arXiv:2304.03792v1 [quant-ph] 7 Apr 2023

非厄米光学晶格中的几何依赖的皮肤效应与各向异性的布洛赫振荡

Yi Qin, [1] Kai Zhang, [2,*] 和 Linhu Li, [†]

[1] *Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Metrology and Sensing& School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China*[2] *Department of Physics, University of Michigan Ann Arbor, Ann Arbor, Michigan, 48105, United States*

非厄米性与维度之间的相互作用在高维度中产生了奇异特性，其中一个代表性现象称为几何依赖的皮肤效应（GDSE），它指的是，在开放边界条件下，大量本征态的局域化取决于系统的几何形状。在本文中，我们展示了具有现场原子损耗的二维 sp 光学梯子晶格中GDSE的出现，这可通过系统体区中布洛赫振荡的各向异性动力学表现出来。通过沿不同方向施加静力，波包动力学重新获得具有非零或零谱绕数的复能谱，分别表明相应方向上存在或不存在趋肤积聚。我们的结果揭示，GDSE具有独立于边界条件的内禀各向异性体态动力学，并为其在量子系统中的实现和探测提供了方案。

引言。—光学晶格中的超冷量子气体为研究单粒子和多体层面上引人入胜的量子物理提供了理想平台 [1–7]。借助先进的量子工程技术，可以在这些系统中构筑具有高度可控参数的丰富晶格结构，例如由多频光学势构筑的双阱晶格 [8–17], 以及由自旋-轨道耦合诱导的非平庸拓扑能带 [18–20], 人工规范场 [21], 或轨道间耦合 [22]。尽管超冷量子气体通常被视为封闭量子系统，但它们同样能够展现描述开放量子系统的新颖非厄米物理，其中非厄米性可以通过激光诱导的粒子耗散有效引入 [23, 24]。特别是，对具有开创性意义的非厄米趋肤效应（非厄米趋肤效应）的实现 [25, 26], ——该效应指大多数本征态聚集于系统边界——已在实空间或动量空间中利用冷原子得到了理论预言和实验实现 [27–31]。

作为一种边界现象，边界条件在决定NHSE [32–37] 的行为方面发挥着重要作用。在更高维的系统中，不同几何形状和维度的更丰富边界条件会导致 NHSE 出现更复杂的变化，例如由缺-陷边界诱导的位错和位旋 NHSE [38–43], ，以及在低维边界处出现本征态积聚的混合趋肤-拓扑效应 [27, 44–48]。最近，在二维及更高维晶格 [49], 中发现了一种特殊类型的几何依赖趋肤效应（广义趋肤效应），其中本征态的趋肤积聚总是在特定几何-的尝试，体现了非厄米趋肤效应在一维系统之外的普适性 [50–52]。迄今为止，人们已提出并在多种系统中实验实现了广义趋肤效应，包括原子阵列 [53], 光子晶体 [54], 声学晶体 [55, 56], 和主动机械晶格 [57], 然而，在量子系统中实现广义趋肤效应的明确方案仍未出现。

在本文中，我们提出了在由双阱势诱导的 sp 轨道耦合二维（2D）光学晶格中实现广义趋肤效应的方法。由于系统的对称性，正方晶格沿 x 或 y 方向均禁止出现非厄米趋肤效应；但在存在轨道依赖的原子损耗时，菱形晶格沿斜向会出现非厄米趋肤效应。研究发现，对于不同的斜向动量，本征态的趋肤积聚方向相反，从而在二维菱形晶格的一维（1D）边界处产生趋向相反方向的互易广义趋肤效应。随后我们进一步揭示，对于不同取向的驱动力，广义趋肤效应会导致各向异性的布洛赫振荡，而这可作为探测相应方向上趋肤积聚的手段。值得注意的是，布洛赫振荡仅涉及体态动力学，并且对边界条件不敏感，因此为在光学晶格中探测不同类型的非厄米趋肤效应提供了一种高效方案；在这类系统中，具有所需几何形状的尖锐开放边界通常难以实现。

二维非厄米 sp 梯子模型。— 我们考虑一个由二维光学势 $V(x,y) = V_x\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_L}x + V_1\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_L}y + V_2\sin^2(\frac{4\pi}{\lambda_L}y + \phi/2)$ 中的非相互作用费米气体组成的系统，其中 V_x (V_1, V_2) 描述沿 x (y) 方向的静态单阱（双阱）势的强度，而 ϕ 是双阱势的相移，如图 1(a) 所示。通过适当设计的光学势，双阱中的 s 和 p_x 轨道分别可以具有大致相同的能量，从而产生一个 sp 梯子晶格 [22], ，如图 1(b) 所示。轨道依赖的粒子损失可以通过共振光束将原子转移到一个

* phykai@umich.edu
† lilh56@mail.sysu.edu.cn

激发态，其向系统引入了非厄米性 [23]。

基于这一设置，二维晶格的紧束缚哈密顿量可表示为

$$H=\sum_{\boldsymbol{r}} c_{\boldsymbol{r}}^{\dagger} T_x c_{\boldsymbol{r}+x} \pm c_{\boldsymbol{r}}^{\dagger} T_{xy} c_{\boldsymbol{r}\pm x+y} + h.c. - i\sum_{\boldsymbol{r}} \gamma c_{\boldsymbol{r},p_x}^{\dagger} c_{\boldsymbol{r},p_x}, \tag{1}$$

