arXiv:2304.03761v1 [math.SG] 7 Apr 2023

Legendrian 结的表示范畴的同伦基数

JUSTIN MURRAY

Abstract. 给定一个位于（$\mathbb{R}^3$,ker($dz-ydx$)）中的 Legendrian 结，可以为其赋予称为支配多项式的组合不变量。这些不变量不仅已被证明能够恢复增广的（归一化）计数，而且还与以增广范畴的同伦基数形式出现的增广的范畴计数密切相关。在本文中，我们证明 n 维表示范畴的同伦基数是 n着色支配多项式的一个倍数。在此过程中，我们确立了：如果两个 n维表示“共轭同伦”，那么它们在表示范畴中是等价的。我们还给出了其在拉格朗日共边方面的一些应用。

1. Introduction

给定一个 Legendrian 结 Λ 在 $\mathbb{R}^3$ 中，其标准接触结构由 ker($dz-ydx$) 给出，可以为其赋予一个微分分次代数（DGA），($\mathcal{A}_\Lambda, \partial_\Lambda$)，称为 Chekanov-Eliashberg DGA。该 DGA由 Λ 的Reeb 弦生成，其微分统计 J-全纯圆盘，这些圆盘的边界位于辛化中的 $\mathbb{R}\times\Lambda$ 上。($\mathcal{A}_\Lambda, \partial_\Lambda$) 的稳定驯同构类是 Λ 的一个强大不变量，可以区分 Legendrian结，并用于研究 Legendrian 之间的拉格朗日余边界。不幸的是，这些不变量通常很难计算。为解决这一问题，可以通过一个增广 ϵ：($\mathcal{A}, \partial$) $\to$($\mathbb{F}$,0) 将 DGA线性化，从而得到线性化接触同调LCH^ϵ_*，它通常更容易计算（但取决于 ϵ）。关于 Legendrian 接触同调的深入讨论，请参见 [EN22]。

有趣的是，增广与一种纯组合不变量关系密切，该不变量称为 m 分次正规分解，由 Fuchs 以及 Chekanov 和 Pushkar 分别在生成族的背景下发现（见定义 4.7） [Fuc03, PC05, FI04, NS06, NRSS17, Sab05]。特别地，($\mathcal{A}_\Lambda$, ∂_Λ) 存在 m 分次增广，当且仅当 Λ 存在 m 分次正规分解。此外，在 [HR15], 中，作者证明了将 m 分次支配多项式在 $q^{1/2}-q^{-1/2}$ 处取值后，得到的就是增广数 Aug_m(Λ, $\mathbb{F}_q$)。这是对取值于阶为 q 的有限域的 m 分次增广数进行（归一化）计数。这意味着， Λ 的支配多项式完全由 ($\mathcal{A}_\Lambda$, ∂_Λ) 确定。

另一方面，可以将所有增广收集到两类 A_∞-范畴中，称为正增广范畴和负增广范畴。将增广收集到一个 A_∞ 范畴中的这一思想最早出现在 [BC14] 中，他们在那里引入了如今称为负增广范畴的概念 $\mathcal{A}ug_-$。构造正增广范- 畴 $\mathcal{A}ug_+$ 是为了证明，存在一个从 $\mathcal{A}ug_+$ ($\Lambda, \mathbb{F}$) 到$\mathcal{S}h_\Lambda$(Λ, F)的 A_∞-等价，其中后者是 $\mathbb{R}^2$ 上微局部秩1 可构造层的范畴，其微支撑位于 Λ 上。在这两种情形中，这些范畴的对象都是增广，而态射空间是某种形式的线性化接触上同调 [NRS$^+$20]。在 [NRSS17] 中，作- 者为 $\mathcal{A}ug_+$ 引入了基数的一个概念，称为同伦基数（也称为

乘法欧拉示性数 [BD01, MP07]) 定义为

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* = \sum_{[\epsilon]\in \mathcal{A}ug_+(\Lambda,\mathbb{F}_q)/\sim} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\epsilon)|}\cdot \frac{|H^{-1}\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)||H^{-3}\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)|\cdots}{|H^{-2}\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)||H^{-4}\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)|\cdots},$$

其中， $|\mathrm{Aut}(\epsilon)|$ 表示 $H^0\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)$ 中可逆元素的数量。此外， [NRSS17] 的主要定理指出，同伦基数实际上可以通过支配多项式和 Thurston-Bennequin 数计算得到：

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* = q^{tb(\Lambda)/2}R^0_\Lambda(z)|_{z=q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

其中 R^0_Λ 是 0-分次支配多项式。研究还表明，这一同伦基数可有效用于判断某些拉格朗日余边界是否无法反向，参见 [CSLL+22][Pan17]。

1.1. 主要结果。 最近， [LR20, MR20] 定义了 m-分次 n-着色支配多项式， $R^m_{n,\Lambda}(q)$，它是 Λ 的若干卫星结的支配多项式的线性组合（ $m \neq 1$的定义见定义 4.8），用于获得 DGA 映射到 $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q),0)$ 的类似计数。这类映射 $\rho\colon(\mathcal{A}_\Lambda,\partial_\Lambda) \to (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q),0)$ 称为n 维表示。此外，在 [CDRGG16], 中，增广范畴被推广到目标 DGA 为非交换的情形。本文的目标是将前述工作的范畴论层面从增广推广到 n维表示。

主要定理。 对于一个连通 *Legendrian* 结 $\Lambda\subset\mathbb{R}^3$ 带有 $r(\Lambda)=0$ 且配备一个基点，我们有

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* = q^{n^2(\frac{tb-\chi_*}{2})}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|^{-1}\cdot|\{\rho:\mathcal{A}\to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)\}|$$

其中， χ_* 表示移位欧拉示性数（定义见方程 *4.1*），而表示范畴的同伦基数是着色支配多项式的倍数：

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* = q^{n^2 tb(\Lambda)/2}R^0_{n,\Lambda}(q).$$

在第5节中，我们给出了一些关于拉格朗日共边的应用。特别地，Pan [Pan17] 的一个结果表明，如果存在从 Λ_- 到Λ_+ 的精确拉格朗日共边界，那么增广范畴的同伦基数会增加

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda_-,\mathbb{F}_q)^* \leq \#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda_+,\mathbb{F}_q)^*.$$

因此，如果该不等式不成立为等式，那么这就为反转共边提供了一个障碍。第5节确立了一个类似的结果。也就是说，我们证明，如果 $r(\Lambda_\pm)=0$，且存在一个从 Λ_- 到 Λ_+ 的共边，那么

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda_-,\mathbb{F}_q)^* \leq \#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda_+,\mathbb{F}_q)^*.$$

我们猜想，这种阻碍逆转共边的障碍严格强于增广范畴所给出的障碍，并概述其证明思路；该证明以存在一个结 Λ_n 为前提，它对某个 $n>1$ 具有一个 0-分次的 n 维表示，但没有 0-分次增广。

在本文档的其余部分，我们将把重点限制在 Legendrian结 Λ，其具有$r(\Lambda)=0$ （这是对 Λ 的 DGA要具有一个 0-分次的 n-维表示所要求的条件）。本文档的组织如下。在第2 节中，我们介绍 n-维表示范畴的背景， $\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F})$。第 3 节专门证明： $\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F})$中的两个表示等价，当且仅当它们在DGA 同伦意义下共轭。第 4 节确立了上文列出的主要定理。在此之后，我们

最后以第5节结尾，该节阐述了共边的一些应用，并提出了一些有待探索的进一步方向。

致谢。 作者谨向导师 Shea Vela-Vick 致谢，感谢他多年来给予的支持和许多有益的交流。我们感谢 Dan Rutherford 的多次讨论，并感谢他提出当前问题。我们也感谢 Mike Wong 和 Angela Wu 提供的宝贵意见和建议。作者获得了 NSF DMS-1907654资助的部分支持。

2. The Representation Category

本节回顾正表示范畴的构造，该构造由 [CDRGG16] 和 [CNS19] 定义，其符号约定来自 [CNS19] 和 [NRS+20]。尽管表示范畴中的对象和 Hom 空间很容易定义，但这个 A_∞-范畴的有趣之处在于其 A_∞ 结构。我们简要概述 [CNS19], 第 2 节中的定义，并省略部分细节。

2.1. 从 $\mathcal{A}_A$ 到 $M^\vee$。 设 $\mathbb{F}$ 为一个域，$A := \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$，且 $\mathcal{R} := \{a_1, \dots, a_m\}$ 为一个带有分次的生成集。设 M_A 为由 $\mathcal{R}$ 生成的自由分次 A-A-双模，其系数环位于 0 次分次。令 $M_A^{\boxtimes 0} := A$，并定义 $\mathcal{A}_A$ 为由下式给出的分次$\mathbb{F}$-代数

$$\mathcal{A}_A := \mathcal{T}_A(M_A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_A^{\boxtimes n}$$

