Prepared for submission to JHEP

延展算符的高阶表示

Thomas Bartsch、Mathew Bullimore、Andrea Grigoletto

英国达勒姆大学数学科学系，*Upper Mountjoy*，*Stockton Road*，*Durham*，*DH1 3LE*电子邮箱：thomas.d.bartsch@durham.ac.uk，
mathew.r.bullimore@durham.ac.uk，以及
andrea.grigoletto@durham.ac.uk

Abstract: 众所周知，量子场论中的局域算符在普通全局对称群的表示下变换。本文旨在将这一论述推广到线缺陷和曲面缺陷等延展算符。我们阐明，$(n-1)$ 维算符在有限可逆对称性或类群对称性的 n-表示下变换，并深入探讨这一论述在 $n=1$，2，3 中的体现。因此，我们提出高阶表示论，作为描述对称性如何作用于量子场论中延展算符内容的自然框架。

arXiv:2304.03789v2 [hep-th] 5 Jun 2023

目录

1引言 11.1 概述 4

2 局部算子和1-表示 4
2.1 初等视角 42.2 范畴视角 62.3 示例 10

3 线和群的 2-表示 10
3.1 预备知识 3.2 初等视角 11
3.3 诱导视角 3.4 范畴论视 12
角 3.5 示例 19
23
30

4 线和 2-表示的 2-群 33
4.1 预备知识 4.2 初等视角 33
4.3 诱导视角 4.4 范畴论视 35
角 4.5 示例 38
40
41

5 曲面与 3-表示 47
5.1 预备知识 485.2 初等视角 495.3 诱导视角 545.4 范畴论视角 55

A 高阶表示论 60
A.1 1-表示 60A.2 2-表示 62A.3 3-表示 70

1 引言

众所周知，量子场论中的局域算符在普通有限群对称性的表示 G 中变换。本文旨在将这一论断推广到一般的有限可逆对称性——例如参见 [1–20]——以及它们对局域算符和延展算符的作用。

总体设想如下：（$n-1$）维延展算符在有限高群对称性 $\mathcal{G}$ 的 n-表示中变换。例如，线缺陷变换于 2-表示中，而曲面缺陷变换于 3-表示中。重要的是，这一论断与背景时空维数 D 以及高群对称性的 't Hooft 反常 $\mathcal{G}$ 无关。

高阶表示的出现反映了由延展算符承载的拓扑缺陷具有更丰富的结构。普通线性表示对应于群在向量空间上的作用，而 n-表示对应于群在 n-向量空间上的作用；这些向量空间编码了$(n-1)$维缺陷上的拓扑缺陷。以下是一些例子：

- 2-向量空间是有限半单结合代数，用于描述一维线缺陷 L上的拓扑局域算符。
- 3-向量空间是多重融合范畴，用于描述二维面缺陷 S上的拓扑线缺陷。

这些例子在图 1. 中以示意图的形式展示

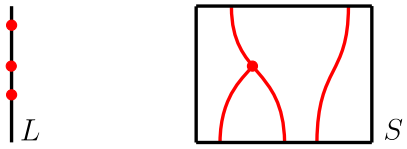


图 1。

虽然高阶范畴结构的出现顺理成章，但高阶表示的分类往往具有具体形式，并反映出明确的物理现象。我们先来考虑具有有限群对称性G的理论中的一维线缺陷。不可约 2-表示由 [21–23]分类：

1. 一个子群 $H \subset G$。
2. 一个群上同调类 $c \in H^2(H,\ U(1))$。

在此 2-表示下变换的线缺陷保留子群 $H \subset G$，并承载由与 c 相关联的 SPT 相所刻画的 't Hooft 反常。因此，它们终止于按 H 的射影表示变换的局域算符，其舒尔乘子为 c。这一结果可以直接扩展到包含 1-形式和 2-群对称性；主稿中对此进行了详细说明，并为 [24–27] 中呈现的许多结果提供了组织原则。

接下来讨论具有有限群对称性G的理论中的二维面缺陷，我们发现不可约 3-表示的分类如下：

1. 一个子群 $H \subset G$。
2. 一个融合范畴 C，连同一个同态 $\rho : H \to \mathrm{Aut(C)}$ 以及一个群上同调类 $f \in H^2(H,\ Z(\mathrm{C})^\times)$。

3. 一个群上同调类 $c \in H^3(H,\ U(1))$。

按此 3-表示变换的曲面缺陷保留 $H \subset G$，并支持由 C 描述的拓扑线。第二个点中的其余信息决定了 $H \subset G$ 对曲面缺陷上拓扑线的作用，而第三个点描述了缺陷 't Hooft 反常。我们注意到，具有 $H = G$ 的一维 3-表示已在 [28] 中完成分类。

本文始终从多个等价视角进行考察。最基本的视角是利用拓扑对称缺陷的性质，这些缺陷生成有限n-群对称性，并与延展算符发生一致的相互作用，从而推导出 n-表示的数据。这可以相当直接地得到上述用于分类n-表示的具体数据。

然而，为了揭示 n-表示出现的根本原因，我们还考虑了一种更抽象的方法。在这种方法中，我们将（$n-1$）维延展算符视为附着在辅助 n维拓扑量子场论上的有能隙边界条件，如图 2 示意。与拓扑对称缺陷的一致相互作用进而要求该 $\mathcal{G}$维拓扑量子场论具有 n-等变结构，而它是一个函子

$$\mathcal{G} \to n\mathsf{Vec} \tag{1.1}$$

到有限维 n-向量空间的融合 n-范畴中。这重现了 n-表示的抽象数学定义。

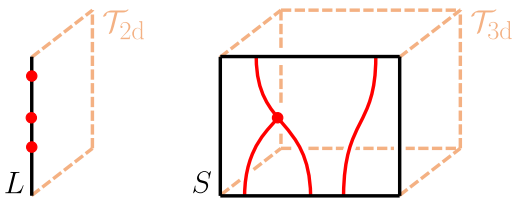


图 2。

附着的 n 维拓扑量子场论可视为背景威尔逊线的 n 维类比。事实上，在对 $\mathcal{G}$进行规范化后，附着的 n 维拓扑量子场论就成为动力学威尔逊线的 n 维类比：如 [29–32]所述，生成对称性范畴 $n\mathsf{Rep}(\mathcal{G})$ 的拓扑缺陷。此时，$(n-1)$ 维带电算符便成为扭曲扇区算符。

虽然这一框架用 n表示来描述任意一般非拓扑的 $(n-1)$ 维延展算符的变换性质，但它也可应用于自身生成高阶群 $\mathcal{H}$的延展拓扑对象。借此可以刻画 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$之间的混合 't Hooft 反常。因此，对高阶群高阶表示论的理解为研究离散 't Hooft 反常提供了一种工具。

最后，本文专门讨论带电的延展算符，它们仅承载玻色拓扑算符。我们预期，这一构造可自然扩张至作用于

费米子 n-向量空间上的表示，例如超向量空间、半单超代数、超多重融合范畴等，这些对应于承载费米子拓扑算符的延展算符。或者，也可以通过更抽象的构造来描述，即考虑允许有能隙边界条件的 $\mathcal{G}$-等变费米子 n维拓扑量子场论。我们希望在未来的工作中再探讨这一问题。

1.1 概述

本文的结构按照延展算符维数递增的顺序展开：

- 在第 2 节中，我们回顾一个广为人知的结论：局域算符在有限对称群的表示下变换，并以一种便于推广的方式来阐述这一结论。

- 在第 3 节中，我们证明线算符在有限群对称性的 2-表示下变换。

- 在第 4 节中，我们将上一节的结论推广，证明线算符在有限 2-群对称性的 2-表示下变换。

- 在第5节中，我们探讨曲面缺陷如何在有限群对称性的 3-表示下变换。读者会很高兴地得知，我们的讨论到此为止。

在每一节中，我们都遵循一致的模式。首先，我们利用拓扑对称缺陷的性质及其与（$n-1$）维延展算符的相互作用，初步推导出 n-表示的数据。随后，我们用 n-表示的诱导给出一种等价描述。接着，我们引入辅助的附着 n 维拓扑量子场论，以更具范畴论视角的方式展开讨论，最后通过规范理论及其他领域的简单例子作结。尤其是，我们希望偏重物理的读者即使不深入了解高阶范畴框架，也能领会所有要点。

补注：本文完成后、投稿前，文献 *[33] ap-* 已发表，且其结果与本文部分重叠。

2 局域算符与 1-表示

本节重新讨论一个众所周知的结果：局域算符在有限对称群的不可约表示下变换。我们首先回顾利用拓扑缺陷的标准论证，如文献 [1], 所述；随后，我们将其重新表述在一个更具范畴论意味的语境中，从而能够平滑地推广到延展算符。所有这些讨论都适用于任意维数 D，且与相关对称群是否存在 't Hooft 反常无关。

2.1 初等视角

在具有有限对称群 G 的 D 维量子场论中，存在由群元素 $g \in G$ 标记、支撑在余维一

子流形 Σ_{D-1}上的拓扑缺陷。这些缺陷按照 G的群律融合，如图 3所示。

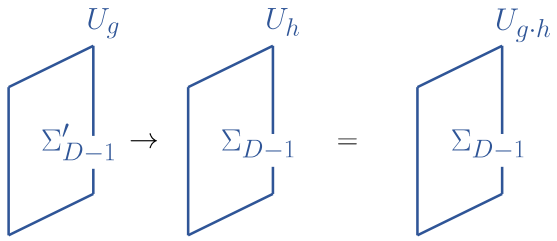


图 3。

我们通过与相关联的拓扑缺陷进行链接，定义群元素 $g \in G$ 对支撑于点 x 上的局域算符的作用

$$g \triangleright \mathcal{O}(x) \;:=\; U_g(S_x^{D-1})\,\mathcal{O}(x)\,, \tag{2.1}$$

其中， S_x^{D-1}表示与点 x链接的小球面。群元素 g， $h \in G$ 的连续作用满足

$$g \triangleright (h \triangleright \mathcal{O}(x)) \;=\; (g \cdot h) \triangleright \mathcal{O}(x)\,, \tag{2.2}$$

这是拓扑缺陷融合定律的结果。这些性质如图 4所示。

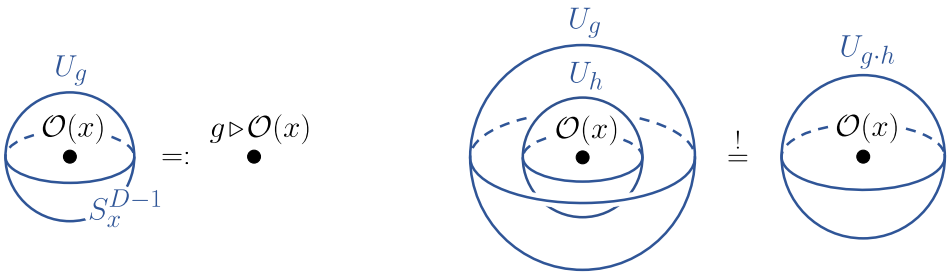


图 4。

给定时空点处的局域算符集合通常会生成一个无限维复向量空间。然而，我们可以通过固定一个局域算符 $\mathcal{O}$（x）并定义，将研究限制在有限维子空间 V 上

$$V \;:=\; \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\, g \triangleright \mathcal{O}(x) \mid g \in G \,\}\,, \tag{2.3}$$

由于 G 的有限性，该空间是有限维的。（2.1）群元素对局域算符的作用，进而诱导出一个不可约线性表示 $\rho:\ \ G \to \mathrm{End}(V)$ 。通过这种方式，局域算符在 G 的不可约表示中变换。

当然，我们可以选择一个由 $i = 1, \ldots, n$ 标记的局域算符基 $\mathcal{O}_i(x)$。由此便建立了一个同构 $V \cong \mathbb{C}^n$ ，并将 G 对基向量的作用表示为

$$g \triangleright \mathcal{O}_i(x) \;=\; \rho(g)_i{}^j\, \mathcal{O}_j(x)\,, \tag{2.4}$$

其中，$(n \times n)$-矩阵 $\rho(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$\rho(g)_i{}^j \, \rho(h)_j{}^k \;=\; \rho(g \cdot h)_i{}^k \,. \tag{2.5}$$

这种描述存在冗余，对应于选择不同的基$\mathcal{O}'_i(x) \;=\; \tau_i{}^j \, \mathcal{O}_j(x)$。由此得到的表示矩阵 $\rho'(g)$ 与原表示矩阵之间的关系为 $\rho'(g) = \tau \cdot \rho(g) \cdot \tau^{-1}$，因此定义了一个等价的不可约表示。

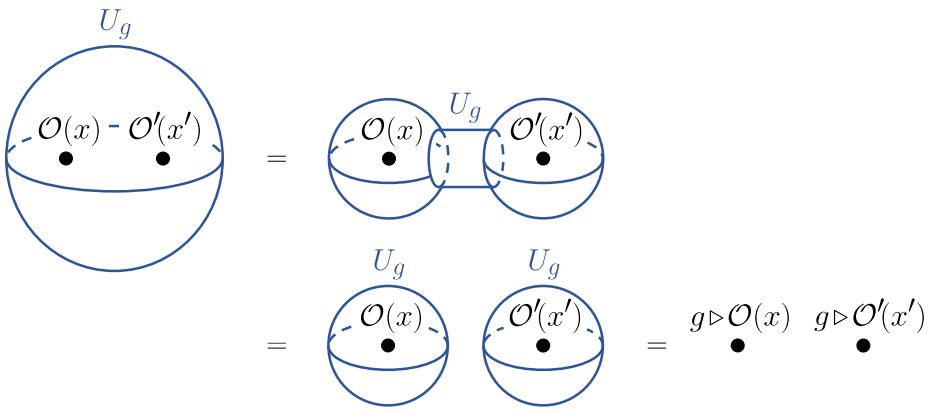


图 5。

到目前为止，我们考虑的是作用于支撑在固定时空点上的局域算符。更一般地，我们可以考虑支撑在不同点上的局域算符集合。例如，考虑 $\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}'(x')$，其中 $x \neq x'$。群元素 $g \in G$ 通过与一个足够大的球面链接而作用。图5 中展示的这一系列拓扑操作进而表明，该作用由下式给出

$$g \triangleright \big[\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}'(x')\big] \;=\; \big[g \triangleright \mathcal{O}(x)\big]\big[g \triangleright \mathcal{O}'(x')\big] \,. \tag{2.6}$$

直接论证可知，若 $\mathcal{O}(x)$ 按表示 ρ 变换，且 $\mathcal{O}'(x')$ 按 G 的表示 ρ' 变换，则 $\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(x')$ 按张量积表示 $\rho \otimes \rho'$ 变换。这一结论显然可推广到位于不同点的一组算符。

2.2 范畴视角

将上一小节的研究结果以一种不同但等价的方式重新表述，会有助于我们从更具范畴论视角的角度来理解这些结果。为此，我们再次考虑向量空间 V，即支撑在时空点上的真正的局域算符所构成的空间，x 并将其视为一个辅助的带框架的一维拓扑量子场论[1]（拓扑量子场论）$\mathcal{T}_V$ 的有能隙边界条件空间，如图6所示。

带框架的一维拓扑量子场论构成一个融合范畴：

- 对象是一维带框架拓扑量子场论，它们完全由其态空间，或等价地由有能隙边界条件决定。因此，对象可与有限维复向量空间 V等同。

[1]这可以看作一个哈密顿量为零的量子力学系统。

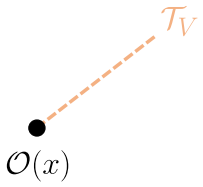


图 6。

- 态射是一维带框架拓扑量子场论之间的拓扑界面，也就是有能隙边界条件对应的向量空间之间的线性映射 $\varphi:\ V \to V'$。特别地，拓扑局域算符是自同态 $\varphi:\ V \to V$。

换言之，我们可以将带框架一维拓扑量子场论的范畴与有限维复向量空间的范畴 Vec 等同。对象的融合对应于一维拓扑量子场论的堆叠：$\mathcal{T}_V \otimes \mathcal{T}_W \cong \mathcal{T}_{V\otimes W}$。

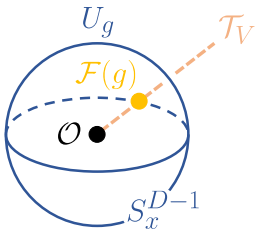


图 7。

借助这幅图，对称群 G 对局域算符 $\mathcal{O} \in V$ 的作用可转译为附着的一维带框架拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$ 上的 G-等变结构。我们将在下文进一步说明，这不过是对称群 G 的背景拓扑威尔逊线。

具体而言，考虑将局域算符 $\mathcal{O}(x)$与拓扑缺陷 $U_g(S_x^{D-1}$链接。这现在需要在拓扑缺陷 U_g 与一维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$之间选择一个拓扑交点，如图7所示。这可以视为作用于 $\mathcal{T}_V$中拓扑边界条件上的拓扑局域算符或界面，它是一个线性映射 $\mathcal{F}(g)$:$\ V \to V$。

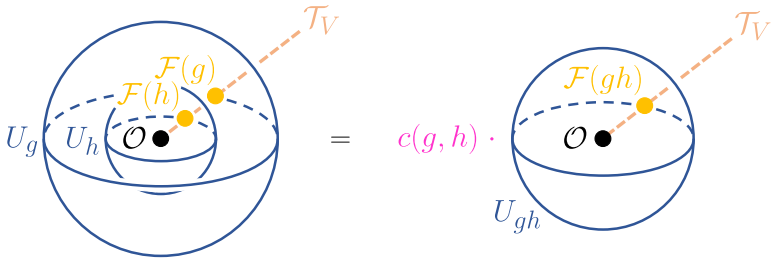


图 8。

拓扑交点 $\mathcal{F}(g)$可能仅以射影方式遵循群律，也就是说，依次与两个对称性缺陷 g、$h \in G$ 相交，等价于与它们的融合相交，但相差一个乘法相位，如图8所示。这些相位 $c(g,h)$的集合可以视为一个映射

$$c:\ G \times G \ \to\ U(1)\,. \tag{2.7}$$

为了使其与三个对称性缺陷 $g,h,k \in G$ 的交点相容，它需要满足 2-余循环条件

$$(dc)(g,h,k)\ :=\ \frac{c(h,k)\cdot c(g,hk)}{c(gh,k)\cdot c(g,h)}\ \overset{!}{=}\ 1 \tag{2.8}$$

并定义一个群上同调类 $[c] \in H^2(G,U(1))$。如果 $[c]=1$，则可以对线性映射 $\mathcal{F}(g)$ 进行重整化，使其满足相容条件

$$\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(h)\ \overset{!}{=}\ \mathcal{F}(g\cdot h)\,. \tag{2.9}$$

如果 $[c]\neq 1$，$\mathcal{T}_V$，就必须将其视为二维 SPT 相的边界。因此，类 $[c]\in H^2(G,U(1))$ 是映射 $\mathcal{F}(g)$ 能够定义与体相中对称性缺陷融合相容的一致交点的障碍。我们要求该障碍消失，即 $[c]=1$。

现在，像之前一样，收缩球面会实现群元素 g 对相应局域算符的作用。这种方法的优点在于，表示的数据从局域算符中抽象出来，转而体现在一维带框架拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$ 上的 G-等变结构中。

总之，在此框架中，对称群 G 对真正的局域算符的作用可由以下数据描述：

1. 一个一维带框架拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$。

2. 对每个满足以下条件的群元素 $g\in G$，都有拓扑界面 $\mathcal{F}(g)$

$$\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(h)\ =\ \mathcal{F}(g\cdot h)\,. \tag{2.10}$$

这组数据规定了一个函子

$$\mathcal{F}:\ \widehat{G}\ \to\ \mathsf{Vec}\,, \tag{2.11}$$

其中 $\widehat{G}$ 是只有一个对象 $*$ 的范畴，其自同态为 $\mathrm{End}_{\widehat{G}}(*)\ =\ G$。这类函子本身构成一个范畴，其

- 对象是函子 $\mathcal{F}:\ G\to\mathsf{Vec}$，
- 态射是自然变换 $\alpha:\ \mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{F}'$。

$\widehat{\ }$我们将此范畴记为 $[G,\mathsf{Vec}]$，并将其视为 G的有限维表示范畴，

$$[\widehat{G},\mathsf{Vec}] \;=\; \mathsf{Rep}(G)\,, \tag{2.12}$$

或者，等价地， G-等变的一维带框架拓扑量子场论。这重现了上一小节的结论：真正的局域算符在对称群 G 的有限维表示中变换。关于（2.12）中的两个范畴为何等价，详见附录 A.1。

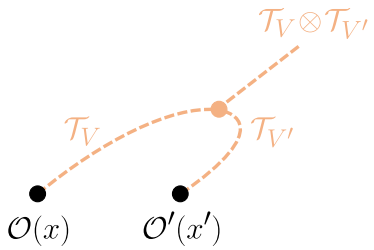


图 9。

两个真正的局域算符 $\mathcal{O}(x)$ 和 $\mathcal{O}'(x')$ 在彼此分离的时空点 x 和 x' 处的变换，可以重新表述为相应的 G-等变拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$和 $\mathcal{T}_{V'}$的堆叠；这在范畴 $[G,\mathsf{Vec}]$ 上诱导出一种融合结构，如图9所示。这对应于表示和交织算子的普通张量积，因此重现了标准结论：位于彼此分离的时空点的局域算符在对称群 G 的张量积表示中变换。

2.2.1 背景威尔逊线与规范化

引入辅助 G-等变一维拓扑量子场论，自然揭示了表示论的范畴论视角，但这或许显得有些形式化。不过，我们现在将说明，它可以清晰地诠释为对称群 G的背景威尔逊线。

为理解这一视角，引入一个经典背景场，它对应于 G-丛上的平坦联络 A。在点 x 处，变换于对称群 G 的一个非平凡不可约表示 ρ 中的真正局域算符，其关联函数在背景规范变换下并不保持不变。然而，将该算符连接到一条背景威尔逊线后，关联函数便保持不变：

$$W_\rho(\gamma_x) \;=\; \mathrm{Tr}_\rho(\mathrm{Hol}_\gamma(\mathsf{A}))\,, \tag{2.13}$$

其中， γ_x 表示一条终止于点 x的曲线。只要曲线不与其他带电算符相交，关联函数在曲线变形下便保持不变。这条背景威尔逊线是一种非动力学的拓扑算符，在不存在背景场时是平凡的。

引入背景平坦联络，等价于插入一个对称性缺陷网络 $U_g(\Sigma_{D-1})$，它表示在重叠区域上的常值过渡函数

补丁 [1, 34–36]。在这种对应关系下，指定一个 G-等变的一维拓扑量子场论，即一个与拓扑对称缺陷 $U_g(\Sigma_{D-1})$ 有一致交点的一维拓扑量子场论，便等价于对背景威尔逊线W_ρ的描述。

对称群 G 规范化并对背景平坦联络求和后，背景威尔逊线变为动力学拓扑威尔逊线，生成对称性范畴 Rep(G)。在不可约表示 ρ下变换的局域算符会成为附着于拓扑线 W_ρ的扭曲扇区局域算符。

2.3 示例

让我们用一个简单且广为人知的例子结束本节：在全局对称群的不可约表示下变换的局域算符。考虑一个具有连通单李群 $\mathbb{G}$的$D = 3$ 规范理论。它具有阿贝尔磁性零形式对称性 $G = \pi_1(\mathbb{G})^\vee$，该对称性由 $\mathbb{G}$的基本群的庞特里亚金对偶给出。

带有此对称性荷的局域算符是磁单极算符。考虑一个位于固定时空点 x 的磁单极算符，其周围环绕着一个小的二维球面 S^2_x。磁性对称性测量的是由该磁单极算符在 S^2_x 上生成的 $\mathbb{G}$-丛的拓扑类型。这由以下内容分类：

$$H^2(S^2_x, \pi_1(\mathbb{G})) \cong \pi_1(\mathbb{G}) \tag{2.14}$$

并且可以视为 S^2_x 赤道上的过渡函数。于是，群元素 $g \in \pi_1(\mathbb{G})^\vee$ 对拓扑类型为 $p \in \pi_1(\mathbb{G})$ 的单极算符的作用为

$$g \triangleright M_p(x) \;=\; g(p) \cdot M_p(x)\,, \tag{2.15}$$

其中，我们将群元素 g 视为同态 $g\colon \pi_1(\mathbb{G}) \to U(1)$。

在这个例子中，范畴论视角下辅助的 G-等变一维拓扑量子场论，或者等价地说，拓扑对称性的背景威尔逊线，不过是附着在单极算符上的一条狄拉克弦。

3 线与群的 2-表示

本节将上一节的结果推广，说明线缺陷在有限群对称性的 2-表示中变换。我们强调，这一结论适用于真正的非拓扑线缺陷。我们将解释这一结论如何涵盖关于线缺陷的一些已知论述，例如，其结点处的局域算符按照对称群的射影表示变换，以及对称性分数化这一现象。

我们先通过拓扑对称缺陷的性质，以初等方法构造 2-表示的数据；随后从更具物理直觉的角度重新表述这一过程，从而揭示 2-表示的归纳这一数学概念。接着，我们在更具范畴论语境的框架下重新表述这个问题，以呈现有限群的 2-表示的抽象定义。最后，我们给出一些例子。所有这些讨论都适用于任意维数 D，且与对称性的 't Hooft 反常无关。

3.1 预备知识

我们考虑支撑在有向线上的线缺陷 γ，γ'，.....它们沿着 D维欧几里得时空中的同一条轴 $\mathbb{R}^D$排列。如图10左侧所示，我们将这条公共轴画成竖直方向。

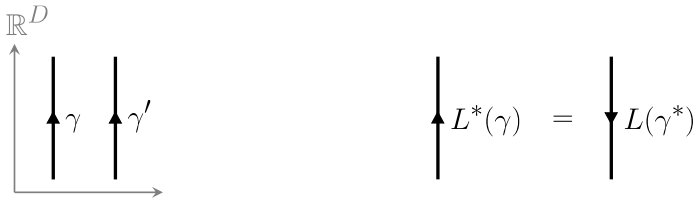


图 10。

给定一条线缺陷 L，我们可以定义一条共轭线 L^*，其定义为

$$L^*(\gamma) := L(\gamma^*)\,, \tag{3.1}$$

其中 γ^* 表示对 γ 作方向反转，如图10右侧所示。除非另有说明，后文的图示通常省略方向，并默认线的方向向上。

线缺陷 L（γ）上可以承载拓扑局域算符，其关联函数与它们在线 γ 上的位置无关。拓扑局域算符的融合生成一个与该线缺陷相关联的结合代数 $\mathcal{A}_L$，我们假设该代数是有限维且半单的。因此，它可以分解为直和

$$\mathcal{A}_L = \mathrm{End}(V_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}(V_s) \tag{3.2}$$

