就是 [24] 中研究的 Halphen 向量场。类似地，我们展示了如何从三次情形出发构造横向分形 Levi-平坦集。本节的第二部分证明定理 B。第3节最后给出了一些非 Ahlfors 型的弥散正叶状闭流示例。第4节证明定理 A 中的陈述 (a) 和 (b)，但有一条特定引理（引理 4.7）除外；该引理的证明留到最后一节，因为证明定理 A 其余部分时也会用到类似技巧。

术语说明。在定理陈述中以及全文中，PSL $(2,\mathbb{C})$ 均被视为 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构群。PSL $(2,\mathbb{C})$ 中的元素分为双曲型、抛物型、椭圆型和恒等元。换言之，我们将单位矩阵单独列出，因此，每当称 PSL $(2,\mathbb{C})$ 中的某个元素为椭圆型或抛物型时，均意味着该元素不是恒等元。

致谢。我们谨怀念 N. Sibony，他对我们的例子颇感兴趣；他的英年早逝令我们所有人深感悲痛。我们还要感谢 T.-C. Dinh 和 V.-A. Nguyen，感谢他们

对这项工作的关注，以及围绕他们关于流的交理论的研究成果所进行的精彩讨论。特别感谢 R. Mol 为我们详细讲解（奇异）Levi平坦曲面。

两位作者均部分获得 CIMI 通过项目“群作用的复动力学、Halphen 与 Painlev´e 系统”提供的资助。

2. Riccati Foliations

设 R 是一条紧黎曼曲面， S 是其上的一个 $\mathbb{CP}^1$ 丛，投影记为 $\mathcal{P}: S \to R$。Riccati 叶状结构通常定义为曲面 S 上的奇异叶状结构 $\mathcal{F}$，它与 S 的纤维横截。该陈述可精确表述如下。存在一个有限集合 $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset R$，使得:

- 点 p_i 上方的纤维 $C_i = \mathcal{P}^{-1}(p_i)$ 在叶状结构 $\mathcal{F}$ 下不变， $i = 1$， ....., k。
- 叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶在不变纤维 C_i 之外与 $\mathcal{P}$ 的纤维横截。特别地，叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点全都包含在不变纤维 C_i 的并集中。

因此，将 $\mathcal{F}$限制在开曲面 $S \setminus \{C_1, \ldots, C_k\}$上是正则的；事实上，它横截于位于（开）黎曼曲面 $R \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$中各点上方的 $\mathcal{P}$ 的纤维。于是，标准的整体单值表示给出了一个同态ρ： $\pi_1(R \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \to \text{Aut}(\mathbb{CP}^1) \simeq$射影特殊线性群$(2, \mathbb{C})$。整体整体群 $\Gamma = \rho(\pi_1(R \setminus \{p_1, \ldots, p_k\})) \subset$射影特殊线性群$(2, \mathbb{C})$编码了叶状结构 $\mathcal{F}$的全部横向动力学。

然而，在本文中，我们将重点关注经典的Riccati叶状结构；在这种情况下，底空间 R 再次是复射影直线 $\mathbb{CP}^1$，因此曲面 S 是一个 $\mathbb{CP}^1$-纤维丛，其底空间为$\mathbb{CP}^1$，从而是一个希策布鲁赫曲面 F_n、 $n \geq 0$。回忆一下， $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，并且对于 $n \geq 1$， F_n 被完全刻画为一个以 $\mathbb{CP}^1$ 为底空间、以自交数为 $-n$的有理曲线作为截面的 $\mathbb{CP}^1$-纤维丛，参见 [1]。

回忆一下， F_n 具有由四个仿射坐标构成的标准图册。更确切地说，考虑 $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$的两个副本。第一个副本赋有两对仿射坐标，即 (x, y) 和 $(\overline{x}, \overline{y})$，它们满足 $x = \overline{x}$和 $y = 1/\overline{y}$。第二个副本则赋有坐标 (u, v) 和 $(\overline{u}, \overline{v})$，并满足类似的关系。于是，曲面 F_n 可通过将第一个副本中的点 (x, y) 与第二个副本中 $= (1/x, x^n y)$ 的点 (u, v) 识别而得到。通过这种识别，自交数为 $-n$ 的截面就是由 $\{y = 0\}$ ($\{v = 0\}$) 定义的有理曲线，通常称为零截面。

现在考虑定义在第一 Hirzebruch 曲面 F_1 上的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$。横截性条件确保，在上述仿射坐标 (x, y) 中，叶状结构 $\mathcal{F}$ 由具有以下形式的向量场诱导。

$$F(x)\frac{\partial}{\partial x} + [c_0(x) + c_1(x)y + c_2(x)y^2]\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

其中 F、 c_0、 c_1和 c_2 是多项式。特别地，如果 c_0 是一个非零常数，那么叶状结构 $\mathcal{F}$ 与曲面 F_1 的零截面横截，但可能在“无穷远点”处除外。在这方面，总是可以选择坐标，使所得的无穷远纤维不被叶状结构 $\mathcal{F}$ 保持不变，从而叶状结构 $\mathcal{F}$ 的不变纤维与多项式 F的零点自然对应。此外，如果一个不变纤维对应于 F的一个单零点，则称其为简单的；否则称其为重纤维。

单纤维还有一种替代定义，它更具内在性，因为不依赖于特定的坐标系，而是取决于奇点的特征值这一概念。回顾一下，在复曲面上，每个全纯叶状结构 $\mathcal{F}$ 局部都由一个仅有孤立零点的全纯向量场 X 的积分曲线给出。满足这一条件的向量场称为叶状结构 $\mathcal{F}$ 的局部代表。

现在，若 p 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的一个奇点，则叶状结构 $\mathcal{F}$ 在奇点 p 处的特征值，定义为代表向量场 X 在点 p 处线性部分的特征值。由于两个代表向量场相差一个可逆函数的乘积，因此叶状结构在奇点 p 处的特征值仅在乘法常数意义下确定，参见 [27] 和 [42]。根据这一术语，不难验证：Ricatti叶状结构的不变纤维是单纤维，当且仅当该纤维上的每个奇点在垂直于不变纤维本身的方向上都有一个非零特征值。此外，这一概念不依赖于奇点的选择：如果一个奇点在垂直于不变纤维的方向上有非零特征值，那么同一纤维上的任何其他奇点也有非零特征值。在这方面，方程（1）表明，Ricatti方程的不变纤维至少包含一个奇点，至多包含两个奇点。

接下来，令 Γ 为射影特殊线性群PSL $(2,\mathbb{C})$ 的一个子群，并选取一个生成集 $\{M_1,\ldots,M_{k-1}\}$。再选择（两两不同的）点 $\{p_1,\ldots,p_k\}$ 于 $\mathbb{CP}^1$ 中，并令 $B=\mathbb{CP}^1\setminus\{p_1,\ldots,p_k\}$。以下命题在我们的论文中发挥着基础作用。该命题可追溯至 Brikhoff[3] 和 [4] ，尽管 A. Lins-Neto 在 [30]中给出了独立的处理。为方便读者，我们在下文表述一个准确的陈述（命题 2.1），并提供一个自洽的证明，该证明与 [30]中给出的证明相似。除了使论文更加自洽之外，本文给出的证明还突出了构造中的某种灵活性，这将在论文进行过程中发挥作用。

命题 2.1.（参见 [3] 和 [30]）采用上述记号，在曲面 F_1 上存在一个 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$，满足以下条件：

- 叶状结构 $\mathcal{F}$ 恰好使分别位于点$\{p_1,\ldots,p_k\}$上方的 k 个纤维保持不变。所有这些纤维都是简单的。
- 对于每个 $i\in\{1,\ldots,k-1\}$，绕点 p_i 的一条小简单闭路所产生的局部整体映射，与由矩阵M_i标识的 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构相同。
- 绕点 p_k 的一条小简单闭路所产生的局部整体映射，与由矩阵 $M_k=(M_{k-1}\ldots M_1)^{-1}$产生的 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构相同。

特别地，叶状结构 $\mathcal{F}$ 的整体整体群与 Γ相同。

证明。对于每个 $i\in\{1,\ldots,k\}$，令 $\gamma_i\subset\mathbb{CP}^1$ 为绕点 $p_i\in\mathbb{CP}^1$的一条小简单闭路。$B=\mathbb{CP}^1\setminus\{p_1,\ldots,p_k\}$ 的基本群 $\pi_1(B)$由 γ_1，.....，γ_k 生成，并满足关系 $\gamma_1*\cdots*\gamma_k=\mathrm{id}$。接着，我们定义一个表示 ρ，从 $\pi_1(B)$ 到 PSL $(2,\mathbb{C})$，令$\rho(\gamma_i)=M_i$，其中 $i=1$，.....，k。同态 ρ定义良好，因为 $M_k=(M_{k-1}\ldots M_1)^{-1}$，因此 $M_kM_{k-1}\ldots M_1=\mathrm{id}$。此外，按构造可得 $\rho(\pi_1(B))=\Gamma$。

接下来，我们使用标准悬挂构造，得到一个 $\mathbb{CP}^1$丛 N ，其底空间为 B，并配备叶状结构 $\mathcal{D}$ 。该叶状结构与其纤维横截，且其整体全纯群为 Γ。事实上，与 $\mathcal{D}$ 相关联、由环绕缺失点 p_i 的小回路 $\sigma_i\subset B$ 产生的整体映射，恰好是由 M_i诱导的自同构。

流形 N 显然是开集，因为基底 B 也是如此。为了获得一个紧流形和一个（扩展的）奇异叶状结构，我们将“填充” N中每个缺失的纤维。显然，记 $\mathcal{P}:N\to B$ 为丛投影，只需说明如何在点 p_1 上方“填充”纤维 $\mathcal{P}^{-1}(p_1)$即可。为此，我们考虑围绕 p_1 的小圆盘 D ，其边界 ∂D 与回路 σ_1相识别。借助局部坐标 u， D 可以看作围绕$0\in\mathbb{C}$的一个圆盘。首先，我们将在乘积 $D\times\mathbb{CP}^1$ 上构造一个Riccati叶状结构 $\mathcal{F}_1$ ，它只有一个不变纤维，位于 $0\in D\subset\mathbb{C}$上方，并且其整体单值化由矩阵 M_1 给出。为了构造叶状结构 $\mathcal{F}_1$，接着我们在 $D\times\mathbb{CP}^1$ 上考虑坐标 (u,v)，其中 u 如上

且 v 是 $\mathbb{CP}^1$上的仿射坐标。然后，叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 由以下向量场的积分曲线给出

$$\begin{cases} u\frac{\partial}{\partial u} - (\frac{1}{2\pi i})\frac{\partial}{\partial v}, & \text{if } M_1 \text{ is parabolic,} \\ u\frac{\partial}{\partial u} + av\frac{\partial}{\partial v}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，上述叶状结构可以全纯延拓为$D \times \mathbb{CP}^1$上的 Riccati 叶状结构。此外，若 M_1 不是抛物型，则相应的整体映射固定点 $v = 0$，直接观察可知，该不动点的乘子为 $e^{2\pi i a}$ ($a \in \mathbb{C}^*$和 $\Re(a) \in [-1, 1]$，其中 $\Re(a)$表示 a的实部。反之，当 M_1 为抛物型时，整体映射由 $v \mapsto v - 1$ 给出，因此它只有一个不动点，对应于$v = \infty$，其乘子等于 1。特别要注意，选择 $a = \pm 1$ 会导致平凡的整体单值化。

要完成对“缺失”纤维的“填补”，只需证明可以在穿孔圆盘 D^*上将叶状结构 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}_1$ 粘合起来。将这些叶状结构粘合起来，相当于构造一个全纯微分同胚 h，使其从 $D^* \times \mathbb{CP}^1$ 映到 $\mathcal{P}^{-1}(D^*)$，并将叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 映到叶状结构 $\mathcal{D}$。虽然并非必不可少，但此时提醒读者：根据 Fisher 和 Grauert 的定理 [17]，每个全纯 $\mathbb{CP}^1$-丛在全纯意义下都是局部平凡的。首先，我们使用公共坐标 u 并固定一个基点 $q \in D^*$。$D^* \times \mathbb{CP}^1$ 中的纤维 $(q, \mathbb{CP}^1)$赋有坐标 v。要将 $(q, \mathbb{CP}^1)$与纤维 $\mathcal{P}^{-1}(q)$等同起来，我们需要在 $\mathcal{P}^{-1}(q)$上选取一个仿射坐标 w。w 的选取如下：

- 如果 $a = \pm 1$，即整体映射与恒等元重合。那么 w 是 $\mathcal{P}^{-1}(q)$ 中任意的仿射坐标，且该识别为 $v = w$。
- 如果整体映射既不是恒等元也不是抛物型。那么我们选择 a 和 w，使得 w 的原点与整体映射的一个乘子等于 $e^{2\pi i a}$ 的不动点重合，并令 $v = w$。
- 如果整体映射是抛物型，那么 w 的原点就是整体映射的不动点，且识别为 $w = 1/v$。

微分同胚 h 随后定义在（$q, \mathbb{CP}^1$）上，规定 h 根据相应纤维的识别，将（$q, \mathbb{CP}^1$）中的点映射到 $\mathcal{P}^{-1}$（q）中的点。接下来只需将 h 延拓到 $D^* \times \mathbb{CP}^1$。这是通过对叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{D}$ 的叶（后者限制在 $\mathcal{P}^{-1}$（D^*）上）采用标准的路径提升方法来完成的。路径提升显然是可能的，因为丛投影在 $\mathcal{F}_1$ 或$\mathcal{D}$ 的任意（正则）叶上的限制都是基底的覆盖映射（这些叶状结构是 Riccati叶状结构）。此外，微分同胚h 在整体上定义良好，因为其沿着绕 $0 \in \mathbb{C}$ 的一条环路的延拓与其在（$q, \mathbb{CP}^1$）上的初始定义一致。事实上，（$q, \mathbb{CP}^1$）上的 h 由坐标 v 和 w 所提供的识别确定，因此它共轭相应的整体映射。

总结前文，上述粘合构造使我们能够在一个 N' 恰好是 $\mathbb{CP}^1$上的 $\mathbb{CP}^1$纤维丛的紧致曲面上定义一个Riccati叶状结构，仍记作 $\mathcal{D}$。此外，Riccati叶状结构 $\mathcal{D}$ 恰好具有 k 个不变纤维，并满足所要求的整体单值条件。最后，由于曲面 N' 是 $\mathbb{CP}^1$上的 $\mathbb{CP}^1$纤维丛，因此 N' 是一个希策布鲁赫曲面 F_n, $n \geq 0$。因此，为完成该命题的证明，只需验证我们可以不失一般性地假设 N' 实际上是 F_1。

假设所得的曲面 F_n 与 F_1不同，我们将展示如何对该曲面进行修改，使其变为 F_1，同时保留关于变换后的叶状结构（仍记为 $\mathcal{D}$）的所有条件。具体做法是，在 F_1与 F_n之间构造一个适当的双有理映射。该双有理映射由从 F_n 到F_{n-1} 的一系列（双有理）映射复合而成，这些映射定义如下。选取一个远离零截面的基点 $q \in F_n$