其中，$c_{\boldsymbol{r}}^{\dagger}=(c_{\boldsymbol{r},s}^{\dagger}, c_{\boldsymbol{r},p_x}^{\dagger})$ 表示双势阱中 s 和 p_x 轨道对应的一对费米子产生算符，$\boldsymbol{r}$ 表示晶格格点。$T_x=\begin{pmatrix} -t_s & -t_{sp} \\ t_{sp} & t_p \end{pmatrix}$和 $T_{xy}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t'_{sp} & 0 \end{pmatrix}$ 分别为胞内和胞间跃迁矩阵。由晶格势推导紧束缚参数的详细过程见补充材料 [58]。相应的二维 sp 晶格的布洛赫哈密顿量为

$$\mathcal{H}(k_x,k_y)=\boldsymbol{h}(k_x,k_y)\cdot\boldsymbol{\sigma}-i\gamma(\sigma_0-\sigma_z)/2, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_0,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 为单位矩阵和泡利矩阵，$\boldsymbol{h}(k_x,k_y)$ 是描述哈密顿量厄米部分的四分量向量，其中 $h_0(k_x,k_y)=(t_p-t_s)\cos k_x$, $h_x\ k_x\ k_y=-2t'_{sp}\quad k_y\quad k_x\ h_y\ k_x\ k_y=2t_{sp}\quad k_x+(,)\sin 2t'_{sp}\quad k_y\quad k_x\ h_z\ k_x\ k_y=-t_p+t_s\quad k_x$ sin , (,) sin cos sin , (,) ( ) cos 。

为描述开放边界条件本征态的局域化并揭示系统可能存在的非厄米趋肤效应，我们定义所有本征态的平均密度为

$$\bar{\rho}(\boldsymbol{r})=\sum_{\alpha,n}\rho_n(\alpha,\boldsymbol{r})/N, \tag{3}$$

其中 $\rho_n(\alpha,\boldsymbol{r})=|\psi_{n,\alpha,\boldsymbol{r}}|^2$，$\psi_{n,\alpha,\boldsymbol{r}}$ 表示 n-th 本征态 ψ_n 在 α 晶格格点的 $\boldsymbol{r}$轨道上，且 N 是晶格格点的总数。我们在图 $\bar{\rho}(\boldsymbol{r})$ 中展示了具有方形几何和菱形几何的开放边界条件系统的情况，分别对应图 1(c)和(d)。可以看出，在菱形几何中，本征态局域于边界，而在方形几何中，本征态延展于体区，这表明广义趋肤效应的存在。为了进一步表征本征态的局域化维数，我们在图 1(e) 和 (f) 中展示了每个本征态的分数维数（FD），其定义为 [59, 60]

$$D[\psi]=-\ln\left[\sum_{\alpha=s,p}\sum_{\boldsymbol{r}}|\psi_{\alpha,\boldsymbol{r}}|^4\right]/\ln\sqrt{N}. \tag{4}$$

根据定义，ψ 在二维体区、一维边缘和单个角均匀分布的态分别具有 $D[\psi]$ =2，1，0。图1(e)显示，对于正方形几何，体能带中的几乎所有本征态都具有 $D[\psi]\approx 2$ 。相比之下，对于图1(f)中的菱形几何，我们观察到 $D[\psi]\gtrsim 1$ 体能带中的大多数本征态都具有这一特征，其数量与晶格体积 [58],成正比，表明我们的系统中存在广义趋肤效应。

对称性保护的广义趋肤效应.— 通过分析可以初步理解广义趋肤效应

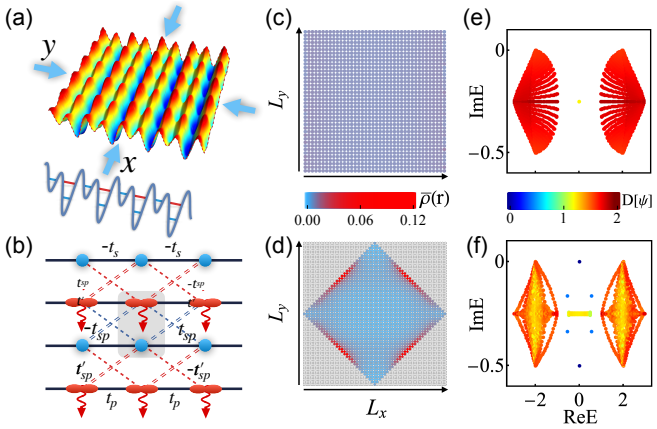


图 1. **非厄米二维 sp 梯子模型**。(a) 沿 y 方向具有双势阱结构的二维光学晶格。(b) 二维非厄米 sp 梯子的示意图，弯曲箭头表示 p_x 轨道上的损耗。(c)(d) 在 $\gamma=0.5$条件下，方形和菱形几何中所有本征态的平均密度。对应的系统尺寸分别为 $L_x\times L_y=40\times 40$ 和$L_x\times L_y=57\times 57$。(e)(f) 分别为方形和菱形几何下完全开放边界条件系统的能谱，不同颜色表示各本征态的分形维数 $D[\psi]$ 。在(f)中，带隙内出现了额外的一维边缘态，其 $D[\psi_{\text{edge}}]\approx 1$。其他参数为 $t_s=1$，$t_p=1$，$t_{sp}=1$，$t'_{sp}=0.5$。

系统哈密顿量的对称性。哈密顿量沿 x 和 y 方向分别具有镜面对称和转置镜面对称，表示为

$$\sigma_z\mathcal{H}(k_x,k_y)\sigma_z=\mathcal{H}(-k_x,k_y), \tag{5}$$
$$\sigma_z\mathcal{H}^T(k_x,k_y)\sigma_z=\mathcal{H}(k_x,-k_y), \tag{6}$$

分别。因此，沿这两个方向的布洛赫谱绕数必定为零，这确保了系统在方形几何下不会出现非厄米趋肤效应 [61–63]。如图2(a)所示，在复能量平面中，沿 $k_y=-\pi$ ($k_x=0$)方向的一维轨迹对应的周期性边界条件谱为不包围任何面积的弧线（点），而在固定 k_- (k_+)时，沿斜向 $k_+=k_x+k_y$ ($k_-=k_x-k_y$)方向则形成具有非平庸谱绕数的回路；这分别对应于方形几何中非厄米趋肤效应的缺失，以及菱形几何中非厄米趋肤效应的出现。

为了表征我们系统中的趋肤效应，我们计算了与沿给定方向 [58]、在开放边界条件下本征态聚集相对应的一维广义布里渊区（GBZ） [25, 64]。具体而言，在 $x+y$ 方向具有开放边界条件的广义布里渊区由晶体动量 $k_+\to k_+-i\kappa_+(k_+,k_-)$的复解析延拓给出，其中 $H(k_+-i\kappa_+,k_-)$复现了（$x+y$）-开放边界条件谱（即沿 $x-y$ 方向的条带几何），而 κ_+ 表示每个趋肤模 [65]的逆局域长度。类似地，另一个逆局域长度 $\kappa_-(k_+,k_-)$ 可以