对于某些有限维复向量空间 V_1，.....，V_s。这促使我们引入简单线缺陷和约化线缺陷的概念:

- 如果线缺陷 L 支持一个拓扑局域算符的简单代数，则称其为简单。这意味着 $\mathcal{A}_L = \mathrm{End}(V)$，其中 V是某个有限维向量空间。如果线缺陷L 不是简单的，则它可以分解为若干简单线缺陷的直和

$$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s \tag{3.3}$$

  ，且满足 $\mathcal{A}_{L_j}$ =End(V_j)，其中线缺陷的直和定义为其关联函数之和。因此，接下来我们可以只关注简单线缺陷。

- 若一个简单线缺陷 L 是 约化的，则它仅支持恒等算符作为拓扑算符，即 $\mathcal{A}_L = \mathbb{C}$。一个简单线缺陷 L' 总是存在一个与约化简单线 L相连的拓扑结点，如图 11所示。该拓扑交汇的存在反映了简单代数 $\mathcal{A}_{L'} = \mathrm{End}(V)$ 与$\mathcal{A}_L = \mathbb{C}$ 在 Morita 等价意义下等价。

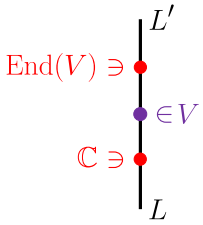


图 11。

例如，考虑将一个约化的简单线缺陷 L 与一个一维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_V$ 堆叠。所得的简单线缺陷 $L' = \mathcal{T}_V \otimes L$ 支持一个简单代数 $\mathcal{A}_{L'} = \mathrm{End}(V)$，并存在通向 L 的拓扑结点；这些结点由向量空间 V 中的元素标记，且源自该一维拓扑量子场论的拓扑边界条件。

基于上述考量，我们不妨假设，除等价变换外，所有线算符都是上述意义下的简单且约化的。我们将在第 3.4 节从更范畴论的视角重新讨论这一问题。

3.2 初等视角

与前文一样，我们先考虑一个具有有限群对称性 G 的 D 维量子场论。该对称性由余维一拓扑缺陷 $U_g(\Sigma_{D-1})$生成，并由群元素 $g \in G$ 标记。我们定义群元素 $g \in G$ 对支撑在线 γ 上的线缺陷 L 的作用如下：

$$g \triangleright L(\gamma) \;:=\; U_g(C_\gamma^{D-1})\, L(\gamma)\,, \tag{3.4}$$

其中，$C_\gamma^{D-1} = \mathbb{R} \times S_\gamma^{D-2}$ 表示环绕 γ 的一个小圆柱。该作用满足如下复合关系：

$$g \triangleright (h \triangleright L(\gamma)) \;=\; (g \cdot h) \triangleright L(\gamma) \tag{3.5}$$

这是拓扑缺陷的融合性质所导致的。该定义及复合性质如图 12 所示。

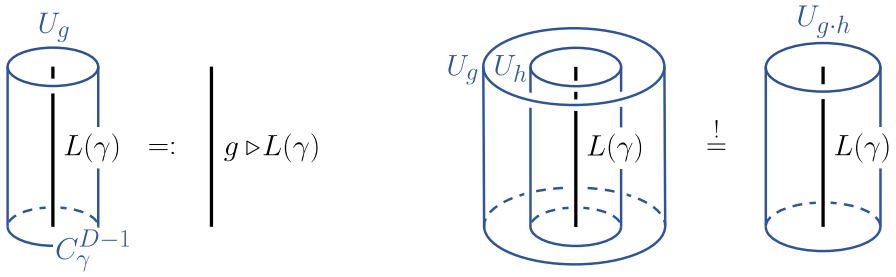


图 12。

由一条线 γ 承载的线缺陷集合可能构成一个具有无限基数的离散集合、连续统，或兼具两者。不过，我们可以通过固定一个给定的线缺陷 $L(\gamma)$，并定义如下内容，将研究范围限制在有限子集 $\mathcal{S}$：

$$\mathcal{S} \;:=\; \{\, g \triangleright L(\gamma) \mid g \in G \,\}\,, \tag{3.6}$$

由于 G是有限的，这便是一个有限集合。上述群作用于是确定了 G 在 $\mathcal{S}$ 上的一个不可约置换表示，或者等价地，确定了 $\mathcal{S}$上的一个传递 G-集的结构。

更具体地说，我们可以选择用有限指标 $L_i(\gamma) \in \mathcal{S}$ 来标记线缺陷$i = 1, ..., n$，从而建立一个双射 $\mathcal{S} \cong \{1, ..., n\}$。作用（3.4）随后由置换 $\sigma_g \in S_n$ 实现，使得

$$g \triangleright L_i(\gamma) \;=\; L_{\sigma_g(i)}(\gamma)\,. \tag{3.7}$$

特别是，条件（3.5）确保这些置换满足

$$\sigma_g \circ \sigma_h \;=\; \sigma_{g\cdot h}\,, \tag{3.8}$$

so that $\sigma : G \to S_n$ 定义了 G 在 n 个元素构成的集合上的传递置换作用 s.

为了进一步推进，我们考虑图13所示的操作序列。该图表明，拓扑缺陷 $g \in G$ 与每条线 L_i 相交于唯一的拓扑交汇算子 $\rho_i(g)$，该算子将其连接到变换后的线$L_{\sigma_g(i)}$。虽然拓扑

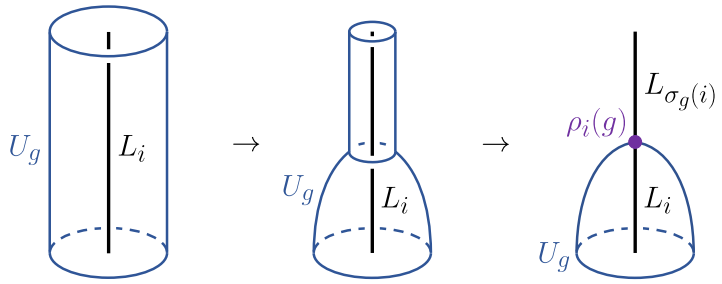


图13。

体相中的缺陷按照群律融合，而交汇算子 $\rho_i(g)$可能发生射影变换，意即

$$\rho_{\sigma_h(i)}(g) \circ \rho_i(h) \;=\; c_{\sigma_{gh}(i)}(g,h) \cdot \rho_i(g\cdot h) \tag{3.9}$$

对于某些相位 $c_i(g,\ h) \in U(1)$。换言之，依次让线 L_i与两个对称性缺陷 g 和 h 相交，等价于让它与二者的融合 $g \cdot h$ 相交，差别仅在于一个乘法相位，如图 14所示。这组相位可视为一个函数

$$c :\; G \times G \;\to\; U(1)^n\,, \tag{3.10}$$

为了与三个对称性缺陷 $g,\ h,\ k \in G$ 的融合相容，它必须满足扭曲 2-余循环条件

$$(d_\sigma c)_i\,(g,h,k) \;:=\; \frac{c_{\sigma_g^{-1}(i)}(h,k)\cdot c_i(g,hk)}{c_i(gh,k)\cdot c_i(g,h)} \;\overset{!}{=}\; 1\,. \tag{3.11}$$

因此，函数 c定义了一个扭曲2-余循环 $c \in Z^2_\sigma(G, U(1)^n)$，其中 $U(1)^n$通过置换作用 σ 被视为一个 G-模。

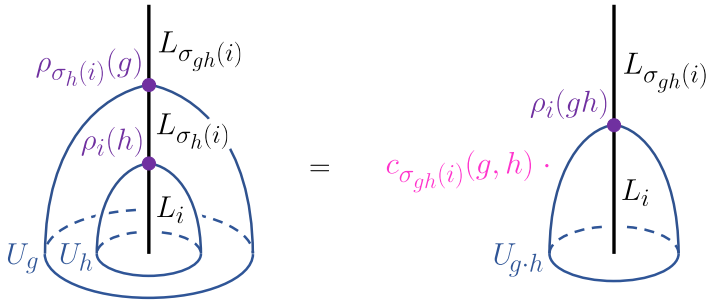


图14。

总而言之，对称群 G 对一组由 $i=1,\ldots,n$ 索引的线缺陷 L_i的作用，由一对 (σ,c) 指定，该对由以下内容组成：

1. 一个传递置换表示 $\sigma:\ G\to S_n$。

2. 一个扭曲2-余循环 $c\in Z^2_\sigma(G,\ U(1)^n)$。

这恰好就是一个 G 维数为 n 的不可约2-表示的数据。一般2-表示只需去掉作用具有传递性这一要求即可得到。关于群的2-表示的更数学化讨论见附录A.2。

对 $(\sigma,\ c)$ 这一对数据存在一些冗余，它们对应于 G 的等价2-表示。首先，我们可以选择线缺陷的另一种标记方式

$$L'_i\ =\ L_{\tau^{-1}(i)} \tag{3.12}$$

对于某个置换 $\tau\in S_n$，其对应的置换作用为

$$\sigma'_g\ =\ \tau\circ\sigma_g\circ\tau^{-1}\,. \tag{3.13}$$

类似地，描述拓扑对称缺陷与新标记的线缺陷之交点的拓扑结点为

$$\rho'_i(g)\ =\ \rho_{\tau^{-1}(i)}(g)\,, \tag{3.14}$$

并且它们的复合在相位意义下遵循群乘法

$$c'_i(g,h)\ =\ c_{\tau^{-1}(i)}(g,h)\,. \tag{3.15}$$

数据 (σ',c') 定义了一个等价的 2-表示，正如预期的那样，因为这只是对线缺陷重新标记。

除了重新标记之外，我们还可以选择通过以下方式重新定义结点

$$\rho'_i(g)\ \to\ b_{\sigma_g(i)}(g)\cdot\rho'_i(g) \tag{3.16}$$

对于某些乘法相位 $b_i(g)\ \in U(1)$，我们将其视为函数 $b:\ G\to U(1)^n$。因此，射影相位发生了如下偏移：

$$c'_i(g,h)\ \to\ c'_i(g,h)\ \cdot\ (d_{\sigma'}b)_i(g,h)\,, \tag{3.17}$$

其中我们定义了扭曲余边界

$$(d_{\sigma'}b)_i\,(g,h) \;:=\; \frac{b_{(\sigma'_g)^{-1}(i)}(h)\cdot b_i(g)}{b_i(gh)}\,. \tag{3.18}$$

这对应于为类 $[c']\in H^2_{\sigma'}(G,\ U(1)^n)$ 选择另一个代表元，并且仍然是一个等价的 2-表示。

总而言之，若存在一个置换 $\tau\in S_n$ 使得，2-表示 $(\sigma,\ c)$ 和 $(\sigma',\ c')$ 等价。

$$\sigma' \;=\; \tau\circ\sigma\circ\tau^{-1} \qquad \text{and} \qquad [c'] \;=\; [\tau\triangleright c]\,, \tag{3.19}$$

其中，$\tau\triangleright c$ 表示 τ 在 c 上的置换作用，如（3.15）所示；而 $[.]:\ Z^2_{\sigma'}(G,\ U(1)^n)\ \to\ H^2_{\sigma'}(G,\ U(1)^n)$ 表示到扭曲群上同调的投影。这与 2-表示等价的数学概念一致。

3.2.1 方向反转

到目前为止，我们默认线算符相对于同一竖直轴均朝上定向。现在来考察线的方向改变如何影响其在有限群对称性 G 下的变换行为。

具体而言，考虑支撑在一条朝上定向的线 γ 上的线算符 $L_i(\gamma)$，它在 G 的一个不可约2-表示 $(\sigma,\ c)$ 中变换。共轭线算符 $L_i^*(\gamma)\ =\ L_i(\gamma^*)$ 是通过将 L_i 放置在方向反转的线上 γ^* 而得到的。与之前一样，对称性缺陷 $g\in G$ 在每个线算符 L_i^* 处与其相交于唯一的拓扑交汇 $\bar\rho_i(g)$，该交汇将它连接到变换后的线$L^*_{\sigma_g\,(i)}$。拓扑交汇的序列

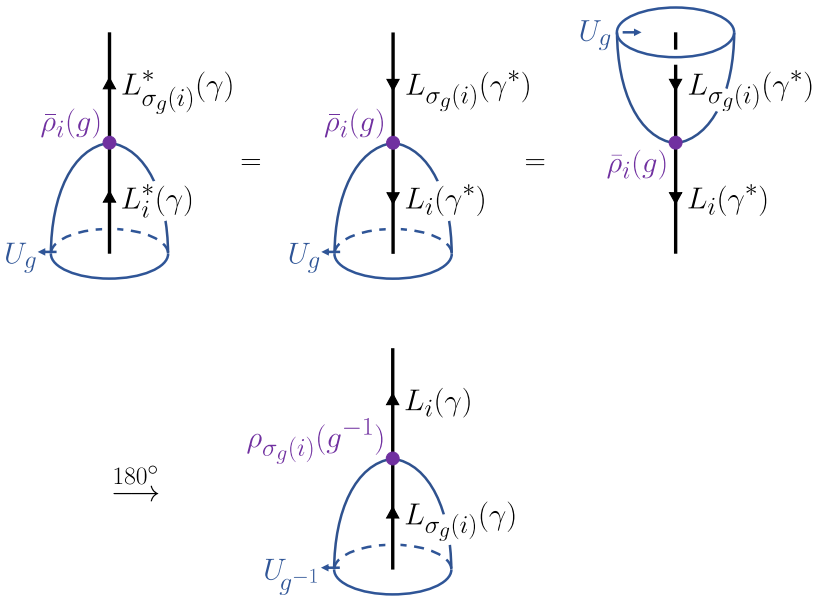


图 15。

图中所示的变换15随后说明，我们可以将结点 $\bar\rho_i(g)$ 识别为

未取共轭的线之间的交汇算子 $\rho_{\sigma_g(i)}(g^{-1})\ L_i$。因此，它们以如下意义作射影复合：

$$\bar{\rho}_{\sigma_h(i)}(g)\circ\bar{\rho}_i(h)\ =\ \bar{c}_{\sigma_{gh}(i)}(g,h)\cdot\bar{\rho}_i(gh)\,, \tag{3.20}$$

其中射影相位由下式给出

$$\bar{c}_i(g,h)\ =\ c_{\sigma_{gh}^{-1}(i)}(h^{-1},g^{-1})\,. \tag{3.21}$$

除去余边界后，这些相位可与复共轭相位 $c_i(g,\ h)$ 等同，并定义一个共轭的 2-余循环 $\bar{c}\in Z^2_\sigma(G,\ U(1)^n)$。因此，共轭线 L_i^* 按照 2-表示 $(\sigma,\ \bar{c})$ 变换，该 2-表示是 $(\sigma,\ c)$ 的共轭 2-表示。

3.2.2 分离的线

现在我们来考察对称群对时空中不同线上的线缺陷集合的作用。结论是，它们按照 G 的适当张量积 2-表示变换。

考虑一对线缺陷 $L(\gamma)\,L'(\gamma')$，它们支撑在彼此分离的平行线上 $\gamma,\ \gamma'$。与前文一样，群元素通过用一个足够大的（$D-1$）圆柱链接这些算符而作用于这对线缺陷。图 16 所示的一系列拓扑操作揭示了这一作用由下式给出

$$g\triangleright\left[L(\gamma)\,L'(\gamma')\right]\ =\ \left[g\triangleright L(\gamma)\right]\left[g\triangleright L'(\gamma')\right] \tag{3.22}$$

就 g 分别作用于 $L(\gamma)$ 和 $L'(\gamma')$ 而言。

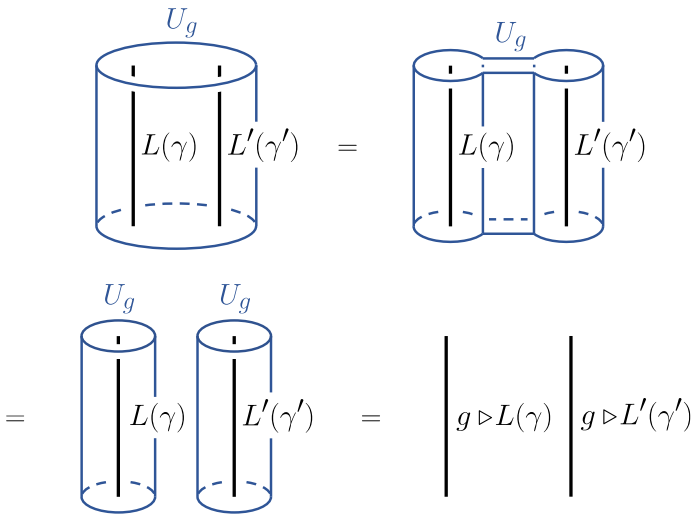


图 16.

为了从数学上解释这一结果，假设 $L(\gamma)$ 和 $L'(\gamma')$ 分别是集合 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 中的元素，它们构成了 G 的 2-表示 (σ,c) 和 (σ',c')。该集合

来自这些集合的线算符对随后由笛卡尔积集合描述

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}' \;:=\; \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \,. \tag{3.23}$$

该集合的元素由以下指标标记： $L_i(\gamma) \otimes L'_j(\gamma')$,其中 $L_i(\gamma)$和 $L'_j(\gamma'$分别表示 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$的指标编排。根据（3.22），这类线算符对上的群作用为

$$g \triangleright \left[L_i(\gamma) \otimes L'_j(\gamma')\right] \;=\; L_{\sigma_g(i)}(\gamma) \otimes L'_{\sigma'_g(j)}(\gamma') \,, \tag{3.24}$$

这可以识别为张量积置换作用 $\sigma \otimes \sigma'$： $G \to S_{nn'}$将 $g \in G$ 映射为置换

$$(\sigma \otimes \sigma')_g : \; (i,j) \mapsto (\sigma_g(i), \sigma'_g(j)) \,. \tag{3.25}$$

此外，图17 所示的拓扑操作序列表明， $L_i(\gamma)L'_j(\gamma')$与对称性缺陷 g， $h \in G$ 的交会在相位意义下遵循群乘法

$$(c \otimes c')_{(i,j)}(g,h) \;:=\; c_i(g,h) \cdot c'_j(g,h) \;\in\; U(1) \,. \tag{3.26}$$

这定义了一个张量积2-余循环 $c \otimes c' \in Z^2_{\sigma\otimes\sigma'}(G,\ U(1)^{nn'})$。

总之，线缺陷对 $L(\gamma) \in \mathcal{S}$ 和 $L'(\gamma') \in \mathcal{S}'$ 在 nn'维2-表示中变换

$$(\sigma, c) \otimes (\sigma', c') \;:=\; (\sigma \otimes \sigma', c \otimes c') \,, \tag{3.27}$$

其中 $\sigma \otimes \sigma'$ 和 $c \otimes c'$ 定义见式（3.25）和式（3.26）。这与 2-表示的自然张量积相一致，反映了局域算符的乘积按张量积表示变换这一众所周知的性质。

3.2.3 交汇算子

线缺陷按对称群 G 的 2-表示变换这一事实，对交汇算子（或以这些线缺陷为端点的非真正局域算符）有着重要影响。我们强调，无论这些结点是否为拓扑的，以下性质均成立。

考虑一组线缺陷 L_i ，它们按σ， c的不可约2-表示变换，其中 G ，并记 V_i 为非真正局域算符所在的向量空间，而 L_i可以在这些算符处终止。该空间通常是无限维复向量空间。不过，与第2节一样，我们可以将讨论限制在由群元素作用于给定局域算符所生成的有限维子空间。

在将一个算符与 $\mathcal{O}$ 以该线结尾的 L_i 对称性缺陷 $g \in G$链接后，它被变换为一个新的算符 $g \triangleright \mathcal{O}$ 以该线结尾的 $L_{\sigma_g(i)}$ ，如图 18所示。这确定了一组线性映射

$$\Phi_i(g) : \; V_i \;\to\; V_{\sigma_g(i)} \,, \tag{3.28}$$

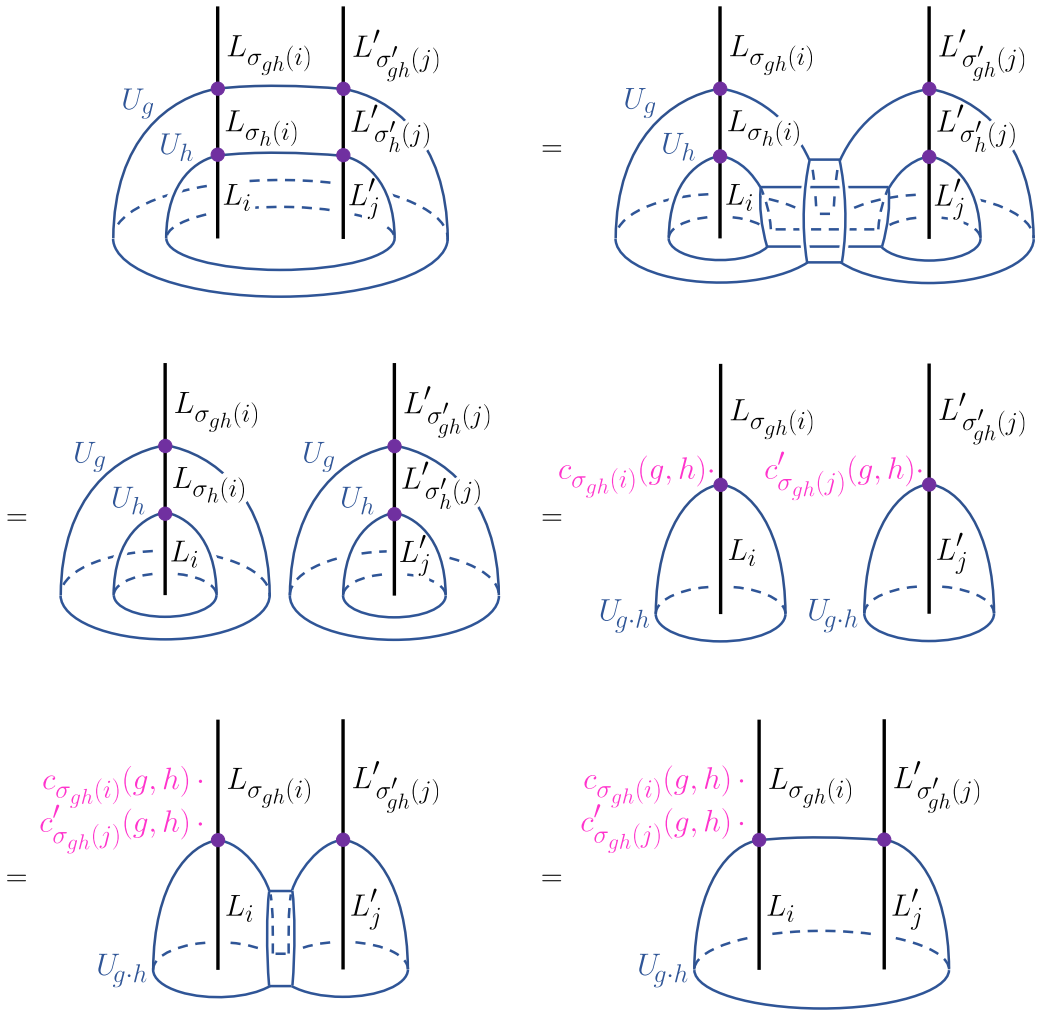


图 17。

其与体相中拓扑对称缺陷融合的相容性由该条件实现。

$$\Phi_{\sigma_h(i)}(g)\circ\Phi_i(h)\ \stackrel{!}{=}\ c_{\sigma_{gh}(i)}(g,h)\cdot\Phi_i(gh)\,. \tag{3.29}$$

这一结构具有向量丛的几何解释

$$\pi:\ V\ \to\ \{1,...,n\} \tag{3.30}$$

纤维 $V_i=\pi^{-1}(i)$，以及丛映射 $\Phi(g):\ V\to V$，满足 $\pi\circ\Phi(g)=\sigma_g$，并遵循复合规则

$$\Phi(g)\circ\Phi(h)\ \ =\ \ c(g,h)\cdot\Phi(gh)\,. \tag{3.31}$$

更具不变性的表述是，这是 $\mathcal{S}=\{1,\ldots,n\}$ 上的一个 G-等变向量丛。

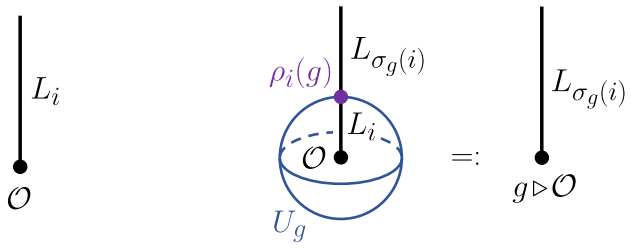


图18。

遵循 [29, 31], 的约定，我们称这一对 (V, Φ) 为 G 类型 (σ, c) 的分次射影表示。抽象地说，它们对应于平凡2-表示与2-表示 (σ, c) 之间的交织算子。总之，终止于线缺陷的局域算符若在2-表示 (σ, c) 下变换，则会在 G 类型 (σ, c) 的分次射影表示下变换。

更一般地，我们可以考虑位于一对线算符 L 和 L' 之间的结点处、按 2-表示变换的局域算符（σ， c）和（σ'， c'），如图 19所示。通过与上述类似的论证，它们的变换行为将由类型为（$\sigma \otimes \sigma'$， $\bar{c} \otimes c'$）的分次射影表示描述，这些表示对应于 2-表示（σ， c）和（σ'，c'）之间的 1-态射（或 1-交织算子）。

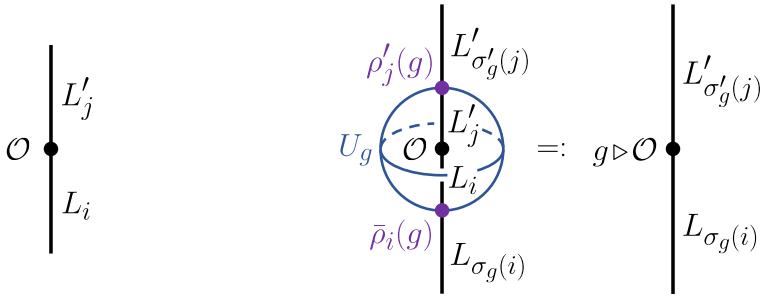


图19。

3.3 归纳视角

根据构造，在上一小节中讨论的 2-表示（σ， c）是不可约的，因为与之相关的置换作用 $\sigma : G \to S_n$ 是传递的[2]。正如本小节将要说明的， G 的不可约 2-表示还可以用另一种方式描述；这种描述对相关数据给出了更具物理意义的解释，并恢复了 2-表示诱导的数学概念 [21, 23]。