其中 $\boxtimes = \otimes_A$，，乘法通过连接（以及矩阵乘法）定义。假设此外，$\mathcal{A}_A$ 还配备了一个微分 ∂_A，满足带符号莱布尼茨法则和 $\partial_A|_A = 0$。按照惯例，如果 ∂_A 没有常数项，也就是说，$\partial_A(\mathcal{A}_A) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_A^{\boxtimes n}$，我们将 ∂_A 增广 称为。

假设 $(\mathcal{A}_A,\ \partial_A)$ 是一个增广DGA。令 $M^\vee = \mathrm{Hom}_{A-A}(M_A,\ A)$，其分次由 $|a_i^\vee| = |a_i| + 1$ 决定。注意，元素 $\phi \in M^\vee$ 完全由其对 $\mathcal{R}$ 中元素的映射所确定，因此可将其识别为由 $\{a_1^\vee, \dots, a_r^\vee\}$ 生成的自由 A-模。对增广微分∂_A 的 k 阶部分进行对偶化过程，得到 $\mathbb{F}$-线性映射

$$m_k : (M^\vee)^{\otimes_{\mathbb{F}} k} \to M^\vee$$

由以下规则确定：增广微分中形如

$$\partial_A(b) = A_k a_{i_k} A_{k-1} a_{k-1} \cdots a_{i_1} A_0 + \cdots$$

含有 $A_j \in A$，则会在 m_k 中产生一项，形式为

$$m_k(M_{i_1} a_{i_1}^\vee, \dots, M_{i_k} a_{i_k}^\vee) = (-1)^\sigma (A_k M_{i_k} A_{k-1} M_{i_{k-1}} \cdots M_{i_1} A_0) b^\vee + \cdots$$

其中

$$\sigma = \frac{k(k-1)}{2} + \left(\sum_{p<q} |a_{i_p}^\vee||a_{i_q}^\vee| \right) + |a_{i_2}^\vee| + |a_{i_4}^\vee| + \cdots$$

从更几何的角度看，$m_k(M_{i_1} a_{i_1}^\vee,\ \dots\dots,\ M_{i_k} a_{i_k}^\vee)$中的各项是通过将增广微分中出现的每个生成元$a_{i_j}$ 替换为 $a_{i_j}^\vee$ 上的相应系数，然后记录正穿孔的对偶而得到的（见图1）。我们稍后将采用简写记号 $\langle m_k(M_{i_1} a_{i_1}^\vee,\ \dots\dots,\ M_{i_k} a_{i_k}^\vee)\ b^\vee \rangle$ 来表示出现在 $m_k(M_{i_1} a_{i_1}^\vee,\ \dots\dots,\ M_{i_k} a_{i_k}^\vee)$ 中的 $b^\vee$ 的系数。于是，$(M^\vee,\ \{m_k\})$构成一个 A_∞代数，如所述

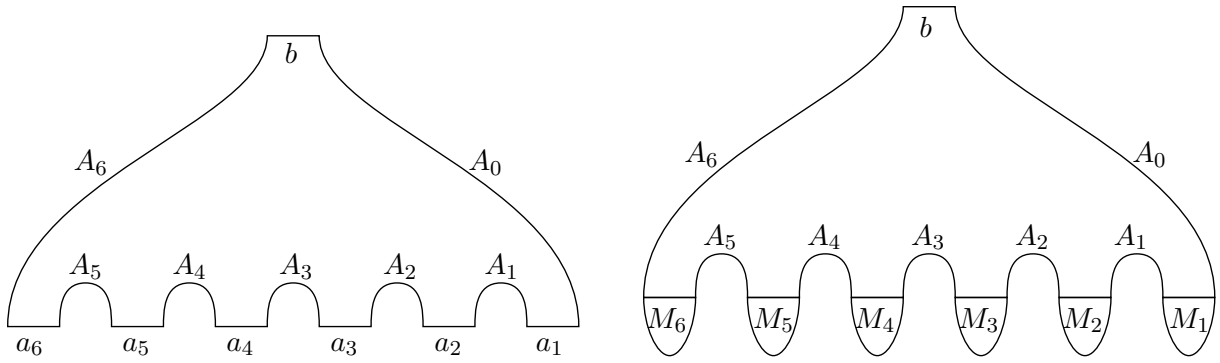


FIGURE 1. 左图：一个增广圆盘的几何图示，该圆盘对$\pm A_6a_6A_5a_5A_4a_4A_3a_3A_2a_2A_1a_1A_0$ $\partial_A(b)$中的 A_6 作出贡献（其中，标有 A_6 的股对应于 b的上股）。右图：相应的项，对系数 $\langle m_6(M_1a_1^\vee,\ M_2a_2^\vee,\ M_3a_3^\vee,\ M_4a_4^\vee,\ M_5a_5^\vee,\ M_6a_6^\vee)\ b^\vee\rangle$作出贡献

in [CDRGG16]和 [CNS19]。

2.2. 从表示构造增广微分 $\mathcal{A}_A$。设 R 是另一个 $\mathbb{F}$-代数，$\mathcal{A}_R$ 是另一个 DGA（像之前一样构造为张量代数），并配备一个微分 ∂_R，满足 Leibniz 规则和 $\partial_R|_R = 0$。对我们而言，这将是一个 Legendrian 结的完全非交换 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数，该结配备单个基点，并与 $\mathbb{F}$ 作张量积（因此特别有 $R = \mathbb{F}[t^{\pm 1}]$）。

定义 2。 **1. 从 $(\mathcal{A}_R, \partial_R)$ 到 A 的 n 维表示 是一个保单位的 DGA 映射**

$$\rho : (\mathcal{A}_R, \partial_R) \to (A, 0)$$

（特别地，除非 $|a_i| = 0$，否则 $\rho \circ \partial = 0$ 和 $\rho(a_i) = 0$）。

注 2.2。 前述定义实际上是 [LR20] 意义下的 0 分次表示定义，因为它只在 $\mathcal{R}$ 的 0 分次元素上有支撑。此外，如果 Λ 的 DGA 存在 0 分次 n 维表示，那么 Λ 必须具有 $r(\Lambda) = 0$。因此，本文余下部分我们假设 $r(\Lambda) = 0$，因为这样并未造成实质性的普遍性损失。

给定一个表示 $\rho : (\mathcal{A}_R, \partial_R) \to (A, 0)$，只需将 ∂_R 中出现的 R 元素替换为它们在 ρ 下的像，即可在 $\mathcal{A}_A$ 上得到一个诱导微分。记诱导微分为 ∂_A，则可用 ρ 扭曲 ∂_A，从而在 $\mathcal{A}_A$ 上得到一个增广微分 ∂_A^ρ。特别地，在生成元上定义“扭曲” $\mathbb{F}$ 代数同态 $\phi_\rho : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_A$ 为

$$\phi_\rho(a) = \begin{cases} a + \rho(a) & a \in \mathcal{R} \\ \rho(a) & a \in R \end{cases}$$

然后利用带符号莱布尼茨法则将 ϕ_ρ 扩展到整个 $\mathcal{A}_R$ 上。接着，通过定义得到一个增广微分 $\partial_A^\rho : \partial_A \to \partial_A$

$$\partial_A^\rho(a) = \begin{cases} \phi_\rho(\partial_R(a)) & a \in \mathcal{R} \\ 0 & a \in A \end{cases}$$

作用于生成元上，并按照带符号莱布尼茨法则延拓。得到增广微分后，便可像上一小节那样构造 $(M^\vee,\ \{m_k\}_{k\geq 1})$。

2.3. 表示范畴。 与增广范畴的情形一样， n维表示范畴有两种版本：“负”版本和“正”版本，参见 [BC14] [CNS19] 和 [NRS+20]。负版本是一个 A_∞ 范畴，其对象为 n维表示，其自 Hom 空间构成了本节前面定义的 A_∞代数。负版本的一个缺点是它没有严格单位元。相比之下，正表示范畴确实有一个严格单位元，由 $-y^\vee$ 给出（见 [CNS19]）。这个单位元的存在对本文余下部分至关重要，因此我们将省略“正”这一修饰词，但默认所讨论的是正表示范畴。

定义 2.3。 设 Λ 是一个配备了基点的Legendrian 结，且 $(\mathcal{A}_\Lambda, \partial_\Lambda)$是 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数。表示范畴 $\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$ 是由以下定义的 A_∞ 范畴

1. 对象： n 维表示 $\rho : (\mathcal{A}, \partial) \to (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}), \partial)$ 2. 态射：给定两个表示 ρ_1, ρ_2 ，我们定义 $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ 为由 $a_1^\vee, \dots, a_m^\vee, x^\vee, y^\vee$ 生成的自由分次 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$-模，其中 $a_i^\vee$ 是 Reeb 弦的形式对偶元，另加两个额外生成元。分次由 $|a_i^\vee| = |a_i| + 1$、$|x^\vee| = 1$ 和 $|y^\vee| = 0$ 给出 3. 复合： $\mathbb{F}$-多重线性映射

$$m_k : \mathrm{Hom}(\rho_k, \rho_{k+1}) \otimes \mathrm{Hom}(\rho_{k-1}, \rho_k) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) \to \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_{k+1})$$