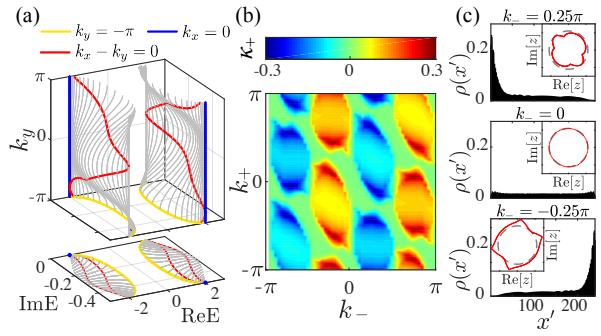


FIG.二维 *sp* 梯形模型的布洛赫谱绕数和一维广义布里渊区。(a) 上图为 $E-k_y$ 空间中的双重周期性边界条件谱，蓝色、黄色和红色轨迹分别表示具有

$$k_x=0 \quad k_y=-\pi \quad k_x-k_y=、\ 、\ 0$$

的谱。下图显示这些轨迹在复能量平面上的投影。(b) 沿 $(x+y)$ 方向具有开放边界时，皮肤模的逆局域长度 κ_+。κ_+ 的不同符号对应相反的局域方向。(c) 沿 $(x+y)$ 方向施加开放边界条件、并取若干固定的 k_- 时，本征态的空间密度。插图中的红色曲线显示对应的 $z:=e^{i(k_++i\kappa_+)}$ 一维广义布里渊区，并与布里渊区（灰色虚线单位圆）进行比较。

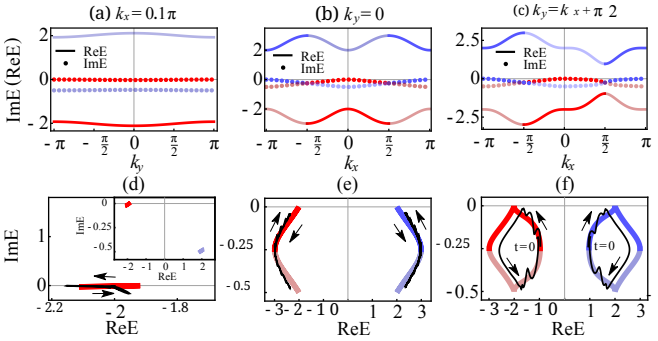


图 3. 不同方向静态力作用下波包动力学产生的复能谱。(a)–(c) 分别为具有 $k_x=0.1\pi$、$k_y=0$ 和 $k_-=-\pi/2$ 的实部（实线）与虚部（点线）能带结构。虚部较大（较小）的本征值具有更高（更低）的不透明度。(d)–(f) 分别为与 (a)–(c) 中相同颜色能带结构对应的复能谱，以及从波包动力学中获得的能量轨迹（黑色曲线）。(d) 仅显示两个能带中的一个，其完整能谱显示在插图中。初始波包分别选为 (d) 中的 $\boldsymbol{k}_0=(0.1\pi,0)$、(e) 中的 $(\pi/2,0)$ 以及 (f) 中的 $(\pi/2,\pi)$，其对应的静态力分别为 $(F_x,F_y)=(0.25,0)$、$\pm(0,0.25)$ 和 $\pm(0.25,0.25)$。加号（减号）表示向 k_x 正（负）方向演化，从而重构出蓝色（红色）的能带。在上述每种情况下，$u_{\boldsymbol{k}_0}$ 初始波包的$\mathcal{H}$均选为目标能带的本征态 $\boldsymbol{k}_0(\boldsymbol{k}_0)$。其他参数与图 1 相同。

被定义用于描述$(x-y)$-开放边界条件下的皮肤模。注意，式（6）中的转置镜像对称性变为 $\sigma_z\mathcal{H}^T(k_+,k_-)\sigma_z=\mathcal{H}(k_-,k_+)$，从而确保朝向 $x+y$ 和 $x-y$ 方向的皮肤模，对于由对称性关联的动量，具有相同的逆局域长度，即 $\kappa_+(k_+,k_-)=\kappa_-(k_-,k_+)$。尽管 $\kappa_\pm$可能无法直接预测具有菱形几何的系统的广义趋肤效应和开放边界条件能谱，但当另一个方向的趋肤局域被周期性边界条件平衡时，它们描述了沿一个倾斜方向的趋肤局域净强度。如图2(b)所示，对于不同的晶体动量 k_-，κ_+ 取不同的正值和负值，分别反映了朝向相反的$(x+y)$和 $-(x+y)$方向的互易型趋肤积聚。图 2(c)进一步展示了固定 k_- 时一维广义布里渊区和皮肤模的几个典型例子。可以看到，当广义布里渊区分别位于布里渊区内部和外部时，相应的本征态经历左向和右向趋肤积聚；当广义布里渊区与布里渊区重叠时，本征态则在体区中延展。

布洛赫振荡中的各向异性体态动力学——由于广义趋肤效应（GDSE）中的响应具有互易性，[49]，用于探测非互易非厄米趋肤效应的方法，例如定向信号放大，[66] 或长时间动力学过程中粒子群体在边缘积聚 [67]，已不再适用于我们模型中的广义趋肤效应。在此，我们通过展示布洛赫振荡的各向异性体态动力学，采用布洛赫振荡来探测广义趋肤效应。我们考虑初始波包的动力学

$$|\psi_0\rangle=A\exp(-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2/\sigma_0+i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})\,|u_{\boldsymbol{k}_0}\rangle$$

