arXiv:2304.03751v1 [math.CT] 7 Apr 2023

诺特环的理想范畴

P. G. ROMEO 和 MINNUMOL P K

数学系 科钦科技大学*(CUSAT)* 科钦, 喀拉拉邦, 印度,*682022*

摘要。本文描述了这些范畴 $\mathbb{L}_R$, $[\mathbb{R}_R]$ 其对象是带幺元的诺特环 R 的左 [右] 理想，态射是适当的 R- 线性变换。此外，本文证明这些范畴是具有零对象的预加性范畴，并且是 R -模范畴的满子范畴；它们具有子对象，且其中的态射满足分解性质。

1. 引言

范畴论由 SamuelElienberg和 Saunders Maclane[1] 于1945年提出，其主要目标是统一对各种结构的结构分析并简化其表述。许多数学家成功地运用范畴论研究各种数学结构。在 [4] K.S.SNambooripad描述了某些范畴，他称之为正规范畴，用以刻画正则半群的理想；这些范畴使他得以获得正则半群的优美表示。后来，在 [6] 这一方法被推广到正则环。在本文中，我们研究带有幺元的诺特环 R 的范畴以及 R 的右理想范畴，其中态射为左（右） R -线性变换，并讨论这些范畴的各种性质，将其与 R -模范畴的范畴性质进行比较。

2. 预备知识

一个范畴 C 由一类对象 νC 和一组态射组成：对于每个对象 $A = dom\ f$，都有从 $A = dom\ f$ 到每个对象 $B = cod\ f$ 的态射 $f \in$ C(A, B)。对于每一对满足 $dom\ g = cod\ f$ 的态射 (f, g),

电子邮件地址: $romeo_parackal$@$yahoo.com$, $pkminnumol$@$gmail.com$.关键词和短语。环、理想、有限生成理想、环的理想范畴。第一作者谨此感谢科学与工业研究理事会（CSIR）印度，提供资金支持。

态射 $g \circ f$: dom $f \to cod\ g$ 是复合 $\circ$；对于每个对象 a，存在唯一的态射 $1_A \in \mathsf{C}(A, A)$，称为 a 上的恒等态射。此外，只要复合有定义，就满足 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$，并且对所有 $f \in \mathsf{C}(A, B)$，都有 $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$。

例 2.1. 集合：对象是集合，态射是集合之间的函数。

Grp：群作为对象，同态作为态射$\mathbf{Vct_K}$：对象是给定域 K 上的向量空间，态射是它们之间的线性映射。

若 C 的对象和态射的一个子集 S 本身构成一个范畴，则称 S 为 C 的子范畴。

设 C 和 D 是两个范畴。一个协变函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 由一个顶点映射和一个态射映射组成。顶点映射将每个 $A \in \nu\mathsf{C}$ 指派给对象 $F(A) \in \nu\mathsf{D}$；态射映射将每个态射 $f : A \to B$，指派给态射 $F(f) : F(A) \to F(B) \in \mathsf{D}$，使得对所有 $A \in \nu\mathsf{C}$ 都有 $F(1_A) = 1_{\nu F(A)}$，并且对所有 $f, g \in \mathsf{C}$（其中复合 $f \circ g$ 存在）都有 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$。

若对于 C 中任意一对对象A, B，态射集 $\mathsf{C}(A, B)$ 都经由 F 映满到 $\mathsf{D}(F(A)\ F(B))$，则称函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是满的。若 C 的子范畴 S 到 C 的包含函子是满的，则称 S 是满子范畴。

定义 2.2。范畴 C 中的态射 $m : A \to B$ 是单态射，如果 $f_1, f_2 : D \to A$ 属于 C，等式 $m \circ f_1 = m \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ 成立，也就是说，m 是单态射，当且仅当它可左消去。对偶地，态射 $e : A \to B$ 是满态射，当且仅当它可右消去。也就是说，如果 $g_1, g_2 : b \to c, g_1 \circ e = g_2 \circ e \Rightarrow g_1 = g_2$。

注意，在范畴**Set** 中，单态射恰好是单射，满态射恰好是满射。

定义 2.3. 若范畴 C 中的每个对象A 都恰有一个箭头 $A \to T$，则对象 T 称为 C 中的终对象。若 C 中的每个对象 A 都恰有一个箭头 $S \to A$，则对象 S 称为 C 中的始对象。