（即自交数为 $-n$ 的截面），并且位于纤维 $\mathcal{P}^{-1}(q_0)$ 中，与叶状结构 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 横截相交。随后对曲面 F_n 在 q 处进行爆破，使得新曲面 F_n 现在具有两条自交数为 -1 的有理曲线。也就是说，例外除子 E 和纤维 $\mathcal{P}^{-1}(q_0)$ 的$\widetilde{\quad}$变换 $\widetilde{\mathcal{P}^{-1}(q_0)}$。爆破后的曲面还具有一条自交数为 $-n$ 的有理曲线，即零截面的变换。接下来，将 (-1)- 曲线 $\widetilde{\mathcal{P}^{-1}(q_0)}$ 收缩，得到一个新曲面。我们断言如下：

断言。通过压缩 $\mathcal{P}^{-1}(q_0)$的变换所得的曲面是 F_{n-1}，而 E 的变换是相应纤维化的一个纤维。叶状结构 $\mathcal{D}$ 在F_{n-1} 上诱导出新的叶状结构 $\mathcal{D}_1$，并多出一个不变纤维，即 E的变换。然而，这个不变纤维的整体单值化是平凡的。

$\widetilde{\quad}$断言的证明。显然，通过压缩 $\mathcal{P}^{-1}(q_0)$， E 的变换可嵌入 F_n 先前的纤维化中，因此所得曲面仍是 $\mathbb{CP}^1$ 上的 $\mathbb{CP}^1$丛，$\widetilde{\quad}$故而是一个希策布鲁赫曲面。然而，由于 F_n 上的零截面的变换与$\widetilde{\mathcal{P}^{-1}(q_0)}$在一点处横截相交，其在所得希策布鲁赫曲面上的像给出一个自交数为 $-n+1$的截面。因此，经过这一过程最终得到的曲面确实是F_{n-1}，见 [1]。

$\widetilde{\quad}$关于由 $\mathcal{D}$ 在 F_{n-1}上诱导的叶状结构，请注意， $E \subset F_n$ 在吹起后的$\widetilde{\quad}$叶状结构 $\mathcal{D}$ 下是不变的，因为它来自对 $\mathcal{D}$的一个正则点进行吹起。出于同样的原因， E 恰好包含 $\mathcal{D}$ 的一个奇点，因此 E （ $\mathcal{D}$的叶）的正则部分是单连通的，从而其整体单值化平凡。断言的其余部分可由这两点立即得出。□

通过依次应用前述构造，我们在曲面 F_1 上得到一个Riccati叶状结构 $\mathcal{D}'$，它满足整体单值化方面的要求，但还具有有限多个额外的不变纤维，每个纤维上的整体单值化都是平凡的。为了完成证明，我们只需说明如何“消去”这些整体单值化平凡的不变纤维。这意味着可以在不改变其局部整体映射的情况下修改叶状结构 $\mathcal{D}'$，从而得到一个新的叶状结构，使原来的不变纤维成为正则横截纤维。然而，这一断言的证明相当简单。这又是一个粘合过程。因此，固定这样一个纤维 $\mathcal{P}^{-1}(q)$。利用底空间上的局部坐标 u，我们将 $\mathcal{P}^{-1}(q)$ 识别为乘积 $D \times \mathbb{CP}^1$。另一方面，在 $D \times \mathbb{CP}^1$上，我们考虑水平叶状结构 $\mathcal{H}$。同样，证明的关键是将叶状结构 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{H}$ 分别在 $\mathcal{P}^{-1}(D^*)$ 和 $D^* \times \mathbb{CP}^1$上粘合起来。不过，粘合微分同胚 h：$D^* \times \mathbb{CP}^1 \to \mathcal{P}^{-1}(D^*)$ 的构造与前述构造完全相同。事实上，绕相关纤维由 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{H}$ 产生的局部整体映射都平凡，因此上述构造仍然适用。命题（2.1）的证明至此结束。□

注2.2. 注意，命题2.1中构造的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$ 的不变纤维均为简单纤维，因为该叶状结构的奇点 $\mathcal{F}$ 总有一个与横截于不变纤维的方向相关联的非零特征值。

本文主要致力于构造复射影平面$\mathbb{CP}^2$上的叶状结构，因此我们需要明确 Riccati叶状结构在 $\mathbb{CP}^2$上的含义。由于在任意一点处对曲面 $\mathbb{CP}^2$ 进行爆破，得到的曲面与曲面F_1同构，因此定义十分直接。

定义 2.3. 如果复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构是通过压缩希策布鲁赫曲面 F_1 上的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$ 中的（-1）有理曲线而得到的，则称其为 Riccati叶状结构。换言之，如果叶状结构 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 上有一个奇点，对该点进行爆破后得到 F_1上的 Riccati叶状结构，那么 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ 就是 Riccati叶状结构。

在下文中，我们主要关注 $\mathbb{CP}^2$ 或 F_1上的Riccati叶状结构，其整体全纯群是PSL（2,$\mathbb{C}$）的某些特定子群，并配有特定的生成集。与命题（2.1）的表述相比，然而，与不变纤维相对应的点p_1、.....、p_k的选择并不重要。因此，固定一个群 $\Gamma \subset$PSL（2,$\mathbb{C}$）及其生成集 $\{M_1, \ldots, M_{k-1}\}$后，短语“由 Γ和 $\{M_1, \ldots, M_{k-1}\}$产生的 Riccati叶状结构”将用于指称命题 2.1 中针对点 p_1、.....、p_k的任意选择，在曲面 F_1上得到的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$。或者，读者也可以在全文中固定一种特定的选择，例如令$p_1 = 0$、 $p_2 = 1$、 $p_3 = \infty$，然后对于 $i = 4$、.....、k令 $p_i = i$。类似地，我们所说的 $\mathbb{CP}^2$ 上的Riccati叶状结构（由 Γ和 $\{M_1, \ldots, M_{k-1}\}$产生），是指将先前在 F_1上的Riccati叶状结构沿 $\mathbb{CP}^2$压缩后得到的叶状结构。在记号方面，F_1 上的 Riccati叶状结构通常记作 $\mathcal{F}$，而 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ 则表示 $\mathbb{CP}^2$上的 Riccati叶状结构。

我们以关于 $\mathbb{CP}^2$ 上叶状结构次数的一点说明来结束本节。首先请注意，每个齐次多项式向量场 X 在 $\mathbb{C}^3$ 上都会在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导一个叶状结构，除非 X 是径向向量场 $R = x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2 + x_3\partial/\partial x_3$ 的倍数。事实上，由于 X 是齐次的，与向量 $X(p)$ 相关联的方向在 $\mathbb{C}^3$ 经过 p 的径向直线上保持不变，其中 $p \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$。此外，如果 X 不是径向向量场的倍数，那么对于一般点 p，向量 $X(p)$ 会在 $T_{q=P(p)}\mathbb{CP}^2$ 上诱导一个定义良好的方向，其中 $P\colon\ \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{CP}^2$ 表示典范投影。特别地，X 在 $\mathbb{CP}^2$ 上定义了一个奇异叶状结构。反过来，曲面 $\mathbb{CP}^2$ 上的每个奇异全纯叶状结构，都可以通过前述构造由 $\mathbb{C}^3$ 上的齐次多项式向量场得到，参见例如 [27]。此外，如果我们要求齐次向量场 X 的零点集合的余维数至少为 2，那么任何一对在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导相同叶状结构的齐次向量场 X 和 X' 都必须具有相同的次数。因此，下面的定义是合理的：

定义 2.4. $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的次数，是指 $\mathbb{C}^3$ 上的齐次多项式向量场 X 的次数，该向量场的奇异集的余维数至少为 2，并且通过典范投影 $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{CP}^2$在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导出 $\mathcal{F}$。

结束本节时，我们提及，$\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶层次数也可以定义为 $\mathcal{F}$ 与一条一般射影直线的切触点数，参见 [27] 和 [42]。最后，在Riccati叶状结构这一特殊情形下，下面的引理广为人知，其直接证明可留给读者。

引理2.5. 设 $\mathcal{F}$ 是 F_1 上的一个 Riccati叶状结构，并记 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ 为 $\mathbb{CP}^2$上相应的Riccati叶状结构。假设 $\mathcal{F}$ 恰好有 k 个不变纤维，且它们全都是简单的。那么，$\mathcal{F}_{\mathbb{P}}$ 作为 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构的次数等于 $k - 1$。□

3. Examples of Riccati foliations and Theorem B

本节旨在详细介绍命题2.1 的两个应用。首先，我们将展示如何获得 $\mathbb{CP}^2$ 上满足定理A 条件且具有实解析Levi-平坦集的次数 2叶状结构的例子。类似地，我们还将构造如定理 A中所述、具有横向分形 Levi-平坦集的三次叶状结构。然后我们将转向定理 B，再次应用命题 2.1 来构造相应的叶状结构。

3.1. 次数为 2 或 3 的 Riccati 叶状结构的两个例子。我们先从三角群开始，更准确地说，从没有尖点的三角群开始。如下所示。设$m_i \in \mathbb{Z}_+^*$、 $i = 1$、2、3 是满足条件的三个正整数。

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1\,, \tag{2}$$

并令 $\mathsf{m} = (m_1, m_2, m_3)$。众所周知，在共轭意义下，恰好存在一个由 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 中元素 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 组成的三元组，满足以下关系

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \xi_1^{m_1} = \xi_2^{m_2} = \xi_3^{m_3} = \mathrm{id}\,. \tag{3}$$

因此，由 ξ_1、 ξ_2 和 ξ_3 生成的 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的子群 Γ 在 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的内自同构意义下是唯一的。群 Γ 称为与无序三元组 $\mathsf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ 相关联的三角群。这些三角群恰好是离散的，并且共轭于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的一个子群。换句话说，上述三角群 Γ 是福克斯群。显然，双曲圆盘 $\mathbb{D}$ 关于 Γ 的商空间自然是一个具有三个奇点的球面轨形，例如参见 [28]。

例 1. 取 $\mathsf{m} = (m_1, m_2, m_3)$，其中 $m_i \in \mathbb{Z}_+^*$、 $i = 1$、2、3 满足条件 (2)，并记 $\mathcal{F}^{(\mathsf{m})}$ 为曲面 F_1 上的 Riccati叶状结构；该曲面由将命题 2.1 应用于具有生成集 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 的群 Γ 而得到。

因此，这里要考虑的 $\mathbb{CP}^2$ 上的第一族 Riccati叶状结构是 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}^{(\mathsf{m})}$。换言之，对每个固定的 m， $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}^{(\mathsf{m})}$ 是由 $\mathcal{F}_{(\mathsf{m})}$通过将曲面 F_1 中的 (-1)- 曲线压缩而得到的叶状结构。

注意，由引理 2.5 与注 2.2 的结合可知，整个叶状结构族 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}^{(\mathsf{m})}$ 都由次数为 2 的叶状结构构成。或者，我们可以考虑以下 3 参数族

$$\begin{aligned} X_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \;=\; & [\alpha_1 z_1^2 + (1-\alpha_1)(z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3)]\frac{\partial}{\partial z_1} \\ & + [\alpha_2 z_2^2 + (1-\alpha_2)(z_1z_2 - z_1z_3 + z_2z_3)]\frac{\partial}{\partial z_2} \\ & + [\alpha_3 z_3^2 + (1-\alpha_3)(-z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)]\frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^3$ 上的二次向量场，对应于 A. Guillot 在 [24] 中深入研究的 Halphen 向量场族。特别地，$\mathcal{F}_{\mathbb{P}}^{(\mathsf{m})}$ 叶状结构存在 Levi平坦这一点已在 [24] 中指出。作为 $\mathbb{C}^3$ 上次数为 2 的齐次向量场族，它们在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导的叶状结构的次数均为 2。要得到叶状结构 $\mathcal{F}_{\mathbb{P}}^{(\mathsf{m})}$，只需选择参数 α_1、 α_2 和 α_3，使得 $m_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2)/\alpha_i$。

备注 3.1。 [24] 中也讨论过、且逃逸出定理A所设情形的 Halphen向量场的一种情形发生于 $\alpha_1 = -6$、 $\alpha_2 = -4$和 $\alpha_3 = 0$。在此情形下，所得的三角群获得一个尖点，并且事实上同构于射影特殊线性群$(2,\mathbb{Z})$。换言之， ξ_1 和 ξ_2 分别是2 阶和 3阶的椭圆型元素，但 ξ_3 是抛物型元素。这个例子仍然具有一个奇异Levi平坦，然而其结构不同于定理A中所描述的结构。此外，对应的正叶状调和流的描述需要明显不同的论证，并将在未来的工作中讨论。

现在我们可以继续讨论 $\mathbb{CP}^2$ 上的一个三次Riccati叶状结构，它产生了一个横向分形 Levi 平坦超曲面。

例2。在本例中，我们首先考虑一个具有4个奇点（轨形型）的球面轨形。然后，我们借助黎曼一致化定理考虑由该轨形产生的福克斯群 Γ' 。更具体地说，我们可以利用庞加莱´定理来确保这些轨形的存在。事实上，如果 m_1、m_2、m_3 和 m_4是轨形型奇异点的阶数，那么所需福克斯群 Γ' 存在的条件变为（例如参见 [28]）

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}<2. \tag{4}$$

构造这样一个福克斯群相当简单，值得在此回顾。考虑从 $0\in\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ 出发的四条半径，相邻半径所成的角为 $\pi/2$ （例如 $\mathbb{R}_+$、$i\mathbb{R}_+$、 $\mathbb{R}_-$ 和 $i\mathbb{R}_-$）。现在，对于 $\tau\in(0,1)$，在每条半径上选取一点，使其到 $0\in\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ 的欧几里得距离为 τ。接着，通过双曲测地线段连接位于相邻边上的点，构造四边形 $\mathcal{Q}$。 $\mathcal{Q}$ 的边分别记为 l_1、l_2、l_3 和 l_4。然后，在每条边 l_i 上构造一个等腰三角形，使其对着边 l_i的角——即由三角形两条等长边所成的角——等于 $2\pi/m_i$。因此，这一构造得到一个星形双曲八边形，其边标记为 ξ_1、ξ_1'、……、ξ_4、ξ_4'（关于定向，见 [28]第 93 页的图 17）。此外，考察当 $\tau\to 0$ 和 $\tau\to 1$时该八边形面积的渐近值，可以看出， τ 可以选取为使所讨论的面积等于

$$2\pi\left[2-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{m_i}\right]. \tag{5}$$

根据构造，边 ξ_i 和 ξ_i' 具有相同的长度（$i=1$、2、3、4）。特别地，存在 H_i 的保定向自同构 $\mathbb{D}$，使得 $H_i(\xi_i')=\xi_i$。令 $\Gamma'\subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\simeq$射影特殊线性群$(2,\mathbb{R})\subset$射影特殊线性群$(2,\mathbb{C})$为由 H_1、H_2、H_3和 H_4 生成的群。于是，Poincar´e多边形定理的条件得到满足，从而 Γ' 是离散的，因而是福克斯型的；此外， $\mathbb{D}$ 关于 Γ' 的商空间同胚于通过按上述方式粘合八边形的边而得到的曲面（轨形）。直接检验可知，该商空间在拓扑上是一个带有四个标记（奇异）点的球面，这些点对应于由等腰三角形产生的八边形的顶点（角度为 $2\pi/m_i$的顶点）。这就完成了具有所需性质的福克斯群 Γ' 的构造。