为了说明这一点，让我们再次考虑一组线算符 L_i ，它们在 G 的 n 维不可约2-表示中变换，该表示由 (σ, c) 标记。我们固定线算符

[2]具体而言，这意味着对于每一对 $i, j \in \{1, ..., n\}$ 存在一个 $g \in G$ 使得 $\sigma_g(i) = j$。

$L = L_1 \in \mathcal{S}$ 并考虑其稳定子

$$\begin{aligned} H &:= \{\, h \in G \mid h \triangleright L = L \,\} \\ &\equiv \{\, h \in G \mid \sigma_h(1) = 1 \,\} \subset G \end{aligned} \tag{3.32}$$

关于 G 作用。用对称性缺陷 $h \in H$ 缠绕线 L 后，线保持不变，因此我们称 L 保持子群 $H \subset G$。

如前所述，线 L 支持拓扑结点 $\rho(h) := \rho_1(h$，它们描述线与对称性缺陷 $h \in H$ 的交汇，如图20左侧所示。这些结点在相位意义下满足乘法关系

$$u(h, h') := c_1(h, h') \tag{3.33}$$

如图所示于图20右侧。对称性缺陷融合的结合律 ry

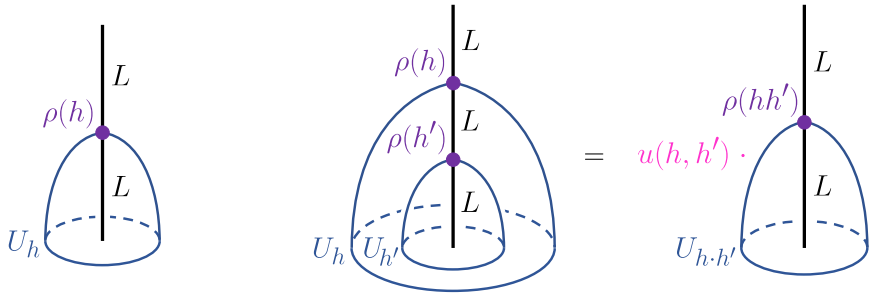


图 20。

体相中缺陷融合的结合律约束这些相位，使其满足通常的 2-余循环条件

$$(du)(h_1, h_2, h_3) = \frac{u(h_2, h_3) \cdot u(h_1, h_2 h_3)}{u(h_1 h_2, h_3) \cdot u(h_1, h_2)} \overset{!}{=} 1\,. \tag{3.34}$$

我们可以将 2-余循环 u（或者更确切地说，其群上同调类 $[u] \in H^2(H, U(1))$）视为对称性 $H \subset G$ 的缺陷 't Hooft 反常，而该对称性由 L 保持。

总而言之，我们可以用由以下两项组成的对 (H, u) 来标记 G 的不可约 2-表示：

1. 一个子群 $H \subset G$,
2. 一个 2-余循环 $u \in Z^2(H, U(1))$。

请注意，这对应于子群 H 的一个一维 2-表示 u。在等价意义下，可以根据这些数据按如下方式重构原始的 2-表示 (σ, c)：首先考虑左 H-陪集的集合

$$G/H = \{r_1 H, \ldots, r_n H\} \tag{3.35}$$

在 G 中取固定代表元 $r_i \in G\,(i = 1, \ldots\ldots, n)$，使得 $r_1 = 1$。左乘元素 $g \in G$ 随后通过……置换左陪集空间中的元素

$$g \cdot (r_i H) = r_{\sigma_g(i)} H\,, \tag{3.36}$$

这会诱导出一个置换作用 $\sigma: G \to S_n$。更具体地说，

$$g \cdot r_i \;=\; r_{\sigma_g(i)} \cdot h_i(g) \tag{3.37}$$

对于某些唯一的元素 $h_i(g) \in H$，它们允许我们从普通 2-余循环 $u \in Z^2(H,\ U(1))$ 重构扭曲 2-余循环 $c \in Z^2_\sigma(G,\ U(1)^n)$，其中重构结果在余边界意义下唯一，具体方法如下

$$c_i(g_1, g_2) \;=\; u\big(\, h_{\sigma_{g_1}^{-1}(i)}(g_1),\, h_{\sigma_{g_1 g_2}^{-1}(i)}(g_2)\,\big)\,. \tag{3.38}$$

从数学上说，这一构造将 2-表示 $(\sigma,\ c)$ 实现为 1 维 2-表示 u of H 的诱导结果，我们将其写作

$$(\sigma, c) \;=\; \mathrm{Ind}_H^G(u)\,. \tag{3.39}$$

众所周知，在等价意义下，G 的所有不可约 2-表示都可以通过从 G [21, 23]的某个子群的 1 维 2- 表示进行诱导而得到。

标记不可约 2-表示的数据 $(H,\ u)$ 同样存在冗余，导致得到等价的 2-表示。也就是说，我们本可以选择固定另一个线算子 $L' = L_i \in \mathcal{S}$，使得 $i \neq 1$，其稳定子 H' 与 $L = L_1$ 的稳定子 H 之间的关系为

$$H' \;=\; r_i H r_i^{-1} \;=:\; {}^{r_i}H\,. \tag{3.40}$$

类似地，利用方程（3.38），我们看到，相应的普通 2-余循环 $u' \in Z^2(H',\ U(1))$ 在相差一个余边界的意义下可写为

$$u'(h_1', h_2') \;\equiv\; c_i(h_1', h_2') \;=\; u\big(\, r_i^{-1} h_1' \, r_i,\ r_i^{-1} h_2' \, r_i\,\big) \;=:\; ({}^{r_i}u)(h_1', h_2') \tag{3.41}$$

对所有的 $h_1',\ h_2' \in H'$。总之，数对 $(H',\ u')$ 与数对 $(H,\ u)$ 之间满足关系

$$H' \;=\; {}^{g}H \qquad \text{and} \qquad [u'] \;=\; [{}^{g}u]\,, \tag{3.42}$$

其中 $g \equiv r_i \in G$。由于固定线 $L \in \mathcal{S}$ 的选择不具物理意义，我们应将由 $(H,\ u)$ 和 $(H',\ u')$ 标记的不可约 2-表示视为等价。这与不可约 2-表示的数学等价概念一致：若存在一个 $g \in G$ 使得（3.42）成立，则由 G 诱导、分别由 $(H,\ u)$ 和 $(H',\ u')$ 标记的两个不可约 2-表示等价。

3.3.1 分离的线

现在再次考虑支撑在平行线 $\gamma,\ \gamma'$ 上的线缺陷对 $L(\gamma),\ L'(\gamma')$，它们分别按照 G 的不可约 2-表示 $(\sigma, c), (\sigma', c')$ 变换。如上所述，我们也可以用它们的稳定子子群 $H = \mathrm{Stab}_\sigma(1)$ 和 $H' = \mathrm{Stab}_{\sigma'}(1)$ 以及 2-余循环 $u = c_1|_H$ 和 $u' = c_1'|_{H'}$ 来标记后者。根据轨道-稳定子定理，这建立了 G-轨道之间的对应关系

$$G/H \;\cong\; \{1, ..., n\} \qquad \text{and} \qquad G/H' \;\cong\; \{1, ..., n'\}\,, \tag{3.43}$$

其中，G 通过左乘作用于左侧，通过置换作用 σ 和 σ'分别作用于右侧。

如第 3.2.2 小节所述，(L, L') 在张量积 2-表示 $(\sigma, c) \otimes (\sigma', c')$ 上的 G。一般来说，两个不可约 2-表示的张量积并非不可约，而是分解为不可约 2-表示的直和。这种分解由乘积 G-集

$$(G/H) \times (G/H') \cong \bigsqcup_{[g] \in H\backslash G/H'} G/(H \cap {}^{g}H') \tag{3.44}$$

分解为由双陪集 $[g] \in H\backslash G/H'$ 索引且稳定子为$H \cap {}^{g}H'$的 G-轨道的不交并。相应地，由 $(H,\ u)$ 和 $(H',\ u')$ 标记的不可约 2-表示的张量积分解为

$$(H, u) \otimes (H', u') = \bigoplus_{[g] \in H\backslash G/H'} \left(H \cap {}^{g}H',\ u \cdot {}^{g}u'\right), \tag{3.45}$$

其中 $({}^{g}u')(k,\ k') := u'(g^{-1}kg,\ g^{-1}k'g)$，与前文相同。

3.3.2 结点算子

我们再次考虑由终止于线 V_i 上的局域算符构成的向量空间 L_i，这些算符按不可约的 n维 2-表示（σ，c）变换，该表示属于 G。如第3.2.3小节所述，它们构成一个分次射影表示（V，Φ），属于 G 类型（σ，c），其中 Φ_i刻画了以下作用：G 作用于 V_i，该作用源于将相应的局域算符与对称性缺陷 $g \in G$相链接。

稳定子 $H = \mathrm{Stab}_{\sigma}(1) \subset G$ 对终止于线$L = L_1$ 的局域算符的作用由以下群同态描述

$$\phi := \Phi_1|_H :\ H \to \mathrm{End}(W), \tag{3.46}$$

其中 $W := V_1$ 表示以线 L 为终点的局域算符向量空间。这在图 21中有所示意。与体相中对称性缺陷融合的相容性由以下条件实现

$$\phi(h) \circ \phi(h') \overset{!}{=} u(h, h') \cdot \phi(hh'), \tag{3.47}$$

其中乘法相位与之前相同，由 $u(h, h') = c_1(h, h')$ 给出。

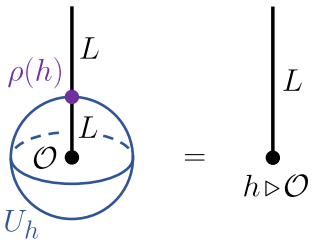


图 21。

换言之，以线缺陷 L 为终点的局域算符向量空间 W 构成了 H 的一个 2-余循环为 $u \in Z^2(H,\ U(1))$ 的射影表示。用

小节 3.2.3，$(W,\ \phi)$ 是 的一个类型为 $(1,\ u)$ 的分次射影表示。等价而言，原来的类型为 $(\sigma,\ c)$ 的分次射影表示 $(V,\ \Phi)$ 可以根据这些数据按如下方式重构：首先考虑左陪集空间 -陪集

$$G/H\ =\ \{r_1H,\ ...,\ r_nH\} \tag{3.48}$$

在 G 中取固定代表元 $r_i \in G\,(i = 1, ...,\ n)$，使得 $r_1 = 1$。与前面一样，元素$g \in G$ 通过以下方式作用于后者：

$$g \cdot r_i\ =\ r_{\sigma_g(i)} \cdot h_i(g) \tag{3.49}$$

对于某些唯一的元素 $h_i(g)\ \in H$。利用这一点，我们可以定义一组向量空间

$$V_i\ :=\ r_i \otimes W \tag{3.50}$$

在这些空间上，$g \in G$ 通过以下线性映射作用：

$$\Phi_i(g):\ \ r_i \otimes \mathcal{O}\ \ \mapsto\ \ r_{\sigma_g(i)} \otimes \left[\phi\big(h_i(g)\big) \cdot \mathcal{O}\right]. \tag{3.51}$$

利用 ϕ的射影性，可以验证映射 $\Phi_i(g)$ 满足

$$\Phi_{\sigma_h(i)}(g) \circ \Phi_i(h)\ \ =\ \ c_{\sigma_{gh}(i)}(g,h) \cdot \Phi_i(gh) \tag{3.52}$$

其相位为 $c_i(g,\ h)$，如式 (3.38) 所示。因此，在等价意义下，我们恢复了分次射影表示 $(V,\ \Phi)$。这将 $(V,\ \Phi)$ 实现为分次射影表示 $(W,\ \phi)$ 从 $H \subset G$的诱导，我们将其记作

$$(V,\Phi)\ =\ \mathrm{Ind}_H^G(W,\phi)\,. \tag{3.53}$$

总之，将 G 的不可约 2-表示标记为上述形式的配对 $(H,\ u)$ 后，以该 2-表示变换的线缺陷末端的局域算符，会按带有 2-余循环 u 的 H 射影表示进行变换。局域算符在终止线缺陷时可能按对称群的射影表示变换这一事实，在许多先前的研究中发挥了重要作用 [24–27]。

3.4 范畴论视角

将上一小节的结果改写得更具范畴论性质、因而更具不变性，会很方便。为此，我们将 n 线算符 $L_i(\gamma)$视为附加的辅助完全扩展框架二维拓扑量子场论的有能隙边界条件 $\mathcal{T}_n$，如图 22所示。

完全扩张的带框架二维拓扑量子场论与融合2-范畴 2Vec 中有限维2-向量空间的对象（按等价类计）一一对应。文献中对这一对应关系有多种不同的构造，例如参见 [37–39]。每种构造都为我们所讨论的问题提供了有益的视角。

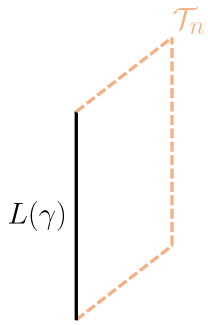


图 22。

3.4.1 2-向量空间

按照通过拓扑算符代数描述线算符的思路，2-范畴 2Vec 的一种初步表述如下：

- 对象是有限半单结合代数 $\mathcal{A}$。
- 1-态射介于对象 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间，是 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模。
- 2-态射是双模映射。

在这种描述中，对象是带有一种有能隙边界条件的二维拓扑量子场论，该边界条件支持一个由拓扑局域算符构成的结合代数。如果我们希望建立有能隙边界条件与线缺陷之间的对应关系，这种描述便很自然 L：后者支持一个由拓扑局域算符构成的结合代数 $\mathcal{A}_L$，正如前文第 3.1 节所讨论的那样。

本质上，二维拓扑量子场论与 2Vec 中对象的等价类一一对应，而 2Vec 忘却了有能隙边界条件的选择。从 1-态射的定义可以看出，2Vec 中的等价就是结合代数的 Morita等价。任何有限半单结合代数 $\mathcal{A}'$ 都可分解为矩阵代数之和

$$\mathcal{A}' \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{End}(V_i) \tag{3.54}$$

因此与一个结合代数 Morita等价

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\,. \tag{3.55}$$

因此，二维拓扑量子场论与自然数 $n \in \mathbb{N}$一一对应，该自然数对应于真空态的数量。下文将此二维拓扑量子场论记作 $\mathcal{T}_n$。

现在，我们可以在一组简单线缺陷 $L_i'(\gamma)$ 与辅助二维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$ 的有能隙边界条件之间，建立更具体的对应关系。这组线缺陷由 $i = 1, \ldots, n$ 编号，并承载结合代数 $\mathcal{A}_{L_i'} = \mathrm{End}(V_i)$。请注意，实现 Morita等价的可逆双模源自二维拓扑量子场论中的拓扑线缺陷，它们

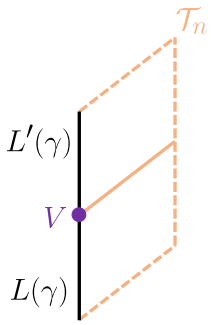


图23。

与有能隙边界相交，如图 23 所示。在 $\mathcal{T}_n$ 的有能隙边界条件与线缺陷之间的对应关系下，这意味着简单线 $L'(\gamma)$（其具有 $\mathcal{A}_{L'} = \mathrm{End}(V)$）与约化线$L(\gamma)$（其具有 $\mathcal{A}_L = \mathbb{C}$）之间存在一个拓扑界面，正如我们此前在第 3.1 节所述。

本着这一思路，将注意力限制在简单线缺陷上，并采用将等价对象视为相同的 2Vec 表述方式，会比较方便（但并非必要）。其中一种表述方式是 Kapranov-Voevodsky [37], 的表述，我们总结如下：

- 对象是自然数 $n \in \mathbb{N}$，或有限半单范畴 Vec^n。这是二维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$中边界条件所构成的范畴。
- 1对象 n 与 m 之间的 -态射是函子 $A : \mathrm{Vec}^n \to \mathrm{Vec}^m$，对应于二维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$ 与 $\mathcal{T}_m$之间的拓扑界面。
- 2-态射是自然变换 Φ: $A \Rightarrow B$，对应于拓扑界面之间的拓扑结点。

对象的融合对应于二维拓扑量子场论的堆叠：$\mathcal{T}_n \otimes \mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_{n\cdot m}$。

3.4.2 2-表示

利用简单线缺陷的集合 $L_i(\gamma)$ 与 $\mathcal{T}_n$ 的有能隙边界条件之间的对应关系，可以将对称群 G 在线缺陷上的作用转译为 G-等变结构 $\mathcal{T}_n$ 上，从而自然地构造出 2-表示的抽象范畴定义。

具体而言，考虑在圆柱 $L(\gamma)$ 上绕置一个线缺陷，并附加一个拓扑对称缺陷$U_g(C_\gamma)$。由于附带了辅助拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$，这需要在对称缺陷与 $\mathcal{T}_n$之间选取一个拓扑交 $\mathcal{F}(g,$，如图24左侧所示。

这个交集可被视为 $\mathcal{T}_n$ 上的一个拓扑线缺陷，因此确定一个函子 $\mathcal{F}(g) : \mathrm{Vec}^n \to \mathrm{Vec}^n$。对称性缺陷作用于简单边界条件 $L \in \mathrm{Vec}^n$ 上

$$L \mapsto \mathcal{F}(g)(L)\,. \tag{3.56}$$

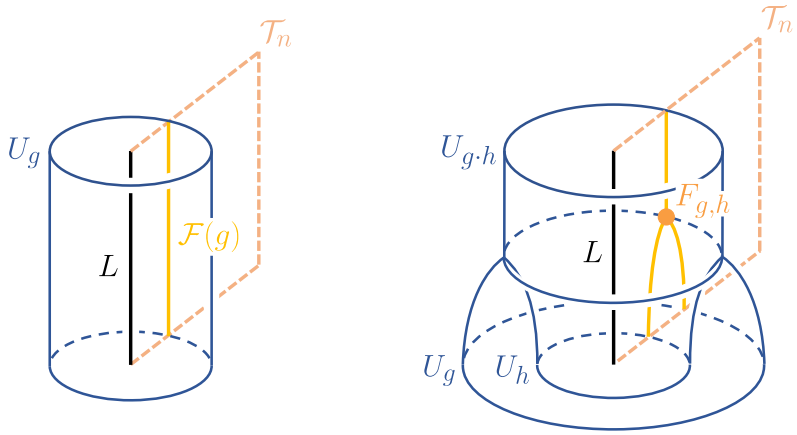


图 24。

这对应于将圆柱 C_γ^{D-1} 收缩到 L，从而实现 g 在线缺陷上的作用。

函子 $\mathcal{F}(g)$ 与体相中对称性缺陷 g、$h \in G$ 的融合之间的相容性，由自然同构实现

$$F_{g,h}: \ \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h) \ \Rightarrow \ \mathcal{F}(g \cdot h)\,, \tag{3.57}$$

这些自然同构对应于拓扑结点，它们源自体相中 $\mathcal{T}_n$ 与两个对称性缺陷的融合 g、$h \in G$ 的交汇，如图 24右侧所示。

这些结点可能仅以射影方式遵循 G 的群律：将 $\mathcal{T}_n$ 与三个对称性缺陷 g、h、$k \in G$ 的融合相交时，两种可能方式得到的结果仅在相差一个乘法相位 $\mu(g$、h、$k)$时等价，如图25所示。这些相位的集合可视为一个映射

$$\mu: \ G \times G \times G \ \to \ U(1)\,, \tag{3.58}$$

该映射必须满足 3-余循环条件

$$(d\mu)(g,h,k,l) \ := \ \frac{\mu(h,k,l)\cdot\mu(g,hk,l)\cdot\mu(g,h,k)}{\mu(gh,k,l)\cdot\mu(g,h,kl)} \ \overset{!}{=} \ 1 \tag{3.59}$$

为了与四个对称性缺陷 g、h、k、$l \in G$ 的交汇相容。如果相应的群上同调类平凡，即 $[\mu] = 1$，则可对这些结点进行重整化，使其满足所需的相容条件[3]

$$F_{g,hk} \circ \left[\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(g)} \star F_{h,k}\right] \ = \ F_{gh,k} \circ \left[F_{g,h} \star \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(k)}\right]. \tag{3.60}$$

因此，关联的群上同调类 $[\mu] \in H^3(G,\ U(1))$ 是障碍，阻碍自然变换 $F_{g,\ h}$ 定义与体相中对称性缺陷融合相容的一致结点。

总之，在此框架中，对称群 G 对一组由 $i = 1$、.....、n 标记的线缺陷 $L_i(\gamma)$ 的作用可由以下数据描述：

[3]这里，我们分别用 $\circ$ 和 $\star$ 表示 2Vec 中 2-态射的垂直复合和水平复合。

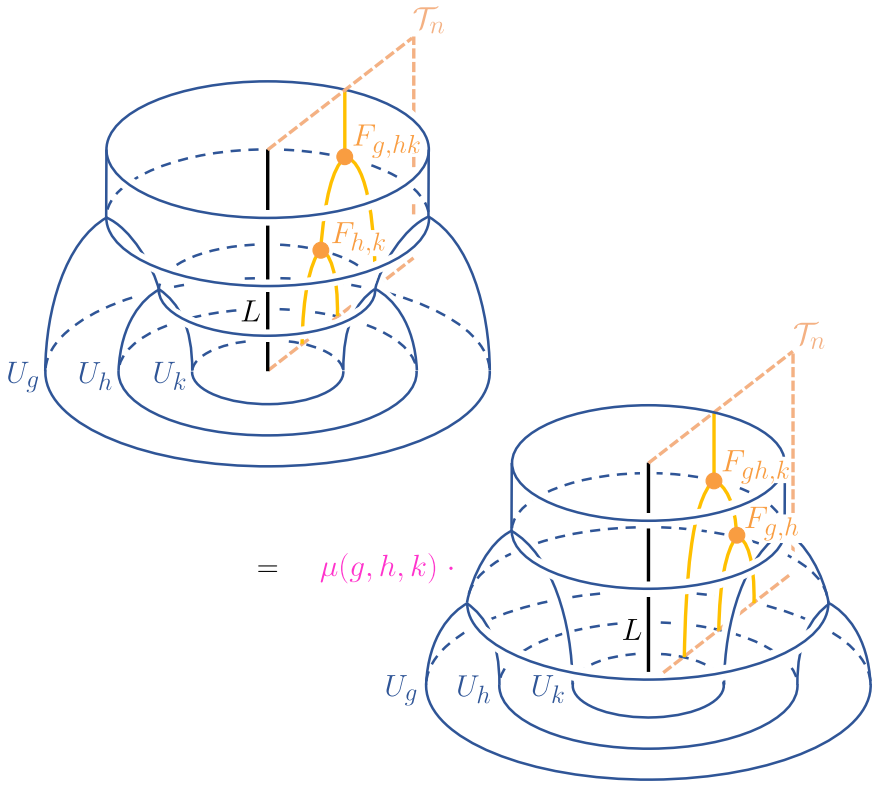


图 25。

1. 一个二维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$ （2Vec 中的一个对象）。

2. 对每个 $g \in G$，在 $\mathcal{T}_n$ 中有一条拓扑线 $\mathcal{F}(g)$（即 2Vec 中的一个 1-自同态）。

3. 对每一对 $F_{g,\ h}$，都有一个拓扑交汇（即 2Vec 中的一个 2-态射），满足相容条件（3.60）。

这组数据可以被视为一个（伪）2-函子

$$\mathcal{F}:\ \widehat{G} \to 2\mathsf{Vec}\,, \tag{3.61}$$

其中，群 G 被视为一个 2-范畴 G，它只有一个对象 $*$，其 1-自同态为 $\mathrm{End}_{\widehat{G}}(*) = G$，且其 2-态射均为平凡态射。这类 2-函子本身构成一个 2-范畴，其

- 对象是 2-函子 $\mathcal{F}:\ G \to 2\widehat{\mathsf{Vec}}$,
- 1-态射是自然变换 $\eta:\ \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$,
- 2-态射是修正 $\Xi : \eta \Rrightarrow \eta'$。

我们将这个范畴记为 $[G, 2\mathsf{Vec}]$，并将其视为 G的有限维 2-表示的 2-范畴,

$$[\widehat{G}, 2\mathsf{Vec}] \ = \ 2\mathsf{Rep}(G)\,. \tag{3.62}$$

等价地，这也可以看作是 G-等变的完全扩展框架二维拓扑量子场论的 2-范畴。

这从更抽象的视角重现了线缺陷以对称群的 2-表示变换 G。这使我们能够将 G 的 2-表示构造从具体的线缺陷中抽象出来，并将其重新表述为二维拓扑量子场论上存在 G-等变结构。众所周知的论证表明，不可约 2-表示可由第3.2和 3.3小节中的具体数据分类，例如 [22, 23] 中所述，并在附录A.2中作了总结。

3.4.3 分离的线

现在可以将支撑在分离的平行线上的线缺陷 $L(\gamma)$ $L'(\gamma')$ 的变换重新表述为相应拓扑量子场论的堆叠 γ，γ'，而这由 2 上的融合结构决定Vec。图 26对此作了说明。

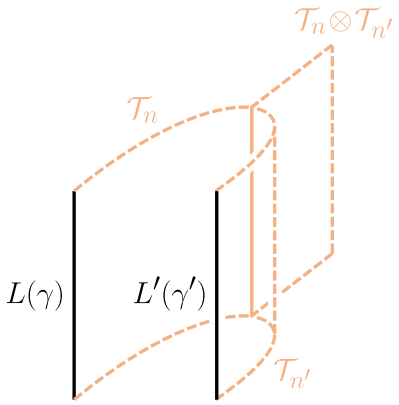


图 26。

因此，我们在$\mathsf{Rep}(G) = [G,\mathsf{Vec}]$ 上的 G-等变二维拓扑量子场论上得到一种融合结构，它对应于 2-表示及其 1-交织算子和 2-交织算子的张量积。这重现了第3.2和3.3 小节中的结果：位于相隔的时空位置的线缺陷以对称群 G的张量积 2-表示变换。