响应于静力 $\boldsymbol{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}$，其中 $\boldsymbol{k}_0$the 中心动量以及 A 归一化因子，并且$|u_{\boldsymbol{k}_0}\rangle$ 表示哈密顿量 $\mathcal{H}(\boldsymbol{k}_0)$的一个本征矢量。波包宽度 $\sigma_0=4.5$ 在本文的其-余部分中进行选取。对于非厄米系统，其复谱 $E(\boldsymbol{k})$ 通过半经典方程 [68–71]与非幺正布洛赫振荡相关联。

$$\frac{d\langle\boldsymbol{r}\rangle_t}{dt}=\nabla_{\boldsymbol{k}}\,\mathrm{Re}\,E(\boldsymbol{k}); \quad \frac{d\ln\mathcal{N}_t}{dt}=2\,\mathrm{Im}\,E(\boldsymbol{k}), \qquad (7)$$

其中，$\langle\boldsymbol{r}\rangle_t=\langle\psi(t)|\boldsymbol{r}|\psi(t)\rangle$ 表示波包在时间 t的质心；在耗散系统中，总概率 $\mathcal{N}_t=\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ 通常小于 1，且 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{F}t$。随着 t 增大，动量 $\boldsymbol{k}$将从 $\boldsymbol{k}_0$ 开始，沿 $\boldsymbol{F}$ 方向遍历布里渊区，周期为 T；当 $F_{y/x}=0$时，$T=2\pi/F_{x/y}$；而当 F_x和 F_y均非零时，$T=2\pi/\mathrm{gcrd}(F_x,F_y)$，其中 $\mathrm{gcrd}(a,b)$ 表示 $a,b\in\mathbb{Q}^+$的最大有理公因数。因此，可以从周期为T的波包动力学中重现复谱，从而揭示 $\boldsymbol{F}$方向上的非厄米趋肤效应信息，这一点已通过补充材料 [58]中的若干示例在数值上得到验证。

根据上述讨论，通过在不同方向施加 $\boldsymbol{F}$ 并考察波包动力学，可以识别我们模型中的广义趋肤效应，从而揭示沿这些方向的谱性质及相应的非厄米趋肤效应

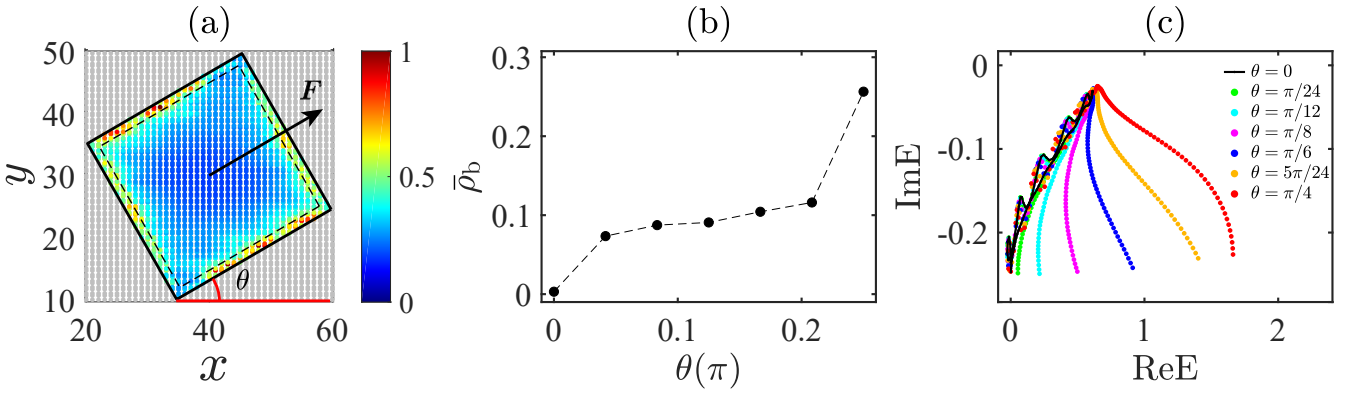


图4. 不同开边界几何中的非厄米趋肤效应及相应的反演能谱。（a）含有 $\theta=\pi/6$ 的密度分布。 θ 表示红线与红色虚线之间的夹角。（b）方程(3)中 $\bar{\rho}(\boldsymbol{r})$在指定边界截面上的权重随旋转角 θ 的变化。（c）利用静力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)$ 从波包动力学中反演得到的能谱， [（a）中的黑色箭头], 其中 $F_x=F\cos\theta$ 且 $F_y=F\sin\theta$。初始 $\boldsymbol{k}_0$ 取为 $(-\pi/2,0)$，并且我们仅考虑时间区间 $t\in(0,t_{\rm fin})$ 内的动力学，其中 $F_x t_{\rm fin}=\pi$。 θ 的取值与（b）中相同。其他参数与图 3 相同。

。然而，对于这样的非厄米多能带系统，必须注意绝热定理的有效性，因为动力学将由每个时刻具有较大虚部能量的能带主导 $\boldsymbol{k}$；当能带的虚部能谱彼此交叉时，态可能在能带之间跃迁，从而导致绝热定理失效 [72]。跃迁瞬间的瞬时态对损耗率及其他参数较为敏感，因此之后的动力学行为变得不可预测。在图3（a）至（c）中，我们展示了沿三个典型方向的能带结构的实部和虚部，其中 $k_x=0.1\pi$、$k_y=0$和 $k_-=-\pi/2$分别保持固定。可以看出，仅在图3（a）中，两条能带在实部能量和虚部能量上均清晰分离；而在图3（b）（c）中，虚部能量存在交叉点，此时需要谨慎选择动力学参数，以避免态在能带之间发生跃迁 [72]。