本例所需的克莱因群 Γ 并非福克斯群 Γ'，而是 Γ'的某种拟共形变形。回顾一下，如果 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的一个离散子群保持一条不变的若尔当曲线 $\mathcal{J}\subset\mathbb{CP}^1$ ，且该曲线不是实射影圆（若是实射影圆，则该群为福克斯群），那么称该子群为拟福克斯群。特别地，由于 [5]，曲线 $\mathcal{J}$ 将处处不可微，且其豪斯多夫维数严格大于 1。

现在，虽然拟共形变形理论和贝尔同时一致化定理在黎曼曲面的情形下更为人所知，但在黎曼曲面轨形的情形下，类似的陈述仍然成立。关于包含椭圆元素的福克斯群的变形理论，读者可参阅 [37], 第4.4节。特别地，由此可知，这些具有四个奇点的球面轨形的泰希米¨勒空间，或者等价地，如 Γ' 上的福克斯群的泰希米¨勒空间，复维数为1。

那么，让 R 表示由福克斯群 Γ'产生的球面轨形。Bers 同时一致化定理为 R 的 Teichm¨uller 空间中的每个点 p 指定一个拟福克斯群 Γ，该群在共轭意义下唯一，并满足以下条件：

- 群 Γ 保持若尔当曲线 $\mathcal{J}$不变。因此， $\mathbb{CP}^1\setminus\mathcal{J}$的连通分支记为 D_1 和 D_2。

- 商空间 D_1/Γ 同构于轨形 R，而商空间 D_2/Γ 同构于由点 p参数化的球面轨形。

总结上述内容，取满足估计（4）的四个正整数 m_1、m_2、m_3 和 m_4，存在一个由拟福克斯群 Γ构成的复一参数族，其中群两两不共轭，并且该族参数化了一个具有四个奇点的球面轨形，这些奇点的阶恰好为 m_1、m_2、m_3 和 m_4。

最后，对于我们关于具有横向分形Levi-平坦集的Riccati叶状结构的例子，我们通过命题 2.1，考虑由上述福克斯群族产生的Riccati叶状结构族 $\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}$ 在 F_1 上。于是，所需的例子便是通过压缩 F_1中的(-1)-有理曲线而得到的相应Riccati叶状结构 $\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}_{\mathbb{P}}$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 上的例子。特别地，叶状结构 $\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}_{\mathbb{P}}$ 的整体全纯由上述拟福克斯群给出。读者还会注意到，所有叶状结构 $\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}_{\mathbb{P}}$ 都是三次的；这是由引理2.5 得出的，因为它们恰好具有四条不变直线，且这些直线全都是单的。

3.2. 具有弥散正叶状闭流的高次数叶状结构。本节将基于此前关于 Riccati叶状结构和命题 2.1 的一些思路证明定理 B。在本节中，我们还将准确表述若干涉及流与叶状结构的概念，这些概念同时出现在定理 A 和定理 B 中。

我们先介绍紧复曲面 M 上关于流的一些基本概念。令$\mathcal{D}^k$ 表示 M 上次数为 k 的（光滑）微分形式空间。维数为 k 的流空间 $\mathcal{D}'_k$（其中 $0 \leq k \leq 4$）是 $\mathcal{D}^k$ 的 C^∞ 拓扑对偶。流T 的次数也定义为 M 的实维数与 T 的维数之差。在局部坐标中，维数为 k 的流 T 作用于 k 阶微分形式 ω 的系数，表现为一个 $(4-k)$-形式。事实上，维数为 k 的流 T 可以表示为一个具有分布系数的 $(4-k)$ 阶微分形式。

外微分算子 d，以及标准算子 ∂ 和 $\overline{\partial}$，在流上的定义如下：令 $\langle dT, \omega\rangle = (-1)^{k'+1}\langle T, d\omega\rangle$，其中 T是次数为 k'的流，ω是一个 $(3-k')$-微分形式。∂ 和 $\overline{\partial}$ 在流上的作用也类似定义。特别地，流空间可按双次数 p,q分层。此外，若流 T 满足$dT = 0$，则称其为闭流；若满足 $i\partial\overline{\partial}T = 0$，则称其为调和流。

M 的复维数为 2，因此我们特别关注 (1,1)-流。回顾一下，若一个 (1,1)-形式局部可写成以下形式，则称其为弱正：

$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{i,j} dz_i \wedge d\overline{z}_j,$$

其中矩阵 $\{\alpha_{i,j}\}$ 在每一点都是半正定的。相应地，如果对每个弱正形式 ω，配对 $T \wedge \omega$ 都是正测度，则称 (1,1)-流为正流。

现在假设 M 具有一个（奇异）全纯叶状结构 $\mathcal{F}$。那么，在 M上的所有流中，我们可以寻找那些能够深入揭示叶状结构$\mathcal{F}$结构的流。这便引出了叶状流或定向流的概念。

定义 3.2. 设 M 是一个配备奇异全纯叶状结构 $\mathcal{F}$的复紧曲面。若 T上的一个流 M满足：当 β 是一个在叶状结构 $\mathcal{F}$的切空间上消失的 2-形式时，对于β都有 $T(\beta) = 0$，则称该流是叶状的，或由 $\mathcal{F}$定向。

在叶状坐标 (z_1, z_2) 中，叶状结构 $\mathcal{F}$ 由 $\{dz_2 = 0\}$给出。每个在叶状结构 $\mathcal{F}$的切空间上消失的 2-形式 β，都必须具有如下形式：$\alpha_1 dz_2 + \alpha_2 d\overline{z}_2$，其中 α_1, α_2是适当的 1-形式。由此可见，(1,1)-叶状流 T 必须具有如下局部形式

$$T = T(z_1, z_2)\, dz_2 \wedge d\overline{z}_2\,,$$

其中 T 被视为一个分布。特别地， T 是 (1,1) 型。此外，在叶状流的语境中，正流这一概念尤为直观：它仅表示 $T(z_1, z_2)$被视为一个正测度。

现在考虑正叶状形式 $T = T(z_1, z_2)dz_2 \wedge d\overline{z}_2$。此外，如果 T 是闭的，那么 $T(z_1, z_2)$ 关于 z_1 和 $\overline{z}_1$ 的分布导数必定为零。这意味着 $T(z_1, z_2)$ 在叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶片上本质上为常数，或者等价地， $T(z_1, z_2)$ 仅依赖于 z_2，因此自然诱导出横截空间上的一个正测度（罗赫林分解的一个特例）。

类似地，如果 T 是调和的，那么 $T(z_1, z_2)$ 在叶状结构 $\mathcal{F}$ 的叶片上产生一个调和函数，该函数的上界和下界均为严格正的常数。根据罗赫林分解， T 仍然在横截空间上定义了一个测度，该测度称为调和测度。

根据Sullivan [43], ，对于定义在紧流形上的正则叶状结构，正叶状闭流与横向不变测度一一对应，后者由Plante [40] 定义并在下文回顾。

定义 3.3. 设 $\mathcal{F}$ 是紧复流形 M 上的正则叶状结构，则该叶状结构 $\mathcal{F}$ 的横向不变测度由以下数据组成：

(1) 一个（有限）叶状图册 $\{(U_i, \varphi_i, \Sigma_i)\}$，其中 Σ_i 表示横截空间。(2) 对每个 i，在横截空间 Σ_i 上定义的一个有限测度 μ_i 。(3) 每当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时，由 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, z_2) = (f(z_1, z_2)\ h_{ij}(z_2))$ 定义的“粘合映射” h_{ij} 满足 $h_{ij}^* \mu_j = \mu_i$ ，只要等式两边都有定义。

对于奇异叶状结构，我们只需在开流形$M \setminus \mathrm{Sing}\,(\mathcal{F})$上重复上述定义，同时去掉对叶状图册 $\{(U_i, \varphi_i, \Sigma_i)\}$ 有限性的要求。显然，（正的叶状）闭流仍然会按照定义 3.3 的意义，给叶状结构 $\mathcal{F}$ 导出一个横向不变测度。只有反过来，即如何从给定的横向不变测度构造这样的流，才需要进一步讨论。

现在我们可以开始证明定理 B。固定 $n \in \mathbb{N}$，并考虑带有 $(n+1)$ 个标记点 $b_1, \ldots, b_{n+1}$ 的 $\mathbb{CP}^1$。再固定一个射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{C})$ 中表示无理旋转的椭圆元素 $\xi \in$，并令 Γ 为由 ξ 生成的子群。根据命题 2.1，令 $\mathcal{F}_n$ 为 F_1 上具有 $(n+1)$ 个简单不变纤维 $C_1, \ldots, C_{n+1}$ 的 Riccati叶状结构。更确切地说，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 围绕每个不变纤维 $C_1, \ldots, C_n$ 的局部整体映射与 ξ 一致，而绕 C_{n+1} 一周得到的局部整体映射则与 ξ^{-n} 一致。此外，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 的每个不变纤维 C_i 恰好包含两个该叶状结构的奇点，即：一点记为 p_i ，其叶状结构的特征值之比$\sim \mathcal{F}_n$ 为正实数（“汇”）；另一点记为 q_i ，其特征值之比为负实数（“鞍点”）。因此，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 有 $2n+2$ 个奇点，且它们全都是简单的。由命题 2.1 的证明中所述叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 在不变纤维 C_i 附近的局部模型可知，每个点 p_i （分别为 q_i）恰好有两条分离曲线。此外，其中一条分离曲线与不变纤维 C_i 重合，而另一条分离曲线也是光滑的，并且横截于不变纤维 C_i。在下文中，我们将 S_{p_i} （分别为 S_{q_i}）记作 $\mathcal{F}_n$ 在奇点 p_i （分别为 q_i）处横截于 C_i 的那条分离曲线。

引理 3.4. 不失一般性，我们可以假设所有分离曲线 S_{p_i} （分别为 S_{q_i}）都粘合成一条自交数为 1（分别为 -1）的不变于叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 的全局有理曲线。

~证明。回顾一下，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 的整体全纯单值群 Γ 由 ξ （即 $\Gamma = \langle \xi \rangle$）生成，并且在共轭意义下， Γ 在 $\mathbb{CP}^1$ 上的作用可在曲面 F_1 的任意一个不同于不变纤维 C_1、.....、C_{n+1} 的纤维中表示。

设 C_i 是一个不变纤维，并考虑一个靠近 C_i 的一般（非不变）纤维 Σ ，具体如下：与奇点 p_i、 q_i 相关联的局部分离曲线 S_{p_i}、 S_{q_i} 在定义良好的点 x_{p_i} 、x_{q_i} 处与 Σ 横截相交。显然，点 x_{p_i}、 x_{q_i} 是绕 C_i 的局部整体映射所得到的 Σ 的自同构的不动点。对于每个 $i = 1$, ..., $n + 1$，都可以进行这一构造。现在，通过平行移动将所有这些点表示在同一个纤维 Σ 上，它们必定（不计顺序）重合为两个定义良好的集合点；顺便指出，这两个点正是（一个共轭变换下的） ξ 的不动点。事实上，绕不变纤维的所有局部整体映射都相同（严格来说，除了纤维 C_{n+1} ，它对应于前述映射的 n^{th} 次幂）。换言之，给定任意两个不变纤维 C_i 和 C_j，要么有 $x_{p_i} = x_{p_j}$ 和 $x_{q_i} = x_{q_j}$ ，要么有 $x_{p_i} = x_{q_j}$ 和 $x_{q_i} = x_{p_j}$。然而，不失一般性，我们可以假设第一种情形成立。事实上，借助证明命题 2.1 中所述的、叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 在不变纤维 C_i 附近的局部模型，这种情况确实会发生：奇点的位置可以置换而不影响整体单值化。因此，我们可以确保所有分离曲线 S_{p_i}、 $i = 1$、.....、$n + 1$ 粘合在一起，从而定义一条不变紧曲线 R_p。类似地，分离曲线 S_{q_i}、 $i = 1$、.....、$n + 1$ 生成另一条不变紧曲线，记作 R_q。由于 Riccati 叶状结构相对于 F_1 的纤维是横截的，因此可立即得出， R_p 和 $\sim R_q$ 都是 F_1 的截面。然而，由于叶状结构 $\mathcal{F}_d$ 在奇点 p_i （分别为 q_i）处的特征值是正（分别为负）实数，根据 Camacho-Sad 指数定理 [7] ， R_p （分别为 R_q）的自交数为正（分别为负）。最后，众所周知，曲面 F_1 只有两个截面；顺便指出，它们是自交数分别为 1 和 -1 的有理曲线，见 [1]。引理得证。□

再次设 Σ 为 F_1 的一个一般纤维。由于 ~ 的叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 的整体全纯群 Γ 的生成元 ξ 是一个无限阶椭圆元素，因此 Σ 中存在连续多个在 ξ 作用下不变的圆。固定其中一个不变圆，并记为 S^1。注意， S^1 上的归一化勒贝格测度在 ξ 作用下不变。此外，截面 R_p 和 R_q 与 Σ 相交的点 x_p 和 x_q 是 ξ 的不动点，因此远离 S^1。

令 $\overline{\mathcal{F}(S^1)}$ 为叶状结构 $\sim\mathcal{F}_n$ 下不变圆 S^1 的饱和集合 $\mathcal{F}(S^1)$ 的闭包。我们首先要证明 $C_i \cap \mathcal{F}(S^1) = \{p_i\}$。为此，我们先从以下断言开始： $C_i \cap \mathcal{F}(S^1) \subset \{p_i, q_i\}$。为证明该断言，我们采用反证法。假设其为假。那么 $\mathcal{F}(S^1)$ 在不变纤维 C_i的一个正则点上聚集。由于叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ 在 q_i处有一个（可线性化的）鞍点奇点， $\mathcal{F}(S^1)$ 在不变纤维 C_i 的一个正则点上聚集这一事实意味着， $\mathcal{F}(S^1)$ 也必定在分离曲线S_{q_i} 的正则点上聚集。然而，分离曲线 S_{q_i} 在不动点 ξ 处与一般纤维 Σ 相交，而该不动点又是 $\mathcal{F}(S^1)$ 中点的聚集点。然而，这是不可能的，因为 $\mathcal{F}(S^1)$ 与 Σ 的交集是初始不变圆 S^1 ，它远离 ξ 的不动点。由此产生的矛盾证明了该断言。

接下来请注意，上述论证实际上表明，分离曲线 S_{q_i} 不能包含于 $\mathcal{F}(S^1)$ 中。因此， $\mathcal{F}(S^1)$ 不可能在奇点 q_i 处沿叶状结构 $\sim\mathcal{F}_n$ 的两条分离曲线中的任意一条聚集。由于奇点 q_i 位于 Siegel域中，这意味着$\mathcal{F}(S^1)$ 不可能聚集到奇点 q_i 本身。因此，交集 $C_i \cap \mathcal{F}(S^1)$ 只能是 ~~$= \{p_i\}$~~，因为它不可能为空。由此我们证明了 $C_i \cap \mathcal{F}(S^1) = \{p_i\}$ ，正如所要求的。 ———