3.4.4 交汇算子

类似于将线缺陷识别为附着的二维拓扑量子场论的边界条件，我们可以将两个线缺陷交汇处的局域算子视为相应二维拓扑量子场论之间的拓扑界面的边界条件。

具体而言，考虑两个线缺陷 L, L' ，它们分别被视为范畴 Vec^n、$\mathsf{Vec}^{n'}$ 中的对象，这些范畴由 $\mathcal{T}_n$, $\mathcal{T}_{n'}$的边界条件构成。设 A 是 $\mathcal{T}_n$ 与$\mathcal{T}_{n'}$ 之间的一个拓扑界面，对应于函子 $A : \mathsf{Vec}^n \to \mathsf{Vec}^{n'}$。那么，$L$ 与 L' 之间的局部交汇算子是

$$\mathcal{O} \in \mathrm{Hom}(A(L), L') \tag{3.63}$$

界面 A的边界条件向量空间中的元素，如图 27所示。

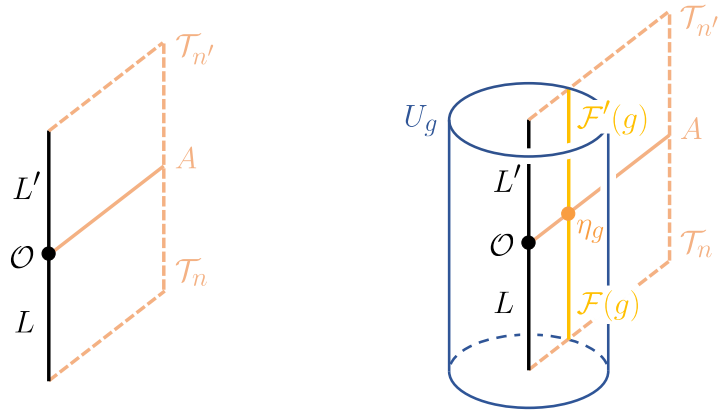


图 27。

群元素 $g \in G$ 通过与交点缠绕 L, L' 来作用于这些线$\mathcal{F}(g)$, $\mathcal{F}'(g$，使相应的对称性缺陷与 $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n'}$相交。然而，由于存在拓扑界面 A，我们还需要指定一个局部交汇算子 η_g ，如图 27右侧所示。这是一个 2-态射

$$\eta_g : \quad A \circ \mathcal{F}(g) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}'(g) \circ A \tag{3.64}$$

在 2Vec 中，它必须与两个对称性缺陷 $g, h \in G$ 依次产生的缠绕作用相容，即

$$\big[F'_{g,h} \star \mathrm{Id}_A\big] \circ \big[\mathrm{Id}_{\mathcal{F}'(g)} \star \eta_h\big] \circ \big[\eta_g \star \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(h)}\big] \quad \stackrel{!}{=} \quad \eta_{g\cdot h} \circ \big[\mathrm{Id}_A \star F_{g,h}\big] \,. \tag{3.65}$$

这体现了这样一个事实：拓扑界面 A 依次与两个对称性缺陷 $g, h \in G$ 相交，等价于与它们的融合相交 $g \cdot h \in G$，如图 28所示。

利用交汇算子 η_g，拓扑对称缺陷 $g \in G$ 随后通过以下方式作用于边界交汇 $\mathcal{O} \in \mathrm{Hom}(A(L)\ L')$:

$$\mathcal{O} \quad \mapsto \quad \mathcal{F}'(g)(\mathcal{O}) \circ \eta_g(L) \,, \tag{3.66}$$

其中，$\eta_g(L)$ 表示自然变换在 $L \in \mathrm{Vec}^n$ 处的分量。物理上，这对应于将圆柱收缩到 L 和 L' 上，从而实现群元素 g 对相应线及其结点的作用。

总之，对两个线算符之间结点处的局域算符的对称群 G 作用，可以由以下数据描述:

1. $\mathcal{T}_n$ 与 $\mathcal{T}_{n'}$ 之间的拓扑界面 A （2Vec 中的 1-态射），
2. 一个拓扑交汇 η_g (2Vec中的 2-态射)，对每个 $g \in G$，满足相容性条件 (3.65)。

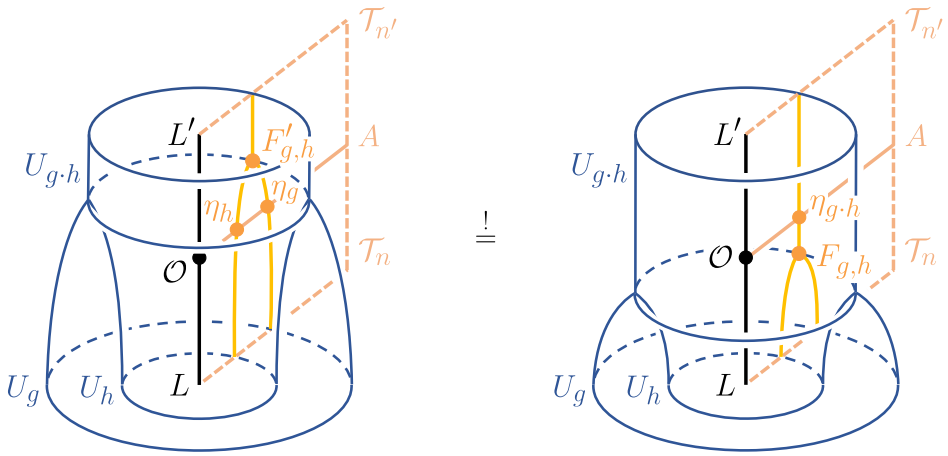


图 28。

这组数据可以视为一个自然变换

$$\eta : \ \mathcal{F} \ \Rightarrow \ \mathcal{F}' \tag{3.67}$$

函子 $\mathcal{F}$、$\mathcal{F}' \in [G, 2\mathsf{Vec}]$（描述线 L 和 L' 的变换行为）之间的关系。因此，它们对应于 G 的相应 2-表示之间的 1-态射。从更抽象的角度，这重现了小节 3.2 和 3.3 中的结果：两个线算符之间的局部交汇算子，变换为 G 的相应 2-表示之间的 1-交织算子。

3.5 示例

最后，我们用几个例子结束本节，这些例子中的线算符变换于有限群对称性的 2-表示中。我们首先考察规范理论背景下自然出现的几类线算符，接着介绍由某些类型的混合反常诱导的、具有非平凡 2-余循环的 2-表示。

3.5.1 规范理论

我们考虑一个具有简单连通规范群 $\mathbb{G}$ 的 D 维纯规范理论。该理论具有对称群 $G = \mathsf{Out}(\mathbb{G})$，它由 $\mathbb{G}$ 的外自同构构成，通常称为电荷共轭对称性。我们用等价类 $[f] \in \mathsf{Out}(\mathbb{G})$ 表示该群的元素，这些等价类由自同构 $f \in \mathsf{Aut}(\mathbb{G})$ 模掉通过共轭作用的内自同构得到。因此，$[f] = [f']$ 当且仅当存在某个群元素 $g \in \mathbb{G}$，使得 $f' = f \circ \mathsf{conj}_g$。

任何规范理论中一类自然的线算符是动力学威尔逊线 $W_R(\gamma)$，其标记为 $\mathbb{G}$ 的表示 R（的等价类）。请注意，威尔逊线的共轭是处于共轭表示 R^* 中的威尔逊线，即

$$W_R(\gamma^*) \ = \ W_{R^*}(\gamma)\,. \tag{3.68}$$

外自同构 $[f] \in G$ 通过以下方式作用于威尔逊线

$$[f] \triangleright W_R(\gamma) \;=\; W_{R\circ f^{-1}}(\gamma)\,, \tag{3.69}$$

其中 $R\circ f^{-1}$ 表示 $\mathbb{G}$，其由将 R 与外自同构 f 的一个代表元 $[f]$[4]的逆预合成得到。这在 $\mathbb{G}$ 的不可约表示的同构类集合上诱导出一个置换作用，由此它们分解为 $G = \mathrm{Out}(\mathbb{G})$ 的不可约 2-表示。

让我们来看几个具体例子：

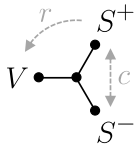
- 考虑 $\mathbb{G} = SU(N)$，其中 $N > 2$，因此 $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2$。电荷共轭交换 $SU(N)$ 的基本表示**N** 和反基本表示$\overline{\mathbf{N}}$。因此，基本表示和反基本表示的威尔逊线 $W_{\mathbf{N}}$、$W_{\overline{\mathbf{N}}}$ 按 $\mathbb{Z}_2$ 的二维 2-表示变换。这自然推广到基本表示的反对称幂。

- 考虑 $\mathbb{G} = \mathrm{Spin}(2N)$，其中 $N > 4$，因此 $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2$。电荷共轭交换 Spin($2N$) 的旋量表示和共轭旋量表示 $S^{\pm}$，它们因此按 $\mathbb{Z}_2$ 的二维2-表示变换。

- 对于 $\mathbb{G} = \mathrm{Spin}(8)$，外自同构 0-形式对称性增强为非阿贝尔对称群

$$\mathrm{Out}(\mathbb{G}) \;=\; S_3 \;=\; \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \;=:\; \langle r, c\rangle\,, \tag{3.70}$$

该群按照以下方式将两个旋量表示 $S^{\pm}$ 和向量表示 V彼此置换



. (3.71)

因此，它们在由 $\mathbb{Z}_2$-子群 $\langle rc\rangle \subset S_3$ 标记的 S_3 三维不可约2-表示中变换。

三维中的另一类有趣的线缺陷 $D = 3$ 是 Gukov-Witten 缺陷 $Y_{[g]}(\gamma)$，它们由 $\mathbb{G}$ 中的共轭类 $[g]$ 标记。它们要求沿着链接线 γ 的小圆周的规范联络 holonomy 属于共轭类 $[g]$。外自同构 $[f] \in \mathrm{Out}(\mathbb{G})$ 对 Gukov-Witten 线的作用为

$$[f] \triangleright Y_{[g]}(\gamma) \;=\; Y_{[f(g)]}(\gamma)\,, \tag{3.72}$$

由此，外自同构在 $\mathbb{G}$ 的共轭类集合上诱导出置换作用。后者构成一个由 $\mathbb{T}/\mathcal{W}$ 参数化的连续族，其中 $\mathbb{T} \subset \mathbb{G}$ 表示一个

[4]对威尔逊线的作用与代表元 f 无关，因为选取另一个代表元 $f' = f \circ \mathrm{conj}_g$（其中 $g \in \mathbb{G}$）会得到等价表示 $R\circ(f')^{-1} = R(g)^{-1}\circ[R\circ f^{-1}]\circ R(g)$，而威尔逊线只取决于表示的等价类。

极大环面以及与之关联的魏尔群。通过这种方式，我们得到外自同构零形式对称群的不可约 2-表示的连续族。

让我们来看几个具体的例子：

- 考虑带有 Out($\mathbb{G}$) $= \mathbb{Z}_2$ 的 $\mathbb{G} = U(1)$。Gukov-Witten 缺陷由一个相位 $\alpha = e^{i\theta}$ 标记，其中电荷共轭通过复共轭作用 $\alpha \to \alpha$。因此，存在由 $\theta \in (0,\ \pi)$ 参数化的连续二维二表示族，以及分别对应于 $\theta = 0,\ \pi$ 的两个平凡2-表示。

- 考虑带有 $N > 2$ 的 $\mathbb{G} = SU(N)$，因此 Out($\mathbb{G}$) $= \mathbb{Z}_2$。极大环面可由满足 $\prod_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ 的 N 相位 α_i 参数化，相应的魏尔群$\mathcal{W} = S_N$ 会置换这些相位。电荷共轭通过复共轭作用，$\alpha_i \mapsto \alpha_i$，从而在不动点之外给出连续的二维二表示族。

- 考虑带有 $N > 4$ 的 $\mathbb{G} = \text{Spin}(2N)$，因此 Out($\mathbb{G}$) $= \mathbb{Z}_2$。极大环面可由 N相位 α_i 参数化。这些相位受到 $(\mathbb{Z}_2)^N \rtimes S_N$ 的作用，其中每个 $\mathbb{Z}_2$ 因子的生成元对相应的相位 $\alpha_i \mapsto \alpha_i$ 进行复共轭，而对称群的元素则相互置换这些相位 α_i 。魏尔群是群同态的核

$$(\mathbb{Z}_2)^N \rtimes S_N \ \to\ \{\pm 1\}\,, \qquad \big((x_1, ..., x_N), s\big) \ \mapsto\ (-1)^{(\Sigma_i x_i)}\,. \tag{3.73}$$

外自同构通过对单个相位 $\alpha_1 \mapsto \alpha_1$ 取复共轭来作用，从而再次给出连续的 2-表示族。

3.5.2 混合反常

上述示例都对应于 2-表示 $(\sigma,\ c)$，其中 $\sigma : G \to S_n$ 是非平凡的置换表示，但射影相位是平凡的，即 $[c] = 1$。现在我们给出一类具有非平凡射影相位的示例。

考虑一个具有 D 维的理论，除了有限零形式对称性 G之外，它还具有有限阿贝尔（$D-2$）-形式对称性 A。后者由拓扑线缺陷生成；就我们的目的而言，我们将其视为构造 G 的非平凡 2-表示的一种辅助工具。进一步假设 A 和 G 具有一个混合 't Hooft 反常，该反常由如下形式的（$D+1$）维 SPT 相表示

$$\int_{X^{D+1}} \langle \mathsf{a} \cup \mathsf{g}^*(e) \rangle\ , \tag{3.74}$$

其中，$\mathsf{a} \in Z^{D-1}(X, A)$ 和 $\mathsf{g} :\ X \to BG$ 分别表示 A 和 G的背景场，而 e 表示一个类 $[e] \in H^2(G, A^\vee)$。

现在考虑一条线缺陷 $L(\gamma)$，它在 G 的缠绕作用下保持不变，并为 A 诱导出一个背景场，使得

$$\int_{B^{D-1}_\gamma} \mathsf{a} \ =\ a \ \in\ A \tag{3.75}$$

对于任意一个足够小的（$D-1$）球 B_γ^{D-1}与位于原点的线 γ相交，如图29所示。例子包括生成 A 的拓扑线缺陷，以及它们与其他非拓扑线缺陷的复合。在 [24], 的语言中，它们是（$D-2$）形式对称性的孤子缺陷 A。

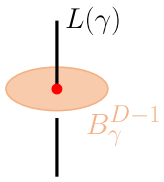


图 29。

沿用 [24], 't Hooft 反常（3.74）源自孤子线算符 L（γ）终止于按 G 的 2-余循环 $\langle a, e\rangle \in Z^2$（$G, U$（1））变换的局域算符上。因此，这些线缺陷将按 G 的 $c = \langle a, e\rangle$的一维 2-表示变换。

一个例子是维数为 $D = 3$ 的纯 $\mathbb{G} = SO(4N)$ 规范理论。它具有 0-形式对称性 $G = \pi_1(\mathbb{G})^\vee \times \mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，该对称性由磁对称性与电荷共轭对称性的组合给出；此外还具有电 1-形式对称性 $A = Z(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2$。这些对称性表现出立方混合 't Hooft 反常，由以下四维 SPT 相表示

$$\int_{X^4} \langle \mathsf{a} \cup \mathsf{g}^*(e)\rangle \tag{3.76}$$

用背景场 $\mathsf{a} \in Z^2(X, \mathbb{Z}_2)$ 和 $\mathsf{g}: X \to B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ 以及非平凡类 $[e] \in H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ 的代表元 e 表示。因此，生成电 1-形式对称性的拓扑 Gukov-Witten 缺陷线，按具有非平凡 2-余循环$\langle z, e\rangle \in Z^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1))$ 的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 一维 2-表示变换。

4 2-群的线与2-表示

上一节我们考察了线算符在普通有限群对称性下的变换行为。现在，我们将这些讨论推广到有限 2-群对称性。这里我们将简要介绍，重点关注由 2-群的额外数据带来的新特征。

4.1 预备知识

除了 0-形式对称群 G之外，现在还有一个阿贝尔 1-形式对称群 A。它由拓扑缺陷 $V_a(\Sigma_{D-2})$ 实现，这些缺陷以群元素$a \in A$ 为标记，并支撑在余维二子流形 Σ_{D-2} 上，其融合遵循 A的群律，如图 30左侧所示。

0-形式和1-形式对称性 G 与 A 可能以非平凡的方式相互作用，这可以分为两部分：

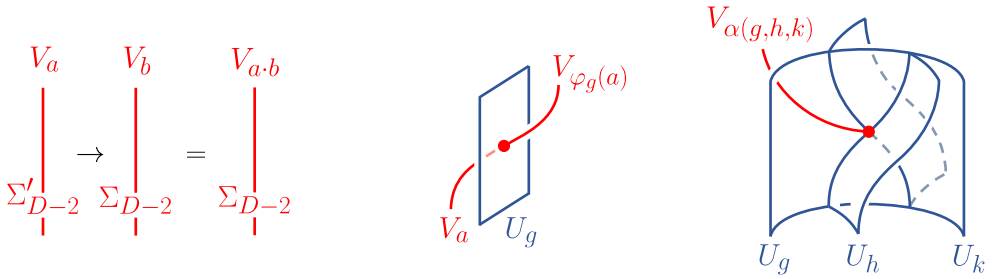


图 30。

1. 当余维二缺陷 V_a 穿过余维一缺陷 U_g时，它可能转化为由同态确定的新缺陷 $V_{\varphi_g(a)}$

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A) , \tag{4.1}$$

如图中部所示30。

2. 三个余维一缺陷的融合 U_g、 U_h 和 U_k 具有结合律，但会涌现一个由 $\alpha(g,h,k)$ 标记的余维二缺陷 $\in A$。这在图30右侧有所示。与四个余维一缺陷融合的相容性要求 α 满足扭曲 3-余循环条件，

$$\alpha \in Z^3_\varphi(G,A) . \tag{4.2}$$

相关类 $[\alpha] \in H^3_\varphi(G,A)$ 称为 *Postnikov* 类。

数据集合 $\mathcal{G} = (G, A, \varphi, \alpha)$ 确定了一个 2-群对称性。

如果 Postnikov 类为零，即 $[\alpha] = 1$，则称该 2-群为分裂的。在这种情况下，由于可以用一个 2-余循环平移 Postnikov 类的平凡化，因此还存在额外的数据

$$e \in Z^2_\varphi(G,A) . \tag{4.3}$$

相关类 $[e] \in H^2_\varphi(G, A)$ 称为对称性分数化 [5, 25]。物理上，它描述了两个缺陷 g, $h \in G$ 的结点如何与一个指定的 1-形式缺陷 $e(g, h) \in A$结合起来，如图 31所示。

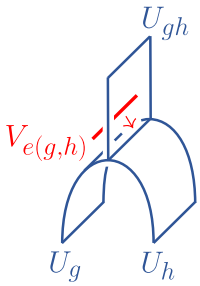


图 31。

4.2 初等视角

现在再次考虑一组有限的线缺陷 $L_i(\gamma)$，由 $i = 1、\ldots\ldots、 n$ 编号，并按照以下方式在 0-形式对称群作用下变换

$$g \triangleright L_i(\gamma) \;=\; L_{\sigma_g(i)}(\gamma) \tag{4.4}$$

对于某个传递置换 $\sigma\colon G \to S_n$。

此外，1-形式对称群的元素 $a \in A$ 现在可以通过与支撑在一个小 S^{D-2}_γ上的相应拓扑对称缺陷链接，作用于线缺陷。将 S^{D-2}_γ收缩后，会得到一个支撑在 $L_i(\gamma)$上的拓扑局域算符。假设线缺陷是约化的，那么该算符是恒等算符的倍数，因此产生一个乘法相位

$$a \triangleright L_i(\gamma) \;=\; \chi_i(a)\cdot L_i(\gamma)\,, \tag{4.5}$$

与 $\chi_i(a) \in U(1)$[5]。这在图32的左侧有所示。



图32。

由 $i = 1, \ldots, n$ 索引的相位 $\chi_i(a)$ 集合可视为一个映射

$$\chi\colon\; A \;\to\; U(1)^n\,. \tag{4.6}$$

与两个对称性缺陷 $a, b \in A$ 连续作用相容，要求此映射是一个群同态，

$$\chi(a)\cdot\chi(b) \;\overset{!}{=}\; \chi(a\cdot b)\,. \tag{4.7}$$

这意味着，依次将一条线 $L_i(\gamma)$ 与两个拓扑缺陷 $a, b \in A$ 链接，等价于将其与二者的融合 $a\cdot b \in A$ 链接，如图 32 右侧所示。因此，我们有一组特征标 $\chi \in (A^\vee)^n$，用以指定线 $L_i(\gamma)$ 在 1-形式对称性 A下的荷。

这些特征必须与 2-群结构相容。首先，将 L_i（γ）与 1-形式对称性缺陷 $a \in A$ 链接，随后再与 0-形式对称性缺陷 $g \in G$ 结合，这必须等价于先用 g 结合，随后将变换后的线 $L_{\sigma_g\,(i)}$ 与变换后的 1-形式缺陷 φ_g（a）$\in A$进行链接。这一过程如图 33所示，并给出条件

$$\chi_i(a) \;\overset{!}{=}\; \chi_{\sigma_g(i)}\big(\varphi_g(a)\big)\,. \tag{4.8}$$

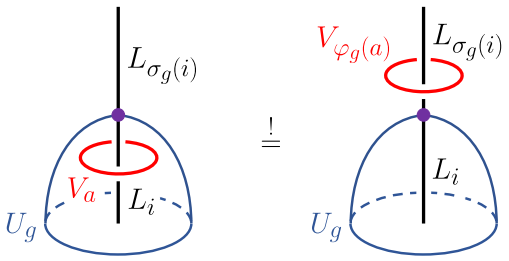


图 33。

其次，0-形式对称性缺陷 g 的线 $L_i(\gamma)$ 的交点可能再次产生射影相位 $c_i(g,\ h)$，从而构成一个函数

$$c:\ G\times G\ \to\ U(1)^n\,. \tag{4.9}$$

然而，由于 0-形式对称性缺陷的融合现在仅在由 α Postnikov 类代表确定的 1-形式对称性缺陷意义下满足结合律，扭曲 2-余循环条件（3.11）变为

$$(d_\sigma c)_i(g,h,k)\ \overset{!}{=}\ \chi_i\big(\alpha(g,h,k)\big)\,. \tag{4.10}$$

如果 Postnikov 类消失且 2-群是分裂的，则可对射影相位重新归一化，使其满足扭曲2-余循环条件 $d_\sigma c=1$。

总之，我们可以用三元组 $(\sigma,\ c,\ \chi)$ 标记有限 2-群在由 $L_i(\gamma)$ 表示的线缺陷集合上的作用，这些三元组由以下部分组成：

1. 一个置换作用 $\sigma:\ G\to S_n$,

2. 一个 2-余链 $c\in C^2_\sigma(G,\ U(1)^n)$，3.
一组特征标 $\chi\in(A^\vee)^n$,

满足以下条件

$$g\triangleright_\sigma\chi(a)\ =\ \chi(g\triangleright_\varphi a)\qquad\text{and}\qquad d_\sigma c\ =\ \langle\chi,\alpha\rangle \tag{4.11}$$

对所有 $g\in G$ 和 $a\in A$，其中我们记 $(g\triangleright_\sigma\chi)_i:=\chi_{\sigma_g^{-1}(i)}$。这是该 2-群的一个 n 维 2- 表示的数据。当 A 为平凡时，这就化为我们在第 G 3 节中遇到的普通群 3 的 2-表示标记。关于 2-群的 2-表示的更数学化论述见附录A.2。

与之前类似，如果存在一个置换 $\tau\in S_n$ 使得……，则认为两个 2-表示 (σ,c,χ) 和 (σ',c',χ') 等价。

$$\sigma'\ =\ \tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}\,,\qquad [c']\ =\ [\tau\triangleright c]\,,\qquad \chi'\ =\ \tau\triangleright\chi\,. \tag{4.12}$$

[5]当 L_i（γ）不是约化线时，结论仍然成立，但还需要一个简短的论证。具体而言，与约化线形成拓扑交汇的相容性（如图 11 所示）要求 1-形式生成元在 L_i（γ）上作用为恒等算符的某个倍数。

两个 2-表示 (σ, c, χ) 和 (σ', c', χ') 的张量积定义为

$$(\sigma, c, \chi) \otimes (\sigma', c', \chi') \;=\; \big(\sigma \otimes \sigma',\, c \otimes c',\, \chi \otimes \chi'\big) \tag{4.13}$$

其中 $\sigma \otimes \sigma'$ 和 $c \otimes c'$ 如（3.25）和（3.26）中所示，并且 $\chi \otimes \chi' \in (A^\vee)^{n\cdot n'}$ 定义为

$$(\chi \otimes \chi')_{(i,j)} \;=\; \chi_i \cdot \chi_j \,. \tag{4.14}$$

最后，2-表示（σ， c， χ）的共轭是2-表示（σ， $\bar{c}$， $\bar{\chi}$），它是通过对 c 和 χ进行复共轭得到的。

4.2.1 对称性分数化

若该2-群是分裂的，则可以通过一个2-余循环$e \in Z^2_\varphi(G,\ A)$改变Postnikov 类的平凡化，这相当于用一个1-形式对称性缺陷$g,\ h \in G$对0-形式对称性缺陷的结点进行装饰 $e(g,\ h) \in A$，如图 31所示。

从（4.10）可以直接看出，改变平凡化会导致带有1-形式对称性电荷的线缺陷中涉及的2-表示的射影相位发生改变 $L_i(\gamma)$，

$$c \;\to\; c \cdot \langle \chi, e \rangle \,. \tag{4.15}$$

This 可按图 34所示以图示方式理解。也就是说，拖动 t he

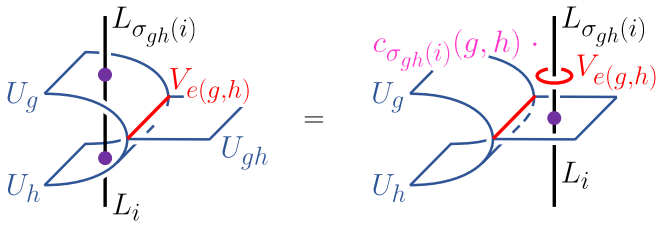


图 34。

通过线缺陷 $L_i(\gamma)$ 融合 $g,\ h \in G$，会因 1-形式对称性缺陷 $e(g,\ h) \in A$ 而产生额外的链接，因此产生一个相位

$$\chi_{\sigma_{gh}(i)}(e(g,h)) \;\in\; U(1) \tag{4.16}$$

除之前的射影相位 $c_{\sigma_{gh}(i)}(g,\ h)$ 外。这重现了方程（4.15）中的位移。

4.2.2 交汇算子

现在考虑有限维向量空间 V_i，其中的局域算符 L_i 可以终止。在存在 1-形式对称性时 A，除非相应的特征$\chi_i \in A^\vee$ 是平凡的，否则它们都是平凡的。这体现了这样一个事实：如果 L_i 可以终止于局域算符 $\mathcal{O}$，那么由于可以解开任意余维二缺陷的可能性（如图35所示），它就不可能带有 1-形式对称性的荷。

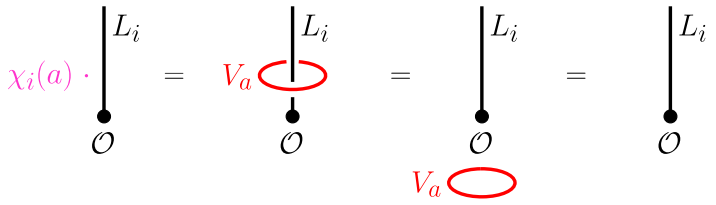


图35。

从高阶表示论的角度来看，这重现了以下事实：平凡 2-表示与（σ， c， χ）之间的 1-交织算子由 G 的、类型为（σ， c）的分次射影表示给出，其支集被限制在满足 $i \in \{1, ..., n\}$ 且 $\chi_i = 1$ [22]的那些。