通过相对于表示 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{k+1})$ 对 Λ 的 $(k+1)$-副本的增广微分取对偶来定义，如前所述。

现在我们更详细地展开 3。首先回顾 $k+1$ 个副本的拉格朗日投影的 DGA（见 Λ_f^{k+1}，详见 [NRS+20]），然后描述纯表示。设 f 为一个扰动莫尔斯函数，它恰有一个极大值，随后恰有一个极小值，且二者都位于基点附近的一个小邻域内（此处的先后顺序由 Λ 的定向规定）。利用 f，可以得到 $k+1$ 个副本的拉格朗日投影 Λ_f^{k+1}，从而构造出 $k+1$ 个 Λ 的平行副本（更多细节见 [NRS+20 第 4] 节）。从图示上看，这就像是 $k+1$ 个 $\pi_{xy}(\Lambda)$ 的黑板框架副本，在 Λ 上原始基点附近有一个单独的“浸入折点”，如图 2 所示。

将该副本的分支从顶部开始向下编号为 Λ_1 到 Λ_{k+1}，**靠近基点**。我们将受扰动的 $k+1$-副本的 Reeb 弦标记为 $a^{i,}{}_{k}{}^{j}$、$x^{i,j}$和 $y^{i,j}$，其中上标 i、j 表示从 Λ_j 到 Λ_i 的 Reeb 弦（其中 Λ_j 位于 Λ_i下方）。这里， $x^{i,j}$（分别为 $y^{i,j}$）是在扰动过程中由 f 的极大值（分别为极小值）产生的 Reeb 弦。我们称 $k+1$-副本的Reeb弦为纯，如果 $i = j$，否则称为混合。采用这一标记方案，可以使用矩阵明确描述 $k+1$-副本的 DGA。

命题2.4。 [NRS+20，命题 4。14] 设$(\mathcal{A}, \partial)$ 是由***Reeb*** 弦 $a_1, \dots, a_m$ 以及对应于基点的可逆生成元 $t^{\pm 1}$ 生成的 Λ 的 ***DGA***。那么 k副本的 ***DGA***，记作$(\mathcal{A}_{\Lambda_f^k}, \partial_{\Lambda_f^k})$，由以下元素生成：

- $a^{i,}{}_{\ell}{}^{j}$ 对于 $1 \le i, j \le k$ 和 $1 \le \ell \le m$，其中 $|a^{i,}{}_{\ell}{}^{j}| = |a_\ell|$
- $x^{i,j}$ 对于 $1 \le i < j \le k$，带有 $|x^{i,j}| = 0$
- $y^{i,j}$ 对于 $1 \le i < j \le k$，其中 $|y^{i,j}| = -1$

针对 $1 \le i \le k$ 的 • $t_i^{\pm 1}$，带有 $|t_i^{\pm 1}| = 0$

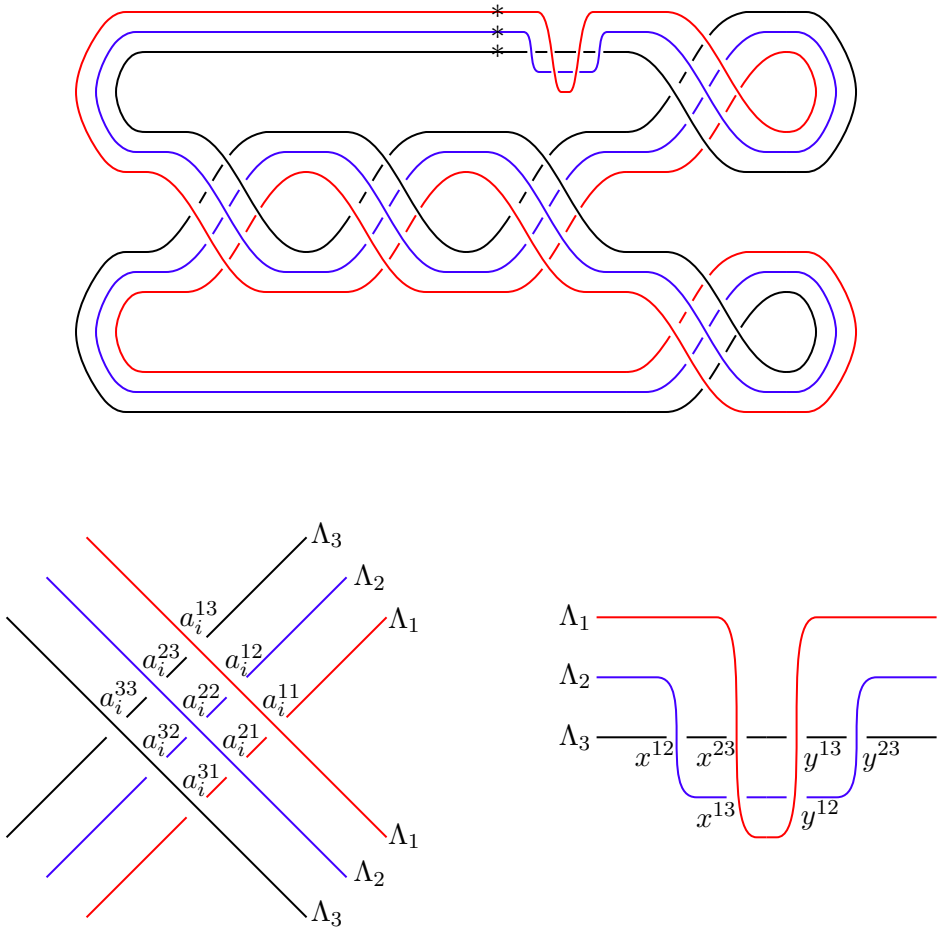


FIGURE 2. 上：三叶结的拉格朗日 3 重副本。下：交叉点与浸入折点生成元

k份的微分描述如下。定义 $k\times k$个矩阵 A_1、 $\dots A_m$、 X、 Y 和 Δ ，使得 $(A_\ell)_{ij}=a_\ell^{ij}$ 且

$$(X)_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ x^{i,j} & i<j\\ 0 & j>i\end{cases},\qquad (Y)_{ij}=\begin{cases}y^{i,j} & i<j\\ 0 & i\geq j\end{cases},\qquad (\Delta)_{ij}=\begin{cases}t_i & i=j\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

然后， k-副本的微分逐项由下式给出

$$\begin{aligned}\partial_{\Lambda_f^k}(A_\ell)&=\Phi(\partial(a_\ell))+YA_\ell-(-1)^{|a_\ell|}A_\ell Y\\ \partial_{\Lambda_f^k}(X)&=\Delta^{-1}Y\Delta X-XY\\ \partial_{\Lambda_f^k}(Y)&=Y^2\end{aligned}$$

其中 Φ： $\mathcal{A}\to \mathrm{Mat}_k(\mathcal{A}_{\Lambda_f^k})$ 定义为 $\Phi(a_\ell)=A_\ell$, $\Phi(t)=\Delta X$，以及 $\Phi(t^{-1})=X^{-1}\Delta^{-1}$。

最后，对纯表示 $\boldsymbol{\rho}$ 的 $k+1$-份 DGA 进行增广意味着，我们根据由 $\boldsymbol{\rho}(a^{i,}{}_{\ell}{}^{j})=\delta_{ij}\rho_i(a_\ell)$ 和$\boldsymbol{\rho}(t_i)=\rho_i(t)$ 给出的表示对微分进行扭曲。 m_k 的构造随后可由上文得到，只需限制在递增的可复合词上（参见 [NRS+20，引理 3.15]），也就是说，如果 $c^{i,}{}_{\ell}{}^{j}$ 是任意一个 $a^{i,}{}_{k}{}^{j}$ ，或 $x^{i,j}$ 或 $y^{i,j}$

生成元，然后

$$\partial_A^{\rho}(b^{1,k}) = A_k c_k^{1,2} A_{k-1} c_{k-1}^{2,3} \cdots c_1^{k-1,k} A_0 + \cdots$$

产生了.....的贡献

$$m_k(M_1 c_1^\vee, \ldots, M_k c_k^\vee) = (-1)^\sigma (A_k M_k A_{k-1} M_{k-1} \cdots M_1 A_0) b^\vee + \cdots .$$

3. Equivalence in the Representation Category

我们将 $\mathcal{R}ep_n$ 中的两个表示称为同构的，如果它们在其关联的上同调范畴 $H^*\mathcal{R}ep_n$ 中同构。在增广范畴中，可以证明（如 [NRS+20] 中所做的那样），这种等价概念等价于两个增广是DGA 同伦的。然而，增广范畴具有每个 m_k is$\mathbb{F}$-线性的性质，而在表示范畴中则不存在 Mat$_n(\mathbb{F})$-线性。另一方面，我们从表示理论中知道，如果存在将两个表示联系起来的共轭，那么群的两个线性表示是同构的。自然地，人们可能希望结合这两种观点，从而得到 $\mathcal{R}ep_n$中表示同构的一个等价概念。事实上，在本节中我们证明，两个表示同构，当且仅当它们是“共轭 DGA 同伦”的（见下文定义 3.7）。