对于图中虚能量分离的最简单情形3(a)，我们考虑一个初始波包，其$\boldsymbol{k}_0=(0.1\pi,0)$，并且该波包处于 $|u_{\boldsymbol{k}_0}\rangle$ 的本征态 $\mathcal{H}(\boldsymbol{k}_0)$，其虚能量较大。将其置于二维晶格中心，以避免边界散射对动力学的影响。施加静态力（F_x,F_y）$=(0,0.25)$，以重现能带的能谱，如图3(d)所示。图3(b)和(c)中的另外两种情形固定了 k_x 和 k_-，情况更为复杂，因为谱中不可避免地包含一对虚本征能交叉点，位于 $k_x=\pm\pi/2$。尽管如此，通过恰当选择初态和静态力，仍可利用波包动力学得到的能量轨迹重构两个能带的完整能谱，如图3(e)和(f)所示。结合补充材料中展示的更多细节和示例 [58], ，我们认为，从该方法：（i）两个能带之间的损耗率差异较小，因此，在一个能带中制备的态仍能够经历完整的布洛赫振荡周期，之后另一个能带才会主导演化；以及（ii）对于图3（c）和（f），所考虑的动力学过程避免了在布洛赫周期内经过动量 $k_x=\pi/2$，在此处不仅虚部能隙闭合，实部能隙也取其最小值，因此绝热演化变得最为脆弱。

我们模型中的广义趋肤效应现在可以通过不同方向静态力作用下的波包动力学模拟结果直接读出。在图3（d）和（e）中可以看到，在一个布洛赫振荡周期内，重构的复本征值总是如黑色箭头所示回到自身，在复平面上形成一段弧线，这表明沿 y 和 x 方向不存在非厄米趋肤效应。而在图3（f）中，重构的谱轨迹在一个周期内依次经过每个本征值一次，并在复平面上形成一个谱环，表明沿$x+y$方向存在趋肤积聚。

任意方向上的趋肤积聚及其动力学特征。— 在更一般的情形下，可沿任意方向施加静力，从而揭示二维 sp 晶格在不同方向上的趋肤积聚强度。这里考虑一个从正方晶格顺时针旋转 θ 角度后的晶格，如图4(a)所示。由于广义趋肤效应，当 $\theta=0$时，方形几何中的本征态是扩展态；否则则表现出趋肤积聚，如 $\bar{\rho}(\boldsymbol{r})$所示，其中菱形晶格的情形由式(3)定义（$\theta=\pi/4$），见图1(d)；而图4(a)中对应的情形则满足 $\theta=\pi/6$。因此，随着 θ 从0连续增大至 $\pi/4$，预计会出现趋肤积聚，且其强度逐渐增强。为验证这一点，我们将边界区域 $\mathcal{B}$ 定义为最外侧两层 [，即黑色实线与虚线之间的区域

图4(a)中的黑色方框], ，并将边界处的模态密度与本征态总密度之比定义为 $\bar{\rho}_{\mathrm{b}}=\sum_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{B}}\bar{\rho}(\boldsymbol{r})/\sum_{\boldsymbol{r}}\bar{\rho}(\boldsymbol{r})$。 $\bar{\rho}_{\mathrm{b}}$ 不同几何形状下的结果见图4(b)。显然，方形几何（$\theta=0$）的边界密度比为零， $\rho_{\mathrm{b}}\approx 0$，该比值随 θ增大，并在菱形几何下达到最大值，此时$\theta=\pi/4$ [73]。

与前一种情况一样，预期不同开边界几何下的 NHSE 会体现为在不同取向的外加静力作用下，由波包动力学重构出的谱轨迹，例如图 $\theta=F_x/F_y$ 中的4(c)。然而，对于任意 θ，都很难通过布洛赫振荡重构出完整的环状谱 T，因为时间演化可能具有长得多的周期 θ，或者在的大多数取值下甚至变为准周期。此外，即使布洛赫振荡尚未经历完整周期，也可以通过重构能量轨迹的动力学简并劈裂来识别 NHSE 的出现 [42], 。也就是说，对于给定的实激发能量，本征能量简并的消失会导致具有正向和反向速度的本征态寿命不平衡（即能量虚部不同），从而产生单向传播和趋肤积聚，这对应于具有较长寿命的分量 [43]。如图4(c)所示，随着 θ 从 2π0 增大到，重构的能量轨迹呈现出更强的劈裂，对应于图4(b)所示 NHSE 强度的增大。

结论与讨论。— 总之，我们揭示了在存在原子损耗的二维双阱光学晶格中互易广义趋肤效应的出现，并提出通过非幺正布洛赫振荡的各向异性行为来探测该效应。我们提出的方案仅依赖体态动力学，为探测装载于光学晶格中的冷原子系统里的非厄米趋肤效应提供了一种便捷方法。在这类系统中，通常需要更复杂的技术（例如可编程数字微镜器件）才能实现不同几何构型下的开放边界 [74–77]。具体而言，可以通过波包动力学重构的能量轨迹的谱绕数信息或动力学简并劈裂，识别晶格中的趋肤积聚，从而不仅能够探测广义趋肤效应，还能探测其他类型的非厄米趋肤效应，例如补充材料 [58]中讨论的由原子旋转诱导的模型中的线型非厄米趋肤效应。因此，我们的工作不仅为在量子多体平台上实验实现并探测奇异的广义趋肤效应开辟了途径，也为进一步探索不同类型的非厄米趋肤效应如何与量子多体物理相互作用铺平了道路。