更一般地，由于与上述类似的论证，能够接纳局域算符交汇 $\mathcal{O}$ 的线缺陷 L_i, L'_j 必须具有相同的1-形式荷。这重现了如下事实：2-群 $\mathcal{G}$的2-表示 (σ, c, χ) 与 (σ', c', χ') 之间的 1-交织算子由类型为 $(\sigma \otimes \sigma', \bar{c} \otimes c')$ 的分次射影表示 G 给出，其支集仅限于满足 $\chi_i = \chi'_j$ [22] 的那些 $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n'\}$。

4.3 归纳视角

现在我们来考虑第3.3小节中介绍的归纳方法的一般化。我们再次固定一条 $L = L_1$ 线，它在不可约2-表示（σ, c, χ）下变换，其稳定子子群为 $H :=$ 稳定子$_\sigma(1) \subset G$。现在，这条线可能带有 A1-形式对称性荷，由特征 $\lambda := \chi_1 \in A^\vee$描述，如图36左侧所示。

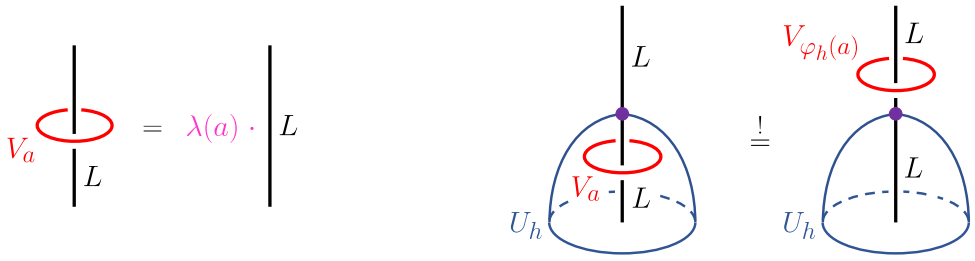


图36。

此数据也必须再次与2-群结构兼容。首先，链接 L 一个1-形式对称性缺陷 $a \in A$，然后用一个0-形式对称性缺陷包裹$h \in H$，必须等价于链接 L经过变换的1-形式对称性缺陷$\varphi_h(a) \in A$，如图36右侧所示。由此得到条件

$$\lambda(a) \overset{!}{=} \lambda(\varphi_h(a)), \tag{4.17}$$

这意味着特征 $\lambda \in A^\vee$ 必须是 H-不变的。

此外，由 H-缺陷与 L 的交点相乘所产生的相位集合 $u(h,h') := c_1(h,h')$ 必须满足

$$(du)(h_1,h_2,h_3) \stackrel{!}{=} \lambda\big(\alpha(h_1,h_2,h_3)\big)\,, \tag{4.18}$$

其中 $\alpha \in Z^3_\varphi(G,\ A)$ 是 Postnikov 类的一个代表元，它描述了体相中 0-形式对称性缺陷融合的不结合性。

总之，2-群 $\mathcal{G}=(G,\ A,\ \varphi,\ \alpha)$ 在线缺陷 L 上的作用由一个三元组 $(H,\ u,\ \lambda)$ 决定，该三元组由以下部分组成：

1. 一个子群 $H \subset G$,
2. 一个 2-余链 $u \in C^2(H,\ U(1))$,
3. 一个 H-不变特征标 $\lambda \in A^\vee$,

满足 $du = \langle \lambda,\ \alpha|_H\rangle$。注意，这些数据对应于 2-子群 $\mathcal{H}=(H,\ A,\ \varphi|_H,\ \alpha|_H) \subset \mathcal{G}$的一维 2-表示。与第 3.3节的讨论类似，可以通过诱导从这些数据重构出原不可约 2-表示 $(\sigma,\ c,\ \chi)$,

$$(\sigma,c,\chi) \ = \ \mathrm{Ind}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(u,\lambda)\,. \tag{4.19}$$

已知，所有不可约 2-表示都可以通过对子群 [22, 23] 的一维 2-表示进行诱导而得到。

与之前类似，若存在一个 $g \in G$ 使得.....，则认为两个不可约 2-表示（$H,\ u,\ \lambda$）和（$H',\ u',\ \lambda'$）等价。

$$H' \ = \ {}^gH\,, \qquad [u'] \ = \ [{}^gu]\,, \qquad \lambda' \ = \ {}^g\lambda\,, \tag{4.20}$$

其中，我们记（${}^g\lambda$）（.）：$= \lambda\,(\varphi_g^{-1}\,(.)\,)$。

两个不可约 2-表示（$H,\ u,\ \lambda$）和（$H',\ u',\ \lambda'$）的张量积一般并非不可约，而是按照以下方式分解为不可约 2-表示的直和：

$$(H,u,\lambda)\otimes(H',u',\lambda') \ = \ \bigoplus_{[g]\,\in\, H\backslash G/K} \big(H\cap {}^gH',\ u\cdot {}^gu',\ \lambda\cdot {}^g\lambda'\big)\,, \tag{4.21}$$

这推广了（3.45）中的结果。

平凡 2-表示与（$H,\ u,\ \lambda$）之间的 1-交织算子空间由 H 的射影表示给出，其 2-余循环为 u，前提是 $\lambda = 1$；否则该空间为平凡空间。这再次体现了这样一个事实：如果线 L 可以终止于非真正局域算符上，那么它的 1-形式荷 λ 必定是平凡的。

最后，不可约2-表示（H,u,λ）的共轭是不可约2-$^-$表示（$H,\bar{u},\lambda$），由对 u 和 λ取复共轭得到。

4.4 范畴论视角

现在，让我们扩展第3.4 小节所介绍的关于2-表示的范畴论视角，以纳入1-形式对称性和2-群。

回想一下，我们将线缺陷 $L_i(\gamma)$，其指标为 $i = 1, \ldots, n$，视为辅助二维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_n$的边界条件。为了纳入 1-形式对称性 A，现在我们考虑与图 L 37 所示的 0-形式和 1- 形式对称性缺陷构型相链接的线缺陷 37。除了拓扑交 $\mathcal{F}(g)$ 之外，现在还

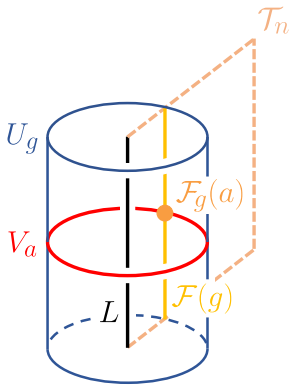


图 37。

还需要选择 1-形式缺陷 V_a 与 $\mathcal{T}_n$之间的一个点状交点 $\mathcal{F}_g(a)$。这可以视为拓扑线 $\mathcal{F}(g)$上的拓扑局域算符，因此可将其等同于一个自然变换

$$\mathcal{F}_g(a) : \mathcal{F}(g) \Rightarrow \mathcal{F}(g) \tag{4.22}$$

或者等价地，2Vec 中的一个 2-态射。这些自然变换必须与两个 1-形式对称性缺陷 a, $b \in A$ 的交点相容，具体而言，

$$\mathcal{F}_g(a) \circ \mathcal{F}_g(b) \overset{!}{=} \mathcal{F}_g(a \cdot b) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_g(a) \star \mathcal{F}_h(b) \overset{!}{=} \mathcal{F}_{g\cdot h}(a \cdot \varphi_g(b)) \,. \tag{4.23}$$

这些条件反映了这样一个事实：无论沿垂直方向还是水平方向与两个 1-形式对称性缺陷 a, $b \in A$相链接，都等价于与它们的融合相链接，如图 38所示。

总而言之，1-形式对称性带来的额外数据 A 是一组自然变换 $\mathcal{F}_g(a)$（2Vec中的 2-态射），并满足相容条件（4.23）。连同第 $\mathcal{F}(g)$节中的 1-态射和 2-态射$F_{g,\ h}$ 小节3.4中的这些数据可识别为一个（伪）2-函子

$$\mathcal{F} : \widehat{\mathcal{G}} \to \mathsf{2Vec} \,, \tag{4.24}$$

其中，2-群 $\mathcal{G} = (G,\ A,\ \varphi,\ \alpha)$ 被视为一个 2-范畴 $\mathcal{G}$，它只有一个对象 $*$，其 1-自同态为 1-End$\mathcal{G}(*) = G$，2-态射为 2-Hom $\mathcal{G}(g,\ h) = \delta_{g,\ h} \cdot A$。

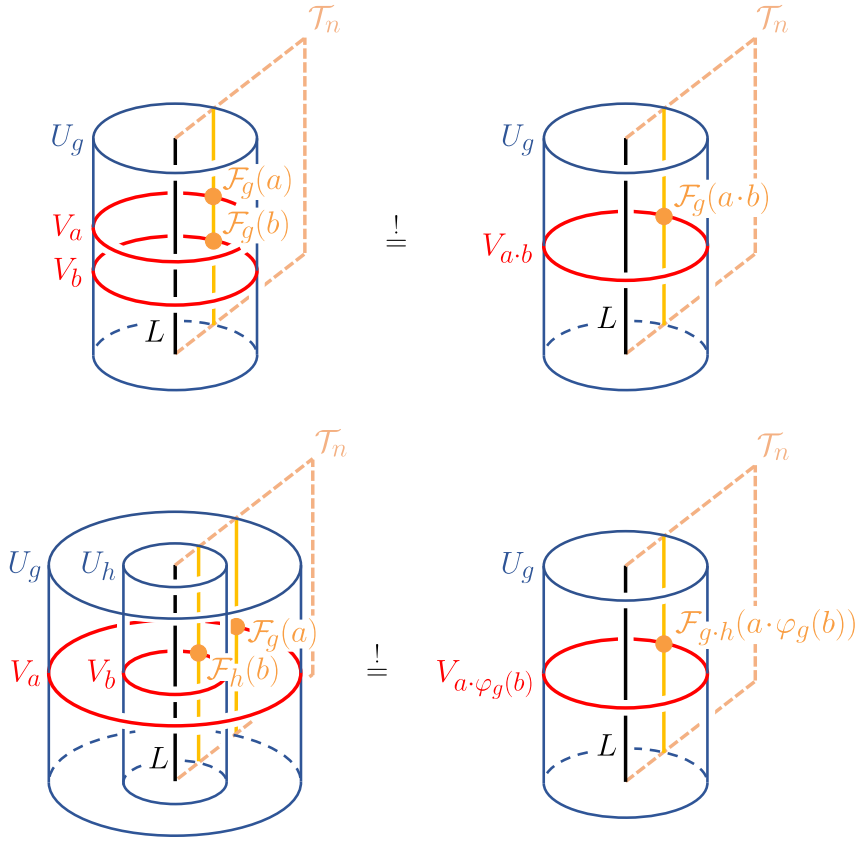


图 38。

^这类 2-函子的集合本身也构成一个 2-范畴 $[\mathcal{G}, 2\mathsf{Vec}]$，它可识别为有限维 2-表示的 2- 范畴 $\mathcal{G}$,

$$[\widehat{\mathcal{G}}, 2\mathsf{Vec}] \;=\; 2\mathsf{Rep}(\mathcal{G})\,. \tag{4.25}$$

等价地，这可以视为 $\mathcal{G}$-等变的带框架完全扩展二维拓扑量子场论的 2-范畴。

这从更抽象的视角重现了这样一个事实：线缺陷在有限 2-群对称性 $\mathcal{G}$的 2-表示中变换。这再次使我们能够将 2-表示的构造从具体的线缺陷中抽象出来，并将其重新表述为二维拓扑量子场论上存在 $\mathcal{G}$-等变结构。已知有限 2-群的不可约 2-表示由小节4.2和4.3中具体的数据分类，详见 [22]，并在附录A.2中作了总结。

4.5 示例

我们用有限 2-群对称性下按 2-表示变换的线缺陷为例，结束本节。我们首先考察规范理论中自然出现的几类线算符，接着讨论由某些类型的混合反常诱导的 2-表示。

4.5.1 规范理论

再次考虑一个具有简单连通规范群$\mathbb{G}$的 D 维纯规范理论。除第 3.5.1 小节讨论的电荷共轭对称性 $G = \mathrm{Out}(\mathbb{G})$ 外，该理论还具有电 1-形式对称性 $A = Z(\mathbb{G})$。它与 G 一起构成一个分裂 2-群 $\mathcal{G} = (G, A, \varphi)$，称为 $\mathbb{G}$ 的自同构 2-群。这里，由 $\varphi_{[f]}(z) = f(z)$ 定义的外自同构 $[f] \in \mathrm{Out}(\mathbb{G})$ 在中心群元素 $z \in Z(\mathbb{G})$ 上的作用为 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A)$。

我们考察 $\mathcal{G}$ 在威尔逊线 $W_R(\gamma)$ 上的作用，这些威尔逊线由 R 的一个表示$\mathbb{G}$标记。如第3.5.1节所述，外自同构 $[f] \in G$ 通过以下方式作用：

$$[f] \triangleright W_R(\gamma) \;=\; W_{R\circ f^{-1}}(\gamma)\,, \tag{4.26}$$

并在 G 上诱导出 σ 的置换作用，作用于 $\mathbb{G}$的不可约表示同构类集合。

此外，中心元素 $z \in A$ 现在通过以下方式作用：

$$z \triangleright W_R(\gamma) \;=\; \chi_R(z)\cdot W_R(\gamma)\,, \tag{4.27}$$

其中，$\chi_R \in A^\vee$ 是与不可约表示 R相关联的中心特征标。中心特征标与置换作用 σ 相容，即

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma_{[f]}(R)}(z) \;&=\; \frac{1}{\dim(\sigma_{[f]}(R))}\cdot \mathrm{Tr}\big[\,\sigma_{[f]}(R)(z)\,\big] \\ &=\; \frac{1}{\dim(R)}\cdot \mathrm{Tr}\big[\,(R\circ f^{-1})(z)\,\big] \;=\; \chi_R\big(\,\varphi_{[f]^{-1}}(z)\,\big) \end{aligned} \tag{4.28}$$

对所有外自同构 $[f] \in G$ 和中心元素 $z \in A$，均有。

因此，中心特征标与置换作用共同定义了自同构分裂 2-群在威尔逊线集合上的一个 2-表示。下面来看几个具体例子：

- 考虑 $\mathbb{G} = SU(N)$，其中 $N > 2$使得 $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2 =: \langle c\rangle$ 且 $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_N =: \langle z\rangle$。我们用 $\Lambda^k(\mathbf{N})$ 表示基本表示的第 k 次反对称幂，电荷共轭作用于该表示时满足 $c\triangleright\Lambda^k(\mathbf{N}) = \Lambda^{N-k}(\mathbf{N})$，其中 $k = 1, \ldots N$（注意，$\Lambda^{N-1}(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$）。相应的中心特征标为

$$\chi_{\Lambda^k(\mathbf{N})}(z) \;=\; e^{\frac{2\pi i k}{N}}\,, \tag{4.29}$$

  它们与 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{Z}_N$ 上的作用相容，该作用由 $c \triangleright z = z^{-1}$给出。因此，威尔逊线 $W_{\Lambda^k(\mathbf{N})}$ 和 $W_{\Lambda^{N-k}(\mathbf{N})}$ 变换为一个二维不可约 2-表示，其标签为 $\mathbb{Z}_2$ 的平凡子群和 $\mathbb{Z}_N^\vee \cong \mathbb{Z}_N$的生成元的 k 次幂。例外情况是 N 为偶数且 $k = \frac{N}{2}$，此时 $W_{\Lambda^{N/2}(\mathbf{N})}$变换为一个一维不可约 2-表示，其标签为完整的 0-形式群 $\mathbb{Z}_2$ 以及不变特征标 $\chi_{\Lambda^{N/2}(\mathbf{N})}(z) = -1$。

- 考虑满足 $N > 4$ 的 $\mathbb{G} = \mathrm{Spin}(2N)$，其中 $\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2 =: \langle c\rangle$。电荷共轭$c$ 会交换 $\mathrm{Spin}(2N)$ $S^\pm$ 的旋量表示与共轭旋量表示。相关的中心特征标取决于 N 是偶数还是奇数：

◦ 如果 N 是偶数，则 $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =: \langle z_1, z_2 \rangle$ 且与两个旋量表示相关的中心特征标为

$$\begin{matrix} \chi_{S^+}(z_1) = 1 \\ \chi_{S^+}(z_2) = -1 \end{matrix} \quad \text{and} \quad \begin{matrix} \chi_{S^-}(z_1) = -1 \\ \chi_{S^-}(z_2) = 1 \end{matrix} . \tag{4.30}$$

这些与 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 上的作用相容，该作用由 $c \triangleright z_1 = z_2$给出。因此，威尔逊线 $W_{S^\pm}$ 按二维不可约 2-表示变换，其标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的平凡子群以及 $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^\vee \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$第二因子的生成元。

◦ 若 N 为奇数，则 $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_4 =: \langle z \rangle$ ，与两个旋量表示相关联的中心特征标为

$$\chi_{S^+}(z) = i \qquad \text{and} \qquad \chi_{S^-}(z) = -i \, . \tag{4.31}$$

这些与 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{Z}_4$ 上的作用相容，该作用由 $c \triangleright z = z^3$给出。因此，威尔逊线 $W_{S^\pm}$ 按二维不可约 2-表示变换，其标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的平凡子群以及 $\mathbb{Z}_4^\vee \cong \mathbb{Z}_4$的生成元。

• 若 $\mathbb{G} =$ 为 Spin(8)，电荷共轭会增强为非阿贝尔对称群

$$\mathrm{Out}(\mathbb{G}) = S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 =: \langle r, c \rangle \, , \tag{4.32}$$

它将 $S^\pm$ 与向量表示 V 按（3.71）中的方式置换。与 $Z(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =: \langle z_1, z_2 \rangle$ 相关联的中心特征标为

$$\begin{matrix} \chi_{S^+}(z_1) = 1 \\ \chi_{S^+}(z_2) = -1 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \chi_{S^-}(z_1) = -1 \\ \chi_{S^-}(z_2) = 1 \end{matrix} \quad \text{and} \quad \begin{matrix} \chi_V(z_1) = -1 \\ \chi_V(z_2) = -1 \end{matrix} . \tag{4.33}$$

这些与 S_3 在 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 上的作用相容，其作用为

$$r \triangleright z_1 = z_1 \cdot z_2 \, , \qquad r \triangleright z_2 = z_1 \, , \qquad c \triangleright z_1 = z_2 \, . \tag{4.34}$$

因此，威尔逊线 $W_{S^\pm}$, W_V 在三维不可约 2-表示中变换，该表示由 $\mathbb{Z}_2$子群 $\langle rc \rangle \subset S_3$ 和与 $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^\vee \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$的第二因子生成元相对应的 $\langle rc \rangle$-不变特征标记。

4.5.2 U(1)带电物质规范理论

现在考虑一个 $\mathbb{G} = U(1)$ 规范理论，其中含有两个带电复标量场 Φ_1 和 Φ_2，它们的电荷均为 $q = 2$。若忽略电荷共轭和磁性 $U(1)$ 0-形式对称性，我们便可以聚焦于该理论所具有的分裂 2-群对称性 $\mathcal{G} = (SO(3) \ \mathbb{Z}_2, \ 1, \ w_3)$。

特别是，$SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 是该理论的味对称性，其中$\mathbb{Z}_2$ 商由对角全局变换 $\Phi_I \to -\Phi_I$给出，它可以通过规范变换 $e^{i\pi/q} \in U(1)$重新吸收。相反，1-形式分量由标准的中心 $Z(\mathbb{G}) = U(1)$ 1-形式对称性给出，该对称性由 Gukov-Witten

缺陷 $Y_{[g]}(\gamma)$ 破缺为 $\mathbb{Z}_q$，这对应于在带电物质存在时仍然是拓扑的缺陷。由于味对称性对这些 Gukov- Witten 算符的作用是平凡的，2-群必定是分裂的。然而， $\mathcal{G}$ 由非平凡的 Postnikov 类 $w_3 = \mathrm{Sq}^1(w_2) \in H^3(BSO(3), \mathbb{Z}_2)$。来刻画。为说明这一点，我们可以开启 $SO(3)$ 的一个非平凡背景，但它无法提升为 $SU(2)$ 的合法背景，即对应于一个非平凡的 Stiefel-Whitney 类 $w_2 \in H^2(BSO(3), \mathbb{Z}_2)$。注意，此时存在一个规范变换 $\mathbb{Z}_4 \subset U(1)$ 子群，它满足

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1, \tag{4.35}$$

其中，第一个 $\mathbb{Z}_2$ 子群描述的是对局域场 Φ_I作用平凡、但对威尔逊线作用非平凡的规范变换。由此得到的 $\pi(\mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2$ 对应的则是影响 0-形式对称性结构的商，即 $SO(3) \cong SU(2)/\pi(\mathbb{Z}_4)$。由 (4.35) 可知，关联的 Bockstein 同态 $\mathrm{Bock}: H^*(-, \mathbb{Z}_2) \to H^{*+1}(-, \mathbb{Z}_2)$ 如何诱导出非平凡的 Postnikov 类 $\mathrm{Bock}(w_2) \equiv \mathrm{Sq}^1(w_2) = w_3$，这是一个标准结论。

因此，我们预期延展算符在 $\mathcal{G}$ 的 2-表示下变换，特别是威尔逊线 $W_n(\gamma)$，它们各自都必须给出唯一的不可约 2-表示 $\mathcal{R}_n$，因为味对称性对它们的作用是平凡的。虽然我们没有给出连续 2-群的 2-表示的完整分类，但可以将研究范围限定为关于离散 2-子群 $\mathcal{K} \overset{\kappa}{\hookrightarrow} \mathcal{G}$ 的拉回 $\mathcal{F}_n = \kappa^* \mathcal{R}_n$。特别地，我们关注 $\mathcal{K} = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_q, \mathbf{1}, \kappa^* w_3)$ 这一情形。

我们先来计算 $\kappa^* w_3$。由于 Bockstein 映射是一种自然的上同调运算，因此可得

$$\kappa^* \mathrm{Sq}^1(w_2) = \mathrm{Sq}^1(\kappa^* w_2)\,, \tag{4.36}$$

其中， $\kappa^* w_2$ 是定义 $SU(2)$ 中 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 被 $\mathbb{Z}_2$ 扩张的特征类。换言之， $\kappa^* w_2$ 是使下图交换的特征类

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & SU(2) & \longrightarrow & SO(3) & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \kappa} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Q}_8 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1, \end{array} \tag{4.37}$$

其中， $\mathbb{Q}_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}\ \pm \mathbf{j}\ \pm \mathbf{k}\}$ 是四元数群。我们也可以将 $\kappa^* w_2 \equiv w_2(\rho)$ 解释为与 $SO(3)$ 中 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 的三维表示 $\rho = \rho_{1,0} \oplus \rho_{1,1} \oplus \rho_{0,1}$ 相关联的特征类，其中 $\rho_{n,m}$ 表示荷 (n, m) 的表示。于是很容易得到

$$w_2(\rho) = w_1(\rho_{1,0}) \cup w_1(\rho_{1,1}) + w_1(\rho_{1,1}) \cup w_1(\rho_{0,1}) + w_1(\rho_{1,0}) \cup w_1(\rho_{0,1}) \tag{4.38}$$

是非平凡的，其中 $w_1(\rho_{n,m}) = \det(\rho_{n,m})$。此外，可得

$$\mathrm{Sq}^1(w_2(\rho)) = w_3(\rho) = w_1(\rho_{1,0}) \cup w_1(\rho_{1,1}) \cup w_1(\rho_{0,1}) \tag{4.39}$$

描述了 $H^3(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ 的非平凡生成元。

为了确定表示 $\mathcal{F}_n$，我们可以先注意到，将威尔逊线与不同的荷重叠，比如 n 和 m，我们必定有

$$\mathcal{F}_{n+m} = \mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_m. \tag{4.40}$$

用于分类 $\mathcal{F}_n$ 的第一项数据是 χ_n ： $\mathbb{Z}_2 \to U$（1），它描述了 W_n（γ）与 $\mathbb{Z}_2$-生成的 Gukov-Witten 缺陷之间的链接相位。根据（4.27）， χ_n 就是 W_n（γ）所携带的表示在子群$\mathbb{Z}_2 \subset U$（1）上的限制所得的特征标。注意，这也与（4.40）一致，因为 $\chi_n = \chi_1^n$。接下来要确定的第二项数据 $\mathcal{F}_n$ 是一个上链 $c_n \in C^2$（$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$， U（1））， 满足

$$dc_n = \langle \chi_n, w_3(\rho) \rangle, \tag{4.41}$$

其中，由于（4.40），我们仍必须有 $c_n = c_1^n$。特别地， c_n （4.41）在 n 为偶数时的解对应于 H^2（$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$， U（1））$\cong \mathbb{Z}_2$中的上同调类；而在 n 为奇数时，只定义了其上的一个挠子。

我们可以先分析 $n = 2$ 的情形，其物理意义更为直观。由于 $W_2(\gamma)$ 可以在局域算符 Φ_I 上终止， c_2 可解释为决定味子子群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 在这些算符上射影作用的 2-上循环。事实上，除一个由扩张 (4.37) 决定、且等价地由 $w_2(\rho) \in H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ 标识的 $\mathbb{Z}_2$ 相位外，这确实是射影作用。将 $\mathbb{Z}_2$ 视为 $U(1)$ 的子群，并通过嵌入 $s: \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow U(1)$，我们可以验证 $w_2(\rho)$ 被映射到非平凡的生成上同调类[6]

$$s_* w_2(\rho) = s_* \left(w_1(\rho_{1,0}) \cup w_1(\rho_{0,1}) \right) = x_1 \cup x_2 \in H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1)). \tag{4.42}$$

基于这一论证，我们可以确定

$$c_2 = x_1 \cup x_2. \tag{4.43}$$

这确定了偶电荷的任意 $W_{2n}(\gamma)$ 的 2-表示 $\mathcal{F}_{2n}$ $\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_2$例如。相应地， $c_4 = c_2^2$ 描述了一个平凡的上同调类，这与以下事实一致： $W_4(\gamma)$ 可以结束于 Φ_I 的二次多项式，从而 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 不再是射影的。最后，奇荷威尔逊线对应的 2-表示由以下两个可能的解得出：$c_{1,\ 3}$ 的

$$dc_{1,3} = s_* w_3(\rho), \tag{4.44}$$

取值于 $H^3(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1))$，并对应于与 $W_{1,3}(\gamma)$ 相关联的上链。同样，它们相差非平凡类 $c_2 = x_1 \cup x_2 \in H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1))$，表示约束 $c_3 = c_1 \cdot c_2$。注意，在 $H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, U(1))$ 上定义扭结的解 $c_{1,3}$，直接源于这些威尔逊线无法终止于任何局域算符上这一事实。

[6]这里， $x_i = s_* w_1(\rho_{i \text{ 模 } 2,\ i+1 \text{ 模 } 2})$ 对于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 中的两个 $\mathbb{Z}_2$ 因子，分别表示 $H^1(\mathbb{Z}_2,\ U(1))$ 的非平凡生成元。因此，用群上同调表示，$(x_1 \cup x_2)(n,\ m) := \exp(i\pi n_1 m_2)$，其中 n_i， m_i 表示 i 无穷小的 $\mathbb{Z}_2$ 分量 n，$m \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。

4.5.3 反常的 2-群对称性

考虑一个具有有限 2-群对称性 $D = 3$ 的理论 $\mathcal{G} = (G, A, \varphi, \alpha)$。关于 2-群的 't Hooft 反常已在 [5]中得到研究。

其 1-形式对称性 A 可能具有由群[7]分类的 't Hooft 反常

$$H^4(B^2A, U(1)) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma(A), U(1)), \tag{4.45}$$

其元素可视为二次函数 $\theta : A \to U(1)$。物理上，这些函数刻画了 1-形式对称性的拓扑自旋，具体而言，将一条线 $a \in A$旋转 360° 会产生相位 $\theta(a) \in U(1)$，如图39所示。由于图中所有



图 39。

构型都可以在任意曲面 $g \in G$ 上移动而不产生额外相位，因此二次函数 θ 必须是 G-不变的，具体而言：

$$\theta(\varphi_g(a)) \overset{!}{=} \theta(a) \tag{4.46}$$

对所有 $g \in G$ 和 $a \in A$均成立，其中 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A)$ 表示 0-形式对称性 G 对 1-形式对称性 A的缠绕作用。

由于拓扑自旋 θ，交叉两个 1-形式对称性缺陷a，$b \in A$ 会产生一个相位

$$\langle a, b\rangle_\theta = \frac{\theta(a \cdot b)}{\theta(a) \cdot \theta(b)} \in U(1) \tag{4.47}$$

如图 40左侧所示。这会诱导出一个对称双线性形式



图 40。

$\langle ., .\rangle_\theta$：$A \times A \to U(1)$，由于 G-不变性，θ它也具有 G-不变性。等价地，我们可以将 $\langle ., .\rangle_\theta$视为一组特征标 $\chi_b := \langle ., b\rangle_\theta \in A^\vee$ 以群元素 $b \in A$ 为索引，用来刻画由线 b 对 $a \in A$ 的链接，如图 40右侧所示。于是，G-不变性 $\langle ., .\rangle_\theta$ 转化为以下条件

$$\chi_{\varphi_g^{-1}(b)}(a) = \chi_b(\varphi_g(a)). \tag{4.48}$$

此外，G 与 A 之间可能存在混合反常，它反映了将 1-形式缺陷 $b \in A$ 移过两个 0-形式缺陷 g的 $h \in G$ 结点时，可能会产生非平凡相位 $c_b(g, h) \in U(1)$，如图41所示。这些

[7]这里，我们用 B^2A 表示 1-形式对称性 A 的分类空间（它是类型为 $K(A, 2)$ 的 Eilenberg–MacLane空间），并用 $\Gamma(A)$ 表示 A的泛二次群。

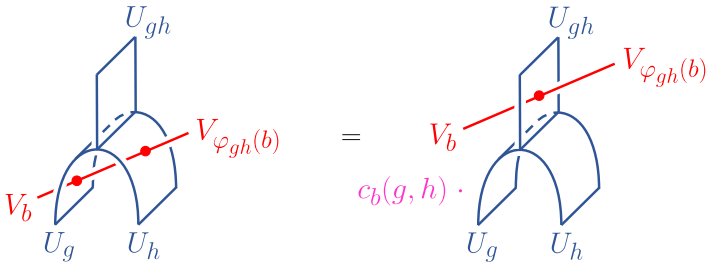


图 41.