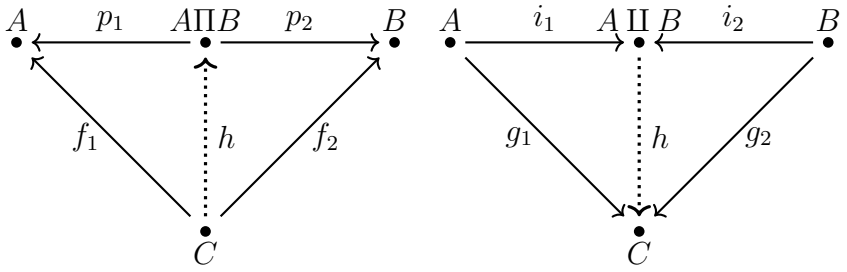
范畴 C 中的零对象0 是既是始对象又是终对象的对象。对 C 中任意两个对象 A 和 B，都存在唯一的箭头 $0_{A,\ B} : A \to 0 \to B$，称为从 A 到 B的零箭头。在范畴**Set**中，空集是始对象，而任意单点集都是终对象。

定义 2.4。设 C 是一个具有零对象的范畴，态射 $f : A \to B \in \mathsf{C}$ 的核 是对象 K 和态射 $i : K \to A$ 构成的一对 (K, i)，使得 $f \circ i = 0$ 满足泛性质，也就是说，对于任何满足 $f \circ i' = 0$ 的其他态射 $i' : K' \to A$，存在唯一一个箭头 $h : K' \to K$，使得 $i \circ h = i'$。

对偶地，态射 $f: A \to B$ 的 余核 是一个对 (E, p)，其中 E 是一个对象，$p: B \to E$ 是一个态射，使得 $p \circ f = 0$ 满足泛性质。

定义 2.5. 范畴 C 中对象 A 和 B 的积 是一个对象 $A \amalg B$，连同态射 $p_1: A \amalg B \to A$和$p_2: A \amalg B \to B$，满足泛性质，即：对于某个对象 C 以及任意两个态射 $f_1: C \to A$, $f_2: C \to B$，存在唯一的态射 $h: C \to A \amalg B$，使得对于 $i = 1, 2$，有 $p_i \circ h = f_i$。

对偶地，范畴 C 中对象 A 和 B 的余积 是一个对象 $A \amalg B$，连同态射 $i_1: A \to A \amalg B$ 和 $i_2 :B \to A \amalg B$，满足泛性质：对于某个对象 C，任意两个态射$f_1: A \to C$, $f_2: B \to C$，存在唯一的态射 $h: A \amalg B \to C$，使得对于 $i = 1, 2$，有 $h \circ i_i = f_i$。



定义 2.6。范畴 C 称为预加性范畴或 Ab-范畴，如果每个同态集 C(a, b) 都是加性阿贝尔群，且复合运算是双线性的：即，

$$(g + g') \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f') + (g' \circ f) + (g' \circ f')$$

其中 $f, f': a \to b$ 且 $g, g': b \to c$。

加性范畴是带有零对象的预加性范畴，其中任意一对对象都存在积和余积；阿贝尔范畴是每个态射都存在核和余核，且每个单态射都是一个核、每个满态射都是一个余核的加性范畴。容易看出，阿贝尔群范畴**Ab**、左 R 模范畴**R - Mod**以及右 R模范畴**Mod - R**都是阿贝尔范畴。

范畴 C 中的态射 $e: A \to A$ 称为幂等的，如果 $e^2 = e$。幂等态射 $e: A \to A$ 称为可分裂幂等态射，如果存在态射 $f: B \to A$ 和 $g: A \to B$，属于 C，且满足 $g \circ f = 1_B$ 和$f \circ g = e$。

定义 2.7。 (参见[5]) 一个范畴 C称为 幂等完备的，如果所有幂等元都是可分裂幂等元。

A预序 P 是一个范畴，对于任意 $p, p' \in \nu$P，P(p, p') 至多包含一个态射。在这种情况下，存在一个拟序

关系 $\subseteq$ on $\in \nu$P，使得 $p \subseteq p' \Leftrightarrow$ P$(p, p') \neq \phi$。如果 $\subseteq$ 是偏序（参见 .cf.[4]），则称 P 为严格预序。