对于每个 $i \in \{1, \dots, n+1\}$，设 $B_i \subset F_1$ 是奇点p_i 周围的一个小邻域，并取坐标 (z_1^i, z_2^i)，使得叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ 在 B_i 上的限制是线性的，即~叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 在局部由具有以下形式的向量场给出

$$z_1^i \frac{\partial}{\partial z_1^i} + \lambda z_2^i \frac{\partial}{\partial z_2^i},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q}$。类似地，对于每个 $B_i, i = 1,\dots,d+1$，令 $V_i \subset B_i$ 为一个（较小的）邻域~，它恰当地包含于 B_i中。由于叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 在 $\bigcup V_i$的补集上是正则的，考虑用叶状坐标 $\{(U_j, \varphi_j, \Sigma_j)\}_{j=1}^N$覆盖 $F_1 \setminus \bigcup V_i$。事实上，在以下~内容中，只需将 $\mathcal{F}_n$ 限制在 $\mathcal{F}(S^1)$上，把它视为由黎曼曲面构成的（奇异）层状结构即可，例如参见 [20]。

继续之前，回顾一下，若正叶状闭流与在一条（可能奇异的）代数不变曲线上积分所定义的流相差一个常数倍，则称其为代数的。否则，称该流为弥散的。类似地，给定一个（非常数）全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^2$，Ahlfors 流是一个正闭的 (1,1) 维流，它是一个序列的极限

$$\frac{f_*[D_{r_j}]}{\operatorname{Area}(f(D_{r_j}))}$$

其中 $r_j \to \infty$。这里 $[D_{r_j}]$ 表示圆盘 $D_{r_j} \subset \mathbb{C}$ 上的积分流，该圆盘的半径为r_j，面积 Area $(f(D_{r_j}))$ 就是相对于任意辅助黎曼度量计算的 $f(D_{r_j})$ 的面积。或者，Area $(f(D_{r_j}))$ 也可以定义为在D_{r_j} 上对 f 拉回的 $\mathbb{CP}^2$上的标准福比尼-施图迪形式进行积分。

~在下文中，将构造一个 T 上的 (1, 1)-正叶状闭流 F_1，此外它还是弥散的并且为 Ahlfors 型。基本上，由于奇点的存在，该构造将分两步进行。首先，考虑 F_1 上的 (1, 1)-微分形式 ω，并将其分解为 $\omega = \omega_1 + \omega_2$，其中 ω_1和 ω_2 分别是支集位于 $F_1 \setminus \bigcup V_i$和 $\bigcup B_i$上的 (1, 1)-微分形式。

首先对于我们将定义的微分形式~即支集包含于$F_1 \setminus \bigcup V_i$中的微分形式。这与 [43] 中的常规构造非常相似，因为奇点不起作用。~事实上，在这种情况下，为了定义 T，我们如下进行。由于叶状结构$\widetilde{\mathcal{F}}_n$ 的奇点远离 ω_1 的支集，取一个单位分解 $(a_j)_{j=1}^N$，其严格从属于覆盖$(U_j)_{j=1}^N$，即 $F_1 \setminus \bigcup V_i$的覆盖。乘积 $a_j\omega_1$ 可被视为Σ_j上的连续函数。事实上，我们可以考虑一个函数 $f_j\colon \Sigma_j \to \mathbb{C}$，定义为

$$z_2 \mapsto f_j(z_2) = \int_{P_{z_2}} a_j \omega_1(z_2),$$

~在 U_j中的叶状局部坐标（z_1，z_2）下，$\mathcal{F}_n$到 U_j的限制的叶片呈 $P_{z_2} \subset \mathbb{C} \times \{z_2\}$ 的形式，而横截面 Σ_j 变为 $\Sigma_j \subset \{z_1 = 0\}$。然后我们对这些函数进行积分并求和，得到该值

$$\widetilde{T}(\omega_1) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Sigma_j} f_j(z_2) d\mu_j(z_2) \right) = \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j} \left(\int_{P_{z_2}} a_j \omega_1(z_2) \right) d\mu_j(z_2)\,,$$

其中 $\{\mu_j\}$ 是由归一化勒贝格测度诱导的横向不变测度
在 S^1 上。

现在我们必须定义~的微分形式，即其支集包含于 $\bigcup B_i$ 的微分形式。不失一般性，我们可以假设 ω_2 的支集包含于 B_1。考虑

$\widetilde{\mathcal{F}_n}$ 在 B_1 上的限制 $\widetilde{\mathcal{F}_{|B_1}}$，并令 D_1 为该叶状结构的一个横截面。不变圆 $S^1 \subset \Sigma$ 诱导出一个圆 $S_1^1 \subset D_1$，它在 $\widetilde{\mathcal{F}_{|B_1}}$ 的整体单值化作用下保持不变。接下来，定义 $\Phi\colon\ \mathcal{S} \times S_1^1 \to B_1$，如下：

$$\Phi(t, y) = (e^t, ye^{\lambda t}),$$

其中 $\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(t) \leq 0,\ 0 \leq \mathrm{Im}(t) \leq 2\pi\}$。叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}_{|B_1}}$ 的叶随后由 Φ 参数化。更确切地说，对于固定的 $y \in S_1^1$，令 $\Phi_y\colon\ \mathcal{S} \to B_1$ 由 $\widetilde{\Phi}_y(t) = \Phi(t, y)$ 定义。然后令 $L_y = \{\Phi_y(t)\colon\ t \in \mathcal{S}\}$。显然，每个 L_y 都包含在 $\widetilde{\mathcal{F}_{|B_1}}$ 的一片叶中，而沿整体单值化群的一个轨道取这些叶片的并集，就得到所涉及的叶。因此，为使 T 定义良好，只需证明这个（非正常）二重积分

$$\int_{S_1^1} \left(\int_{L_y} \omega_2 \right) d\mu_1(y) \tag{6}$$

收敛。反过来，由于控制收敛定理和 Tonelli 定理，只要反常积分收敛，这个二重积分就收敛

$$\int_{L_y} \omega_2 = \int_{\mathcal{S}} \Phi_y^* \omega_2$$

是一致有界的（与 $y \in S_1^1$ 无关）。那么我们来证明，后一积分确实关于 y 一致有界。

为此，首先回忆一下，B_1 配备了坐标 $(z_1^1,\ z_2^1)$，其中叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}_n}$ 由向量场 $z_1^1\partial/\partial z_1^1 + \lambda z_2^1 \partial/\partial z_2^1$ 给出，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ 为无理数。特别地，L_y 由 $\Phi_y(t) = (e^t,\ ye^{\lambda t}) = (z_1^1,\ z_2^1)$，$t \in \mathcal{S}$ 参数化。（其中 $y \in S_1^1$）。因此，$dz_1^1 = e^t dt$、$dz_2^1 = \lambda y e^{\lambda t} dt$、$d\overline{z}_1^1 = e^{\overline{t}} d\overline{t}$ 以及 $d\overline{z}_2^1 = \lambda \overline{y} e^{\lambda \overline{t}} d\overline{t}$。令

$$\omega_2 = \sum_{s,k=1}^{2} a_{sk} dz_s^1 \wedge d\overline{z}_k^1,$$

我们得出

$$\Phi_y^* \omega_2 = \left(e^t e^{\overline{t}} a_{11} + \lambda \overline{y} e^t e^{\lambda \overline{t}} a_{12} + \lambda y e^{\overline{t}} e^{\lambda t} a_{21} + \lambda^2 |y|^2 e^{\lambda t} e^{\lambda \overline{t}} a_{22} \right) dt \wedge d\overline{t} = J(t, y) dt \wedge d\overline{t}\,.$$

其中，用稍微更明确的术语来说，J（t，y）由下式给出

$$e^{2\mathrm{Re}(t)} a_{11} + \lambda \overline{y} e^{(\lambda+1)\mathrm{Re}(t) + i(-\lambda+1)\mathrm{Im}(t)} a_{12} + \lambda y e^{(\lambda+1)\mathrm{Re}(t) + i(\lambda-1)\mathrm{Im}(t)} a_{21} + \lambda^2 |y|^2 e^{2\lambda \mathrm{Re}(t)} a_{22}.$$

由于 λ 为正实数，因此，在 $\mathcal{S}$ 上的各个函数 $e^{2\mathrm{Re}(t)}$、$e^{(\lambda+1)\mathrm{Re}(t) + i(-\lambda+1)\mathrm{Im}(t)}$、$e^{(\lambda+1)\mathrm{Re}(t) + i(\lambda-1)\mathrm{Im}(t)}$ 和 $e^{2\lambda \mathrm{Re}(t)}$ 的积分都绝对收敛。此外，$|y|$ 也一致有界，因为 $y \in S_1^1$；所有系数 a_{sk} 也有界，因为它们可与支集包含于 B_1 中的 C^∞ 函数对应。因此，（6）中的积分是收敛的。于是，T 与 ω_2 的耦合由下式给出

$$\widetilde{T}(\omega_2) = \sum_{j=1}^{d+1} \int_{S_j^1} \left(\int_{L_y} \omega_2 \right) d\mu_j(y)$$

在其支集包含于集合 B_i、$i = 1$、...、$d+1$ 的微分形式 ω_2 上定义良好。现在，该公式

$$\widetilde{T}(\omega) = \widetilde{T}(\omega_1 + \omega_2) = \sum_{s=1}^{N} \int_{\Sigma_s} \left(\int_{P_{z_2}} a_s \omega_1(z_2) \right) d\mu_s(z_2) + \sum_{k=1}^{d+1} \int_{S_k^1} \left(\int_{L_y} \omega_2 \right) d\mu_k(y)$$

在 F_1 上给出定义良好的流，因为它显然不依赖于分解$\sim\omega = \omega_1 + \omega_2$。显然， T是正的、叶状的且闭的。

定理 B 的证明。在前文中，我们构造了曲面 F_1上的一个 (1, 1)-弥散正叶状闭流 $\widetilde{T}$。只需验证流 T 确实是~Ahlfors 型。为此，首先注意，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 中包含于$\mathcal{F}(S^1)$的任意一叶 L 在 $\mathcal{F}(S^1)$中稠密，因为 γ 是无理旋转。接着考虑叶状结构 $\mathcal{F}_n$中包含于$\mathcal{F}(S^1)$的一叶 L_0 。注意， L_0经过奇点 p_i、 $i = 1$、.....、 $n + 1$，并具有无限多个分支。不过，除去这些奇点 p_1、.....、 p_{n+1}后，$\sim L_0$ 的增长类型由叶状结构 $\mathcal{F}_d$的整体全纯群 Γ 的增长决定。群Γ 是循环群，因此其增长是线性的。然而，先前考虑的 $\mathcal{F}_n$ 在集合 B_i 中的叶参数化~与全纯单值群Γ 的线性增长相结合，保证存在叶 L_0 的穷竭序列 $(D_{r_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ，使得

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mathrm{Length}(\partial D_{r_j})}{\mathrm{Area}(D_{r_j})} = 0,$$

其中， ∂D_{r_j} 表示 D_{r_j} 的边界，长度和面积则是相对于固定在 F_1上的辅助 Hermitian 度量计算的。特别地，作为黎曼曲面，叶 L_0 是 $\mathbb{C}$的一个商空间。同样，支集在$\mathcal{F}(S^1)$上的 Ahlfors 流 T_A 可以作为与穷尽$(D_{r_j})_{j\in\mathbb{N}}$相关联的归一化积分流序列的聚点得到。由于上述序列中的所有流显然都是叶状的，因此其聚点也具有这一性质。现在，作为一个叶状闭流， T_A 可以在 Σ 上作分解，从而在 S^1 上得到一个关于 ξ不变的测度。然而，由于 ξ 在 S^1 上的作用与无理旋转共轭，根据著名的 Weyl 定理，它存在唯一的不变概率测度。因此，除相差一个常数倍之外，T_A 和 T 在 $S^1 \subset \Sigma$上诱导相同的测度。于是，它们本身也只相差一个正实数倍。

为了完成定理 B 的证明，我们必须将此前在 F_1 上进行的构造调整到复射影平面 $\mathbb{CP}^2$上。考虑将 F_1 中的 (-1)-有理曲线压缩，由此得到向下吹映射 $\pi\colon F_1 \to \mathbb{CP}^2$ ，并令 $\mathcal{F}_n$ 为由此得到的叶状结构，定义在 $\mathbb{CP}^2$上。根据定义， $\mathcal{F}_n$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 上的 Riccati叶状结构，且恰有 $(n + 1)$ 条不变直线，全部都是简单的。因此， $\mathcal{F}_n$ 是 $\mathbb{CP}^2$上的次数为 n 的叶状结构，参见引理 2.5。~自然地，流 T 经 π 的推前再次给出 $\mathbb{CP}^2$上属于 $\mathcal{F}_n$ 的弥散 Ahlfors 流 T。最后，关于 $\mathcal{F}_n$的奇点，回顾引理 3.4， F_1 中的 (-1)-有理曲线经过所有“鞍点”奇点 q_i ，而避开所有“汇点”奇点 p_i、 $i = 1$、.....、 $n + 1$。因此有如下结论：

- 叶状结构的（$n + 1$）简单（汇）奇点 p_i 产生（$n + 1$） $\mathcal{F}_n$ 的简单奇点 $\mathcal{F}_n$。~
- 叶状结构的（$n+1$）简单（鞍点）奇点 q_i 位于收缩曲线中，并在 $\mathcal{F}_n$处合并为一个（ n阶退化）奇点。

在这些 $n + 2$ 奇点之外，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 是由 $\mathcal{F}_n$ 在相应的扎里斯基开集上诱导的正则叶状结构的微分同胚像~。定理 B 得证。□

我们用一些例子结束本节，这些例子表明，在 $\mathbb{CP}^2$ 上描述弥散正叶状闭流这一问题，超出了描述 Ahlfors 型流的范畴。

例 3. 希尔伯特模叶状结构是全纯叶状结构的典型例子，它们存在非 Ahlfors 型的弥散正叶状闭流。下文中，我们将讨论范围限制在复曲面的情形。设 N 为无平方因子正整数，并以 K 表示全实二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{N})$。 K 的整数环记为 O_K，而 Δ_K 表示 K 的判别式。K 在 $\mathbb{R}$ 中的两个自然嵌入诱导出射影特殊线性群 PSL $(2, K)$ 到 PSL $(2, \mathbb{R}) \times$ PSL $(2, \mathbb{R})$ 中的一个嵌入。通过此嵌入，希尔伯特模群 PSL $(2, O_K)$ 在上半平面的两个副本 $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 上作用 $\mathbb{H}$。在该作用的商空间中加入有限个尖点，即可将其紧化，从而得到一个二维正规奇异紧复空间。然而，该空间的奇点属于轨形型，源自 PSL $(2, O_K)$ 中的椭圆元。以典范的最小方式消解这些奇点后，我们得到一个代数曲面 $Y(\Delta_K)$，称为 K 的希尔伯特模曲面，参见 [25]

接下来注意到，$\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ 中按竖直方向和按水平方向的两个显然的上半平面叶状结构都在 PSL（$2, O_K$）的作用下保持不变。因此，希尔伯特曲面 Y（Δ_K）带有一对奇异叶状结构，它们在一个扎里斯基开集上彼此横截，这对叶状结构称为希尔伯特模叶状结构，并且尤其在 [36] 中得到研究。这些叶状结构记为 $\mathcal{H}$。 $\mathcal{H}$ 的扎里斯基稠密叶，即非代数叶，属于双曲型，因为它们是上半平面 $\mathbb{H}$ 的商空间。特别地， $\mathcal{H}$ 不带有 Ahlfors 型的叶状流。然而，我们有：