下面两个“刻画引理”可直接由 n-副本的 DGA 描述和 $\mathcal{R}ep_n$ 的定义得出，并将在本节中贯穿使用。建议读者将其与 [NRS+20中的引理 5.16 和 5.17]进行比较。

引理3.1（ m_1的刻画）。在 Hom(ρ_1， ρ_2)中，我们有

$$m_1(Ma_i^\vee) = \sum_j \sum_{\substack{a_j, b_1, \ldots b_n \\ u \in \Delta(a_j; b_1, \ldots, b_n)}} \sum_{1 \le \ell \le n} \delta_{b_\ell, a_i} \sigma_u \rho_1(b_1 \cdots b_{\ell-1}) M \rho_2(b_{\ell+1} \cdots b_n) a_j^\vee$$

$$m_1(My^\vee) = (\rho_1(t)^{-1} M \rho_2(t) - M) x^\vee + \sum_j (M\rho_2(a_j) - \rho_1(a_j) M) a_j^\vee$$

$$m_1(Mx^\vee) \in \mathrm{Span}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{a_j^\vee\}$$

其中 σ_u 表示 u的定向符号之积， $\Delta(a_j; b_1 \ldots b_n)$ 表示在 a_j 处有一个正穿孔的全纯圆盘模空间，而 b_i是负穿孔，或是任意整数次幂的基点生成元 t ，后者来自基点与 u边界的交点。

引理 3.2（ m_2的刻画）。假设 Λ 的 ***Reeb*** 弦按高度递增标记为 $h(a_1) < h(a_2) < \cdots < h(a_m)$ 。那么对于任意表示 ρ_1、 ρ_2 和 ρ_3，映射 $m_2 : \mathrm{Hom}(\rho_2, \rho_3) \otimes \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) \to \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_3)$ 满足

- $m_2(Ma_i^\vee, Na_j^\vee) \in$ 张成空间$_{\text{矩阵}_n(\mathbb{F})}\{a_\ell^\vee | \ell >$ 最大值$\{i, j\}\}$
- $m_2(Mx^\vee, Na_i^\vee)$ 、 $m_2(Ma_i^\vee, Nx^\vee)$ 和 $m_2(Mx^\vee, Nx^\vee)$ 均属于张成空间$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{a_j^\vee\}$
- $m_2(y^\vee, \alpha) = m_2(\alpha, y^\vee) = -\alpha$ 对于任意 $\alpha \in$ 张成空间$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{y^\vee, x^\vee, a_1^\vee, \ldots, a_m^\vee\}$
- 对于 $\alpha = M_\alpha y^\vee + A$ 和 $\beta = M_\beta y^\vee + B$，满足 A， $B \in$ 张成空间$_{\text{矩阵}_n(\mathbb{F})}\{a_i^\vee | \ |a_i| = -1\}$ 以下结论成立：

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta) &= m_2(M_\alpha y^\vee, M_\beta y^\vee) + m_2(M_\alpha y^\vee, B) + m_2(A, M_\beta y^\vee) + m_2(A, B) \\ &= -M_\beta M_\alpha y^\vee - B \cdot M_\alpha - M_\beta A + m_2(A, B). \end{aligned}$$

其中 $B \cdot M_\alpha$ 表示对所有系数进行右乘法 M_α，因此如果 $B = \sum_i B_i a_i^\vee$，那么 $B \cdot M_\alpha = \sum_i B_i M_\alpha a_i^\vee$。

注记 3.3. 将引理 3.2 与 [NRS+20] 中的引理 5.17 进行比较，最后一条似乎有些难以理解为何要列出，但这四项计算是我们唯一需要的四项。

引理*3.4*（余循环条件）。形如 $\alpha = My^\vee - \sum_i K(a_i)a_i^\vee \in \mathit{Hom}^0(\rho_1, \rho_2)$ 的任意元素，若满足 $M \in$ 一般线性群$_n(\mathbb{F})$，且 $K(a_i) \in \mathit{Mat}_n(\mathbb{F})$，则当且仅当对所有 i， $M\rho_2(t) = \sim \sim \rho_1(t)M$ 和 $M\rho_2(a_i) - \rho_1(a_i)M = K \circ \partial(a_i)$ 成立时，它是一个余循环。这里， K 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathit{Mat}_n(\mathbb{F})$ 的唯一一个延拓 K 的 (ρ_1, ρ_2)-导子。

证明。 我们只需计算 $m_1(\alpha)$（稍微滥用一下记号：允许 b_i 表示可逆的 t 生成元）

$$\begin{aligned}
m_1(\alpha) &= m_1(My^\vee) - m_1\left(\sum_i K(a_i)a_i^\vee\right) \\
&= (\rho_1(t)^{-1}M\rho_2(t) - M)x^\vee + \sum_j (M\rho_2(a_j) - \rho_1(a_j)M)a_j^\vee \\
&\quad - \sum_j \sum_{\substack{a_j, b_1, \dots b_n \\ u \in \Delta(a_j; b_1, \dots, b_n)}} \sum_{\substack{1 \le \ell \le n \\ b_\ell \neq t^{\pm 1}}} \sigma_u \rho_1(b_1 \cdots b_{\ell-1}) K(b_\ell) \rho_2(b_{\ell+1} \cdots b_n) a_j^\vee \\
&= (\rho_1(t)^{-1}M\rho_2(t) - M)x^\vee + \sum_j (M\rho_2(a_j) - \rho_1(a_j)M)a_j^\vee \\
&\quad - \sum_j \sum_{\substack{a_j, b_1, \dots b_n \\ u \in \Delta(a_j; b_1, \dots, b_n)}} \sum_{\substack{1 \le \ell \le n \\ b_\ell \neq t^{\pm 1}}} (-1)^{|b_1 \cdots b_{\ell-1}|} \sigma_u \rho_1(b_1 \cdots b_{\ell-1}) K(b_\ell) \rho_2(b_{\ell+1} \cdots b_n) a_j^\vee \\
&= (\rho_1(t)^{-1}M\rho_2(t) - M)x^\vee + \sum_j (M\rho_2(a_j) - \rho_1(a_j)M - \widetilde{K} \circ \partial(a_j))a_j^\vee
\end{aligned}$$

在最后一个等号处，我们在加入来自 $b_\ell = t^{\pm 1}$ 的消失项后使用了归纳法$^\sim$（由于分次原因，我们有 $K(t^{\pm 1}) = 0$）。现在结论成立。□

注记 3.5. 引理3.4中的上述计算在去掉 M 可逆这一假设后仍然成立。然而，我们将看到，为了使两个表示在 $\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$中等价， M 可逆是必要的。

注记 3.6. 如果 $M\rho_1$ 和 $\rho_2 M$ 是 DGA 映射（但它们并不是），那么若有 $M\rho_2(a_i) - \sim \sim \rho_1(a_i)M = K \circ \partial(a_i)$，且 K 是一个(ρ_1, ρ_2)-导子，这便是 $M\rho_2$ 与 $\rho_1 M$ 之间 DGA 同伦的定义，我们也就会想写成 $M\rho_2 \sim \rho_1 M$。可以通过以下方式修正这一点。首先注意到， ρ_1 和 $M\rho_2 M^{-1}$ 是 DGA 映射。当 $m_1(\alpha) = 0$ 时，将 $a_j^\vee$ 的系数右乘 M^{-1}，即可得到

$$\sum_j (M\rho_2(a_j)M^{-1} - \rho_1(a_j))a_j^\vee \overset{\star}{=} \sum_{\text{disks}} [(-1)^{|b_1 \cdots b_{\ell-1}|} \sigma_u \rho_1(b_1 \cdots b_{\ell-1}) K(b_\ell) \rho_2(b_{\ell+1} \cdots b_n)] M^{-1} a_j^\vee$$

其中，$\sum_{\text{圆盘}}$ 应解释为引理3.4证明中的三重求和。$^\sim$定义 L 为唯一的 $(\rho_1, M\rho_2 M^{-1})$-导子，它延拓了 $L(x) = K(x)M^{-1}$。根据定义， $L(xy) = L(x)M\rho_2(y)M^{-1} + (-1)^{|x|}\rho_1(x)L(y) = [K(x)\rho_2(y) + (-1)^{|x|}\rho_1(x)K(y)]M^{-1}$。再由归纳法可得，等式 $\star^\sim$ 右边 $a_j^\vee$ 的系数恰为 $\sum_j L \circ \partial(a_j)$。