定义2.8。 (参见[4]) 设C为一个范畴，P 为 C 的一个子范畴。若满足以下条件，则称二元组 (C, P)为带子对象的范畴：

- P 是一个严格预序，且 νC $= \nu$P。
- 每个 $f \in$P都是单态射。
- 若 $f, g \in$ P，且 $f = gh$ 对某个 $h \in$ C 成立，则 $h \in$ P。

令 $C, D \in \nu$C，我们将 P 中从 $C \to D$ 经由$j_{(C,D)}$ 的唯一态射记为，并称其为包含映射。在此情况下， C 被称为 D的一个子对象。

定义 2.9。 （参见 [4]）设 C 为一个带子对象的范畴。C 中态射 f 的典范分解 是形如 $f = jq$ 的分解，其中 q 是满态射， j 是包含映射。

定义 2.10。 （参见 [3]）设 R 是一个环。左 *R*-模 是一个阿贝尔群 （M， $+$），配备标量乘法 $R \times M \to M$， （r， x） $\mapsto rx$ ，满足：

- r（$x + y$） $= rx + ry$， $\forall r \in R$且x， $y \in M$
- （$r + r\prime$） $x = rx + r\prime x$， $\forall r$， $r\prime \in R$， $x \in M$
- （$rr\prime$） $x = r$（$r\prime x$） $\forall r$， $r\prime \in R$， $x \in M$

类似地，我们可以定义右 R-模。若 R 是交换环，则左 R-模和右 R-模相同。

3. 诺特环的左理想范畴

令 R 为一个带幺元的诺特环，且令 $\mathbb{L}_R$ 为 R的所有左理想的集合。由于诺特环的理想都是有限生成的，因此 $\mathbb{L}_R$ 中的每个左理想都具有如下形式： $A = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$， $a_i \in R$ 对所有$i = 1,2, ..., n$。容易观察到，$\mathbb{L}_R$是一个范畴，其对象为 R 的左理想，态射为 R -线性变换。即，对于任意 $A, B \in \nu\mathbb{L}_R$和 $f \in \mathbb{L}_R$(A, B)，则 f满足以下条件

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = rf(x)\ \forall x, y \in A, r \in R.$$

由于 R-线性变换的复合仍然是 R-线性的，范畴中的态射的复合就是 R 线性映射的通常集合复合，而 1_A 是 A上的恒等映射。

定理3.1. 令 R 为带幺元的诺特环。范畴$\mathbb{L}_R$，其对象为 R 的所有左理想，是一个带零对象的预加性范畴。

证明。 考虑 $A, B \in \nu\mathbb{L}_R$和 $f, g \in \mathbb{L}_R$(A, B)。定义

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{for all} \quad x \in A$$

then

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &= f(x+y)+g(x+y) = f(x)+f(y)+g(x)+g(y)\\ &= f(x)+g(x)+f(y)+g(y)\\ &= (f+g)(x)+(f+g)(y)\end{aligned}$$

$$(f+g)(rx) = f(rx)+g(rx) = rf(x)+rg(x) = r(f+g)(x)$$

也就是说， $f+g \in \mathbb{L}_R(A,B)$。由于零映射是 R-线性的，且属于 $\mathbb{L}_R(A,B)$，因此它是恒等元；对于每个 $f \in \mathbb{L}_R(A,B)$，令 $(-f)(x) = -f(x)$，则 $-f \in \mathbb{L}_R(A,B)$，并且它是逆元。因此，在上述定义的加法下， $\mathbb{L}_R(A,B)$ 是一个阿贝尔群。对于任意 $f_1, f_2 \in \mathbb{L}_R(A,B) g_1, g_2 \in \mathbb{L}_R(B,C)$，

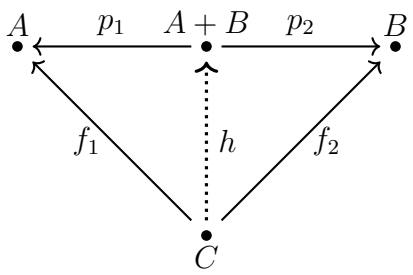
$$(g_1 + g_2)\circ(f_1 + f_2) = (g_1 \circ f_2) + (g_1 \circ f_2) + (g_2 \circ f_1) + (g_2 \circ f_2)$$

也就是说，复合是双线性的。因此， $\mathbb{L}_R$ 是一个预加性范畴。令 O 为零理想。对于任意 $A \in \nu\mathbb{L}_R$ ，在$\mathbb{L}_R(A、O)$中恰有一个箭头，因此 O 是 $\mathbb{L}_R$ 中的零对象，也就是说， $\mathbb{L}_R$ 是一个具有零对象的预加性范畴。□