断言。 E 每个希尔伯特模叶状结构 $\mathcal{H}$ 都存在一个正叶状闭流 T。

证明。注意到，$(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$/射影特殊线性群$(2, O_K)$上 $\mathcal{H}$ 的横截空间，可以自然地视为 $\mathbb{H}$ 在射影特殊线性群 $(2, O_K) \subset$ 射影特殊线性群 $(2, \mathbb{R})$的作用下的商空间。从这一角度来看，子群射影特殊线性群$(2, O_K)$实际上是离散的，并且相应的作用具有一个有限双曲体积的基本域，参见 [25]。反过来，双曲测度在整体单值化下是不变的，因为它在局部与M¨oebius变换重合（参见 [36]中定理 1 关于 $\mathcal{H}$ 具有横截射影结构的断言）。换言之，$(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$/射影特殊线性群$(2, O_K)$上的叶状结构$\mathcal{H}$开曲面具有一个自然的横向不变测度，其含义见定义 3.3。随后，我们可以利用这一横向不变测度，依照 Sullivan 的一般理论，在相应的代数（紧）希尔伯特曲面 $Y(\Delta_K)$ 上为 $\mathcal{H}$ 生成一个叶状闭流。Sullivan的构造实际上在 $Y(\Delta_K)$ 上给出了一个良定义的流这一事实，可以通过直接改写前面的讨论加以验证，同时牢记 [25] 中紧化的结构。细节留给读者。□

上面构造的流显然是弥散的，因为 $\mathbb{H}$ 上的双曲测度没有原子部分。最后，为了构造定义在 $\mathbb{CP}^2$ 上的例子，我们注意到， [26] 中对有理希尔伯特曲面$Y(\Delta_K)$进行了分类。它们对应于 Δ_K 取值为 5、8、12、13、17、21、24、28、33、60 的情形。因此，这些曲面与 $\mathbb{CP}^2$ 双有理等价。再次，只需沿着相关的双有理映射追踪，即可确认初始的弥散正叶状闭流被推前为 $\mathbb{CP}^2$ 上相应叶状结构的适当弥散正叶状闭流。

4. Riccati equations and singular Levi flats

本节开始直接证明定理 A。下文将给出一个一般性的充分判据，用于判断 $\mathbb{CP}^2$ 上的 Riccati叶状结构是否存在（奇异）Levi平坦曲面，无论它们是实解析的，还是仅连续且具有分形性质。本节的内容概述于定理 4.1，该定理证明了定理 A 的若干部分。

考虑希策布鲁赫曲面 F_1 上的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$，以及一个简单的不变纤维 C。回顾一下，该叶状结构 $\mathcal{F}$ 在不变纤维 C 上有一个或两个奇点，参见方程（1）。此外，容易验证：

- 如果叶状结构 $\mathcal{F}$ 在不变纤维 C中有两个奇点，那么在每个奇点处，与不变纤维 C 相切方向相关联的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的特征值必然不为零。此外，由于不变纤维 C 还是简单的，这些奇点中的每一个都将具有两个非零特征值。具有两个 λ_1 和 λ_2 非零特征值的奇点，如果商空间 λ_1/λ_2 位于 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$中，则称其属于 Poincar´é 域。如果商空间λ_1/λ_2 位于 $\mathbb{R}_-$中，则称该奇点属于Siegel域。最后，具有两个非零特征值 λ_1、 λ_2 且满足 $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 的奇点称为双曲型奇点。特别地，双曲型奇点属于 Poincar´é 域。

- 如果叶状结构 $\mathcal{F}$ 在不变纤维 C上有唯一的奇点，那么叶状结构 $\mathcal{F}$ 沿不变纤维方向 C 对应的特征值等于零。然而，由于不变纤维 C 是简单的，叶状结构 $\mathcal{F}$ 沿横截不变纤维 C 的方向有一个非零特征值。这类奇点称为鞍结点。换言之，鞍结点奇点的一个特征值为零，另一个则非零。

定理 4.1. 设 $\mathcal{F}$ 是定理 A 中所述的 $\mathbb{CP}^2$ 上的 Riccati叶状结构。特别地，叶状结构 $\mathcal{F}$ 在不变直线周围的局部整体截面映射均为椭圆元。假设叶状结构 $\mathcal{F}$ 的整体全纯群 Γ 是第一类福克斯型（分别为拟福克斯型）群。那么有以下结论：

(a) 存在一个闭集 $\mathcal{L} \subset \mathbb{CP}^2$，其拓扑维数等于 3，且在叶状结构 $\mathcal{F}$下不变。(b) 如果 Γ 是福克斯型的，那么 $\mathcal{L}$ 是一个实解析集，具有 k 个奇点，且它们全都是轨形型的。如果 Γ 是拟福克斯型的，那么 $\mathcal{L}$ 是一个 “ 奇异拓扑流形 ”，其豪斯多夫维数严格大于 3。

引理 4.2. 设 $\mathcal{F}$ 是曲面 F_1 上的一个 Riccati叶状结构，并且具有一个简单的不变纤维C，使得 $\mathcal{F}$ 绕不变纤维 C 的局部整体映射不是抛物型的。那么，叶状结构 $\mathcal{F}$ 在不变纤维 C 中有两个奇点，并且这两个奇点中的每一个都对应于两个非零特征值。

证明. 根据本节开头关于 Riccati叶状结构 在简单不变纤维附近结构的回顾，证明只需验证 $\mathcal{F}$ 不可能在纤维 C 中只有一个奇点 p。反设情况确实如此，以导出矛盾。因此，p 是 $\mathcal{F}$ 的一个鞍结奇点，并且有一个与横截于 C 的方向相关联的非零特征值。由鞍结点的 Dulac标准形， $\mathcal{F}$ 在 p 处有一条分离曲线 S，该分离曲线光滑、横截于 C，并且与 $\mathcal{F}$ 在 p 处的非零特征值相切（例如参见 [27] 和 [42]）。分离曲线 S 为 $\mathcal{F}$ 的整体映射诱导出一个不动点，该整体映射由绕 C 的一条闭环产生。此外，对 Dulac标准形（[27], [42]）进行初等计算可得：

- 整体映射在此不动点处的乘子等于 1。
- 此整体映射不可能与恒等元重合。

由上述可知，绕着 C 缠绕所产生的 $\mathcal{F}$ 的整体映射是抛物映射。由此得到的矛盾证明了引理。□

在此，有必要提醒读者一些关于二维叶状结构奇点的基本正规形理论。下文提到的内容可见于大多数标准教材，例如 [27], [42]。

首先，考虑在 (0,0) 的某个邻域 $\mathcal{F}$ 上定义的叶状结构 $\in \mathbb{C}^2$，且它在原点处有两个非零特征值 λ_1 和 λ_2，满足 $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$。那么存在局部坐标 (u,v)，使得叶状结构 $\mathcal{F}$ 在局部由具有如下形式的向量场给出

$$\lambda_1 u[1+(\text{h.o.t})]\frac{\partial}{\partial u}+\lambda_2 v[1+(\text{h.o.t})]\frac{\partial}{\partial v}. \tag{7}$$

其中 h.o.t 表示“高阶项”。特别地，不难验证，叶状结构 $\mathcal{F}$ 恰有两条分离曲线；顺便提一下，这两条曲线都是光滑的，且彼此横截，在上述坐标中分别由坐标轴 $\{u=0\}$ 和 $\{v=0\}$ 给出。

接下来，设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是上述两个全纯叶状结构，且具有相同的（非零）特征值 λ_1 和 λ_2（$\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$）。设 (u_i, v_i)，$i=1$，2 为局部坐标，其中 $\mathcal{F}_i$ 具有方程（7）所示的形式。记 h_i 为叶状结构$\mathcal{F}_i$ 相对于坐标轴 $\{v_i=0\}$ 的局部整体映射，$i=1$，2。Mattei-Moussu 的一个定理 [34] 指出，当且仅当整体映射 h_1 和h_2 在 Diff $(\mathbb{C}, 0)$ 中解析共轭时，叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 解析等价。

现在我们转到原点处 $\mathcal{F}$ 的两个特征值 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$（始终有 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$）的情形。首先，如果 λ_1 和 λ_2 非共振，也就是说，λ_1/λ_2 和 λ_2/λ_1 都不是正整数，那么叶状结构 $\mathcal{F}$ 可线性化且可对角化。另一方面，对于共振情形 $n=\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{N}$，有两种可能的结果：

- 对于 $n \geq 2$。叶状结构 $\mathcal{F}$ 或者是可线性化的（且可对角化的），即存在局部坐标 (x,y)，使得 $\mathcal{F}$ 由向量场表示。
$$x\frac{\partial}{\partial x}+ny\frac{\partial}{\partial y},$$
或者它与所谓的 Poincar´e-Dulac 标准形共轭。在后一种情形下，在适当的局部坐标中，$\mathcal{F}$ 表示为向量场
$$x\frac{\partial}{\partial x}+(ny+x^n)\frac{\partial}{\partial y}.$$
特别地，$\mathcal{F}$ 拥有唯一一条分离曲线，在 Poincar´e-Dulac 坐标中由 $\{x=0\}$ 给出（特别地，这条分离曲线必定是光滑的）。
- 现在假设 $n=1$。在这种情况下，叶状结构 $\mathcal{F}$ 总是可线性化的，但仍有两种可能。也就是说，$\mathcal{F}$ 可能是不可对角化的，即与由向量场表示的叶状结构共轭
$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$
或不可对角化。在后一种情况下，存在庞加莱-杜拉克坐标，其中 $\mathcal{F}$由向量场表示。
$$x\frac{\partial}{\partial x}+(y+x)\frac{\partial}{\partial y}.$$
再一次，在允许 Poincar´e-Dulac 标准形的情况下，$\mathcal{F}$ 有一条唯一的分离曲线 $\{x=0\}$，而且它恰好是光滑的。

注4.3。为补充关于具有 Poincar´e-Dulac 标准形的叶状结构的信息，我们注意到，由（唯一的）分离曲线产生的局部整体映射 h 满足

其 n^{th} 次迭代 h^n 与恒等元相切，但始终不等于恒等元，这一点可以直接验证。

有了上述关于正规形的材料，我们可以回到对定理4.1的研究方法。回顾本节开头的注释以及引理 (4.2)，可知，在单纤维 C 周围呈现双曲型或椭圆型整体映射的 Riccati叶状结构，在 C中必定恰好有两个奇点。此外，这些奇点中的每一个都具有两个非零特征值。

引理 4.4. 考虑 Hirzebruch曲面 F_1 上的Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$ 。设 C 是一个简单的不变纤维，并假设 $\mathcal{F}$ 在 C 周围的局部整体映射是椭圆型的。用 p、$q \in C$ 表示 $\mathcal{F}$ 在 C中的两个奇点，并令 λ_1^p、λ_2^p 和 λ_1^q、λ_2^q 为相应的（非零）特征值（其中 λ_1^p 、λ_1^q 与不变纤维 C 的方向相关联）。那么这些特征值满足关系式

$$\frac{\lambda_2^p}{\lambda_1^p} + \frac{\lambda_2^q}{\lambda_1^q} = 0 \tag{8}$$

且两个商空间 λ_2^p/λ_1^p 、λ_2^q/λ_1^q 都属于 $\mathbb{R}$。此外，叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 p 和 q 周围均可线性化。最后，在这两个奇点处， $\mathcal{F}$ 都有一条与不变纤维 C 横截的光滑分离曲线。

证明。公式 (8) 是 [7]中Camacho-Sad指标公式的直接应用。现在我们首先证明，奇点 p 和 q 不是双曲型的，即特征值之比为实数。为此，反设奇点p 是双曲型的。由指标公式(8)可知，q 也是如此。根据Poincar´e定理， $\mathcal{F}$ 在 p和 q 处均可线性化。特别地， $\mathcal{F}$ 具有一条光滑的分离曲线 S_p ，其在 p 处横截于 C 。同样， S_p 对应于 $\mathcal{F}$ 绕 C 的整体映射的一个不动点。然而，由于 p 是双曲型的，通过初等计算可知，该不动点是双曲型的，即其乘子的绝对值不等于1。这是不可能的，因为该整体映射是椭圆型的。由此产生的矛盾表明，商空间 λ_2^p/λ_1^p 和 λ_2^q/λ_1^q 属于 $\mathbb{R}$ ，并且均不为零。

由公式 (8)，不失一般性，可假设 $\lambda_2^p/\lambda_1^p > 0$ 且 λ_2^q/λ_1^q <0。因此，奇点 p 属于庞加莱域，而 q 位于 Siegel域中。特别地， $\mathcal{F}$ 要么在 p 附近可线性化，要么共轭于庞加莱–杜拉克正规形。

断言。 $\mathcal{F}$ 在 p附近不可能具有庞加莱–杜拉克正规形。
断言的证明。假设该断言不成立。因此， $\mathcal{F}$ 在 p处有唯一一条分离曲线，而它必与纤维 C重合。特别地， $\lambda_2^p/\lambda_1^p = n \in \mathbb{N}^*$。与此同时，公式 (8)保证，在 $\mathcal{F}$ 的奇点 $q \in C$ 处，特征值 λ_1^q 、λ_2^q 可取为 $\lambda_1^q = 1$和 $\lambda_2^q = -n$。特别地， $\mathcal{F}$ 在 q 处存在一条分离曲线 S_q ，它与不变纤维 C横截。再次， S_q 可自然地视为整体映射在纤维 C周围的 $\mathcal{F}$ 的不动点。由于该整体映射是椭圆型的，它必为有限阶，且阶数等于 n。事实上，由 $\lambda_1^q = 1$ 和 $\lambda_2^q = -n$ 这两个特征值决定的、该映射在由 S_q 表示的不动点处的线性部分，是一个阶数为 n的旋转。因此，所讨论的整体映射的 n^{th}次迭代有一个乘子等于 1 的不动点。由于原整体映射是椭圆元素，我们得出其 n^{th}次迭代必与恒等元重合。

考虑 $\mathcal{F}$在 Siegel 奇点 q附近的局部结构，前面提到的 Mattei-Moussu 定理保证 $\mathcal{F}$ 在 q 处可线性化，因为由 S_q （一个有限阶映射）产生的局部整体映射也是如此。已知特征值为 1 和 $-n$，我们可知

$\mathcal{F}$ 在 q 处由纤维 C （ $\mathcal{F}$ 在 q处的另一个局部分离曲线）确定的局部整体映射必定与恒等元重合。要导出矛盾并证明该断言，只需注意到$C \setminus \{p, q\}$ 是一个圆柱，因此绕奇点 p 一周的回路与绕奇点 q 一周的回路同伦（适当选择定向即可）。因此，由 C 诱导的、源自 $\mathcal{F}$ 在 p 处的分离曲线的 p 周围的局部整体映射是恒等元。鉴于注4.3，这与 $\mathcal{F}$ 局部共轭于一个 Poincar´e-Dulac 向量场这一事实矛盾。断言得证。□

为完成引理的证明，首先注意到，断言意味着 $\mathcal{F}$ 在 p 附近可线性化。特别是， $\mathcal{F}$ 在 p 处横截于 C 的分离曲线 S_p 确实存在。此外，就由 C 诱导的分离曲线而言，其相应的（局部）整体映射也可线性化，并且作为 Diff $(\mathbb{C}, 0)$ 中的一个芽同样如此。再次利用 $C \setminus \{p, q\}$ 是一个圆柱这一事实可知，由 C 在奇点 q 处诱导的分离曲线所产生的（局部）整体映射也可线性化，因此Mattei-Moussu定理保证 $\mathcal{F}$ 在 q 处可线性化。引理由此立即得证。□