相位可视为一个映射

$$c\colon\ G\times G\ \to\ A^\vee\,, \tag{4.49}$$

为了与三个 0-形式缺陷的融合 $g,h,k\in G$ 相容，它需要满足条件

$$(d_{\varphi^\vee}c)(g,h,k)\ \overset{!}{=}\ \langle\alpha(g,h,k),\,.\,\rangle_\theta\ . \tag{4.50}$$

这里，$\varphi^\vee$ 表示 φ 的庞特里亚金对偶作用，而 $\alpha\in Z^3_\varphi(G,A)$ 是 2-群 $\mathcal{G}$的 Postnikov 类的代表。等价地，我们可以将 c 视为一个映射

$$c\colon\ G\times G\ \to\ U(1)^A \tag{4.51}$$

满足相容条件

$$(d_\varphi c)_b(g,h,k)\ \overset{!}{=}\ \chi_b(\alpha(g,h,k))\,. \tag{4.52}$$

总之，三元组（φ,c,χ）连同相容条件（4.48）和（4.52）定义了的一个 2-表示，用于描述如何作用于其自身 1-形式对称性线集合。相关的 2-表示数据由的 't Hooft 反常诱导。反过来，如果 1-形式对称性在 2-群的非平凡 2-表示下变换，则表明存在 't Hooft 反常。

5 曲面与 3-表示

在本节中，我们研究曲面缺陷如何在有限对称群 G 的 3-表示中变换。由于三维拓扑量子场论的领域比一维和二维情形丰富得多，我们将揭示一些在 1-表示和 2-表示情形中不存在的新特征。由于关于 3-表示的数学文献还不够完善，我们的论述将不那么系统。不过，我们将联系开创性工作 [28], ，该工作将作为 G 的一维 3-表示出现。

我们再次从一种初等方法出发，利用拓扑缺陷的性质来构造 3-表示的数据，然后以一种揭示 3-表示诱导这一数学概念的方式重新表述它。接着，我们在更具范畴论语境的框架下重新表述这个问题，从而体现 3-表示的抽象定义。

5.1 预备知识

我们将考虑支撑在定向曲面上的曲面缺陷 Σ，Σ'，.....它们沿着 D维欧几里得时空中的一对公共坐标轴排列 $\mathbb{R}^D$。如图42左侧所示，我们将这些坐标轴画成竖直和水平的。

给定一个曲面缺陷 S，我们可以将其共轭曲面 S^* 定义为

$$S^*(\Sigma) \;:=\; S(\Sigma^*)\,, \tag{5.1}$$

其中 Σ^* 是 Σ 的方向反转，如图10右侧所示。除非另有说明，我们通常会在图中省略方向。

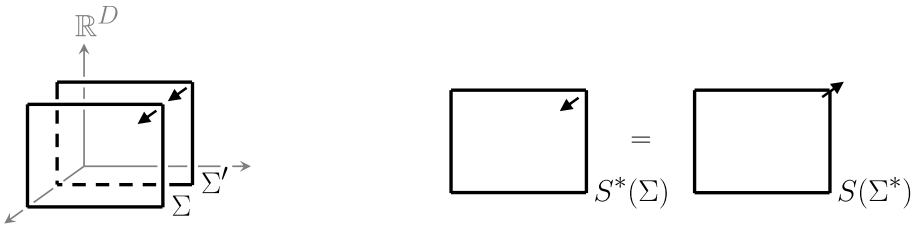


图 42。

曲面缺陷 $S(\Sigma)$ 可能承载拓扑线缺陷和结点，如图43示意所示。我们假定它们由一个多重融合范畴C_S描述。因此，它可以分解为直和

$$\mathsf{C}_S \;=\; \mathsf{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{C}_n \tag{5.2}$$

对于某些不可分解多重融合范畴的集合 C_1、...、C_n。这促使我们引入简单线缺陷和约化线缺陷:

- 若 C_S 是不可分解的多融合范畴，则曲面缺陷 S 是简单的 。若曲面缺陷 S 不是简单的，则它可分解为

$$S \;=\; S_1 \oplus \cdots \oplus S_s \tag{5.3}$$

  由简单表面缺陷构成，且 $\mathsf{C}^{S_j} \;=\; \mathsf{C}_j$ 不可分解。因此，下文我们将讨论范围限定为简单表面缺陷。

- 若 C_S 是融合范畴，则简单曲面缺陷 S 是约化的 。简单曲面缺陷 S' 总是存在一个与约化简单曲面 S 相连的拓扑界面，这反映了任意不可分解的多融合范畴都与某个融合范畴 [41] 莫里塔等价这一事实。

在下文中，我们假设曲面缺陷是简单且约化的。

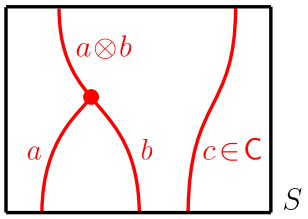


图43。

5.2 初等视角

让我们再次考虑一个具有有限群对称性 G 的 D 维量子场论，该对称性由余维一拓扑缺陷 U_g (Σ_{D-1}) 实现，其中 $g \in G$。我们将定义元素 $g \in G$ 对支撑在曲面 Σ 上的曲面算符 S 的作用：

$$g \triangleright S(\Sigma) \;:=\; U_g(W_\Sigma^{D-1})\, S(\Sigma)\,, \tag{5.4}$$

其中 $W_\Sigma^{D-1} = \mathbb{R}^2 \times S_\Sigma^{D-3}$ 表示一个小夹层，它将曲面 Σ 楔入，如图 44所示。

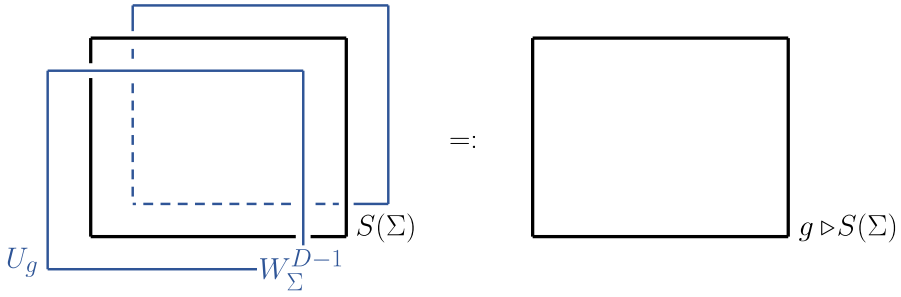


图44。

借助前几节的结果，我们预计这一作用可由群 G 的 3-表示来描述。然而，由于由 S 支撑的拓扑线可能构成一个非平凡的融合范畴 C，后者预计会比 1- 表示或 2- 表示丰富得多。它们可能以非平凡的方式与 G 在 S 上的作用相互作用，因此，与 G 的 1-表示和 2-表示相比，3-表示会更加丰富。

为了将这些新特征与前几节的结果区分开来，我们将分析分为两种情况：第一种情况下，我们假设曲面算符S 不支持任何非平凡的拓扑线。这将得到一种 3-表示的分类，类似于线算符的 2-表示分类。第二种情况下，我们考虑一个保留 G 、但支持由融合范畴 C 描述的非平凡拓扑线的曲面算符 S 。这将通过新型数据对 3-表示进行分类。

5.2.1 情形1：平凡线

首先，我们考虑不支持任何非平凡拓扑线缺陷的曲面算符 S 。由 Σ支撑的这类曲面算符 $S(\Sigma)$ 构成一个离散集合，其基数通常是无限的。不过，我们可以通过固定 $S(\Sigma) \neq 0$ 为非零，将研究范围限制在有限子集 $\mathcal{S}$ 上，并定义

$$\mathcal{S} := \{ g \triangleright S(\Sigma) \mid g \in G \}, \tag{5.5}$$

由于 G 的有限性，这是一个有限集合。因此，我们可以用有限个索引标记其元素$S_i(\Sigma)$，$i = 1, \ldots\ldots, n$，从而建立一个双射 $\mathcal{S} \cong \{1, ..., n\}$。于是，作用（5.4）可视为由置换 $\sigma_g \in S_n$ 实现，使得

$$g \triangleright S_i(\Sigma) = S_{\sigma_g(i)}(\Sigma). \tag{5.6}$$

特别地，与体相中对称性缺陷融合的相容性要求这些置换满足

$$\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{g \cdot h}, \tag{5.7}$$

so that $\sigma : G \to S_n$ 在 n 个元素组成的集合上定义了 G 的传递置换作用 s.

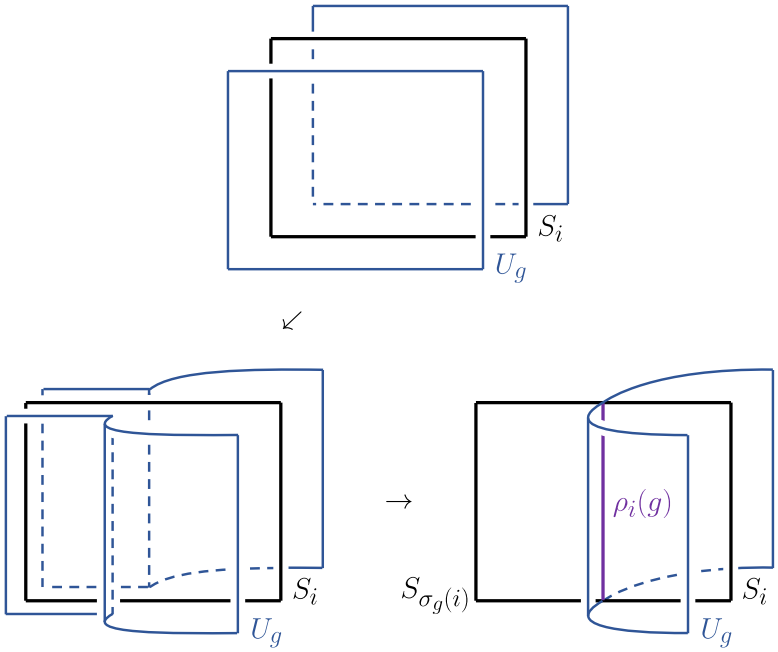


图 45。

接下来，我们考虑图45所示的拓扑操作序列。该序列表明，余维一缺陷 $g \in G$ 与每个曲面 S_i 相交于唯一的拓扑线界面 $\rho_i(g)$，并将其连接到变换后的曲面 $S_{\sigma_g(i)}$。此外，两个对称性缺陷 $g, h \in G$ 在体相中的融合与每个曲面 S_i 相交于唯一的拓扑点状结点 $\kappa_i(g, h)$，如图 46所示。然而，这些结点

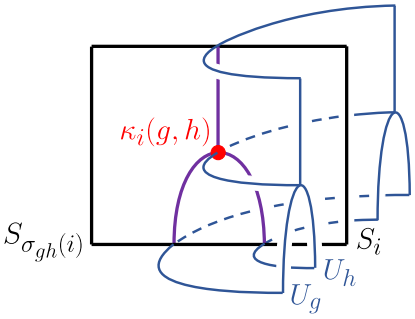


图 46。

可能只以射影方式满足 G 的群律，其含义是[8]

$$\begin{aligned} & \kappa_i(gh,k) \circ \left[\kappa_{\sigma_k(i)}(g,h) \star \mathrm{Id}_{\rho_i(k)}\right] \\ = \ \mu_{\sigma_{ghk}(i)}(g,h,k) \ \cdot \ & \kappa_i(g,hk) \circ \left[\mathrm{Id}_{\rho_{\sigma_{hk}(i)}(g)} \star \kappa_i(h,k)\right] \end{aligned} \tag{5.8}$$

对于某个乘法相位 $\mu_i(g,\ h,\ k) \in U(1)$。物理上，这意味着，以图 47 所示的乘法相位为差异，曲面 S_i 与三个对称性缺陷 $g,\ h,\ k \in G$ 的融合相交的两种可能方式是等价的，如图 47所示。

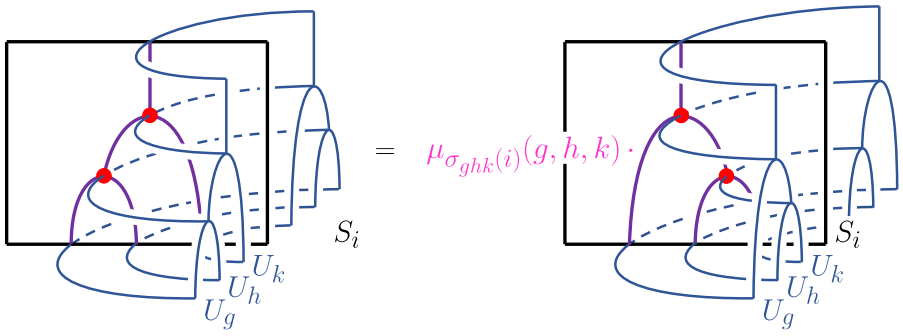


图 47。

相位集合 $\mu_i(g,\ h,\ k) \in U(1)$ 可以视为一个映射

$$\mu:\ G\times G\times G \ \to \ U(1)^n\,, \tag{5.9}$$

为了与四个对称性缺陷 $g,\ h,\ k,\ l \in G$ 的融合相容，它需要构成一个扭曲 3-余循环 $\mu \in Z^3_\sigma(G,\ U(1)^n)$，其中 $U(1)^n$ 被视为一个通过置换作用 σ构成的 G-模。

总之，我们可以用由以下部分组成的数对 $(\sigma,\ \mu)$ 来标记对称群 G 在真正的曲面算符 $S_i \in \mathcal{S} \cong \{1,...,n\}$ 上的作用：

1. 置换作用 $\sigma:\ G \to S_n$,

[8] 在此，我们分别用 $\circ$ 和 $\star$ 表示结点 $\kappa_i(g,\ h)$ 的垂直复合和水平复合。 ly.

2. 一个扭曲 3-余循环 $\mu \in Z^3_\sigma(G,\ U(1)^n)$。

在数学上，这是 of G that 的一种特殊 3-表示，类似于我们在第 ?? 节中遇到的 G we encountered 的 2-表示分类。同样地，与之前类似，如果存在一个置换 $\tau \in S_n$ such that, 则 G are considered equivalent if there exists apermutation (σ, μ) 和 (σ', μ') of G 被视为等价。

$$\sigma' \ = \ \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \qquad \text{and} \qquad [\mu'] \ = \ [\tau \triangleright \mu]\,, \tag{5.10}$$

其中 $[.]:\ Z^3_\sigma(G,\ U(1)^n) \ \to H^3_\sigma(G,\ U(1)^n$表示向扭曲群上同调的投影。关于群的 3-表示，更数学化的处理见附录A.3。

5.2.2 情况 2：非平凡线

其次，考虑一个曲面算符 S，它在G 的夹心作用下保持不变（即 $g \triangleright S = S$ 对所有 $g \in G$ 均成立），但其上承载着由融合范畴C描述的非平凡拓扑线缺陷。描述对称性缺陷 $\rho(g)$ $g \in G$ 与曲面 L 相交的拓扑界面 $a,\ b \in$ C 需要配备相应的规则，以确保缺陷线能够从左侧和右侧一致地终止于其上。这如图48所示。

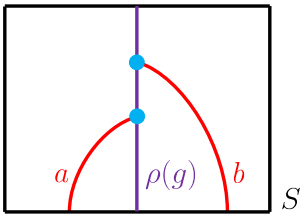


图 48。

从数学上讲，这会将界面 $\rho(g)$ 转化为一个 C-双模。这些 C-双模在指定的双模等价意义下保持 G 的群乘法

$$\kappa(g,h)\ :\ \ \rho(g) \otimes \rho(h) \ \ \to \ \ \rho(gh)\,, \tag{5.11}$$

这尤其意味着，在等价意义下，每个 $\rho(g)$ 都定义了一个可逆 C-双模。因此，我们可以认为 ρ 诱导了一个群同态

$$\rho:\ G \ \to \ \mathrm{BrPic}(\mathsf{C})\,, \tag{5.12}$$

其中 BrPic(C) 表示可逆 C-双模的等价类所构成的*Brauer-Picard* 群 。

为了对与双模等价关系 $\kappa(g,\ h)$ 相关联的数据进行分类，我们令双模 $\rho(g) \otimes \rho(h)$ 和 $\rho(gh)$ 相等，这样 $\kappa(g,\ h)$ 就可以视为可逆对象 $c(g,\ h) \in \mathsf{C}^\times$ 的左作用，即

$$\kappa(g,h) \ = \ c(g,h) \triangleright (.)\,. \tag{5.13}$$

物理上，这意味着当在曲面 S 上将拓扑界面 $\rho(g)$ 与 $\rho(h)$ 融合时，一个可逆线 $c(g,\ h)\ \in$ $\mathsf{C}^{\times}$ 会从它们的结点处延伸出来，如图49所示。此外，这些线需要与移动它们的可能性相容

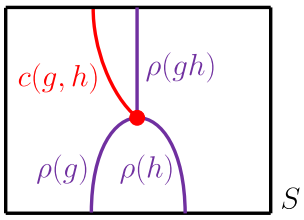


图49。

一条一般线 $a\in\mathsf{C}$ 终止于 $\rho(g)$ 或 $\rho(h)$ 并横跨它们的结点，如图 50所示。这需要额外选择一个交叉态射

$$\tau_{g,h}(a)\ :\ \ a\otimes c(g,h)\ \ \to\ \ c(g,h)\otimes a \tag{5.14}$$

它描述线 a 如何与从 $c(g,h)$ 和 $\rho(g)$ 的结点发出的线相交，如图50所示。

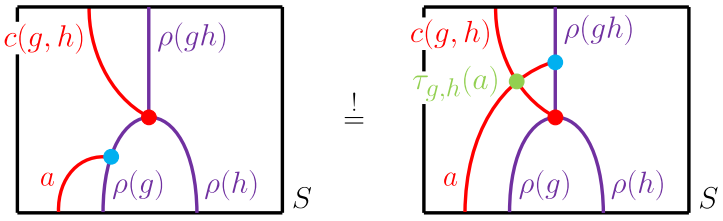


图50。

数学上，线 $c(g,h)$ 与交叉态射集合 $\{\tau_{g,h}(a)\}_{a\in\mathsf{C}}$ 共同定义了 Drinfeld中心 Z(C) 中的一个可逆对象，因此双模等价集合 $\kappa(g,h)$ 可视为诱导出一个映射

$$\kappa:\ G\times G\ \to\ \mathsf{Z}(\mathsf{C})^{\times}\,, \tag{5.15}$$

其中，$\mathsf{Z}(\mathsf{C})^{\times}$ 表示 Z(C) 中可逆对象同构类构成的阿贝尔群。与三个对称性缺陷融合的相容性要求此映射定义一个 2-余循环 $\kappa\in Z^2(G,\mathsf{Z}(\mathsf{C})^{\times})$。

更具体地说，体相中三个对称性缺陷 $g,h,k\in G$的融合相容性由自然同构实现

$$\mu(g,h,k)\ :\ \ \kappa(gh,k)\circ\left[\kappa(g,h)\otimes\mathrm{Id}_{\rho(k)}\right]\ \ \Rightarrow\ \ \kappa(g,hk)\circ\left[\mathrm{Id}_{\rho(g)}\otimes\kappa(h,k)\right], \tag{5.16}$$

我们取其形式为乘以一个相位 $\mu(g,\ h,\ k)\ \in U(1)$，如前所述。随后，体相中四个对称性缺陷的融合所要求的相容性意味着，这些相位构成的集合必须定义一个 3-余循环 $\mu\in Z^3(G,\ U(1))$。

总之，对称群 G 在承载融合范畴 C 的曲面算符 S 上的作用，可以用三元组 (ρ, κ, μ) 来描述，其中包括

1. 一个群同态 $\rho: G \to$BrPic(C)，2. 一个 2-余循环 $\kappa \in Z^2(G, \mathrm{Z(C)}^\times)$，3. 一个 3-余循环 $\mu \in Z^3(G, U(1))$。

从数学上看，这是 G 在融合范畴 C 上的一维 3-表示的一个特例。我们将在下一小节讨论 G 的更一般的 3-表示。

5.3 诱导视角

到目前为止，我们讨论了群 G 的 3-表示的两种特殊情形：一方面，我们讨论了作用于一组曲面算符上的 3-表示，这些算符仅支持平凡的拓扑线缺陷。另一方面，我们讨论了作用于单个曲面算符上的 3-表示，该算符支持由融合范畴 C 描述的非平凡线缺陷。一般的 G 的 3-表示将是上述两种情形的结合，也就是说，它可能包含一组曲面算符 S_i，其中每个算符都支持由融合范畴 C_i刻画的非平凡拓扑线。

融合范畴 C_i 可以组合成一个多融合范畴[9]

$$\mathsf{B} \;:=\; \mathsf{C}_1 \,\oplus\, \ldots \,\oplus\, \mathsf{C}_n\,. \tag{5.17}$$

随后，可以通过研究曲面 S_i 与体相中的对称性缺陷 $g \in G$ 相交所产生的拓扑界面，构造 G 的一个一般3-表示。然而，与不可约2-表示的情形类似，相关数据可以归约为子群 H 的一个一维3-表示的数据，其中 H 是 G的子群。具体而言，令 H 为 G 中在夹心作用下保持曲面算符 $S := S_1$ 不变的子群，即

$$H \;:=\; \{\, g \in G \mid g \triangleright S \;=\; S \,\} \;\subset\; G\,. \tag{5.18}$$

重复第5.2.2小节中的分析后，H 在曲面 S上的作用便可由融合范畴 $\mathsf{C} := \mathsf{C}_1$上的一个一维3-表示（$\rho, \kappa, \mu$）来描述。整个群 G 在曲面算符集合 S_i上的作用，可以由此数据重构为 3-表示（ρ, κ, μ）从 H到 G的诱导 $\mathrm{Ind}_H^G(\rho, \kappa, \mu)$。

总之，G 的不可约 3-表示由四元组 (H, ρ, κ, μ) 标记，四元组由以下元素组成：

1. 一个子群 $H \subset G$,

[9] 这里，前缀“多”描述的是这样一个事实：B 的幺半单位由各分量 C_i 的幺半单位的直和 $\bigoplus_i \mathbf{1}_i$ 给出，因此它不是 B 中的简单对象。

2. 一个群同态 ρ：$H \to$BrPic(C), 3. 一个 2-余循环 $\kappa \in Z^2(H,$ Z(C)$^\times)$, 4. 一个 3-余循环 $\mu \in Z^3(H,$ $U(1))$.