这个范畴 $\mathbb{L}_R$ 是左 R-模$R-Mod$ 范畴的子范畴，而且很容易看出，包含函子 $i:\ \mathbb{L}_R \to R-Mod$ 是满的。同样可以看出， $\mathbb{R}_R$（即 R 的所有右理想的集合）是一个具有零对象的预加性范畴，也是右 R-模 $Mod-R$范畴的满子范畴。

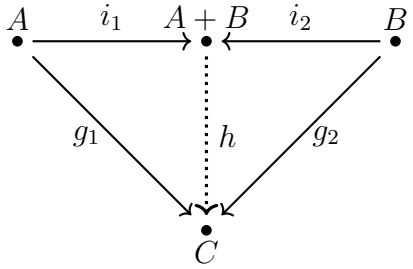
定理 3.2。 设 R 是一个诺特环。在由 R 的所有左理想构成的范畴 $\mathbb{L}_R$中，只有交为平凡交的理想才存在双积。

证明。 设 $A, B \in \nu\mathbb{L}_R$ 且 $A \cap B = \{0\}$。则 $A+B \in \nu\mathbb{L}_R$ ，并且由于 $A \cap B = \{0\}$，每个元素 $x \in A+B$ 都能唯一表示为 $x = a+b$ ，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。分别定义 $p_1:\ A+B \to A$ 和$p_2:\ A+B \to B$ 为 $p_1(x) = a$ 和 $p_2(x) = b$，对所有$x = a+b \in A+B$均成立。显然， $A+B$ 连同 p_1 和 p_2 构成左理想范畴 $\mathbb{L}_R$中的积。它满足如下泛性质：对于任意对象 $C \in \nu\mathbb{L}_R$ 以及态射 $f_1:\ C \to A$ 和 $f_2:\ C \to B$，存在唯一映射 h: $C \to A+B$，使得 $h(x) = f_1(x) + f_2(x) \forall x \in C$，从而使下图交换。



对偶地，我们可以分别将态射 $i_1:\ A \to A+B$ 和 $i_2:\ B \to A+B$定义为 $i_1(a) = a$ 和 $i_2(b) = b, \forall a \in A, \forall b \in B$。那么 $A+B$

与 i_1 和 i_2 一起构成左理想范畴$\mathbb{L}_R$中的余积。它具有如下泛性质：对于任意对象 $D \in \nu\mathbb{L}_R$ 和态射 $g_1 : A \to D$ 以及 $g_2 : B \to D$，存在唯一的映射h'：$A + B \to D$，使得 $h(x) = g_1(a) + g_2(b)$ $\forall x = a + b \in A + B$，从而使下图交换。



因此，在该范畴 $\mathbb{L}_R$ 积和余积（即双积）仅对具有平凡交的理想存在。□

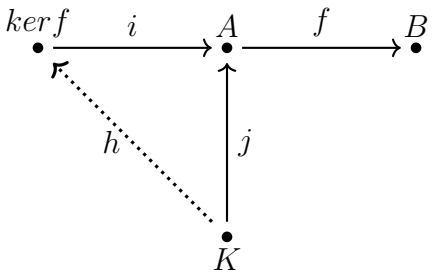
下面重述一个命题，因为它在 R-模范畴的背景下颇有意义。

命题 3.3。（参见[7]）设$\mathcal{C}$ 是一个加性范畴，且$\mathcal{D}$ 是$\mathcal{C}$的满子范畴。如果$\mathcal{D}$ 具有零对象并且对二元双积封闭，那么$\mathcal{D}$ 在继承$\mathcal{C}$ 的态射加法后是一个加性范畴。

由于范畴 $\mathbb{L}_R$ 是范畴 $R - Mod$ 的满子范畴，且 $\mathbb{L}_R$ 是具有零对象的预加性范畴，根据命题 3.3，我们可以得出 $\mathbb{L}_R$ 仅仅是预加性范畴。