回顾一下，在 PSL $(2, \mathbb{C})$ 的离散子群（即克莱因群）中，有些群会保持 $\mathbb{CP}^1$ 中的一个（实解析）圆 S^1 不变。因此，这些群与 PSL $(2, \mathbb{R}) \subset$ PSL $(2, \mathbb{C})$ 的离散子群共轭，故可视为作用于双曲圆盘上的离散群，因而称为福克斯群。福克斯群的极限集自然包含于不变圆 S^1 中。事实上，将原群视为 PSL $(2, \mathbb{R})$ 的一个子群后，不变圆便对应于单位圆盘的边界。最后，回顾一下，若一个福克斯群的极限集与整个单位圆重合，则称其为第一类福克斯群。

引理4.5。设 $\mathcal{F}$ 是曲面 F_1 上的Riccati叶状结构，其所有不变纤维C_1、.....、C_k 都是简单的。假设满足以下条件：

- 每个不变纤维 C_i 周围的局部整体映射都是 PSL $(2, \mathbb{C})$ 的椭圆元素。
- 整体整体群 $\Gamma \subset$ 射影特殊线性群 $(2, \mathbb{C})$ 的叶状结构 $\mathcal{F}$是福克斯群/拟福克斯群。

那么，交集 $C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda)$ 只剩下 $\mathcal{F}$ 的奇点 $p_i \in C_i$ （该点属于 Poincar´e 区域）。此外，$\mathcal{F}$ 在 p_i 处的特征值实际上属于 $\mathbb{Q}_+$ ，并且该叶状结构在奇点 p_i 附近可线性化。

证明。令 C_i 为一个（简单的）不变纤维。根据引理4.4， p_i 和q_i 这两个奇点具有实（非零）特征值，并且叶状结构在每个奇点附近都是可线性化的。使用前面的记号，这些特征值满足 $\lambda_2^{p_i}/\lambda_1^{p_i} = -\lambda_2^{q_i}/\lambda_1^{q_i} \in \mathbb{R}^*$。此外， $\mathcal{F}$ 在 p_i （分别为 q_i）处横截于 C_i 的分离曲线将记为 S_{p_i} （分别为 S_{q_i}）。考虑 C_i 附近的一个一般纤维 $\Sigma \subset F_1$ ，其意义是：在 C_i 的一个纤维邻域中，分离曲线 S_{p_i}、 S_{q_i}与 Σ 相交于明确确定的点。于是将这些点分别记为 x_{p_i}、 x_{q_i}。如前所述，点x_{p_i}、 x_{q_i} 由$\mathcal{F}$ 绕 C_i的局部整体映射所固定。使用 $\mathcal{F}$ 在 p_i、 q_i 附近的线性化坐标进行直接计算可得，所讨论的（椭圆型）整体单值映射在不动点 x_{p_i} （分别为 x_{q_i}）处的乘子为 $e^{2\pi i \lambda_2^{p_i}/\lambda_1^{p_i}}$（分别为 $e^{-2\pi i \lambda_2^{p_i}/\lambda_1^{p_i}}$）。然而，这个椭圆型整体单值映射必须是有限阶的，因为它属于射影特殊线性群 $(2, \mathbb{C})$ 的一个离散子群。因此， $\lambda_2^{p_i}/\lambda_1^{p_i} \in \mathbb{Q}_+^*$。

现在只需证明 $C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda) = \{p_i\}$。论证与第 3.2 节所采用的论证类似。下文中，我们将利用这样一个事实： $\mathcal{F}$ 在 p_i 和q_i处都可线性化。首先，我们断言 $C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda) \subset \{p_i, q_i\}$。如果该断言不成立，那么 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 会聚积到不变纤维 C_i的正则点上。由于叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 q_i处有一个（可线性化的）鞍点奇点，由此可知 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 会聚积到分离曲线的正则点上

S_{q_i} 也如此。因此，不动点 $x_{q_i} \in \Sigma$ 属于$\mathcal{F}(\Lambda)$。然而，$\overline{\Sigma \cap \mathcal{F}(\Lambda)}$无非是 Γ 在横截纤维 Σ中表示的极限集。这是不可能的，因为在福克斯群中，椭圆元素的不动点不可能属于相应的极限集。因此必有 ~~$C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda)$~~ $\subset \{p_i, q_i\}$。然而，由于 $\mathcal{F}$在 q_i附近可线性化，若 $\mathcal{F}(\Lambda)$在 q_i处聚积，那么它也必定聚积到S_{q_i} 的正则点上，因此上述论证同样排除了这种可能性。总之，我们已经证明 $C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda) = \{p_i\}$，引理得证。□

现在可以陈述命题（4.6），该命题给出了一个判据：当 Riccati 叶状结构 $\mathcal{F}$ 的整体全纯单值群是第一类的射影特殊线性群 PSL $(2, \mathbb{C})$ 中的福克斯群时，Riccati 叶状结构存在一个奇异实解析 Levi 平坦超曲面，且其诱导的（Levi）叶状结构的所有叶在该超曲面内稠密。

命题 4.6. 设 $\mathcal{F}$ 是曲面 F_1 上的 Riccati 叶状结构，其所有不变纤维$C_1, \ldots, C_k$ 均为简单纤维。假设以下条件成立：

- 围绕每个不变纤维 C_i 的局部整体映射是射影特殊线性群 PSL $(2, \mathbb{C})$ 中的一个椭圆元素 .
- 叶状结构 $\mathcal{F}$ 的整体全纯单值群 $\Gamma \subset$ PSL$(2, \mathbb{C})$ 是一个福克斯群。

于是存在一个奇异实解析簇 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$，其（实）维数为 3，且在叶状结构 $\mathcal{F}$ 下不变。此外，$\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的奇点全都是孤立的，并且对应于位于庞加莱圆盘内的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点。

证明。记 $\mathcal{F}(\Lambda)$为叶状结构 $\mathcal{F}$ 下极限集 Λ 的饱和集合，记 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 为 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 的闭包。$\overline{\text{显然}}$，$\mathcal{F}(\Lambda)$ 是一个关于叶状结构 $\mathcal{F}$ 不变的局部实解析 3 维流形，因此满足平坦性的 Levi 条件。为了证明该命题，我们需要描述集合 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 在每个不变纤维 C_i、$i = 1$、$\cdots$、k上的聚积。在这方面，引理(4.5)确保交集$C_i \cap \mathcal{F}(\Lambda)$ 约化为奇点 p_i，其特征值 ~~$\lambda_1^{p_i}$~~和 $\lambda_2^{p_i}$ 满足 $\lambda_2^{p_i}/\lambda_1^{p_i} \in \mathbb{Q}_+$。该命题的证明现在由下面的引理 4.7得出，该引理断言 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 在 p_i 附近仍是一个解析簇。□

引理 4.7. 使用命题 4.6 中的记号，集合 $\mathcal{F}(\Lambda)$ 在 p_i 附近局部$\overline{\text{实解}}$析。

引理4.7 的证明将推迟到第5节，因为其中采用了一些爆破过程；顺便说一句，该过程对于构造定理A的(c)和(d)项中提到的调和流 T也将发挥重要作用。

作为前面讨论的副产品，我们还得到下面的命题（4.8），该命题适用于其整体整体群为拟福克斯群的 Riccati叶状结构，并且无需引理 4.7。

命题 4.8. 设 $\mathcal{F}$ 是 F_1 上的 Riccati叶状结构，其所有不变纤维 C_1、.....、C_k 都是简单的。假设满足以下条件：

•每个不变纤维 C_i 周围的局部整体映射 M_i 是 PSL（2， $\mathbb{C}$）中的一个椭圆元素。

- $\Gamma \subset$ 射影特殊线性群$(2, \mathbb{C})$的 $\mathcal{F}$整体整体群是一个拟福克斯群。

于是存在一个闭集合 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$，它在叶状结构 $\mathcal{F}$ 下不变，是一个（拓扑）维数为 3的奇异拓扑流形，其豪斯多夫维数严格大于3。此外， $\mathcal{L}(\mathcal{F})$的奇点均为孤立点，并对应于位于庞加莱 ´域中的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点。

证明。 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的构造与此前讨论的福克斯型情形完全相同（见命题 4.6）。证明 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 是实解析的这一额外难点并不起作用。

在当前情形中。与此同时，唯一需要解释的问题是断言 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的豪斯多夫维数严格大于 3。然而，这可由 Bowen 的定理 [5] 得出，该定理断言拟圆的豪斯多夫维数严格大于 1。因此，可以将 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 想象成由黎曼曲面构成的层状空间，其横截方向的豪斯多夫维数严格大于 1，因此层状空间 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的豪斯多夫维数严格大于 3。□

鉴于解析映射下实解析集的直接像可能不是实解析集，证明定理 4.1 所需的最后一个要素是下面的引理 4.9。

引理 4.9。设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}(\Lambda)$如命题 4.8 所述。记 $\mathcal{C}$ 为包含于希策布鲁赫曲面 F_1 中的 (-1)-有理曲线。那么我们有

$$\overline{\mathcal{F}(\Lambda)} \cap \mathcal{C} = \phi .$$

证明。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，令 b_i 为不变纤维 C_i 与有理曲线 $\mathcal{C}$ 之间的（唯一）交点，并令 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$。令 Σ 为F_1 的一个非不变纤维（因此与 $\mathcal{F}$横截），并将 q 记为 Σ 与 $\mathcal{C}_0$ 之间的交点。于是考虑整体单值表示 $\rho\colon \pi_1(\mathcal{C}_0) \to$射影特殊线性群 $(2,\mathbb{C})$，并令 $\Gamma = \rho(\pi_1(\mathcal{C}_0))$ 为叶状结构 $\mathcal{F}$ 作用于 Σ上的整体整体群。令 $\overline{\mathcal{C}}_0$ 为 $\mathcal{C}_0$ 的覆盖空间，使得$\pi_1(\overline{\mathcal{C}}_0) = \ker(\rho)$，并将 $\mathcal{P}\colon \overline{\mathcal{C}}_0 \to \mathcal{C}_0$ 记为相应的覆盖投影。

固定 $\overline{\mathcal{C}}_0$ 中的一个基点$\overline{p}$，并令 $p = \mathcal{P}(\overline{p}) \in \mathcal{C}_0$。设 $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{C}_0$ 是一条连接 p 和q 的路径（即，$\gamma(0) = p$ 且 $\gamma(1) = q$），那么由于叶状结构 $\mathcal{F}$ 是一个Riccati叶状结构，γ 可以提升到叶状结构 $\mathcal{F}$ 中经过点 p 的叶 L_p。提升 $\overline{\gamma}\colon [0,1] \to L_p$将 p 连接到交集 $L_p \cap \Sigma$中的一个点，记为 $x = \mathcal{D}(\overline{p})$。

点 $\overline{p} \in \overline{\mathcal{C}}_0$ 与点 $x = \mathcal{D}(\overline{p}) \in \Sigma$ 之间的对应关系可以自然地延拓到 $\overline{\mathcal{C}}_0$中的路径上。为此，考虑一条路径 $\overline{\sigma}\colon [0,1] \to \overline{\mathcal{C}}_0$ 使得 $\overline{\sigma}(0) = \overline{p}$。为定义 $\mathcal{D}(\overline{\sigma}(1))$，记 $\sigma\colon [0,1] \to \mathcal{C}_0$ 为 σ 到 $\mathcal{C}_0$上的投影，则 $\mathcal{D}(\overline{\sigma}(1))$可以定义为 $\sigma^{-1} * \gamma$ 在 $L_{\sigma(1)}$中的提升路径的终点。设 $\overline{\sigma}_1\colon [0,1] \to \overline{\mathcal{C}}_0$是$\overline{\sigma}$ 的一个端点固定的变形，则容易验证 $\mathcal{D}(\overline{\sigma}(1)) = \mathcal{D}(\overline{\sigma}_1(1))$。因此，$\mathcal{D}$事实上只取决于$\overline{\sigma}$的同伦类。

因此，我们接下来要证明 $\mathcal{D}$ 定义良好。设 $\overline{c}$ 是 $\overline{\mathcal{C}}_0$ 中以 $\overline{p}$ 为基点的闭环。则 $c = \mathcal{P}(\overline{c})$ 是 $\mathcal{C}_0$ 中以 p 为基点的闭环。路径 c^{-1} 可以提升至L_p。因此，提升 $c_0\colon [0,1] \to L_p$ 将 p 连接到交集 $L_p \cap \Sigma$ 中的一个点，记为 p_0。同时，$p_0 = \rho(c^{-1}) \cdot p = \mathrm{id} \cdot p = p$，因为 $c^{-1} \in \pi_1(\overline{\mathcal{C}}_0) = \ker(\rho)$。由此可知，路径 $c^{-1} * \gamma$ 在叶 L_p 中的提升的终点仍然是点 x 本身，因此函数 $\mathcal{D}$ 定义良好。

设 G 是作用在 $\overline{\mathcal{C}}_0$ 上的覆盖变换群。作为一个抽象群，G 可表示为商空间

$$\pi_1(\mathcal{C}_0)/\pi_1(\overline{\mathcal{C}}_0) = \pi_1(\mathcal{C}_0)/\ker(\rho).$$

另一方面，整体单值表示给出

$$\pi_1(\mathcal{C}_0)/\ker(\rho) \simeq \rho(\pi_1(\mathcal{C}_0)) = \Gamma,$$

其中，Γ 是叶状结构 $\mathcal{F}$的整体整体群。因此，这两个群 G 和 Γ 是同构的。换句话说，G 和 Γ分别视为 $\overline{\mathcal{C}}_0$ 和 Σ 的变换群时，可以将它们解释为同一个群的两种不同作用，即 π_1（$\mathcal{C}_0$）/核（ρ）。设 g 是 G 中的一个元素，而 α 是 Γ中对应的元素。由上述构造可知

$$\rho(\alpha) \cdot \mathcal{D}(\overline{r}) = \mathcal{D}(g \cdot \overline{r}),$$

对于每个 $\overline{r} \in \overline{\mathcal{C}}_{0}$。换句话说，函数 $\mathcal{D}$ 关于群 G 和 Γ 的作用是等变的。

设 $U = \mathcal{D}(\overline{\mathcal{C}}_0) \subset \Sigma$。则集合 U 是开集（因为函数 $\mathcal{D}$ 按构造是开映射），且在群 Γ 的作用下不变。由此可知 $U/\Gamma \simeq \overline{\mathcal{C}}_0/G$，并且由于 $\overline{\mathcal{C}}_0/G$ 无非就是 $\mathcal{C} \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$，$U/\Gamma$ 是一个豪斯多夫流形。因此，群 Γ 在 U 上作用适当不连续，这进而意味着 U 完全包含在拟福克斯群 Γ 的不连续域中。于是，$U \cap \Lambda = \phi$，其中 Λ 是群 Γ 的极限集。由于 $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0) \cap \Sigma = U$ 且 $\mathcal{F}(\Lambda) \cap \Sigma = \Lambda$，引理得证。□