定义3.7。 给定两个表示 $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$，若存在 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 以及一个 $(\rho_1, M\rho_2 M^{-1})$-导子 L，使得 $M\rho_2(t)M^{-1} = \rho_1(t)$ 且 $M\rho_2 M^{-1} - \rho_1 = L \circ \partial$，则称 ρ_1 和 ρ_2 共轭微分分次代数同伦。我们用 $M\rho_2 M^{-1} \sim \rho_1$ 表示共轭微分分次代数同伦

引理 3.8。 共轭微分分次代数同伦是一种等价关系

证明。 这源于 M 可逆，且通常的DGA 同伦是一个等价关系，相关内容可见于 [FHT15]。 □

现在我们进入证明两个表示何时等价的阶段。与增广范畴中一样，我们定义 $\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$ 中的两个表示 ρ_1、 ρ_2 等价，当且仅当它们在上同调范畴 $H^*\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$ 中同构（参见 [NRS+20] [CNS19]）。

命题 3.9。 $\mathcal{R}ep_n$中的两个表示$(\Lambda, \mathbb{F})$ 在 $H^*\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$ 中等价，当且仅当它们是共轭 *DGA* 同伦的

证明。假设 $\rho_1 \cong \rho_2$ 在 $\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F})$ 中。则存在余循环 $\alpha \in \mathrm{Hom}^0(\rho_1, \rho_2)$和$\beta \in \mathrm{Hom}^0(\rho_2, \rho_1)$，使得 $[m_2(\alpha, \beta)] = [-y^\vee]$ 在 $H^0\mathrm{Hom}(\rho_2, \rho_2)$ 中。于是，我们有 $m_2(\alpha, \beta) = -y^\vee + m_1(\gamma)$，其中 γ 属于分次 -1。若记 $\langle m_1(\gamma)\ y^\vee \rangle$ 为 $m_1(\gamma)$ 中出现的 $y^\vee$的系数，则我们推得 $\langle m_1(\gamma)\ y^\vee \rangle = 0$ （根据引理3.1 中对 m_1 的刻画），并且 $\langle m_1(\gamma)\ x^\vee \rangle = 0$ （出于分次的原因）。因此我们可以改写为

$$m_2(\alpha, \beta) = -y^\vee + \sum_{|a_i|=-1} K(a_i)a_i^\vee. \tag{3.1}$$

由于 α, β 的分次为 0，且它们都是余循环，我们只需验证 α 中出现的$y^\vee$ 的系数可逆，因为引理3.4和备注 3.6 将完成证明。为此，令 $\alpha = M_\alpha y^\vee + A$ 和 $\beta = M_\beta y^\vee + B$ 满足 $A, B \in$ 张成空间$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{a_i^\vee \mid |a_i| = -1\}$。那么，由于 m_k 是 $\mathbb{F}$-多线性的，我们得到

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta) &= m_2(M_\alpha y^\vee, M_\beta y^\vee) + m_2(M_\alpha y^\vee, B) + m_2(A, M_\beta y^\vee) + m_2(A, B) \\ &= -M_\beta M_\alpha y^\vee - B \cdot M_\alpha - M_\beta A + m_2(A, B). \end{aligned} \tag{3.2}$$

比较 3.1 和 3.2，并使用引理 3.2，我们看到 $M_\alpha \in$一般线性群$_n\mathbb{F}$ 如所要求 d.

反过来，假设存在一个 $M \in$一般线性群$_n(\mathbb{F})$ 和一个 $(\rho_1, M\rho_2 M^{-1})$-导子 L，使得 $M\rho_2 M^{-1} - \rho_1 = L \circ \partial$。由于我们将 $(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}), 0)$ 视为集中在 0 次的 DGA，因此唯一非零的 $L(a_i)$ 必定来自 DGA 次数为 -1 的那些 a_i 。因此，根据引理 3.4 和备注 3.6，我们看到 $\alpha = My^\vee + \sum_i L(a_i)a_i^\vee$是 $\mathrm{Hom}^0(\rho_1, \rho_2)$ 中的一个余循环。我们将找到一个 $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}^0(\rho_2, \rho_1)$，使得 $m_2(\alpha, \beta) = m_2(\gamma, \alpha) = -y^\vee$，然后一旦证明 β和 γ是余循环，就可推出 $[m_2(\alpha, \beta)] = [m_2(\gamma, \alpha)] = -[y^\vee]$。由此便得到 $\rho_1 \cong \rho_2$。

β 和 γ 的构造是对称的，因此我们只构造 β。出于评分原因，$\beta = M_\beta y^\vee + B$ 对于某个 $B \in$ 张成空间$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{a_i^\vee \mid |a_i| = -1\}$。回顾方程3.2，并将 α 简称为 $My^\vee + A$，我们看到 $-y^\vee = m_2(\alpha, \beta)$等价于

$$-y^\vee = -M_\beta M y^\vee - B \cdot M - M_\beta A + m_2(A, B).$$

我们必须定义 M_β 和 B。显然，我们必须定义 $M_\beta = M^{-1}$。采用这一选择后，我们看到，对 B的任何选择都必须满足 $B = -M^{-1}A \cdot M^{-1} + m_2(A, B) \cdot M^{-1}$。我们通过按高度归纳构造这样的 B，如下所示。若我们坚持按照高度滤过为 Reeb 弦编号，则 m_2 的刻画意味着 $\langle m_2(A, B)\ a_i^\vee \rangle$。

完全由 A and those $B_j a_j^\vee$ with $j < i$ 确定，因此 B_i 可以通过归纳来定义。由此完成了 β 的构造。为验证 $m_1(\beta) = 0$，我们借助 A_∞ 关系。我们有

$$m_1(-y^\vee) = m_1(m_2(\alpha, \beta)) = m_2(m_1(\alpha), \beta) + m_2(\alpha, m_1(\beta))$$

注意到 $m_1(-y^\vee)$为零，因为我们正在自同态空间 $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_1)$ 中计算 $m_1(-y^\vee)$（见引理3.4）。我们还知道 $m_2(m_1(\alpha)\ \beta) = 0$，因为 α 是一个余循环。因此，上式化简为 $0 = m_2(\alpha, m_1(\beta))$。利用 $\mathbb{F}$-线性性，我们有

$$\begin{aligned} 0 = m_2(My^\vee + A, m_1(\beta)) &= m_2(My^\vee, m_1(\beta)) + m_2(A, m_1(\beta)) \\ &= -m_1(\beta) \cdot M + m_2(A, m_1(\beta)) \end{aligned}$$

重新整理后得到 $m_1(\beta) = m_2(A, m_1(\beta)) \cdot M^{-1}$ 这意味着，根据 m_2 的刻画，$m_1(\beta) \in$ 张成空间$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})}\{a_i\}$。利用引理3.1的第一条，通过归纳可以验证 $\langle m_1(\beta)\ a_i^\vee \rangle = 0$，因此 $m_1(\beta) = 0$。 □

4. Counting in the Representation Category

有了表示之间的等价性，我们便可以开始研究表示范畴的同伦基数。按照预期，将同伦基数定义为:

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)^* = \sum_{[\rho] \in \mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)/\sim} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\rho)|} \cdot \frac{|H^{-1}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-3}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots}{|H^{-2}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-4}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots}$$

其中，等价性是指上同调范畴中的等价性；正如我们在前一节中看到的，这与共轭微分分次代数同伦相同。

引理4.1。对于固定的 ρ： $\mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ 和 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，以及任意选取的 $A_i \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$，存在唯一的表示 ρ_0： $\mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$和 $(\rho, M\rho_0 M^{-1})$-导子 L，使得 $L(a_i) = A_i$以及 $M\rho_0 M^{-1} \sim \rho$。

证明。这是另一个使用高度滤过的归纳。假设 ρ_0 和 L 已经被定义，并在由 a_1、$\ldots a_{i-1}$生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数 $\mathcal{F}_{i-1}\mathcal{A}$上满足所需性质。定义 $\rho_0(a_i) := M^{-1}\rho(a_i)M + M^{-1}LM(\partial(a_i))$。根据构造，$M\rho_0(a_i)M^{-1} - \rho(a_i) = L(\partial(a_i))$。因此，为验证 ρ_0 是一个表示，只需证明 $\rho_0 : (\mathcal{F}_i\mathcal{A}, \partial) \to (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}), 0)$是一个链映射；由于$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$具有零微分，这等价于证明 $\rho_0(\partial(a_i)) = 0$。由于 $\partial(a_i) \in \mathcal{F}_{i-1}\mathcal{A}$，归纳假设意味着

$$\rho_0(\partial(a_i)) = M^{-1}\rho(\partial(a_i))M + M^{-1}LM(\partial^2(a_i)) = 0.$$

此处，上述方程中的第一项为零，因为 $\rho \circ \partial = 0$（第二项为 0，因为∂ 是微分）。 □

推论 4.2。对于任意表示 $\rho \in \mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)$ 的基数

$$\bigsqcup_{\rho_0 \in \mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)} \{\alpha \in \mathrm{Hom}^0(\rho, \rho_0) | m_1(\alpha) = 0 \ and\ [\alpha]\ is\ an\ isomorphism\ in\ H^0\mathrm{Hom}(\rho, \rho_0)\}$$

是 $q^{\dim r}$|一般线性群$_n(\mathbb{F}_q)$|其中 r 表示 *DGA* 次数为 -1的 *Reeb* 弦数量 .