[1] I. Bloch,《自然·物理学》1, 23 (2005)。[2] I. Bloch,《自然》453, 1016 (2008)。[3] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger,《现代物理评论》80, 885 (2008)。[4] S. Giorgini、L. P. Pitaevskii 和 S. Stringari,《现代物理评论》80, 1215 (2008)。[5] K. Sun、W. V. Liu、A. Hemmerich 和 S. Das Sarma,《自然·物理学》8, 67 (2011)。[6] N. Goldman、J. C. Budich 和 P. Zoller,《自然·物理学》12, 639 (2016)。[7] D.-W. Zhang、Y.-Q. Zhu、Y. Zhao、H. Yan 和 S.-L. Zhu,《物理学进展》67, 253 (2018)。[8] J. Sebby-Strabley、M. Anderlini、P. S. Jessen 和 J. V. Porto,《物理评论A》73, 10.1103/Phys-RevA.73.033605 (2006)。[9] M. Anderlini、P. J. Lee、B. L. Brown、J. Sebby-Strabley、W. D. Phillips 和 J. V. Porto,《自然》448, 452 (2007)。[10] S. Trotzky、P. Cheinet、S. Folling、M. Feld、U. Schnor- rberger、A. M. Rey、A. Polkovnikov、E. A. Demler、M. D. Lukin 和 I. Bloch,《科学》319, 295 (2008)。[11] G. Wirth、M. ¨Olschl¨ager 和 A. Hemmerich,《自然·物理学》7, 147 (2010)。[12] P. Soltan-Panahi、D.-S. L¨uhmann、J. Struck、P. Wind- passinger 和 K. Sengstock,《自然·物理学》8, 71 (2011)。[13] P. Soltan-Panahi、J. Struck、P. Hauke、A. Bick、W. Plenkers、G. Meineke、C. Becker、P. Windpassinger、M. Lewenstein 和 K. Sengstock,《自然·物理学》7, 434 (2011)。[14] G. B. Jo、J. Guzman、C. K. Thomas、P. Hosur、A. Vish- wanath 和 D. M. Stamper-Kurn,《物理评论快报》108, 045305 2012( )。[15] L. Tarruell、D. Greif、T. Uehlinger、G. Jotzu 和 T. Esslinger,《自然》483, 302（2012）。[16] Q. Zhou、J. V. Porto 和 S. Das Sarma,《物理评论 B》83, 10.1103/PhysRevB.83.195106（2011）。[17] Z. Cai 和 C. Wu,《物理评论 A》84, 10.1103/Phys- RevA.84.033635（2011）。[18] M. Sato、Y. Takahashi 和 S. Fujimoto, Phys. Rev. Lett. 103, 020401（2009）。[19] L. Jiang 、 T. Kitagawa 、 J. Alicea 、 A. R. Akhmerov 、 D. Pekker、G. Refael、J. I. Cirac、E. Demler、M. D. Lukin 和 P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 106, 220402（2011）。[20] J. Struck、J. Simonet 和 K. Sengstock, Phys. Rev. A 90, 031601（2014）。[21] N. Goldman、I. Satija、P. Nikolic、A. Bermudez、M. A. Martin-Delgado、M. Lewenstein 和 I. B. Spielman, Phys. Rev. Lett. 105, 255302（2010）。[22] X. Li、E. Zhao 和 W. Vincent Liu,《自然·通讯》4, 1523 2013( )。[23] J. Li、A. K. Harter、J. Liu、L. de Melo、Y. N. Joglekar 和 L. Luo,《自然·通讯》10, 855（2019）。[24] Z. Ren、D. Liu、E. Zhao、C. He、K. K. Pak、J. Li 和 G.-B. Jo,《自然·物理》18, 385（2022）。[25] S. Yao 和 Z. Wang, Phys. Rev. Lett. 121, 086803（2018）。[26] V. M. Martinez Alvarez、J. E. Barrios Vargas 和 L. E. F. Foa Torres,《物理评论 B》97, 10.1103/Phys- RevB.97.121401（2018）。[27] L. Li、C. H. Lee 和 J. Gong, Phys. Rev. Lett. 124, 250402（2020）。[28] Q. Liang 、 D. Xie 、 Z. Dong 、 H. Li 、 H. Li 、 B. Gadway 、 W. Yi 和 B. Yan, Phys. Rev. Lett. 129, 070401（2022）。[29] S. Guo、C. Dong、F. Zhang、J. Hu 和 Z. Yang, Phys.