定理 3.4. 设 R 是一个诺特环。那么范畴 $\mathbb{L}_R$ 中的每个态射都有一个核。

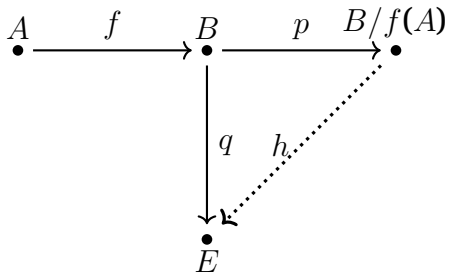
证明。设 $f : A \to B$ 是 $\mathbb{L}_R$中的一个箭头。则 $kerf = \{x \in A : f(x) = 0\}$是 R 的一个理想，并且 $kerf \in \nu\mathbb{L}_R$。考虑包含映射 $i :$ $kerf \to A$。显然 $f \circ i = 0$，且$(kerf, i)$ 是一个核并满足泛性质：对于任意其他的对(K, j)，其中K 是 $\mathbb{L}_R$ 中的一个对象，且 $j : K \to A$ 是一个态射，满足 $f \circ j = 0$，存在唯一的态射 $h : K \to A$，定义为 $h(x) = j(x) \forall x \in K$，使得下图交换。



□

定理3.5。 设 R 是一个诺特环，且 $\mathbb{L}_R$ 是 R 的所有左理想构成的范畴。那么， $\mathbb{L}_R$ 中只有零映射和满射态射具有余核。

证明。设 $f\colon A \to B$ 是 $\mathbb{L}_R$中的一个箭头。若 $f = 0$，则 $B/f(A) \cong B$ 是一个理想，因此 $B/f(A) \in \nu\mathbb{L}_R$。若 f是满射映射，则 $B/f(A)$ ≅是平凡理想 $\in \nu\mathbb{L}_R$。在这两种情况下，数对 $(B/f(A)\ p)$（其中$p:\ B \to B/f(A)$ 是通常的投影映射）将给出余核。它具有泛性质，因为对于任意数对 (E, q)，其中 E 是 $\mathbb{L}_R$中的一个对象，且 $q\colon B \to E$是一个满足 $q \circ f = 0$ 的态射，都存在唯一的态射 $h\colon B/f(A) \to E$，由 $h(x) = q(b)\ \forall x = b + f(A) \in B/f(A)$ 定义，使得下图交换。



□

引理 3.6. （参见[5]）若$\mathcal{C}$ 是一个预加性范畴，则以下命题等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是幂等完备的。*(2)* 所有幂等态射都有核。*(3)* 所有幂等态射都有余核。

定理 3.7. 设 R 是一个诺特环。在 R 的所有左理想构成的范畴 $\mathbb{L}_R$中，幂等态射完备。

证明。 我们已在定理 3.4 中证明， $\mathbb{L}_R$ 中的每个态射都有核。特别地，每个幂等箭头都有核。因此，由引理 3.6， $\mathbb{L}_R$ 是幂等完备的。□

定理 3.8. 诺特环R 的所有左理想构成的范畴 $\mathbb{L}_R$是一个带子对象的范畴，并且每个态射都有典范分解。

证明。为证明 $\mathbb{L}_R$ 是一个带子对象的范畴，只需构造 $\mathbb{L}_R$的一个子范畴 P，使其满足定义 2.8 中的条件。因此，在 $\nu\mathbb{L}_R$ 上定义如下偏序:

$$A \subseteq B \iff a_i = r_{i1}b_1 + ... + r_{in}b_n,\ r_{i1}, ..., r_{in} \in R,\ i = 1, ..., n$$

其中 $A =< a_1,\ a_2,\ .....,\ a_{n1} >_l$， $B =< b_1,\ b_2,\ .....,\ b_{n2} >_l \in \nu\mathbb{L}_R$。那么，由 $j_{(A,B)}(x) = x,\ \forall x \in A$ 定义的态射 $j_{(A,B)}:\ A \to B$ 是唯一的单态射，而 $\mathbb{L}_R$ 的子范畴 P 满足 $\nu\mathrm{P} = \nu\mathbb{L}_R$

且 P 的态射是包含映射$j_{(A,B)}$ 是严格预序。

假设 $j_{(A,C)}, j_{(B,C)} \in$ P，且 $j_{(A,C)} = j_{(B,C)}h$ 对于某个 $h \in \mathbb{L}_R$。那么对于每个 $x \in A$， $j_{(A,C)}(x) = j_{(B,C)}h(x)$，并且由于 $j_{(A,C)}$ 和$j_{(B,C)}$ 都是包含映射，我们有 h 是包含映射。因此($\mathbb{L}_R$,P) 是带子对象的范畴。