证明。表示同构的一个 H^0Hom+(ρ, ρ_0) 余循环具有如下形式： $\alpha = My^\vee + A$，其中 $A \in$ Span$_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)}\{a_i^\vee || a_i| = -1\}$ 且 $M \in$ GL$_n$($\mathbb{F}_q$)。我们看到， M有 |GL$_n\mathbb{F}_q$| 种选择；固定 M后，我们得到 q^{n^2r} 个同构（对应于同伦算子 L 在 $\mathcal{A}$ 中分次为 -1的元素上的可能取值），它们从 ρ 到某个 ρ_0 （其中ρ_0 由 α唯一确定）。□

令 Hom^0(ρ, ρ_0)$^\times$ 表示 Hom^0(ρ, ρ_0)中在 m_2 运算下具有左逆和右逆的余循环。 [NRSS17] 中的一个结果立即可以推广，从而表明存在从 Hom^0(ρ, ρ_0)$^\times$ 到 Hom^0(ρ, ρ)$^\times$ 的双射。我们在此记录其论证，并解释对我们情形所作的修改。假设 Reeb 弦的标记Λ 遵循高度滤过，并定义一个下降滤过如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2) &= \mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2)\\ \mathcal{F}^{0}\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2) &= \mathrm{Span}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)}\{x^\vee, a_1^\vee, a_2^\vee, \dots, a_n^\vee\}\\ \mathcal{F}^{i}\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2) &= \mathrm{Span}_{Mat_n(\mathbb{F}_q)}\{a_i^\vee, a_{i+1}^\vee, \dots, a_n^\vee\}.\end{aligned}$$

于是， A_∞ 运算以下述方式保持 $\mathcal{R}ep_n$($\Lambda, \mathbb{F}$) 上的这一递降滤过。

命题 4.3。 [NRSS17] 对于 $k \geq 1$，以及任意表示 ρ_1、 ρ_2、 $\dots \rho_{k+1}$ 和任意整数 $1 \leq i_1$、 . . . 、 $i_k < n$，我们有

$$m_k(\mathcal{F}^{i_k}\mathrm{Hom}(\rho_k,\rho_{k+1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{i_1}\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_2)) \subset \mathcal{F}^{I}\mathrm{Hom}(\rho_1,\rho_{k+1})$$

$$where\ I = \begin{cases} \max\{i_1,\dots,i_k\}+1 & k \neq 2 \\ \max\{i_1,i_2\} & k = 2 \end{cases}$$

证明。此结论可完全按照 [NRSS17，命题 9] 的方法得出。为完整起见，我们在此仅概述其证明。其思路是，按照高度递增的顺序 $h(y) < h(x) < h(a_1) < \ldots < h(a_n)$，为 $k+1$ copy $\mathcal{A}$($\Lambda^{(k+1)}$)$^\rho$ 的增广DGA生成元标记（这里我们特意省略生成元上的上标），从而得到 $k+1$ copy 的通常滤过。由此可得结论： m_k($\mathcal{F}^{i_k}$Hom(ρ_k, ρ_{k+1}) $\otimes \cdots \otimes$Hom(ρ_1, ρ_2)) $\subset \mathcal{F}^I$Hom(ρ_1, ρ_{k+1})，其中 I =max$\{i_1, \dots, i_k\}$。接下来，通过考察 $k+1$-copy 的（增广）DGA，并注意到当$_{S^1}$,$^{k+1} \in \mathcal{F}_p\mathcal{A}(\Lambda_f^{k+1})^\rho \setminus \mathcal{F}_{p-1}\mathcal{A}(\Lambda_f^{k+1})^\rho$ 时， $\partial^\rho(s)$ 中出现的 $\mathcal{F}_p\mathcal{A}(\Lambda_f^{k+1})^\rho \setminus \mathcal{F}_{p-1}\mathcal{A}(\Lambda_f^{k+1})^\rho$ 中唯一的生成元只出现在二次项中（见命题 2.4），即可将此结论推广到 $k \neq 2$。□

命题 4.4。 假设 ρ 和 ρ_0 在 $\mathcal{R}ep_n$（$\Lambda, \mathbb{F}$） 中同构，则存在从 Hom^0（ρ, ρ_0）$^\times$ 到 Hom^0（ρ, ρ）$^\times$的双射。

证明。我们重复 [NRSS17, Proposition 10] 中的论证，并稍作调整，以处理 m_k 运算不满足 Mat$_n$($\mathbb{F}_q$)-多线性的情况。固定 $f \in$ Hom^0(ρ, ρ_0)$^\times$ ，并取 f 的一个左逆 $g \in$Hom^0(ρ_0, ρ)$^\times$。然后定义 M_g: Hom^0(ρ, ρ_0) $\to$Hom^0(ρ, ρ) 和 M_f: Hom^0(ρ, ρ) $\to$Hom^0(ρ, ρ_0)，使得 $M_g(\alpha) = m_2(g, \alpha)$，且 $M_f(\alpha) = m_2(f, \alpha)$。利用 A_∞ 关系可以计算得出做爱片

$$M_g \circ M_f(\alpha) = \alpha + m_1(m_3(g,f,\alpha)) + m_3(g,f,m_1(\alpha))$$

现在我们应用 命题 4.3，以看出 $M_g \circ M_f$ 相对于基

$$\{E_{ij}y^\vee, E_{ij}a_1^\vee, \dots, E_{ij}a_m^\vee\} \setminus \{E_{ij}a_k^\vee : |a_k^\vee| \neq 0\}$$

s

具有如下形式： $I+N$其中 N严格下三角。这里， E_{ij}表示 $n\times n$矩阵，其 (i,j)-项为1，其余位置为 0；基底先按 Reeb弦排序，然后按 i，再按 j排序。这意味着 $M_g\circ M_f$ 是单射，因此 M_f 是单射。类似的论证表明 M_g 是单射。

只需证明 $M_f(\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times)\subset \mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times$。令 $\beta\in\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times$。于是$m_1(M_f(\beta))=m_1(m_2(f,\beta))=m_2(m_1(f)\ \beta)+(-1)^{|f|}m_2(f,m_1(\beta))=0$其中，最后一个等号用到了 f 和 β 是余循环这一事实。为证明 $M_f(\beta)$ 有左逆和右逆，我们回顾一下，存在左逆和右逆等价于要求 $y^\vee$ 的系数可逆。由于根据定义， f和 β 的 $y^\vee$ 系数可逆，由命题 3.9 中的等式 3.2 可知， $M_f(\beta)$ 的相应系数也可逆。因此， $M_f\colon \mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times\to\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times$ 是单射；类似地， $M_g\colon \mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times\to\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times$ 也是单射。由此可得，$\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times$ 与 $\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times$之间存在双射。□

推论 4.5。 固定 $\rho\colon\ \mathcal{A}\to \mathrm{Mat}_n\mathbb{F}_q$ ，并令 $B^0(\rho,\rho)$ 表示 $\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)$中的余边界，令 $|\mathrm{Aut}(\rho)|$ 表示 $H^*\mathrm{Hom}(\rho,\rho)$中的单位元个数。于是

$$|\{\rho_0:\mathcal{A}\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)|\rho\cong\rho_0\}|=\frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Aut}(\rho)|}q^{\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)-\dim_{\mathbb{F}_q}B^0(\rho,\rho)-n^2}$$

证明。 推论 4.2 以及命题 4.4 意味着

$$q^{n^2r}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|=\left|\bigsqcup_{\rho_0\cong\rho}\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho_0)^\times\right|=|\{\rho_0:\rho\cong\rho_0\}|\cdot|\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times|$$

其中 r 是 DGA 中度数为 -1 的 Reeb 弦数量。现在，由于 $r=\mathrm{rank}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)}\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)-1$ 和

$$|\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)^\times|=|\mathrm{Aut}(\rho)|\cdot|B^0(\rho,\rho)|=|\mathrm{Aut}(\rho)|\cdot q^{\dim_{\mathbb{F}_q}B^0(\rho,\rho)}$$

我们得到

$$\begin{aligned}|\{\rho_0:\mathcal{A}\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)|\rho\cong\rho_0\}|&=\frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Aut}(\rho)|}q^{n^2(rk\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)-1)}q^{-\dim_{\mathbb{F}_q}B^0(\rho,\rho)}\\&=\frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Aut}(\rho)|}q^{\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Hom}^0(\rho,\rho)-\dim_{\mathbb{F}_q}B^0(\rho,\rho)-n^2}\end{aligned}$$