Rev. A 106，L061302（2022）。[30] H. Li、X. Cui 和 W. Yi，JUSTC 52，2（2022）。[31] L. Zhou、H. Li、W. Yi 和 X. Cui，《通讯物理》 5，252 （ 2022 ）。[32] R. Koch 和 J. C. Budich，《欧洲物理学杂志 D》74，70（2020）。[33] J. C. Budich 和 E. J. Bergholtz，Phys. Rev. Lett. 125，180403 2020( )。[34] L. Li、C. H. Lee 和 J. Gong，《通讯物理》4，42（2021）。[35] C.-X. Guo、C.-H. Liu、X.-M. Zhao、Y. Liu 和 S. Chen，Phys. Rev. Lett. 127，116801（2021）。[36] Y. Liu、Y. Zeng、L. Li 和 S. Chen，Phys. Rev. B 104，085401 2021( )。[37] S. Mu、L. Zhou、L. Li 和 J. Gong，Phys. Rev. B 105，205402 2022( )。[38] X.-Q. Sun、P. Zhu 和 T. L. Hughes，Phys. Rev. Lett. 127，066401（2021）。[39] B. A. Bhargava、I. C. Fulga、J. Van Den Brink 和 A. G. Moghaddam，《物理评论 B》104，L241402（2021）。[40] A. Panigrahi、R. Moessner 和 B. Roy，《物理评论 B》106，L041302（2022）。[41] F. Schindler 和 A. Prem，Phys. Rev. B 104，L161106（2021）。[42] K. Zhang、C. Fang 和 Z. Yang，（2022），arXiv:2211.07783。[43] J. Y. Lee、J. Ahn、H. Zhou 和 A. Vishwanath，Phys. Rev. Lett. 123，206404（2019）。[44] C. H. Lee、L. Li 和 J. Gong，Phys. Rev. Lett. 123，016805 2019( )。[45] D. Zou、T. Chen、W. He、J. Bao、C. H. Lee、H. Sun 和 X. Zhang，Nature Communications 12，7201（2021）。[46] Y. Li、C. Liang、C. Wang、C. Lu 和 Y.-C. Liu，Phys. Rev. Lett. 128，223903（2022）。[47] W. Zhu 和 J. Gong，Phys. Rev. B 106，035425（2022）。[48] Z. Ou、Y. Wang 和 L. Li，arXiv 预印本 arXiv:2210.13840 2210.12178v1。[49] K. Zhang、Z. Yang 和 C. Fang，Nature Communications 13，2496（2022）。[50] H. Jiang 和 C. H. Lee，（2022），arXiv:2207.08843。[51] K. Yokomizo 和 S. Murakami，（2022），arXiv:2210.04412。[52]H.-Y. Wang、F. Song 和 Z. Wang，（2022），arXiv:2212.11743。[53] Y. C. Wang、J. S. You 和 H. H. Jen，《自然·通讯》13，4598 2022( )。[54] Z. Fang、M. Hu、L. Zhou 和 K. Ding，《纳米光子学》11，3447（2022）。[55] Q. Zhou、J. Wu、Z. Pu、J. Lu、X. Huang、W. Deng、M. Ke 和 Z. Liu，（2023）。[56] T. Wan、K. Zhang、J. Li、Z. Yang 和 Z. Yang，（2023）。[57] W. Wang、M. Hu、X. Wang、G. Ma 和 K. Ding，2302.06314v1。[58] 更多详情请参阅补充材料。[59] N. Mac´e、F. Alet 和 N. Laflorencie，Phys. Rev. Lett. 123，180601（2019）。[60] A. B¨acker、M. Haque 和 I. M. Khaymovich，《物理评论 E》100，032117（2019）。[61] K. Zhang、Z. Yang 和 C. Fang，Phys. Rev. Lett. 125，126402 2020( )。[62] N. Okuma、K. Kawabata、K. Shiozaki 和 M. Sato，Phys. Rev. Lett. 124，086801（2020）。[63] D. S. Borgnia、A. J. Kruchkov 和 R.-J. Slager，Phys. Rev. Lett. 124，056802（2020）。[64] K. Yokomizo 和 S. Murakami，《物理评论快报》123，066404 (2019)。[65] C. Lee 和 R. Thomale, Phys. Rev. B 99, 201103(R) (2019)。[66] W.-T. Xue、M.-R. Li、Y.-M. Hu、F. Song 和 Z. Wang, Phys. Rev. B 103, L241408 (2021)。[67] L. Xiao、T. Deng、K. Wang、G. Zhu、Z. Wang、W. Yi 和 P. Xue, Nature Physics 16, 761 (2020)。[68] S. Longhi, Phys. Rev. Lett. 103, 123601 (2009)。[69] S. Longhi, Physical Review A 92, 10.1103/PhysRevA.92.042116 (2015)。[70] E. M. Graefe、H. J. Korsch 和 A. Rush, New Journal of Physics 18, 075009 (2016)。[71] Z. Gong、Y. Ashida、K. Kawabata、K. Takasan、S. Higashikawa 和 M. Ueda, Phys. Rev. X 8, 031079 (2018)。[72] N. Silberstein、J. Behrends、M. Goldstein 和 R. Ilan, Physical Review B 102, 10.1103/PhysRevB.102.245147 (2020)。[73] 数值上，我们发现，在 theta 的某个参数范围内，ρ_b 会出现微小波动，这可能与不同 theta 下晶格的边界结构和谱性质的细节有关，仍有待进一步研究。[74] L.-C. Ha、L. W. Clark、C. V. Parker、B. M. Anderson 和 C. Chin, Phys. Rev. Lett. 114, 055301 (2015)。[75] G. Gauthier、I. Lenton、N. M. Parry、M. Baker、M. J. Davis、H. Rubinsztein-Dunlop 和 T. W. Neely, Optica 3, 1136 (2016)。[76] A. Mazurenko 、 C. S. Chiu 、 G. Ji 、 M. F. Parsons 、 M. Kanasz-Nagy、R. Schmidt、F. Grusdt、E. Demler、D. Greif 和 M. Greiner, Nature 545, 462 (2017)。[77] X. Qiu、J. Zou、X. Qi 和 X. Li, npj Quantum Informa- tion 6, 87 (2020)。

补充材料

I. 从光学势拟合紧束缚参数

在正文中，为了清晰展示广义趋肤效应，参数的选取并未借助光学晶格势。在本节中，我们使用文献 [S1]中介绍的方法，给出一个关于这些参数的计算示例。我们的模型的静态光学势为

$$V(x,y)=V_x\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_L}x+V_1\sin^2\frac{2\pi}{\lambda_L}y+V_2\sin^2(\frac{4\pi}{\lambda_L}y+\phi/2), \tag{S1}$$

其中， V_x (V_1， V_2)表示沿 x （y）方向的静态单势阱（双势阱）势强度， ϕ 是双阱势的相移。势能极小值位于 $x_0=n\pi/k$；对于双势阱，极小值分别位于 $y_0\approx n\pi/k$和（$n+1/2$）π/k （其中 n 为任意整数）。其精确值取决于势强度，并在我们的计算中通过数值方法得到。在极小值处将势能展开至二阶，可得

$$\begin{aligned}
V(x,y)&=\frac{1}{2}(V_x+V_1+V_2)-\frac{1}{2}[V_x\cos(2kx)+V_1\cos(2ky)+V_2\cos(4ky+\phi)]\\
&\approx\frac{1}{2}(V_x+V_1+V_2)-\frac{1}{2}[V_x\cos(2kx_0)+V_1\cos(2ky_0)+V_2\cos(4ky_0+\phi)]\\
&+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[4V_xk^2\cos(2kx_0)](x-x_0)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[4V_1k^2\cos(2ky_0)+16V_2k^2\cos(4ky_0+\phi)](y-y_0)^2\\
&=\frac{1}{2}(V_x+V_1+V_2)-\frac{1}{2}[V_x\cos(2kx_0)+V_1\cos(2ky_0)+V_2\cos(4ky_0+\phi)]\\
&+\frac{m}{2}[4V_1\frac{k^2}{2m}\cos(2ky_0)+16V_2\frac{k^2}{2m}\cos(4ky_0+\phi)](y-y_0)^2\\
&+\frac{m}{2}[4V_x\frac{k^2}{2m}\cos(2kx_0)](x-x_0)^2,
\end{aligned} \tag{S2}$$

与 $k=\frac{2\pi}{\lambda_L}$一起。因此，总哈密顿量可以写成

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+V(x,y)=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+\frac{m}{2}\omega_x^2\delta_x^2+\frac{m}{2}\omega_y^2\delta_y^2, \tag{S3}$$

其中 $\delta_x=x-x_0$、 $\delta_y=y-y_0$ 和

$$\omega_x=\sqrt{4V_x\frac{k^2}{2m}\cos(2kx_0)}=\sqrt{4V_xE_r\cos(2kx_0)},\quad \omega_y=\sqrt{4V_1E_r\cos(2ky_0)+16V_2E_r\cos(4ky_0+\phi)}, \tag{S4}$$