这包括通过选择 G 而得到的 3-表示，相关讨论见小节 5.2.1 ；以及通过选择 C $=$ Vec 而得到的 3-表示，相关讨论见小节 5.2.2 。物理上，子群 $H = G$ 对应于曲面算符上的未破缺对称性 H。这可能形成非平凡的群扩张，并与 S 上可逆线的群产生非平凡的混合 't Hooft 反常；这两者都由类 S刻画$[\kappa]$。此外， H 在 S 上可能存在由 $[\mu]$确定的 't Hooft 反常。

5.4 范畴论视角

与局域算符和线算符类似，将上一小节的讨论改写为更具范畴论的表述会很方便。为此，我们再次将承载融合范畴 S_i 的曲面算符 C$_i$ 视为附加辅助三维拓扑量子场论的有能隙边界条件 $\mathcal{T}_\mathsf{B}$，其中 B 表示多融合范畴B $=$C$_1 \oplus \ldots \oplus$ C$_n$。图 51对此作了说明。

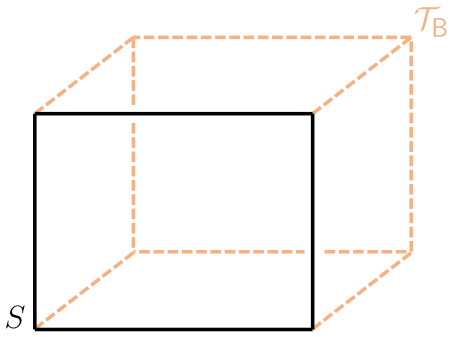


图 51。

带框架的完全延拓三维拓扑量子场论由融合 3-范畴 3Vec 描述，其对象是多重融合范畴，态射是双模范畴。在这一描述中，对象是带有特定有能隙边界条件的三维拓扑量子场论，该边界条件支持拓扑线的多重融合范畴。这与有能隙边界条件和曲面缺陷之间的对应关系相吻合：后者可以支持拓扑线的多重融合范畴。

从内在角度看，三维拓扑量子场论与 3Vec 中对象的等价类一一对应；3Vec 忽略了有能隙边界条件的选择。3Vec 中的等价关系是多重融合范畴的 Morita 等价，而且任意多重融合范畴都 Morita 等价于一个和

$$\mathsf{B} = \mathsf{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{C}_n \tag{5.19}$$

其中 C$_j$ 是融合。

然后，我们建立了如下对应关系：一组由 $i = 1, \ldots, n$ 标记、承载拓扑线融合范畴 $\mathsf{C}^{S_i} = \mathsf{C}^j$ 的简单表面缺陷 $S_i(\Sigma)$，与辅助三维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 的有能隙边界条件相对应（这里稍微滥用了记号，因为这只取决于 B 的 Morita 等价类）。

依照这一思路，我们再次可以方便地将注意力限制在简单线缺陷上，并采用这样一种 3Vec 表述：将等价对象视为相同：

- 对象是三维拓扑量子场论，由其边界条件的 2-范畴 Mod(B) 确定，其中 B 是某个多融合范畴 $= \mathsf{C}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{C}_{n_0}$。
- 1-态射是三维拓扑量子场论之间的拓扑曲面界面，对应于边界条件相应 2-范畴之间的（伪）2-函子 $A : \mathrm{Mod(B)} \to \mathrm{Mod(B')}$。
- 2-态射是拓扑曲面界面之间的类线拓扑界面，对应于边界条件相应 2-范畴的 2-函子之间的（伪）自然变换 Φ: $A \Rightarrow B$ 。
- 其 3-态射是类线拓扑界面之间的拓扑点状结点。因此，它们对应于相应（伪）自然变换之间的修正 $\varphi : \Phi \Rrightarrow \Psi$ 。

对象融合对应于堆叠相关的三维拓扑量子场论。

利用这一图像，对称群 G 对曲面缺陷 S 的作用现在可以转化为附着的拓扑量子场论的 G-等变性 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$。具体而言，考虑将S 嵌入一个由$D-1$标记的小型（ $g \in G$ ）夹层中，如前所述。由于附着了三维拓扑量子场论，现在需要选择一个类曲面的交 $\mathcal{F}(g)$，它位于缺陷 U_g与 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$之间；我们将其视为 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 与其自身之间的拓扑界面，如图52所示。因此，它们自然可以识别为 2-函子

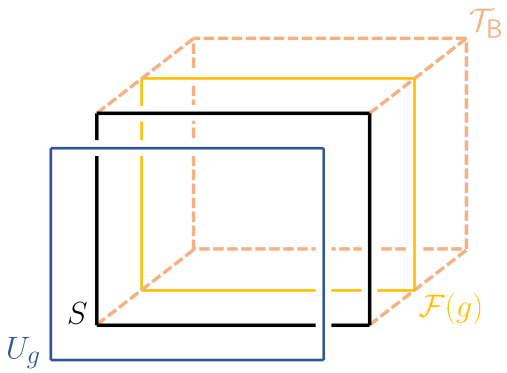


图 52。

$$\mathcal{F}(g) : \mathrm{Mod(B)} \to \mathrm{Mod(B)} \tag{5.20}$$

从 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 的边界条件 2-范畴到其自身的 2-函子，因此对称性缺陷 $g \in G$可以通过以下方式作用于简单边界条件 $S \in$Mod(B)

$$S \;\mapsto\; \mathcal{F}(g)(S)\,. \tag{5.21}$$

物理上，这对应于将由 g 朝向S 形成的（$D-1$）夹层收缩，从而实现 g 对相应曲面算符的作用。

一般而言，这些 2-函子的复合可能由一个非平凡的结合子控制

$$\alpha(g,h,k)\;:\;\;\big[\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(h)\big]\circ\mathcal{F}(k)\;\;\Rightarrow\;\;\mathcal{F}(g)\circ\big[\mathcal{F}(h)\circ\mathcal{F}(k)\big]\,. \tag{5.22}$$

物理上，这意味着当穿过三个曲面界面的融合 $\mathcal{F}(g)$、 $\mathcal{F}(h)$ 和 $\mathcal{F}(k)$ 时，一个可逆拓扑线缺陷 $\alpha(g,\;h,\;k) \in \mathsf{Z}(\mathsf{B})^{\times}$ 在 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 中从它们的结点处延伸出来，如图 53 所示。与四个曲面界面的融合相容性

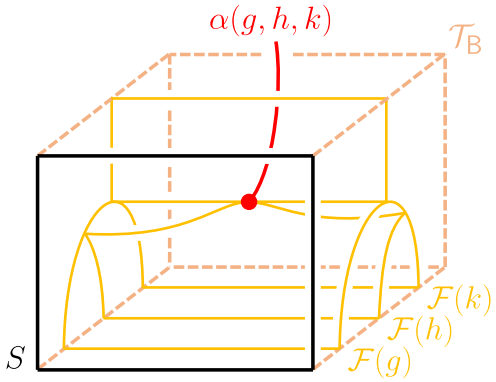


图 53。

随后将这些线的集合约束为一个 3-余循环 $\alpha \in Z^3(G,\,\mathsf{Z}(\mathsf{B})^{\times})$。相关类 $[\alpha] \in H^3(G,\,\mathsf{Z}(\mathsf{B})^{\times})$ 表示函子 $\mathcal{F}(g)$ 的障碍，使其无法定义与体相中对称性缺陷融合相容的一致交点。它可以解释为由交点曲面 $\mathcal{F}(g)$ 和 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 的可逆线构成的非平凡 2-群的 Postnikov 类。

如果 $[\alpha]=1$，我们可以引入自然等价

$$F_{g,h}\;:\;\;\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(h)\;\;\Rightarrow\;\;\mathcal{F}(g\cdot h) \tag{5.23}$$

对应于由 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 与对称性缺陷的融合相交而产生的线状结点 $g,\;\;h \in G$ 如图 54所示的体相中。它们与体相中三个对称性缺陷融合的相容性通过修正来实现。

$$f_{g,h,k}\;:\;\;F_{gh,k}\circ\big[F_{g,h}\star\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(k)}\big]\;\;\Rrightarrow\;\;F_{g,hk}\circ\big[\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(g)}\star F_{h,k}\big]\,, \tag{5.24}$$

它们对应于 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 与 g的融合 h相交时产生的点状结点，$k \in G$ 如图55所示。一般而言，这些结点可能仅以射影方式遵循

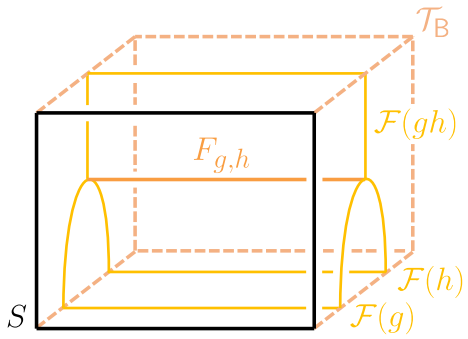


图54.

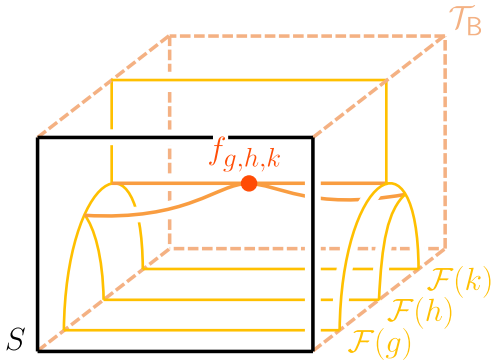


图 55.

的群律，G 即[10] 以两种可能的方式将 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 与四个对称性缺陷 g、h、k、$l \in G$ 融合后再相交，所得结果相差一个乘法相位 $\pi(g,\ h,\ k,\ l) \in U(1)$，如图56所示。这些相位的集合可以视为一个映射

$$\pi:\ G\times G\times G\times G\ \to\ U(1)\,, \tag{5.25}$$

为了与五个对称性缺陷的交点相容，需要构成一个 4-余循环 $\pi \in Z^4(G,U(1))$。相关类 $[\pi] \in H^4(G,U(1))$ 表示修正 $f_{g,h,k}$ 所面临的障碍，即无法定义与体相中对称性缺陷融合相容的一致交点。如果 $[\pi]=1$，则可以对它们进行重整化，使其满足相应的相容条件。

总之，在此框架中，对称群 G 对真正的曲面算符的作用可由以下数据描述：

1. 一个三维拓扑量子场论 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$（3Vec 中的一个对象），

2. 对每个 $g \in G$，一个在 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 与其自身之间的拓扑曲面界面 $\mathcal{F}(g)$（即 3Vec 中 $\mathcal{T}_{\mathsf{B}}$ 的一个 1-自同态），

[10]在这种情况下，三维拓扑量子场论本身应被视为某个四维理论的边界。

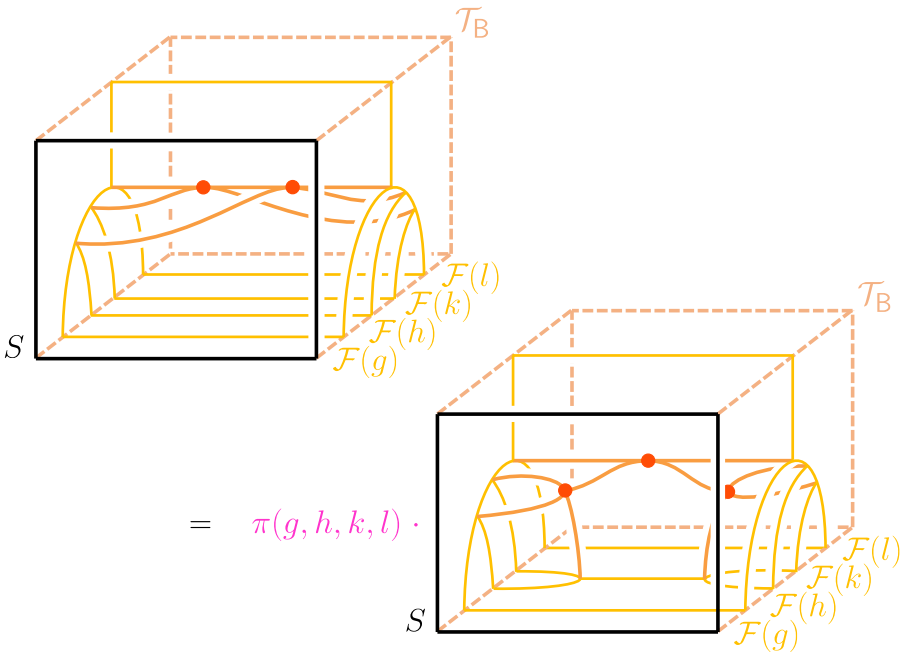


图56。

3. 一个拓扑线状结点$F_{g,\ h}$（一个3Vec中的 2-态射），如（5.23）所示，适用于每一对g, $h \in G$,

4. 一个拓扑点状结点 $f_{g,\ h,\ k}$（一个 3Vec 中的 3-态射），如（5.24）所示，对每个三元组 g, h, $k \in G$。

这些数据及其满足的相容条件，整体上可识别为一个（伪）3-函子的数据

$$\mathcal{F}:\ \widehat{G}\ \to\ \mathsf{3Vec}\,, \tag{5.26}$$

其中，群 G 被视为一个 3-范畴 G，它只有一个对象 $*$，其 1-自同态由 1-End$\widehat{G}(*)\ = G$ 给出，而其 2-态射和 3-态射均为平凡的。所有这类 3-函子构成的整体本身形成一个 3-范畴，其

- 对象是 3-函子 $\mathcal{F}\colon G \to \widehat{\mathsf{3Vec}}$,
- 1-态射是自变换 $\eta\colon\ \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$,
- 2-态射是修正 $\Xi : \eta \Rrightarrow \eta'$,
- 3-态射是扰动 $\mathfrak{X}$: $\Xi \Lleftarrow \Xi'$.

我们将这个范畴记为 $[G, \mathsf{3Vec}]$，并将其认作由 G的有限 3-表示构成的融合 3-范畴,

$$[\widehat{G}, \mathsf{3Vec}]\ =\ \mathsf{3Rep}(G)\,. \tag{5.27}$$

这重现了上一小节的结果：曲面算符按照对称群 G 的 3-表示变换。等价地，这也可以视为 G-等变三维拓扑量子场论的 3-范畴。

致谢

MB 的工作由 EPSRC早期职业研究员奖 EP/T004746/1 和 STFC研究基金 ST/T000708/1 资助。MB 和 AG 的工作由西蒙斯全球范畴对称性合作项目资助。

高阶表示论

在本附录中，我们将从抽象的范畴论视角回顾高阶群的高阶表示论。这将作为本文主体部分的补充；在主体部分中，高阶表示是在具体的物理背景下构造的。

一般而言，我们将把群 n 的线性 n-表示视为一个函子 or

$$F : \widehat{\mathcal{G}} \to \mathsf{nVec} \tag{A.1}$$

$\widehat{\ }$，从 n-群（将其视为一种适当类型的 n-范畴 $\mathcal{G}$ ）到融合 n-范畴nVec （其对象为 n- 向量空间）。对于 $n > 1$，nVec 可能有多种模型，不同模型适用于不同的应用场景 [11]。就我们的目的而言，最自然的选择是递归定义

$$\mathsf{nVec} := \Sigma^n \mathbb{C} \tag{A.2}$$

在 [39], 中引入，其中 $\Sigma\mathsf{C} := \mathsf{Kar}(B\mathsf{C})$ 表示 C 的去环化的 Karoubi完备化。线性 n-表示由 $\mathcal{G}$ 构成一个融合 n-范畴，我们将其记作

$$\mathsf{nRep}(\mathcal{G}) := [\widehat{\mathcal{G}}, \mathsf{nVec}] \,. \tag{A.3}$$

我们将在下文的 $n = 1$、2、3 中具体阐释这一概念。

A.1 1-表示

让我们先在范畴论框架中重新表述普通群的表示理论。为此，我们固定一个有限群 G ，并注意到可以为它关联一个$\widehat{\ }$范畴 G ，定义如下:

- 其对象集只包含一个元素，记作 $*$。
- $*$ 的自同态集定义为

$$\mathrm{End}_{\widehat{G}}(*) = G \tag{A.4}$$

其中的复合运算由 G 中的群乘法给出。

[11]关于 $n = 2$ 情形下模型及其之间关系的总结，请参见 [38]。

这种构造清楚地表明，我们可以将群视为只有一个对象且所有态射都可逆的特殊范畴。

我们希望在有限维复向量空间上对群 G 进行线性表示。后者构成一个融合范畴 Vec，其定义如下：

- 其对象是有限维复向量空间 $V \cong \mathbb{C}^n$。在等价意义下，只有一个简单对象，对应于一维向量空间 $\mathbb{C}$。
- 对象 V 与 W 之间的态射由线性映射给出

$$V \xrightarrow{\varphi} W. \tag{A.5}$$

  态射的复合

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} X \tag{A.6}$$

  由相应线性映射的复合给出。

- 对象与态射的融合

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\varphi}{\nearrow} & W & & \overset{\psi}{\nearrow} & Y \\ V & & \otimes & X & \\ & & \longleftrightarrow & & \end{array} \tag{A.7}$$

  由相应向量空间和线性映射的张量积给出 .

给定要素 G 和 Vec，现在可以直接定义 G 的有限维表示范畴 Rep(G)：

- 其对象是函子 $\mathcal{F}\colon G \to$Vec。具体来说，这意味着 $\mathcal{F}$ 将有限维复向量空间 $V := \mathcal{F}(*) \in$ Vec 指派给 G 中的唯一对象 $*$，并将线性映射 $\mathcal{F}(g) \in \mathrm{End}(V)$ 指派给 $*$ 在 G中的自同态 $g \in G$。$\mathcal{F}$ 的函子性进而确保这些图表

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{F}(gh)} & V \\ & {\scriptstyle \mathcal{F}(h)} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \mathcal{F}(g)} & \\ & V & \end{array} \tag{A.8}$$

  对所有 $g, h \in G$ 可交换，因此 Rep(G) 的对象与通常意义下 G 的普通表示相对应。

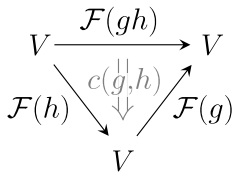
- 其对象 $\mathcal{F}$与 $\mathcal{F}'$之间的态射 η是自然变换 $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$。具体而言，这意味着 η 将线性映射 $\varphi := \eta(*) \in \mathrm{Hom}(V, V')$ 指派给 G 中的单个对象 $*$，使得这些图式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}'(g)} \\ V & \xrightarrow[\varphi]{} & V' \end{array} \tag{A.9}$$

  对所有 $g \in G$交换。Rep(G) 中的态射因此对应于通常意义下表示之间的交织算子。

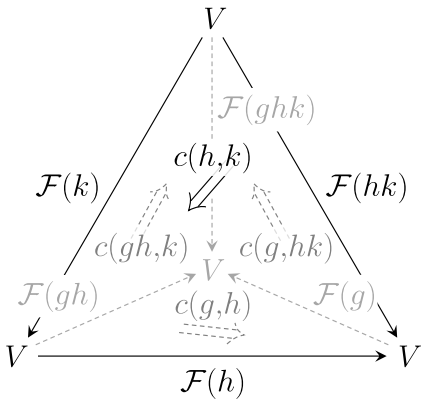
Vec 上的融合结构在 Rep(G)上诱导出融合结构。特别是，这使我们能够按通常意义对表示取直和与张量积。

与之密切相关的是射影表示范畴 G，其中图式（A.8）仅在乘法相位 $c(g,h) \in U(1)$ 下交换。图示上，我们用添加双箭头来表示这一点



(A.10)

到（A.8）中的图式上。这些相位需要与 Vec 中态射复合的结合律相容，具体而言，图式



(A.11)

2-交换，这可以改写为 2-余循环条件

$$(dc)(g,h,k) \;:=\; \frac{c(h,k)\cdot c(g,hk)}{c(gh,k)\cdot c(g,h)} \;\overset{!}{=}\; 1\,. \tag{A.12}$$

因此，这组相位可以视为一个 2-余循环 $c \in Z^2(G, U(1))$。我们将相应的射影表示范畴记作 Rep^c(G)。通过取 $c = 1$，即可得到 G 的普通表示范畴。

A.2 2-表示

下文中，我们将仿照上一节的讨论，定义有限 2-群的 2-表示所构成的融合2-范畴。我们将回顾 2-群和 2-向量空间的概念，并根据初等群论数据给出 2-表示的分类。

A.2.1 2-群

在wh中 接下来，我们将把 2-群 $\mathcal{G}$ 视为由以下四元组 $\mathcal{G} = (G, A, \varphi, \alpha)$ 构成的结构。 of

1. 一个有限群 G,
2. 一个有限阿贝尔群 A,

3. 一个群作用 $\varphi\colon\ G \to \mathrm{Aut}(A)$,

4. 一个 Postnikov 类代表元 $\alpha \in Z^3_\varphi(G, A)$。

与普通群的情形类似，我们可以为 $\mathcal{G}$ 关联一个相应的 2-$\widehat{}$范畴 $\mathcal{G}$，其定义如下：

- 它的对象集合只包含一个元素，记作 $*$。
- $*$ 的 1-自同态集合定义为

$$1\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(*) \;=\; G \tag{A.13}$$

  其复合运算由 G 中的群乘法给出。

- 两个 1-态射 $g, h \in G$ 之间的 2-态射集合定义为

$$2\text{-}\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{G}}}(g, h) \;=\; \delta_{g,h} \cdot A \tag{A.14}$$

  其中， A中的垂直复合由群乘法给出。两个2-态射 $a \in 2\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(g)$ 和 $b \in 2\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(h)$ 的水平复合由

$$a \star b \;=\; a \cdot \varphi_g(b) \;\in\; 2\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(g \cdot h)\,. \tag{A.15}$$

- 1-态射 g、 h、 $k \in 1\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(*)$ 的复合所对应的2-结合子由 y

$$\alpha(g, h, k) \;\in\; 2\text{-}\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{G}}}(g \cdot h \cdot k)\,. \tag{A.16}$$

这一构造清楚地表明，我们也可以将2-群视为一种特殊的2-范畴：它只有一个对象，且其中所有1-态射和2-态射均可逆。

A.2.2 2-向量空间

现在考虑由有限维2-向量空间构成的融合2-范畴2Vec，它可以描述如下：

- 它的对象是有限维半单结合代数[12]。
- 其 1-态射是有限维双模。
- 其 2-态射是双模映射。

因此，2Vec 中两个对象 $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ 之间的等价，对应于相应有限维半单代数的 Morita 等价。由于任何有限维半单代数 $\mathcal{A}$ 都可以分解为直和

$$\mathcal{A} \;\cong\; M_{r_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{r_n}(\mathbb{C}) \tag{A.17}$$

[12]在一般域上，这将是可分代数。不过，由于我们是在 $\mathbb{C}$ 上工作的，因此可以用半单代数替代可分代数。

矩阵代数，而任意矩阵代数 $M_r(\mathbb{C})$ 都与 $\mathbb{C}$Morita 等价，因此任何有限维半单代数都等价于 n 个 $\mathbb{C}$ 在 2Vec中的直和。因而，2Vec 中的对象的等价类与自然数$n \in \mathbb{N}$一一对应，这便重现了 Kapranov 和 Voevodsky 对 2-范畴 2Vec 的如下描述 [38]:

- 它的对象是正整数 $n \in \mathbb{N}$。与正整数 1 对应的简单对象只有一个。

- 对象 n 和 m 之间的 1-态射由 $(m \times n)$ 矩阵给出，

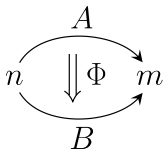
$$n \xrightarrow{A} m \tag{A.18}$$

  其元素是有限维向量空间。1-态射的复合

$$n \xrightarrow{A} m \xrightarrow{B} s \tag{A.19}$$

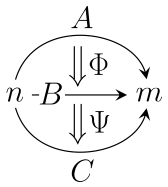
  由相应矩阵的乘法给出，其中运算使用张量积和向量空间的直和。

- 1-态射 A 和 B 之间的 2-态射由 $(m \times n)$ 矩阵给出，



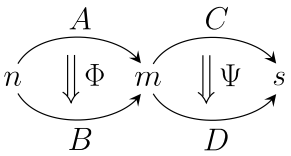
(A.20)

  其元素是 A 和 B相应元素之间的线性映射。2-态射的垂直复合



(A.21)

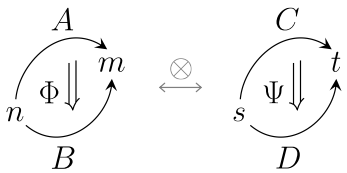
  由线性映射逐项复合给出。2-态射的水平复合



(A.22)

  由相应矩阵的乘法给出，其中使用张量积和线性映射的直和。

- 对象、1-态射和2-态射的融合



(A.23)

由相应矩阵的张量积给出，分别对向量空间和线性映射使用张量积与直和。

A.2.3 2-表示及其分类

类比普通群的情形，现在很容易定义 2-群 $\mathcal{G}$ 的有限维 2-表示所构成的 2-范畴 2Rep($\mathcal{G}$)：

- 它的对象是（伪）2-函子 $\mathcal{F}: \mathcal{G} \to 2\mathbf{Vec}$。$\widehat{}$
- 它的 1-态射是自然变换 $\eta: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$。
- 它的 2-态射是修正 $\Xi: \eta \Rrightarrow \eta'$。

这个相当抽象的定义可以通过展开（伪）2-函子、自然变换和修正的定义，改用更基本的数据来重新表述。例如，考虑一个固定的 2-表示 $\mathcal{F}: \mathcal{G} \to 2\mathbf{Vec}$。这相当于以下内容：

- 对于 $\mathcal{G}$ 的唯一对象 $*$，$\widehat{2}$-函子 $\mathcal{F}$ 将其映射为一个自然数 $n := \mathcal{F}(*) \in \mathbb{N}$，我们称之为该 2-表示的维数。
- 对于 $*$ 的 1-自同态 $g \in G$，2-函子 $\mathcal{F}$ 将其映射为一个可逆的 $(n \times n)$ 阶矩阵 $\mathcal{F}(g)$，其元素是有限维复向量空间。因此，$\mathcal{F}(g)$ 的每一行和每一列至多只有一个非零元素，且该元素同构于一维向量空间 $\mathbb{C}$。所以，在同构意义下，我们可以将 $\mathcal{F}(g)$ 视为一个 $(n \times n)$ 阶置换矩阵。由此，2-函子 $\mathcal{F}$ 诱导出一个置换作用

$$\sigma: G \to S_n \tag{A.24}$$

在集合 G 的 n 个元素上。

- 对于 1-态射 $g \in G$ 的 2-自同态 $a \in A$，2-函子 $\mathcal{F}$ 将其映射为一个 $(n \times n)$ 阶矩阵，其元素是 $\mathcal{F}(g)$ 中对应元素之间的线性映射。由于后者的每一行和每一列中都只有一个非零元素，且该元素同构于 $\mathbb{C}$，我们可以将 $\mathcal{F}(a)$ 视为一组 n 相位 $\chi_i(a) \in U(1)$。由此，2-函子 $\mathcal{F}$ 诱导出一个同态