定理 4.1 的证明。结合命题 4.6 和 4.8 与引理 4.9，结论立即成立。事实上，对于福克斯群的情形，Levi平坦 $\mathcal{L} \subset \mathbb{CP}^2$ 无非就是（Levi平坦）$\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subset F_1$ 在吹下映射下的像；命题 4.6 保证了它的存在，该吹下映射将 F_1 映至 $\mathbb{CP}^2$。为说明所得集合 $\mathcal{L}$ 满足定理 4.1 的条件，只需注意到，根据引理 4.9，$\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 包含于 $F_1 \setminus \mathcal{C}$ 的一个紧致部分中，其中 $\mathcal{C}$ 表示 F_1 中的（-1）有理曲线。由此可知，所述吹下映射实际上在 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的一个邻域上是全纯微分同胚，因此定理得证。对于拟福克斯群的情形，同样的论证也适用，如命题 4.8 中所述。定理 4.1 得证。□

5. Foliated harmonic currents

在第（4）节中基本证明了定理A的前两项陈述后，本节将致力于证明该定理中的（c）、（d）和（e）项。换言之，我们将描述满足定理A 条件的 $\mathbb{CP}^2$ 上 Riccati叶状结构的所有叶状调和流。

为避免无谓的重复，在本节中我们将把福克斯群视为拟福克斯群的特殊情形。换言之，在下文提及拟福克斯群时，并不排除所讨论的群实际上是福克斯群的可能性。类似地，无论 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 是实解析的还是横向分形的，我们都将由命题 4.6 和 4.8 中所考察的 Riccati 叶状结构产生的 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subset F_1$ Levi平坦记为此。显然，下文中所考察的每个拟福克斯/福克斯群都假定为非初等的。命题 4.6 和 4.8 的证明中所使用的记号将在下文中继续使用。

考虑 $\mathcal{F}$ 的不变纤维 C_i 以及奇点 p_i、$q_i \in C_i$，其中 p_i 位于 Poincar´ 域内，q_i 位于 Siegel域内。记 $m_i \geq 2$ 为绕 C_i 一周所产生的 $\mathcal{F}$ 的（椭圆型）整体映射的阶。如前所述，$\mathcal{F}$ 在 p_i 附近可线性化。因此，存在局部坐标 (u_i, v_i)，使得 $\mathcal{F}$ 在局部共轭于与向量场相关联的叶状结构

$$m_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + n_i v_i \frac{\partial}{\partial v_i},$$

其中 $p_i \simeq (0, 0)$，且 $\{u_i = 0\} \subset C_i$。此外，m_i 和 n_i 均为严格正整数，不失一般性，可假设它们满足 $1 \leq n_i < m_i$。特别地，由 $\{v_i = 0\}$ 给出的分离曲线是唯一一条横截于纤维 C_i 的（局部光滑）分离曲线，因此具有特殊地位。除由 C_i 诱导的分离曲线外，$\{v_i = 0\}$ 是唯一一条具有非平凡整体、且与角度为 $2\pi n_i/m_i$ 的旋转共轭的分离曲线。这条分离曲线记为 S_p。

在（u_i, v_i）坐标中，$\mathcal{F}$允许将函数（u_i, v_i）$\mapsto u_i^{n_i} v_i^{-m_i}$作为亚纯第一积分，因此叶局部上是形如 $u_i^{n_i} = c v_i^{m_i}$的代数对象，其中$c \in \mathbb{C}$为适当的常数。然而，爆破过程可以消除上述第一积分的不定点

积分，以便以更适合我们需求的方式描述这些叶的行为。事实上，依靠以下初等观察来执行这一过程是有用的：对所讨论的叶状结构进行爆破，会得到一个保持所得例外除子不变的叶状结构，并且恰好具有 2 个奇点。此外，两个奇点都具有整数特征值，其中一个位于 Poincar´e 域，而另一个位于 Siegel域。于是，该过程就是继续对位于 Poincar´e 域中的奇点进行爆破，直到达到一个特征值为 1 和 1 的奇点。然后，在此奇点处进行最后一次爆破，将得到一个横截于例外除子相应分支的叶状结构。换言之，经过有限次爆破——所有爆破中心都位于 Poincar´e 域中的奇点——我们得到如下图景：

(1) 一个例外除子 $\mathcal{E}$，由一串有理曲线 $D_1, \ldots, D_l$ 组成，它们横截相交。(2) 一个叶状结构 $\mathcal{F}$，其奇点全部位于 Siegel 域内。(3) $\mathcal{E}$ 的一个分支 D_J 与 $\mathcal{F}$ 横截（特别是在 D_J 的邻域内）。(4) 其余分支 $D_1, \ldots, D_{J-1}, D_{J+1}, \ldots, D_l$ 均为 $\mathcal{F}$的不变分支。(5) D_1 与（变换后的） C_i 相交，而（变换后的） S_p 确定了一个位于 D_l中的 $\mathcal{F}$ 的奇异点。

现在我们可以证明引理 4.7，随后构造支集位于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 上的流T 。

引理 4.7 的证明。考虑 C_i的一个纤维化邻域 $U = \mathbb{D} \times C_i$，其中 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$。固定一个纤维 $\Sigma \subset U$，并令 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 表示绕 C_i一周所产生的（椭圆型）整体映射。我们在 Σ上选取射影坐标，使得 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \cap \Sigma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$。为证明该引理，只需为 $\mathcal{F}$在 U上构造一个亚纯第一积分 F，使得 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \cap U$与 $F^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ 重合。事实上，若 F是这样的积分，则 $F = \overline{F}$给出一个解析方程，用以定义 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \cap U$。

记 $\xi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$是一个阶数为 m_i、保持 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$不变的椭圆型自同构。现在考虑一个非常值全纯映射 $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$，它在 ξ作用下不变。例如，若改变坐标，使得 ξ 变成绕原点旋转，且$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 变成单位圆，那么我们可以选取 $f(z) = z^n$。再变回初始坐标，便得到所需的不变函数。

记 P_i、Q_i 为 ξ的两个不动点。回忆一下， S_p（分别为 S_q）是从奇点 p_i（分别为 q_i）出发、与 C_i横截的分离曲线。如第4节所示， S_p 在不动点 P_i处与Σ 相交。类似地， S_q 在 Q_i处与 Σ 相交。

接下来，对奇点 p_i 应用上文所述的爆破过程。我们将$\widetilde{\ }$记为 U，即 U的变换。我们还用 $\mathcal{E}_1$ 表示从 C_i到 D_{J-1}的一串有理曲线所构成的除子。类似地， $\mathcal{E}_2$ 是有理曲线链 D_{J+1}、……、D_l。

为了完成该引理的证明，我们按构造的各叶全纯映射。显然，这样的映射会诱导出所需的亚纯第一积分 F，定义在 U（Levi延拓）上。反过来，为了构造映射$\widetilde{F}$: $\widetilde{U} \to \mathbb{CP}^1$，使其在$\widetilde{\mathcal{F}}$的各叶上为常数，我们首先令 $\widetilde{F}(z) = f(Q_i)$，若 $z \in \mathcal{E}_1$；并令 $\widetilde{F}(z) = f(P_i)$，若 $z \in \mathcal{E}_2$。现在，若 $z \in U \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$，那么我们考虑经过 z 的 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$的叶 L_z，并令 $F(z) = f(L_z \cap \Sigma)$。显然， F是良定义的，因为在每个交点 $L_z \cap \Sigma$ 处， f的值都相同（f 在 ξ下不变）。此外，由于 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$之外是正则的，显然 F在 $U \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ 上全纯。最后，要证明 F在整个 U上全纯，只需证明该映射在 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$处连续。

F 在 $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$中各点处的连续性，然而，可由第4节中详细阐述的（线性）Siegel奇点的结构得到。事实上，设 $\{z_i\} \subset U \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$是一列点，收敛于 $\mathcal{E}_\infty$中的某一点。由于 $\mathcal{F}$ 的所有奇点都位于Siegel域中，因此相应的叶 L_{z_i} 累积于分离曲线 S_q上。于是，交点 $L_{z_i} \cap \Sigma$ 聚集在 Q_i周围，从而 $F(z_i)$收敛于 $f(Q_i)$，进而证明了 F 在 $\mathcal{E}_1$中各点处的连续性。类似的论证表明， F 在 $\mathcal{E}_2$ 中各点处也是连续的，因此黎曼延拓定理意味着 F 在 U的全体上都是全纯的。引理的证明完成。□

本节余下部分致力于构造支集为 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的调和流 T，以完成定理 A 的证明。现在让我们回到命题 4.8 中的 Riccati叶状结构 $\mathcal{F}$，其位于 F_1 上。 $\mathcal{F}$ 的整体全纯群 Γ 是 PSL（2, $\mathbb{C}$）的一个拟福克斯群（福克斯情形可视为其中的特殊情形）。此外，由于假设 Γ 为第一类，其极限集就是整个不变若尔当曲线。Levi平坦 $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subset F_1$ 是通过叶状结构 $\mathcal{F}$ 对该若尔当曲线作饱和后取闭包得到的，它是一个 3 维奇异拓扑流形，其奇点恰好与属于庞加莱域的 $\mathcal{F}$ 的奇点重合。显然，包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中的 $\mathcal{F}$ 的每个叶都稠密于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$，因为 Γ 是第一类。

现在对每个 $i \in \{1, \dots, k\}$，我们将证明引理 4.7 中所使用的爆破过程应用于位于 Poincar´e 域内的每个奇点 $p_i \in C_i$ 。记由此得到的曲面为N，并记 $\mathcal{F}$ 的变换为 $\mathcal{F}$。注意，相应的投影$\Pi : N \to F_1$ 是从 N 中总例外除子的补集到 $F_1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ 的全纯微分同胚。然后得到集合 $\mathcal{R}_i = C_i \cup \Pi^{-1}(p_i)$，其中将 C_i 与其变换视为同一对象。显然， $\mathcal{R}_i$ 是一条有理曲线链，其中包含唯一的曲线 D_{J_i} ，其与 $\mathcal{F}$横截，而所有其他分支都在 $\mathcal{F}$ 下不变。在下文中，令 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 为 Levi平坦 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的变换。

引理 5.1. $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 是一个正则拓扑流形。它与除子 $\mathcal{R}_i$ 相交于包含在曲线 D_{J_i} 中的一条若尔当曲线上。

证明。沿用引理 4.7 中的记号， $\mathcal{R}_i = C_i \cup \mathcal{E}_i$ 以及 $\mathcal{R}_i \setminus D_{J_i}$ 的每个连通分支都包含在局部单值化任意小邻域的饱和集中。因此，它们与由 Γ的极限集形成的若尔当曲线保持距离。因此， $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{R}_i$ 包含在 D_{J_i} 的一个紧致部分中，且该部分不含与D_{J_i-1} 和 D_{J_i+1}的交点。反过来，叶状结构 $\mathcal{F}$ 在这些交点处是正则的，于是引理得证。□

我们可以很容易地比较 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中 $\mathcal{F}$ 的叶与 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中 $\mathcal{F}$ 的叶。事实上，更准确地说，应当讨论叶状结构 $\mathcal{F}$ 的填充叶，其定义如下。首先， $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中 $\mathcal{F}$ 的一片叶，无非是将 $\mathcal{F}$ 限制到 $F_1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ 上得到的非奇异叶状结构的一片叶。若 L 是这样的一片叶，则相应的填充叶 $\overline{L}$ 定义为：将奇点 p_i 添加到经过 p_i 的叶 L 的每个局部分支上，其中每个分支在局部具有形式 $u_i^{n_i} = cv_i^{m_i}$，这里 $c \in \mathbb{C}$ 适当，且 m_i、n_i 为正整数。现在，以下引理使得对 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中 $\mathcal{F}$ 的叶与 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中 $\mathcal{F}$ 的叶的比较更加准确。

引理 5.2. 若 L 是包含于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的一片叶，则 Π 到 L的限制是 L 与叶状结构 $\mathcal{F}$的某个填充叶 $\overline{L}$ 之间的微分同胚。

~证明。鉴于前文，一片叶 L 与 Π 的例外除子的交集包含于曲线 D_{J_i}的并集中。这些是与 $\mathcal{F}$横截的紧致（有理）曲线。~因此， L 与 Π 的例外除子的交集是均匀横截的（即，横截角有一个严格为正的下界）。引理立即得证。□

接下来，我们有：

引理 5.3。 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中的填充叶 $\overline{L}$ $\mathcal{F}$ 是双曲型黎曼曲面。

证明。要证明 $\overline{L}$ $\overline{L}$ 是双曲型黎曼曲面，只需验证其体积呈指数增长。对于处处横截于纤维化的正则叶状结构，叶的增长类型由该叶状结构的整体全纯单值群的增长决定；由于该群是拟福克斯群，其增长是指数级的。这里有一个小困难：$\overline{L}$ 在点 p_i 处不与 C_i 横截。

不过，引理 5.2 已经解决了上述问题。在每个点 p_i 附近，我们都可以取一个小球 B_i ，使得在远离 B_i 的地方，该叶与纤维横截，因此其体积增长与整体全纯单值群 Γ 的指数增长相当。此外，由于引理 5.2，$\overline{L}$ 的每个局部分支与 B_i 的交集都是一个面积小、直径也小（且相当）的圆盘。综合这些信息，显然 $\overline{L}$ 的体积呈指数增长，因此结论成立。□

在陈述下一个命题之前，有必要回顾一下 [18]中引入的调和流的自交数概念。考虑紧致 K¨ahler 曲面上的一个正调和流 T。利用霍奇理论，Fornaess和 Sibony 通过证明该积分，成功定义了 T 的自交数

$$\int T \wedge T$$

对于正调和流而言定义良好。此外，当 T 光滑时，这个积分与通常的表述一致。特别是，在 $\mathbb{CP}^2$的情形下，他们提到了计算该量的问题。

$$\inf \left\{ \int T \wedge T ; \ T \geq 0 \ \text{ and } \ i\partial\overline{\partial} T = 0 \right\} .$$

证明所讨论的下确界严格为正，将对关于 $\mathbb{CP}^2$中黎曼曲面层状结构的几个著名猜想产生重大影响。然而，他们的第二篇论文 [19], 的一个副产品是，该下确界等于零。然而，似乎此前尚未发现这样的例子：一个具有零自交数且其支集（比如说）内部为空的正调和流，因此，仍然可以设想其在所引问题中的应用。在这方面，定理 A 的贡献由其条目 (e) 概括。

下面的命题用层流的语言来表述更为自然，例如参见 [20]。

~ ~命题 5.4. 由 $\mathcal{F}$ 对 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$~ ~的限制所定义的黎曼曲面层流具有唯一的正调和叶状流 T。流 T 非闭，且自交数为~ ~零。最后，流 T 的支集与整个 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 重合。

~ ~证明。正如前面的引理所示， $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$上的限制是一个由黎曼曲面组成的正则层状结构，其中所有叶都是双曲型的。我们断言，这个层状结构不可能存在正叶状闭流。为验证这一断言，只需注意到，这样的闭流会为所讨论的层状结构导出一个横向不变测度。该测度将

经由 Π 投影为一个有限测度，该测度在其极限集上由全纯单值群 Γ 保持不变。由于 Γ 是非初等的，这立即导致矛盾。这个矛盾证明了该断言。

唯一的正叶状调和流 T 在 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$上的存在性现在由 [11]中的主要结果得出。该同一定理还表明， T 的自交数等于零。最后，由于 Γ在其极限集上的作用具有稠密轨道，因此，由 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$上诱导的层叠的所有叶都在 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 中稠密。因此， T 的支集必须与整个 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 重合。□