□

令 r_i 表示 Λ 在分次 i 中的 Reeb 弦数量。我们将移位欧拉示性数 χ_* 定义为

$$\chi_*:=\sum_{i\geq 0}(-1)^i r_i+\sum_{i<0}(-1)^{i+1}r_i \tag{4.1}$$

定理4.6。对于 *Legendrian* 结 Λ 在 $\mathbb{R}^3$ 中，我们有

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F}_q)^*=q^{n^2(\frac{tb-\chi_*}{2})}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|^{-1}\cdot|\{\rho:\mathcal{A}\to\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)\}|$$

其中

$$\chi_*:=\sum_{i\geq 0}(-1)^i r_i+\sum_{i<0}(-1)^{i+1}r_i$$

证明。令 $m_1^i : \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) \to \mathrm{Hom}^{i+1}(\rho,\rho)$，并注意到

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) &= \dim_{\mathbb{F}_q} \ker m_1^i + \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{im}\ m_1^i \\ &= \dim_{\mathbb{F}_q} \ker m_1^i + \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{im}\ m_1^i - \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{im}\ m_1^{i-1} + \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{im}\ m_1^{i-1} \\ &= \dim_{\mathbb{F}_q} H^i\mathrm{Hom}(\rho,\rho) + \dim_{\mathbb{F}_q} B^{i+1}(\rho,\rho) + \dim_{\mathbb{F}_q} B^i(\rho,\rho)\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{i<0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) = -\dim_{\mathbb{F}_q} B^0(\rho,\rho) + \sum_{i<0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} H^i\mathrm{Hom}(\rho,\rho). \tag{4.2}$$

与此同时，我们有

$$n^2\chi_* = -2n^2 + \sum_{i\le 0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) - \sum_{i>0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) \tag{4.3}$$

and

$$-n^2 tb = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) \tag{4.4}$$

其中，方程 4.3中的 $-2n^2$ 计入了来自 $y^\vee$ 和 $x^\vee$的额外贡献。结合上述方程，我们看到

$$\begin{aligned}n^2\left(\frac{\chi_* - tb}{2}\right) &\overset{4.3\&4.4}{=} -n^2 + \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^0(\rho,\rho) + \sum_{i<0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^i(\rho,\rho) \\ &\overset{4.2}{=} -n^2 + \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}^0(\rho,\rho) - \dim_{\mathbb{F}_q} B^0(\rho,\rho) + \sum_{i<0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} H^i\mathrm{Hom}^i(\rho,\rho)\end{aligned}$$

因此，推论 4.5 的表述可以改述为

$$\begin{aligned}|\{\rho : \rho \cong \rho_0\}| &= \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Aut}(\rho)|} q^{n^2\left(\frac{\chi_*-tb}{2}\right)} q^{-\sum_{i<0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} H^i\mathrm{Hom}^i(\rho,\rho)} \\ &= \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Aut}(\rho)|} q^{n^2\left(\frac{\chi_*-tb}{2}\right)} \cdot \frac{|H^{-1}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-3}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots}{|H^{-2}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-4}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots}.\end{aligned}$$

Re对表示的同构类进行排列并求和，得到 u s

$$\begin{aligned}\#\pi_{\ge 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* &= \sum_{[\rho]\in\mathcal{R}ep_n(\Lambda,\mathbb{F}_q)/\sim} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\rho)|} \cdot \frac{|H^{-1}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-3}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots}{|H^{-2}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)||H^{-4}\mathrm{Hom}(\rho,\rho)|\cdots} \\ &= q^{n^2\left(\frac{tb-\chi_*}{2}\right)} |\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|^{-1} \cdot |\{\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)\}|\end{aligned}$$

as desired. □

现在回顾 m 次正规分解的定义。 Λ 的正规分解是将前投影图分解为一组简单闭曲线，其中每条简单闭曲线在右尖点处恰有一个角，在左尖点处也恰有一个角，并且可能在交叉点处有角（称为 切换点），同时满足图 3 中的正规性条件。

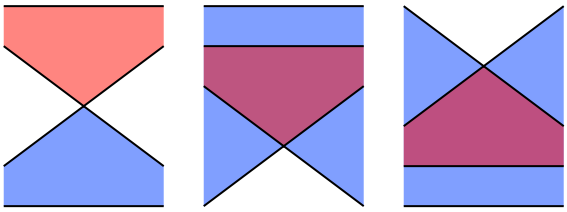


FIGURE 3. 正规性条件指出，在一个切换点处，相应简单闭曲线的内部在局部上要么互不相交，要么彼此嵌套。

进一步假设 Λ 配备了一个取值于 $\mathbb{Z}/m$ 的 Maslov势[1]，其对应于 $m|2r(\Lambda)$。如果一个分解的所有切换点 τ 都发生在 Maslov势相等（模 m）的两条支之间，那么τ 就称为 m-分次的。

定义 4.7。 m-分次支配多项式 Λ 定义为

$$R^m_\Lambda(z) = \sum_\tau z^{|\text{switches}(\tau)|-|\text{right cusps}(\tau)|}$$

定义 4.8。 [LR20] 对于 $m \neq 1$， m-分次 n-着色支配多项式定义为

$$R^m_{n,\Lambda}(q) = \frac{1}{c_n}\sum_{\beta\in S_n} q^{\ell(\beta)/2} R^m_{S(\Lambda,\beta)}(z)|_{z=q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

其中， $S(\Lambda, \beta)$表示用一个[2] $\beta \subset J^1[0,1]$ 的正置换辫对 Λ 进行的卫星构造，该正置换辫的所有股线在 β上的 Maslov 势均为 0； $\ell(\beta)$表示 β的长度；并且

$$c_n = (q^{1/2})^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^n \frac{q^{i/2}-q^{-i/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}.$$

在 [LR20], 中，对于任意 $m \geq 0$，Legendrian 不变量 m-分次总 n-维表示数已在完全一般的情形下定义。我们记录其定义（在本文的受限语境中）。

定义 4.9。 令 $\Lambda \subset J^1\mathbb{R}$ 具有 $r(\Lambda) = 0$。则总 0-分次 n-维表示数定义为

$$Rep_0(\Lambda, \mathbb{F}_q^n) = q^{-n^2(\frac{\chi_*}{2})}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|^{-1}\cdot|\{\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)\}|$$

将定理 4.6 与

定理 4.10。 [LR20] 令 $\Lambda \subset J^1(\mathbb{R})$ 为一个具有 $r(\Lambda) = 0$的 *Legendrian*，则

$$Rep_0(\Lambda, \mathbb{F}_q^n) = R^0_{n,\Lambda}(q)$$

可得

推论 4.11. 对于一个 *Legendrian* 结 $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$，满足 $r(\Lambda) = 0$ 的，其 n-着色分解多项式 Λ定义为

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)^* = q^{n^2tb/2}R^0_{n,\Lambda}(q).$$

[1]Maslov 势是定义在 Λ 的前投影图上的局部常值函数，当沿着尖点向上穿过时其值增加一。[2]正置换辫是唯一的 Legendrian n-缠结，其特征是要求 β 的前投影没有尖点，并且（将各股从上到下编号）若 $i < j$，则 β 在 i 和 j 所标记的股之间于 $x = 0$ 处没有（分别恰有一个）交叉点，当 $\beta(i) < \beta(j)$（分别为 $\beta(i) > \beta(j)$）时。

5. Applications to Concordance

本节探讨由前几节及现有文献所产生的直接结果。我们通过结合 [CNS16], [CSLL+22] 和[Pan17]中的结果来进行讨论。我们回顾其中一些结果。

定理 5.1. [CNS16, 定理 2.4] 假设 L 是一个从Λ_- 到 Λ_+的精确拉格朗日共边界，那么对于任意图案 $\beta \subset J^1(S^1)$ ，都存在一个从 $S(\Lambda_-, \beta)$ 到 $S(\Lambda_+, \beta)$的精确拉格朗日共边界

注 5.2. 在 [CNS16] 中，他们研究的是结之间的共边，因此将讨论范围限制在 β 连通的情形。然而，他们的论证基于 Weinstein 邻域定理，也适用于 β 不连通的情形。

定理 5.3. [CSLL+22] 设 L 是一个自旋精确 *Maslov-0* 拉格朗日共边界，从 Λ_-到 Λ_+，则 $\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda_-, \mathbb{F}_q)^* \leq \#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda_+, \mathbb{F}_q)^*$ 且 $R^0_{\Lambda_-}(q^{1/2} - q^{-1/2}) \leq R^0_{\Lambda_+}(q^{1/2} - q^{-1/2})$

推论 5.4. 如果 L 是从 Λ_- 到 Λ_+ 的自旋精确拉格朗日共边界，并且满足$r(\Lambda_-) = 0$ 或 $r(\Lambda_+) = 0$，那么 $\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda_-, \mathbb{F}_q)^* \leq \#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda_+, \mathbb{F}_q)^*$ 且 $R^0_{n,\Lambda_-}(q) \leq R^0_{n,\Lambda_+}(q)$