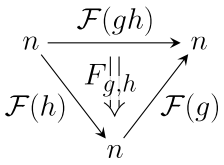
$$\chi: A \to U(1)^n, \tag{A.25}$$

我们可以将其视为一组 n 特征标 $\chi \in (A^\vee)^n$。随后，$\mathcal{F}$的 2-函子性意味着该集合满足

$$g \triangleright_\sigma \chi(a) = \chi(g \triangleright_\varphi a) \tag{A.26}$$

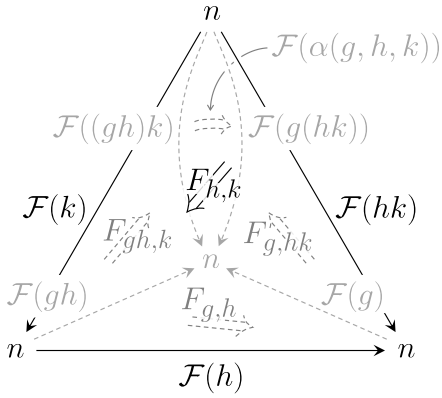
对于所有 $g \in G$ 和 $a \in A$，其中我们分别用$\triangleright_\sigma$ 和$\triangleright_\varphi$ 表示 G 在 $U(1)^n$和 A 上的作用，该作用分别由 σ 和 φ诱导。

• 对于每一对 $g,h\in G$，我们都有一个 2-同构。



(A.27)

控制 $\mathcal{F}(g)$ 与 $\mathcal{F}(h)$ 的复合。因此，它们由 $F(gh)$ 与 $F(g)\circ F(h)$ 中 n 一维分量之间的线性映射构成，从而我们可以将 $F_{g,\ h}$ 视为一组相位 $c(g,\ h)\in U(1)^n$。这些相位需要与 2Vec 中 1-态射复合的结合约束相容，即满足图示关系



(A.28)

2-交换；我们可以将其改写为 2-余链条件

$$(d_\sigma c)(g,h,k)\ =\ \frac{(g\triangleright_\sigma c(h,k))\cdot c(g,hk)}{c(gh,k)\cdot c(g,h)}\ \overset{!}{=}\ \langle\chi,\alpha(g,h,k)\rangle\ . \tag{A.29}$$

因此，这组相位可视为一个 2-余链 $c\in C^2(G,\ U(1)^n)$，它闭合到 χ 与 Postnikov 代表元 α的配对 $\langle\chi,\ \alpha\rangle\in Z^3(G,\ U(1)^n)$。

总之，我们可以认为，2-群 $\mathcal{G}$ 的 2-表示由四元组 $(n,\ \sigma,\ c,\ \chi)$ 标记，这些四元组由以下部分组成

1. 一个正整数 $n\in\mathbb{N}$,

2. 一个置换作用 $\sigma:\ G\to S_n$,

3.一个扭曲的 2-余链 $c\in C^2_\sigma(G,U(1)^n)$,

4. 一组特征标 $\chi\in(A^\vee)^n$,

使得 $g\triangleright_\sigma\chi(a)\ =\chi(g\triangleright_\varphi a)$ 对所有 $g\in G$、$a\in A$ 和 $d_\sigma c=\langle\chi,\ \alpha\rangle$ 均成立。由四元组 $(n,\ \sigma,\ c,\ \chi)$ 和 $(n',\ \sigma',\ c',\ \chi')$ 标记的两个 2- 表示等价，当且仅当 $n=n'$，且存在一个置换 $\tau\in S_n$ 使得

$$\sigma'\ =\ \tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}\,,\qquad[c']\ =\ [\tau\triangleright c]\,,\qquad\chi'\ =\ \tau\triangleright\chi\,. \tag{A.30}$$

A.2.4 直和与张量积

2Vec 上的融合结构在 2Rep(G) 上诱导出融合结构。特别地，这使我们能够对 2-表示取直和与张量积。按照上述用初等数据标记 2-表示的方式，这些运算可以明确描述如下：考虑 $\mathcal{G}$ 的两个 2- 表示 $R = (n,\ \sigma,\ c,\ \chi)$ 和 $R' = (n',\ \sigma',\ c',\ \chi')$。那么，有如下结论：

- 它们的直和是 2-表示

$$R \oplus R' \ = \ \big(n+n',\, \sigma\oplus\sigma',\, c\oplus c',\, \chi\oplus\chi'\big)\,, \tag{A.31}$$

其中，置换作用 $\sigma\oplus\sigma' \colon G\to S_{n+n'}$ 定义为

$$(\sigma\oplus\sigma')_g(i) \ := \ \begin{cases} \sigma_g(i) & \text{if } \ 1\le i\le n \\ \sigma'_g(i-n)+n & \text{if } \ n+1\le i\le n+n' \end{cases}\,, \tag{A.32}$$

扭曲的 2-余链 $c\oplus c'\in C^2_{\sigma\oplus\sigma'}(G,\ U(1)^{n+n'})$ 定义为

$$(c\oplus c')_i(g,h) \ := \ \begin{cases} c_i(g,h) & \text{if } \ 1\le i\le n \\ c'_{i-n}(g,h) & \text{if } \ n+1\le i\le n+n' \end{cases}\,, \tag{A.33}$$

特征标的集合 $\chi\oplus\chi'\in (A^\vee)^{n+n'}$ 取为

$$(\chi\oplus\chi')_i \ := \ \begin{cases} \chi_i & \text{if } \ 1\le i\le n \\ \chi'_{i-n} & \text{if } \ n+1\le i\le n+n' \end{cases}\,. \tag{A.34}$$

- 它们的张量积是 2-表示

$$R\otimes R' \ = \ \big(n\cdot n',\, \sigma\otimes\sigma',\, c\otimes c',\, \chi\otimes\chi'\big)\,, \tag{A.35}$$

其中，置换作用 $\sigma\otimes\sigma' \colon G\to S_{n\cdot n'}$ 定义为

$$(\sigma\otimes\sigma')_g(i,j) \ := \ \big(\sigma_g(i), \sigma'_g(j)\big)\,, \tag{A.36}$$

扭曲的 2-余链 $c\otimes c'\in C^2_{\sigma\otimes\sigma'}(G, U(1)^{n\cdot n'})$ 定义为

$$(c\otimes c')_{(i,j)}(g,h) \ := \ c_i(g,h)\cdot c'_j(g,h)\,, \tag{A.37}$$

而特征标的集合 $\chi\otimes\chi'\in (A^\vee)^{n\cdot n'}$ 取为

$$(\chi\otimes\chi')_{(i,j)} \ := \ \chi_i\cdot\chi'_j\,. \tag{A.38}$$

A.2.5 不可约性

不可约2-表示是指不能写成其他2-表示直和的那些表示。特别地，这意味着不可约2-表示 $S=(n,\ \sigma,\ c,\ \chi)$ 的置换作用 $\sigma:\ G\to S_n$ 是传递的，因此

$$\{1,...,n\}\ \cong\ G/H \tag{A.39}$$

作为 G-集合，其中我们用 $H:=\mathsf{Stab}_\sigma(1)\ \subset\ G$ 表示置换作用的稳定子。扭曲的 2-余链 $c\in C^2_\sigma(G,\ U(1)^n)$ 随后诱导出一个普通的 2-余链

$$u\ :=\ c_1|_H\ \in\ C^2(H,U(1)) \tag{A.40}$$

在子群 H 上，它闭合为 $du=\langle\lambda,\ \alpha|_H\rangle$，其中我们记 $\lambda:=\chi_1\in A^\vee$。总之，我们可以用由以下元素组成的三元组 $(H,\ u,\ \lambda)$ 来标记 $\mathcal{G}$ 的不可约 2-表示:

1. 一个子群 $H\subset G$,
2. 一个 2-余链 $u\in C^2(H,\ U(1))$,
3. 一个 H-不变特征标 $\lambda\in A^\vee$,

使得 $du=\langle\lambda,\ \alpha|_H\rangle$。由三元组 $(H,\ u,\ \lambda)$ 和 $(H',\ u',\ \lambda')$ 标记的两个不可约 2-表示等价，当且仅当存在群元素 $g\in G$ 使得

$$H'\ =\ {}^gH\,,\qquad [u']\ =\ [{}^gu]\,,\qquad \lambda'\ =\ {}^g\lambda\,, \tag{A.41}$$

其中，g对三元组 $(H,\ u,\ \lambda)$ 中各项的共轭作用定义为

$${}^gH\ =\ gHg^{-1}\,,\quad ({}^gu)(h,h')\ =\ u(g^{-1}hg,g^{-1}h'g)\,,\quad ({}^g\lambda)(a)\ =\ \lambda(g^{-1}\triangleright_\rho a)\,. \tag{A.42}$$

不可约 2-表示可视为基本构件，因为 $\mathcal{G}$ 的任意一般 2-表示都可以写成不可约 2-表示的直和。具体而言，由三元组 $(H,\ u,\ \lambda)$ 和 $(K,\ v,\ \eta)$ 标记的两个不可约 2-表示的融合，必然也能分解为其他不可约 2-表示的直和，这体现在 Mackey 分解公式中

$$(H,u,\lambda)\otimes(K,v,\eta)\ \ =\ \bigoplus_{[g]\,\in\,H\backslash G/K}\big(H\cap{}^gK,\ u\cdot{}^gv,\ \lambda\cdot{}^g\eta\big)\,. \tag{A.43}$$

类似地，不可约2-表示之间的1-态射范畴允许进行麦基型分解，并由以下内容给出。

$$1\text{-}\mathrm{Hom}\big((H,u,\lambda),\,(K,v,\eta)\big)\ \ =\ \bigoplus_{\substack{[g]\,\in\,H\backslash G/K\\ \overline{\lambda}\,\cdot\,{}^g\eta\,=\,1}}\mathsf{Rep}^{\,\overline{u}\,\cdot\,{}^gv}(H\cap{}^gK)\,. \tag{A.44}$$

A.2.6 示例

例如，考虑 2-群 $\mathcal{G} = (G, A, \varphi, \alpha)$，其中

- $G = \mathbb{Z}_2$ 是由生成元 x 生成的 2 阶循环群，
- $A = \mathbb{Z}_4$ 是由生成元 y 生成的 4 阶循环群，
- $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(A)$ 在生成元上的定义为 $\varphi_x(y) = y^3$，
- $[\alpha] \in H^3_\varphi(G, A) = \mathbb{Z}_2$ 由满足以下条件的归一化 3-余循环表示

$$\alpha(x,x,x) = 1 \qquad \text{or} \qquad \alpha(x,x,x) = y \tag{A.45}$$

对应于一个分裂或非分裂的 2-群。

$\mathcal{G}$ $\mathcal{G}$ 的不可约 2-表示仍像之前一样由三元组 (H, u, λ) 标记，并可总结如下：

- 在分裂情形下，2-余循环 u 没有非平凡的选择，因为 $H^2_\varphi(G, U(1)) = 1$。在等价意义下，有五个不可约 2-表示，标记为

	H	u	λ
$\mathbf{1}_+$	$\mathbb{Z}_2$	1	1
$\mathbf{1}_-$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\widehat{y}^2$
$\mathbf{2}_+$	$\{1\}$	1	1
$\mathbf{2}_0$	$\{1\}$	1	$\widehat{y}$
$\mathbf{2}_-$	$\{1\}$	1	$\widehat{y}^2$,

(A.46)

其中，我们用 $\widehat{y}$ 表示 A 的庞特里亚金对偶 $A^\vee = \mathbb{Z}_4$ 的生成元。它们的融合规则可由融合表总结

$\otimes$	$\mathbf{1}_+$	$\mathbf{1}_-$	$\mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_-$
$\mathbf{1}_+$	$\mathbf{1}_+$	$\mathbf{1}_-$	$\mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_-$
$\mathbf{1}_-$	$\mathbf{1}_-$	$\mathbf{1}_+$	$\mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_+$
$\mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_+ \oplus \mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_0 \oplus \mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_- \oplus \mathbf{2}_-$
$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_0 \oplus \mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_+ \oplus \mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_0 \oplus \mathbf{2}_0$
$\mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_+$	$\mathbf{2}_- \oplus \mathbf{2}_-$	$\mathbf{2}_0 \oplus \mathbf{2}_0$	$\mathbf{2}_+ \oplus \mathbf{2}_+$ 。

(A.47)

简单对象之间的 1-态射空间如图所示57。

• 在非分裂情形下，条件 $du = \langle \lambda,\ \alpha|_H \rangle$ 仅当 $H = \mathbb{Z}_2$ 且$\lambda = \tilde{y}^2$ 时才是非平凡的。然而，由于不存在这样的 2-余链 u，相应的 2-表示$\mathbf{1}_-$ 也不再存在。这通过图 $\mathbf{1}_-$ 中将 57。

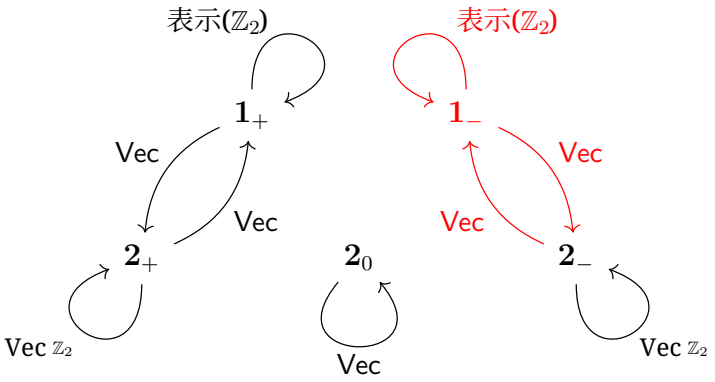


图57。

A.3 3-表示

下面，我们将定义 3-表示的概念，它类似于前几小节讨论的 1-表示和 2-表示的构造。由于相关的融合 3-范畴领域比以往丰富且复杂得多，我们不打算系统地加以阐述，而只简要强调其中一些最显著的特征。一般而言，可以为一般的 3-群定义 3-表示的概念；但为求简明，我们将只研究普通有限群 G （视为一种特殊类型的 3-群）的 3-表示。

A.3.1 3-向量空间

我们先考虑由有限维 3-向量空间构成的融合 3-范畴 3Vec，其描述如下：

- 其对象是多重融合范畴。
- 其 1-态射是双模范畴。
- 其 2-态射是双模函子。
- 其3-态射是自然变换。

因此，3Vec 中两个对象 $\mathrm{B}_1 \sim \mathrm{B}_2$ 的等价对应于相应多重融合范畴之间的 Morita 等价。由于任意多重融合范畴都可以写成不可分解多重融合范畴的直和，而任意不可分解多重融合范畴都与一个普通融合范畴 Morita 等价，因此

3Vec 中的对象与融合范畴的有限直和一一对应。特别是，等价意义下的简单对象肯定不止一个，这表明 3Vec 中的对象如今比以往丰富得多。

A.3.2 3-表示及其分类

与 1-表示和 2-表示的情形类似，我们可以如下定义普通群 G 的有限维 3-表示所构成的 3-范畴 3Rep(G)：

- 其对象是（伪）3-函子 $\mathcal{F}: G \to 3\mathrm{Vec}$。
- 其 1-态射是自然变换 $\eta: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$。
- 其 2-态射是修正 $\Xi: \eta \Rrightarrow \eta'$。
- 其 3-态射是扰动 $\mathfrak{X}: \Xi \Rrightarrow \Xi'$。

这里，我们将群 G 视为一种特殊类型的 3-范畴 G，它只有一个对象 $*$，其 1-自同态由 1-End$\widehat{G}(*) = G$ 给出，而其 2-态射和 3-态射都是平凡的。

通过拆解（伪）3-函子、自然变换、修正和扰动的定义，可以用更基本的数据来重新表述这一颇为抽象的 3-表示构造。例如，考虑一个固定的 2-表示 $\mathcal{F}: G \to 3\mathrm{Vec}$，它对应于以下数据：

- 3-函子 $\mathcal{F}$ 将多融合范畴 B赋给 G 中的唯一对象 $*$。在等价意义下，我们可以将后者视为普通融合范畴 C_i的直和 $\mathrm{B} = \mathrm{C}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{C}_n$，其个数 n 称为该 3-表示的维数。为简单起见，假设 B 的等价类仅由一个融合范畴 C 标记，这对应于 G的一个一维 3-表示。

- 对于 1-自同态 $g \in G$，$*$ 该 3-函子将其映射为可逆 C-双模范畴 $\mathcal{F}(g)$，由此诱导出一个群同态

$$\rho: G \to \mathrm{BrPic}(\mathrm{C}) \tag{A.48}$$

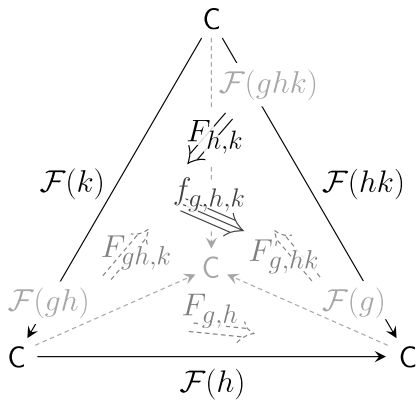
G 从 G 到由可逆 C-双模的同构类构成的 Brauer-Picard 群 BrPic(C)。

- 对于每一对 $g, h \in G$，我们都有一个 2-同构

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[rr, "\mathcal{F}(gh)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(h)"'] & \arrow[d, phantom, "F_{g,h}\Downarrow"] & \mathrm{C} \\ & \mathrm{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}(g)"'] & \end{tikzcd} \tag{A.49}$$

控制 $\mathcal{F}(g)$ 与 $\mathcal{F}(h)$ 的复合。因此，它们对应于可逆的 C-双模函子；在等价意义下，这些函子由 Drinfeld 中心 Z(C) 中一个固定可逆元素 $\kappa(g, h)$ 对 C 的左作用给出。2-同构 $F_{g,h}$ 的集合进而诱导出一个 2-余循环 $\kappa \in Z^2(G, \mathrm{Z(C)}^\times)$，其中 $\mathrm{Z(C)}^\times$ 表示 Z(C) 中可逆对象的同构类所构成的阿贝尔群。

- 对于每个三元组 g，h，$k \in G$，我们都有一个 3-同构



(A.50)

控制 2-同构 $F_{g,h}$ 的复合。因此，它们对应于 C-双模函子的自然同构，该自然同构由乘以相位 $\mu(g,h,k) \in U(1)$ 给出。3-同构 $f_{g,h,k}$ 的集合进而诱导出一个 3-余循环 $\mu \in Z^2(G,U(1))$。

总之，我们可以将 G 的一维 3-表示看作由四元组 (C ρ,κ,μ) 标记，这些四元组由以下部分组成：

1. 一个融合范畴 C，

2. 一个群同态 $\rho: G \to$BrPic(C)，3. 一个 2-余循环 $\kappa \in Z^2(G,$Z(C)$^\times)$，4. 一个 3-余循环 $\mu \in Z^3(G,U(1))$。

与 2-表示的情形类似，多融合范畴 B $= \mathsf{C}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{C}_n$ 上 G 的一般不可约 n-维 3-表示，可以通过诱导某个子群 $H \subset G$ 的一维 3-表示得到。

参考文献

[1] *D. Gaiotto*、*A. Kapustin*、*N. Seiberg* 和 *B. Willett*，广义全局对称性，*JHEP 02 (2015)* 172, [*arXiv:1412.*5148],[2] *E. Sharpe*，量子场论中广义全局对称性的笔记，*Fortsch. Phys. 63 (2015) 659*–682, [*arXiv:1508.*04770],[3] *L. Bhardwaj* 和 *Y. Tachikawa*，二维有限对称性及其规范化，*JHEP 03 (2018)* 189, [*arXiv:1704.*02330],[4] *Y. Tachikawa*，关于规范化有限子群，*SciPost Phys. 8 (2020), no. 1 015*,[*arXiv:1712.*09542],[5] *F. Benini*、*C. C´ordova* 和 *P.-S. Hsin*，关于 *2*-群全局对称性及其反常，*JHEP 03 (2019)* 118, [*arXiv:1803.*09336].

[6] *P.-S. Hsin*、*H. T. Lam* 和 *N. Seiberg*，《关于三维和四维中的一形式全局对称性及其规范化的评论》，*SciPost Phys. 6 (2019)*，第 3 039, [期，*arXiv:1812.04716*].[7] *I. n. Garc´ıa Etxebarria*、*B. Heidenreich* 和 *D. Regalado*，《*IIB* 通量的非对易性与场论的全局结构》，*JHEP 10 (2019)* 169, [，*arXiv:1908.08027*].[8] *J. Eckhard*、*H. Kim*、*S. Schafer-Nameki* 和 *B. Willett*，《高形式对称性、*Bethe* 真空态与 *3d-3d* 对应》，*JHEP 01 (2020)* 101, [，*arXiv:1910.14086*].[9] *O. Bergman*、*Y. Tachikawa* 和 *G. Zafrir*，《*ABJM* 型理论中的广义对称性与全息》，*JHEP 07 (2020)* 077, [，*arXiv:2004.05350*].[10] *C. Cordova*、*T. T. Dumitrescu* 和 *K. Intriligator*，《六维量子场论中的 *2*-群全局对称性与反常》，*JHEP 04 (2021) 252*，[*arXiv:2009.00138*].[11] *M. Del Zotto*、*I. n. Garc´ıa Etxebarria* 和 *S. S. Hosseini*，《*Argyres-Douglas* 理论的高形式对称性》，*JHEP 10 (2020)* 056, [，*arXiv:2007.15603*].[12] *L. Bhardwaj* 和 *S. Sch¨afer-Nameki*，《六维和五维理论的高形式对称性》，*JHEP 02 (2021)* 159, [，*arXiv:2008.09600*].[13] *P.-S. Hsin* 和 *H. T. Lam*，《离散 *theta* 角、对称性与反常》，*SciPost Phys. 10 (2021)*，第 2 032, [期，*arXiv:2007.05915*].[14] *D. R. Morrison*、*S. Schafer-Nameki* 和 *B. Willett*，《五维理论中的高形式对称性》，*JHEP 09 (2020)* 024, [，*arXiv:2005.12296*].[15] *S. Gukov*、*P.-S. Hsin* 和 *D. Pei*，《$T[M]$ 理论的广义全局对称性。第一部分》，*JHEP 04 (2021)* 232, [，*arXiv:2010.15890*].[16] *M. Yu*，《*(1+1)*维理论的对称性与反常：*2*-群与对称性分数化》，*JHEP 08 (2021)* 061, [，*arXiv:2010.01136*].[17] *L. Bhardwaj*，《*S* 类中的 *2*-群对称性》，*SciPost Phys. 12 (2022)*，第 *5* 期，*152*，[*arXiv:2107.06816*].[18] *Y. Lee*、*K. Ohmori* 和 *Y. Tachikawa*，《*Intriligator-Seiberg* 对偶下高阶对称性的匹配》，*JHEP 10 (2021)* 114, [，*arXiv:2108.05369*].[19] *F. Apruzzi*、*L. Bhardwaj*、*J. Oh* 和 *S. Schafer-Nameki*，《五维 *SCFT* 中味对称性的全局形式与 *2*-群对称性》，*arXiv:2105.08724*.[20] *L. Bhardwaj*、*M. Hubner* 和 *S. Schafer-Nameki*，《*4d N=2* 类 *S* 理论的 *1*-形式对称性》，*SciPost Phys. 11 (2021)* 096, [，*arXiv:2102.01693*].[21] *N. Ganter* 和 *M. Kapranov*，《*2*-范畴中的表示论与特征标理论》，*Advances in Mathematics 217 (2008)*，第 *5* 期，*2268–2300*。[22] *J. Elgueta*，《*Kapranov* 和 *Voevodsky* 的 *2*-向量空间上的 *2*-群表示论》，*Advances in Mathematics 213 (2007)*，第 *1* 期，*53–92*。[23] *A. M. Osorno*，《*2*-特征标的显式公式》，*Topology and its Applications 157 (2010)*，第 *2* 期，*369–377*。[24] *L. Bhardwaj*、*M. Bullimore*、*A. E. V. Ferrari* 和 *S. Schafer-Nameki*，《孤子缺陷导致的广义对称性反常》，*arXiv:2205.15330*。[25] *D. Delmastro*、*J. Gomis*、*P.-S. Hsin* 和 *Z. Komargodski*，《反常与对称性分数化》，*arXiv:2206.15118*。

[26] T. D. Brennan、C. Cordova 和 T. T. Dumitrescu，《线缺陷的量子数与反常》，arXiv:2206.15401。[27] L. Bhardwaj、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 S. Schafer-Nameki，《3d N=4 SCFT 的广义对称性与反常》，arXiv:2301.02249。[28] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《融合范畴与同伦论》，Quantum topology 1（2010），第 3 期，209–273。[29] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson，《非可逆对称性与高阶表示论 I》，arXiv:2208.05993。[30] L. Bhardwaj、S. Schafer-Nameki 和 A. Tiwari，《非可逆对称性的统一构造》，arXiv:2212.06159。[31] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson，《非可逆对称性与高阶表示论 II》，arXiv:2212.07393。[32] L. Bhardwaj、S. Schafer-Nameki 和 J. Wu，《普适非可逆对称性》，Fortsch. Phys. 70（2022），第 11 2200143, [arXiv:2208.05973]。[33] L. Bhardwaj 和 S. Schafer-Nameki，《广义荷，第一部分：可逆对称性与高阶表示》，arXiv:2304.02660。[34] J. Frohlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《有理共形场论中的对偶性与缺陷》，Nucl. Phys. B 763（2007）354–430, [hep-th/0607247]。[35] A. Davydov、L. Kong 和 I. Runkel，《有理共形场论的可逆缺陷与同构》，Adv. Theor. Math. Phys. 15（2011），第 1 期，43–69, [arXiv:1004.4725]。[36] I. Brunner、N. Carqueville 和 D. Plencner，《离散扭转缺陷》，Commun. Math. Phys. 337（2015），第 1 期，429–453, [arXiv:1404.7497]。[37] M. M. Kapranov 和 V. A. Voevodsky，《2-范畴与 Zamolodchikov 四面体方程》，载于《Proc. Sympos. Pure Math.》第 56 卷，第 177–259 页。Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1994。[38] B. Bartlett、C. L. Douglas、C. J. Schommer-Pries 和 J. Vicary，《作为三维配边 2-范畴表示的模范畴》，2015。[39] D. Gaiotto 和 T. Johnson-Freyd，《高阶范畴中的凝聚》，arXiv:1905.09566。[40] J. Gunarwardena、B. Kahn 和 C. Thomas，《有限群实表示的 Stiefel-Whitney 类》，Journal of Algebra 126（1989），第 2 期，327–347。[41] A. Davydov、M. Mueger、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《非退化编织融合范畴的 Witt 群》，2011。