考虑任意态射 $f: A \to B$ 在 $\mathbb{L}_R$ 中，因为 A是左理想且f 是左 R-线性的，所以 $f(A)$ 是一个左理想。令 $q: A \to f(A)$为 f到 $im(f)$ 的限制，则容易观察到 q是一个满态射， $f(A) \subseteq B$且 $j_{(f(A),B)}: f(A) \to B$是一个包含映射。即，$f = j_{(f(A),B)}q$ 是一个典范分解。因此， $\mathbb{L}_R$ 中的每个态射都具有典范分解。□

4. 某些环的理想范畴示例

在下文中，我们给出一些诺特环的理想范畴的例子。

例 4.1. 理想范畴 $\mathbb{Z}$

考虑整数环 $\mathbb{Z}$的左 [右] 理想范畴 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ [$\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$] 。那么

$$\nu\mathbb{L}_{\mathbb{Z}} = \{\langle n\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{h}n\mathbf{i},\mathbf{h}m\mathbf{i}) = \{\rho_{(n,s,m)}: x \mapsto xs \mid s \in n\backslash m\mathbf{i};\ s \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbf{h}n\mathbf{i}\}$$

现在 $\rho_{(n,s,m)}$:hni $\to$ hmi，且 $\rho_{(m,t,p)}$: hmi $\to <p>$，其复合为 $\rho_{(m,t,p)} \circ \rho_{(n,s,m)} = \rho_{(n,st,p)}$: hni $\to <p>$。对于 $\rho_{(n,s,m)}, \rho_{(n,t,m)} \in \mathbb{L}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{h}n\mathbf{i}, \mathbf{h}m\mathbf{i})$, 令 $\rho_{(n,s,m)} + \rho_{(n,t,m)} = \rho_{(n,s+t,m)}$，关于此加法 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$(hni, hmi)是一个阿贝尔群，且 h0i 是零元素，因此 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ 是一个带零对象的预加性范畴。

对于任意两个非零理想 hni，hmi of $\mathbb{Z}$，元素 mn 总属于 hni $\cap$ hmi，因此只有当 $n = 0$ 或$m = 0$时，hni $\cap$ hmi $=$ {0}。所以在 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ 中，双积仅存在于其中一个对象为零理想的对象对之间。态射 $\rho_{(n,s,m)}$: hni $\to$ hmi 是一个单态射，而 $s \neq 0$ 与零对象一起构成的零箭头将给出该态射的核。

例 4.2. Z6 的理想范畴

设 $R = \mathbb{Z}_6$ 和 $\mathbb{L}_R$ 为一个范畴，其对象是环的左理想，态射是 R -线性变换，即，

$$\nu\mathbb{L}_{\mathbb{Z}6} = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle\}$$

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Z}6}(\mathbf{h}n\mathbf{i}, \mathbf{h}m\mathbf{i}) = \{\rho_{(n,s,m)}: x \mapsto xs \mid s \in n\backslash m\rangle; s \in \mathbb{Z}_6\ \forall x \in \mathbf{h}n\mathbf{i}\}$$

复合与加法的定义与 $\mathbb{Z}$中的情形相同。因此，$\mathbb{L}_{\mathbb{Z}6}$ 是一个具有零对象 h0i 的预加性范畴。在 $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}6}$ 中，(h2i，h3i) 和 (h0i，hni) 这两对对象存在双积，其中 $n = 1$，2，3。

参考文献

[1] MacLane, S. 供数学工作者使用的范畴论 第2版，Springer-Verlag New York, Inc.（1998）ISBN：0-387-98403-8

[2] MichaelArtin, 代数，Prentice Hall，新泽西，（1991），ISBN 0-13-004763-5 [3] Musili. C，环与模简介，NarosaPublishing House，新德里，（1992）ISBN 81-85198-64-0 。[4] Nambooripad, K.S.S.交叉联系理论，出版物第28号，数学科学中心，特里凡得琅，1994年。[5] Rohan Hitchcock，预加性范畴中的幂等元备注；2022年8月12日 http://therisingsea.org/notes/metauni/lg-idempotents.pdf[6] Romeo P.G.,Sreejamol P.R，关于环的理想范畴。《数学与系统科学杂志》7，94-99，2017年3月。[7]SamuelPettersson，加性、阿贝尔范畴和正合范畴 U.U.D.M. 项目报告 2016:48 http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1063166/FULLTEXT01.pdf