证明。只需证明，对于每个正置换辫 β，从 $S(\Lambda_-, \beta) = S(\Lambda_+, \beta)$ 得到的共边是 Maslov-0 的。这可由以下观察得出：若共边 C 的任一端是 Legendrian Λ，则有如下交换图，将 Λ、C 和拉格朗日 Grassmann 流形 $LGr(-)$ 联系起来

$$\begin{array}{ccccc} H_1(C) & \xrightarrow{i_*} & H_1(LGr(2)) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle r_*}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \uparrow{\scriptstyle (id_{LGr(1)}\times\partial_{x_2})_*} & & \| \\ H_1(\Lambda) & \xrightarrow{j_*} & H_1(LGr(1)) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{Z} \end{array}$$

其中 i 和 j 是包含映射，r 是变形收缩。由于底部的复合映射为 0（$r(\Lambda) = 0$），我们可知 C 的 Maslov 数也为 0。于是，对各个 $R_{S(\Lambda_\pm,\beta)}$ 求和项应用上述定理，即得该推论。□

推论 5.4 还有一些有趣的推论。例如可以看出，如果存在从 U 到 Λ 和从 Λ 到 U 的 Maslov-0 共边，那么 Λ 的同伦基数与 U 完全相同。因此，如果 U 是最大 tb 无结，那么

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(\Lambda, \mathbb{F}_q)^* = \#\pi_{\geq 0}\mathcal{R}ep_n(U, \mathbb{F}_q)^* = |GL_n(\mathbb{F}_q)|^{-1}.$$

5.1. 进一步的方向。 尚不清楚，表示范畴的同伦基数是否比增广范畴的同伦基数构成更强的共边障碍。更确切地说，是否存在从 Λ_- 到 Λ_+ 的 Maslov-0 共边，使得二者 $\Lambda_\pm$ 均无增广，并且对于某个 $n > 1$，推论 5.4 中的不等式是严格的? 一个显而易见的解决思路如下。首先，找一个没有（0-分次）增广、但具有更高 n 维（0-分次）表示的结 Λ_n。任取两个 Maslov-0 共边的 Legendrian $\widetilde{\Lambda_-}$ 和 $\widetilde{\Lambda_+}$，使得

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug(\widetilde{\Lambda_-}, \mathbb{F}_q)^* < \#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug(\widetilde{\Lambda_+}, \mathbb{F}_q)^*$$

$\widetilde{\ }$然后令 $\Lambda_{\pm}$ 为 $\Lambda_n\#\Lambda_{\pm}$。为了使这一策略可行，需要作出一些辅助选择，例如，应选择 Λ_n 和 $\widetilde{\Lambda_-}$
（分别为 Λ_+）上的Maslov 势，使其与 $\Lambda_n\#\Lambda_-$ （重-$\widetilde{\ }$分别为 $\Lambda_n\#\Lambda_+$）上的 Maslov 势相容。已知存在没有增广但具有二维非分次表示的Legendrian，即Sivek 的负扭结。族 Λ_n 正是 [CDRGG16]中提出的同一个族，它可以在连通和中区分镜像。

我们的设定有些限制。我们选择研究带有单个基点和单个浸入折点的连通 Legendrian 结，以及这类 Legendrian 结之间的共边。对此有多种推广方式。例如，可以考察类似结果是否也适用于链环。此外，引理3.4对 $2m$-分次表示成立，因此另一个研究方向是探讨上述论述有多少适用于例如 $2m$-分次表示。事实上，在增广的框架下仍有一些尚待完成的工作，因为如何定义 $2m$ 分次增广范畴的同伦基数还相当不明确。例如，在 [NRSS17 中，猜想 19] 他们猜想

$$2\dim \mathrm{Hom}^0(\epsilon,\epsilon) - 2\dim B^0(\epsilon,\epsilon) - 1 - \chi_*(\Lambda) = 2\dim H^0\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon) - \dim H^1\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon).$$

基于这一点，作者推导出 $2m$-分次同伦基数的适当定义，即给出支配多项式倍数的正确上同调群组合。在前述猜想的假设下，可得到 [NRSS17，推论 20] ，其中指出，对于任意 $m \geq 0$， $2m$-分次增广范畴的同伦基数应为

$$\#\pi_{\geq 0}\mathcal{A}ug_+(\Lambda,\mathbb{F}_q)^* := \sum_{[\epsilon]} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\epsilon)|}\frac{|H^0\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)|}{|H^1\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)|^{1/2}} q^{(tb(\Lambda)-1)/2} = q^{tb/2}R^{2m}_{\Lambda}(q^{1/2}-q^{-1/2}).$$

因此，人们可能会猜想，通过验证一个类似的猜想，可以得到一个定义，其中右侧为 $q^{n^2tb/2}R^{2m}_{n,\Lambda}(q)$。

References

[BC14] Fr´ed´eric Bourgeois 和 Baptiste Chantraine。双线性化 Legendrian 接触同调与增广范畴。*J. Symplectic Geom.*，12(3):553–583，2014。[BD01] John C. Baez 和 James Dolan。从有限集到费曼图。载于数学无极限——*2001*及以后，第 29–50 页。Springer，柏林，2001。[CDRGG16] Baptiste Chantraine、Georgios Dimitroglou Rizell、Paolo Ghiggini 和 Roman Golovko。非交换增广范畴。载于*G¨okova* 几何-拓扑会议 *2015*论文集，第 116–150 页。G¨okova 几何/拓扑会议（GGT），G¨okova，2016。[CNS16] Christopher Cornwell、Lenhard Ng 和 Steven Sivek。拉格朗日共边的障碍。*Algebr. Geom. Topol.*，16(2):797–824，2016。[CNS19] Baptiste Chantraine、Lenhard Ng 和 Steven Sivek。表示、层与 Legendrian $(2, m)$ 环面链环。*J. Lond. Math. Soc. (2)*，100(1):41–82，2019。[CSLL+22] Orsola Capovilla-Searle、No´emie Legout、Ma¨ylis Limouzineau、Emmy Murphy、Yu Pan 和 Lisa Traynor。拉格朗日填充中反转拉格朗日手术的障碍，2022。[EN22] John B. Etnyre 和 Lenhard L. Ng。 $\mathbb{R}^3$中的 Legendrian 接触同调。载于*2020* 微分几何综述。三维流形拓扑与几何综述，第 25 卷，*Surv. Differ. Geom.*，第 103–161 页。Int. Press，波士顿，MA， [2022]©2022。[FHT15] Yves F´elix、Steve Halperin 和 Jean-Claude Thomas。有理同伦论。*II*。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，Hackensack，NJ，2015。

[FI04] Dmitry Fuchs 和 Tigran Ishkhanov。Legendrian 结的不变量与前投影图的分解。莫斯科数学杂志，4(3):707–717, 783，2004。[Fuc03] Dmitry Fuchs。Legendrian 结的 Chekanov-Eliashberg 不变量：增广的存在性。*J. Geom. Phys.*，47(1):43–65，2003。[HR15] Michael B. Henry 和 Dan Rutherford。有限域上的支配多项式与增广。*J. Topol.*，8(1):1–37，2015。[LR20] Caitlin Leverson 和 Dan Rutherford。卫星支配多项式、微分分次代数表示与着色 HOMFLY-PT 多项式。*Quantum Topol.*，11(1):55–118，2020。[MP07] Jo˜ao Faria Martins 和 Timothy Porter。关于 Yetter 不变量以及 Dijkgraaf-Witten 不变量向范畴群的扩展。*Theory Appl. Categ.*，18：第 4 篇，118–150，2007。[MR20] Justin Murray 和 Dan Rutherford。Legendrian DGA 表示与着色 Kauffman 多项式。*SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*，16：论文编号 017，33，2020。[NRS+20] Lenhard Ng、Dan Rutherford、Vivek Shende、Steven Sivek 和 Eric Zaslow。增广即层。*Geom. Topol.*，24(5):2149–2286，2020。[NRSS17] Lenhard Ng、Dan Rutherford、Vivek Shende 和 Steven Sivek。Legendrian 链的增广范畴的基数。*Math. Res. Lett.*，24(6):1845–1874，2017。[NS06] Lenhard L. Ng 和 Joshua M. Sabloff。Legendrian 结的增广与分解之间的对应。***Pacific J. Math.***，224(1):141–150，2006。[Pan17] Yu Pan。恰当拉格朗日协边诱导的增广范畴映射。*Algebr.Geom. Topol.*，17(3):1813–1870，2017。[PC05] P. E. Pushkar' 和 Yu. V. Chekanov。Legendrian 链前沿的组合学与 Arnol'd 的 4 个猜想。*Uspekhi Mat. Nauk*，60(1(361)):99–154，2005。[Sab05] Joshua M. Sabloff。Legendrian 结的增广与分解。*Int. Math. Res. Not.*，(19):1157–1180，2005。

Justin Murray, Department of Mathematics, Louisiana State University电子邮件地址: jmurr24@lsu.edu