回顾一下，投影 $\Pi\colon\ N \to F_1$ 在 N 上是全纯且全局定义的。于是，可以通过 Π 将 current T 推前，从而得到一个正的叶状调和 current $T = \Pi_* T$，其 $\mathcal{F}$ 支集遍布 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$，此外还具有零自交数。证明定理 A 所需的最后一个要素是以下命题：

命题 5.5. 每个支集于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的 (1, 1)-流叶状调和流 T，都可以通过 Π 拉-回，从而得到一个支集于 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的、关于 $\mathcal{F}$ 的叶状调和流。

证明。设 T如陈述所述，并考虑 N 上的 (1,1)-微分形式 ω。要定义拉回 $T = \Pi^* T$，只需定义 ω 上的推前 $\Pi_*\omega$，使得配对 $\langle T, \Pi_*\omega\rangle$ 有意义。更准确地说， Π 是 N 的一个 Zariski 开子集与 $F_1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ 之间的微分同胚。因此， $\Pi_*\omega$ 自然是定义在 $F_1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ 上的 (1,1)-微分形式。然而，原则上，形式 $\Pi_*\omega$ 在点 $p_1, \dots, p_k$ 附近可能表现得很不规则。只需验证配对 $\langle T, \Pi_*\omega\rangle$ 尽管如此仍定义良好，并且在 N 上的 (1,1)-形式空间上给出一个连续泛函，即可得出该命题。

只需在点 p_i 的一个邻域内进行讨论。如前所见，在 $p_i \simeq (0,0)$ 周围存在局部坐标 (u_i, v_i)，使得 $\mathcal{F}$ 在局部由以下向量场给出

$$m_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + n_i v_i \frac{\partial}{\partial v_i}$$

其中 m_i 和 n_i 是严格正整数，且满足 $\{u_i = 0\} \subset C_i$。接着，我们对点 p_i 应用本节开头所述的爆破序列，以消除第一积分 $u_i^{n_i} v_i^{-m_i}$ 的不定性。沿用引理 4.7 证明中使用的记号，回顾一下， $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 的变换与相应例外除子横截相交于唯一分支 D_{J_i}。事实上， D_{J_i} 是一条自交数为 -1 的有理曲线，因为它是在我们的爆破过程中进行的最后一次（单点）爆破所产生的。因此，在 D_{J_i} 的一个邻域上存在仿射（爆破）坐标 (t_i, s_i)，$\{t_i = 0\} \subset D_{J_i}$，满足以下条件：

(1) 叶状结构 $\mathcal{F}$ 由向量场 $\partial/\partial t_i$在局部给出。
(2) 吹下映射 $\Pi\colon N \to F_1$ 在局部由 $\Pi(t_i s_i) = (t_i^{m_i} s_i, t_i^{n_i}) = (u_i, v_i)$ 给出。
特别地， Π 的局部逆映射由分歧坐标中的 $t_i = \sqrt[n_i]{v_i}$ 和$s_i = u_i / \sqrt[n_i]{v_i^{m_i}}$确定。

现在设 ω 是曲面 N 上的一个 (1, 1)-微分形式，其支集与 D_{J_i}相交。令

$$\omega = a_{11} dt_i \wedge d\overline{t}_i + a_{12} dt_i \wedge d\overline{s}_i + a_{21} d\overline{t}_i \wedge ds_i + a_{22} ds_i \wedge d\overline{s}_i$$

在局部坐标 (t_i, s_i) 中。回想一下， $\Pi_*\omega$ 在Π的例外除子之外有定义。在开集合 $F_1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ 上，我们有

$$\langle T, \Pi_*(a_{12} dt_i \wedge d\overline{s}_i)\rangle = \langle T, \Pi_*(a_{21} d\overline{t}_i \wedge ds_i)\rangle = \langle T, \Pi_*(a_{22} ds_i \wedge d\overline{s}_i)\rangle = 0\,,$$

由于 T 是叶状的，且相应的推前在叶状结构的切空间 $\mathcal{F}$ 上恒等为零。因此，只需证明耦合

$$\langle T, \Pi_*(a_{11} dt_i \wedge d\bar{t}_i) \rangle$$

在 $F_1 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ 上定义良好。为此，首先回想一下 T 是调和的，因此在流盒中可表示为

$$S = \int_{\Sigma_\alpha} h_\alpha [\Delta_\alpha] d\mu(\alpha),$$

其中， $\mu(\alpha)$是横截面 Σ_α 上的正博雷尔测度，而 h_α 表示严格为正的调和函数，并且其上界和下界均由严格为正的常数一致控制。显然，函数 h_α 关于 α是博雷尔可测的。因此，在远离 p_i 的地方，耦合 $\langle T、 \Pi_*(a_{11} dt_i \wedge d\bar{t}_i) \rangle$

$$\int_{\Sigma_\alpha} \left(\int_{L_\alpha} h_\alpha \Pi_*(a_{11} dt_i \wedge d\bar{t}_i) \right) d\mu(\alpha)\,,$$

其中 L_α 是 $\mathcal{F}$对应的叶。因此，只需证明积分 1

$$\int_{L_\alpha} \Pi_*(a_{11} dt_i \wedge d\bar{t}_i)$$

有界（关于 α 一致）。为检验这一点，首先注意到

$$\Pi_*(a_{11} dt_i \wedge d\bar{t}_i) = a_{11}(v_i^{1/n_i}, u_i v_i^{-m_i/n_i}) dt_i \wedge d\bar{t}_i\,.$$

特别地，系数 $a_{11}(v_i^{1/n_i}, u_i v_i^{-m_i/n_i})$ 可视为 p_i 邻域上的连续函数，因为 $u_i v_i^{-m_i/n_i}$实际上在 $\mathcal{F}$ 的叶上为常数。同时， $\mathcal{F}$ 的叶由满足 $z_i^{n_i} = v_i$ 和 $z_i^{m_i} = u_i$的局部坐标 $z_i \in \mathbb{C}$ 参数化。因此，我们实际上有 $z_i = t_i$。换言之，后一个积分变为

$$\int_\Delta a_{11}(v_i^{1/n_i}, u_i v_i^{-m_i/n_i}) dz_i \wedge d\bar{z}_i\,,$$

其中， Δ 是一个半径（统一）为正的圆盘，围绕着 $0 \in \mathbb{C}$。由于$a_{11}(v_i^{1/n_i}, u_i v_i^{-m_i/n_i})$可被视为一个有界连续函数，命题得证。□

定理 A 的证明。定理 A 的陈述 (a) 和 (b) 已在定理 4.1 中证明。进而，断言 (c) 可由命题 5.4 和 5.5 推出。事实上，命题 5.5~ ⁀意味着， $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 上关于 $\mathcal{F}$ 的正叶状调和流，与 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ 上关于 $\mathcal{F}$ 的正叶状调和流一一对应，因此 T 的存在性和唯一性可由命题 5.4 得出。该命题还意味着 T 的自交数必为零。

剩下的工作是证明断言 (d)。除了 T 之外，对任意一条不变直线C_1、.. .、 C_k 进行积分，也会得到正的调和叶状流（事实上是闭流）。令T_{C_1}、... 、 T_{C_k}表示这些积分流。由于 T 和 T_{C_1}、.. . 、 T_{C_k} 显然是线性无关的。只需验证，任意正的调和叶状流 T' 都是前述流的线性组合。若 T' 如上所述，则通过减去 T 以及 T_{C_1}、...、 T_{C_k}的适当线性组合，我们可以假设 T' 既不赋予不变直线 C_1、... 、 C_k 质量，也不赋予 Levi平坦 $\mathcal{L}$（$\mathcal{F}$）质量。为了完成定理 A 的证明，我们将证明上述 T'恒等于零。为此，反设 T' 不恒等于零。于是其支集与 $F_1 \setminus$（$\mathcal{L}$（$\mathcal{F}$） $\cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$）有非平凡交集。由于 T' 是调和的（等价地，与一个调和测度相关联），必然存在 $\mathcal{F}$ 的叶 L，它们包含在不变开集 $F_1 \setminus$（$\mathcal{L}$（$\mathcal{F}$） $\cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$）中，并且是循环的，即会聚积

作用于自身（参见任意一个 [21], [23], [8]）。然而，这是不可能的，因为根据构造，相关开集上的 $\mathcal{F}$ 的横向动力学等价于拟福克斯型（或福克斯型）群 Γ 在其不连续集上的动力学，因此是游荡的。定理 A 的证明到此结束。□

References

[1] W. Barth, K. Hulek, C. Peters & A. Van de Ven, *Compact complex surfaces, second edition*, Springer-Verlag，柏林，2004年。[2] B. Berndtsson & N. Sibony，正流上的$\overline{\partial}$方程， *Invent. Math.*，147，（2002），371-428。[3] G.D. Birkhoff，解析函数矩阵的一个定理， *Collected Math. Papers*，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1950年。[4] G.D. Birkhoff，线性微分方程的广义黎曼问题及其关于线性差分方程和q-差分方程的相关问题， *Collected Math. Papers*，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1950年。[5] R. Bowen，拟圆的豪斯多夫维数， *Publ. Math. l'IHES*，50，（1979），11-25。[6] M. Brunella，整全曲线与全纯叶状结构， *L'Enseignement Mathématique*，45，（1999），195-216。[7] C. Camacho & P. Sad，穿过全纯向量场奇点的不变簇，
Annals of Math. **115** 1982 579 595
，，（），-。

[8] A. Candel，Lucy Garnett的调和测度， *Adv. Math.*，176，2，（2003），187-247。[9] J.-P. Demailly，Kobayashi双曲型射影簇和喷射微分的代数判据，*Proceedings of Symposia in Pure Math.*，第62卷，2，（1997），285-360。[10] B. Deroin & V. Kleptsyn，随机共形动力系统， *Geom. Funct. Anal.*，17，4，（2007），1043-1105。[11] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyen & N. Sibony，紧K¨ahler曲面上叶状结构的唯一遍历性，
Duke Math. J.，171，13，（2022），2627-2698。[12] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyen & N. Sibony，黎曼曲面层叠的热方程和遍历定理， *Math. Ann.*，354，1，（2012），331-376。[13] T.-C. Dinh & N. Sibony，带有不变曲线的 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构的唯一遍历性，
Inventiones mathematicae **211** 2018 1 38
，，（），-。

[14] T.-C. Dinh & N. Sibony，全纯叶状结构理论中的一些公开问题，
Acta Mathematica Vietnamica **45** 2020 103 112
，，（），-。

[15] A. Fernández-Pérez, R. Mol & R. Rosas，实解析Levi平坦超曲面的Chow定理，*Bull. Sci. math.*，179，（2022），1-18。[16] A. Fernández-Pérez & J. Lebl, *Global and local aspects of Levi-flat hypersurfaces*，IMPA数学出版物，《巴西数学第三十届学术讨论会》，巴西国家纯粹与应用数学研究所（IMPA），里约热内卢，2015年。

[17] W. Fischer & H. Grauert *Nachr.*，紧
Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1965 89 94
复流形的局部平凡族，，（），-。[18] E. Fornaess & N. Sibony，有限能量的调和流与层叠，
Geom. Funct. Anal.，15 52005 9621003，，（），-。

[19] E. Fornaess & N. Sibony $\mathbb{P}^2$ *Geom.*，
Funct. Anal. **19** 2010 1334 1377

[20] E. Fornaess & N. Sibony的奇异叶状结构上的调和流的唯一遍历性，，，（），-。
[20] E. Fornaess & N. Sibony，带奇点的黎曼曲面层叠， *J. Geom. Anal.*，18，（2008），400-442。
[21] L. Garnett，叶状结构、遍历定理与布朗运动， *J. Funct. Anal.*，51，（1983），285-311。
[22] C. P. Garrandés，K¨ahler曲面中的黎曼曲面层叠，博士论文，马德里康普顿斯大学，马德里，2014年。
[23] E. Ghys，一般叶的拓扑， *Annals of Math.*，141，（1995），387-422。[24] A. Guillot，关于Halphen 方程和SL（2，$\mathbb{C}$）的作用， *Publ. Math. IHES* **105**，1，（2007），221-294。[25] F. Hirzebruch，希尔伯特模曲面， *Enseignement Math.*，29，（1973），183-281。[26] F. Hirzebruch & D. Zagier，希尔伯特模曲面的分类，
Complex Analysis and Geometry A collection of Papers Dedicated to K. Kodaira 1977 43 77
，剑桥大学出版社，（），-。

[27] Y. Il'yashenko & S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, 美国数学学会，罗得岛州，2008 年。[28] S. Katok, *Fuchsian groups*, 芝加哥大学出版社，芝加哥和伦敦，1992 年。[29] J. Lebl, 复射影空间中的代数 Levi平坦超簇， *J. Geom. Anal.*, 22, (2012), 410-432.[30] A. Lins-Neto, *J.* 二维奇异 *Differential Geometry* **26** 1987 1 31 全纯向量场与叶状结构的构造，，，( )，- .[31] F. Loray & J. C. Rebelo, ℂℙ *n* *Journal of the European* 上由曲线 *Mathematical Society* **5** 2 2003 147 201 构成的极小刚性叶状结构( )，，，，( )，- .[32] J. Martinet & J.-P. Ramis, 一阶非线性微分方程的模问题， *Publ. Math. I.H.E.S.*, 55, (1982), 63-164.[33] K. Matsuzaki & M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, 克拉伦登出版社，牛津，1998 年。[34] J.-F. Mattei & R. Moussu, 整体单值化与第一积分， *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 16, (1983), 469-523.[35] M. Mcquillan, 丢番图逼近与叶状结构， *Publ. IHES*, 87, (1998), 121-174.[36] L.G. Mendes & J.V. Pereira, 射影平面上的希尔伯特模叶 *Commentarii* 状结构，*Mathematici Helvetici* **80** 2005 243 291 ，，( )，- .[37] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, 加拿大数学学会专著与教材系列，威利 - 因特科学出版物，1988 年。[38] V.-A. Nguyên, 曲线上的奇异全纯叶状结构 I：二维中整体单值化余循环的可积性， *Inventiones mathematicae*, 212, (2018), 531-618.[39] V.-A. Nguyên, 层叠与叶状结构的遍历定理：最新成果与 *Acta* 展望，*Mathematica Vietnamica* **46** 2021 9 101 ，，( )，- .[40] J. Plante, 整体单值化保持测度的叶状结构， *Ann. of Math.*, 102, (1975), 327-361.
[41] J. C. Rebelo & H. Reis, 复常微分方程的统一化及其应用， *Rev. Mat. Iberoam.*, 30, 3, (2014), 799-874.
[42] J. C. Rebelo & H. Reis, 全纯叶状结构与向量场的局部理论， *Lecture notes* *available from* 1101 4309 https://arxiv.org/pdf/ . .pdf.[43] D. Sullivan, *Invent.* 用于研究 *Math.* **36** 1976 225 255 叶状流形与复流形动力学的循环，，( )，- .

Institut de Mathématiques de Toulouse ; UMR 5219 Université de Toulouse 118 Route de ，，Narbonne F-31062 Toulouse France.
„*Email address*: mohamad.alkateeb@math.univ-toulouse.fr

Institut de Mathématiques de Toulouse ; UMR 5219 Université de Toulouse 118 Route de ，，Narbonne F-31062 Toulouse France.
„*Email address*: rebelo@math.univ-toulouse.fr