其中 $E_r=\hbar^2k^2/2m$。能量和波函数为

$$E_{l_x,l_y}=\hbar\left[\omega_x(l_x+\frac{1}{2})+\omega_y(l_y+\frac{1}{2})\right]+V(x_0,y_0),$$

$$\psi_{l_x,l_y}=\sqrt{\frac{1}{2^{l_x+l_y}l_x!l_y!}}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}(\omega_x\omega_y)^{1/4}\exp\left[-\frac{1}{4}\left(\omega_x\delta_x^2+\omega_y\delta_y^2\right)\right]H_{l_x}\left(\sqrt{\frac{\omega_x}{2}}\delta_x\right)H_{l_y}\left(\sqrt{\frac{\omega_y}{2}}\delta_y\right),$$

其中， $l_{x/y}$ 分别表示沿 x 和 y 方向的量子数，并且

$$H_l(z)=(-1)^le^{z^2}\frac{d^l}{dz^l}\left(e^{-z^2}\right)$$

即为厄米多项式。该波函数给出了势阱中瓦尼尔态的零阶近似。这里， s 轨道表示为（l_x, l_y） = (0, 0)，而 p_x 轨道表示为（l_x, l_y） = (1, 0)。需要注意的是，我们所考虑的 s 和 p_x 轨道对应于深度和位置不同的双势阱。因此，由于不同基底之间存在非零重叠积分，这种零阶近似不够准确

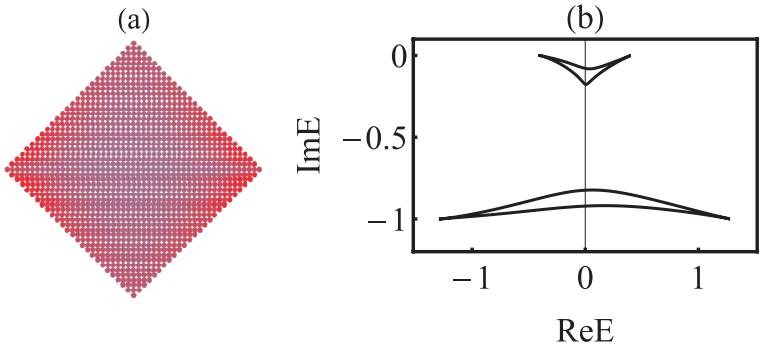


图 S1。**沿 $k_+ = k_x + k_y$ 方向的平均密度分布和谱绕数。(a)** 菱形几何上的平均密度分布，显示出边界上的弱局域。（b）沿 $k_+ = k_x + k_y$ $k_- = k_x - k_y = \pi/2$ $t_p =$ 方向 0.64 $t_{sp} = 0.16$ $t'_{sp} = 0.04$ $L = 61$ 的具有非平凡谱绕数的复能谱，其中固定为 。参数为 $t_s = -0.2$、 、 、 。菱形形状的对角线长度为 。

其中。为此，我们采用参考文献 [S1] 中的方法，构造重叠积分较小的瓦尼尔态。具体而言，零阶谐振子波函数表示为 $\phi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R})$，局域于格点$\mathbf{R}$，它们近乎正交，即

$$\int \mathrm{d}\mathbf{x}\phi^*_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R})\phi_{\alpha'}(\mathbf{x}-\mathbf{R}') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} + \epsilon_{\alpha\mathbf{R},\alpha'\mathbf{R}'}, \tag{S5}$$

其中 $\epsilon_{\alpha\mathbf{R},\alpha'\mathbf{R}'}$ 为应用 约为零。因此，我们可以通过考虑一个新的基来改善正交性。 is

$$\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R}) = \phi_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R}) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha'\mathbf{R}'}\epsilon_{\alpha'\mathbf{R}',\alpha\mathbf{R}}\phi_{\alpha'}(\mathbf{x}-\mathbf{R}'), \tag{S6}$$

其通过.....进行归一化。

$$\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{x}) \to \tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{x})/\sqrt{\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\left|\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{x}')\right|^2}. \tag{S7}$$

因此，这组新的波函数彼此之间的重叠应更小，

$$\int \mathrm{d}\mathbf{x}\tilde{\phi}^*_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R})\tilde{\phi}_{\alpha'}(\mathbf{x}-\mathbf{R}') = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right). \tag{S8}$$

执行迭代过程 N次后，可以得到具有 $\mathcal{O}\left(\epsilon^{2^N}\right)$ 精度的正交归一基底。获得正交基底后，$\mathbf{R}$ 与$\mathbf{R}'$ 之间的隧穿参数计算如下

$$t_{\alpha\alpha'}(\mathbf{R}-\mathbf{R}') = \int \mathrm{d}\mathbf{x}\tilde{\phi}^*_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{R})H(\mathbf{x})\tilde{\phi}_{\alpha'}(\mathbf{x}-\mathbf{R}'), \tag{S9}$$

其中 $H(\mathbf{x})$ 的形式为

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(x,y). \tag{S10}$$

作为示例，我们设定 $V_1 = 10$ 和 $V_2 = 13$，对于 ϕ 和 V_x的不同取值，相应的紧束缚参数列于表 I中，这些参数与正文中选定的参数相当。为观察广义趋肤效应，我们在图 S1（a）和（b）中绘制了表 $k_+ = k_x + k_y$ 中的一组参数沿 $k_+ = k_x + k_y$ 方向的密度分布和谱绕数。表 I中的示例的趋肤边界局域性弱于正文中的示例，但仍可根据图 S1（b）中非平凡的谱绕数预测趋肤积聚的出现。

ϕ	V_x	t_s	t_p	t_{sp}	t'_{sp}
0.8π	0.8	-0.2	0.64	0.16	0.04
0.8π	1.2	-0.18	0.62	0.13	0.03
0.85π	1	-0.19	0.63	0.14	0.03

T表 I. 紧束缚模型的跃迁参数随 ϕ 的变化，单位为 $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$。

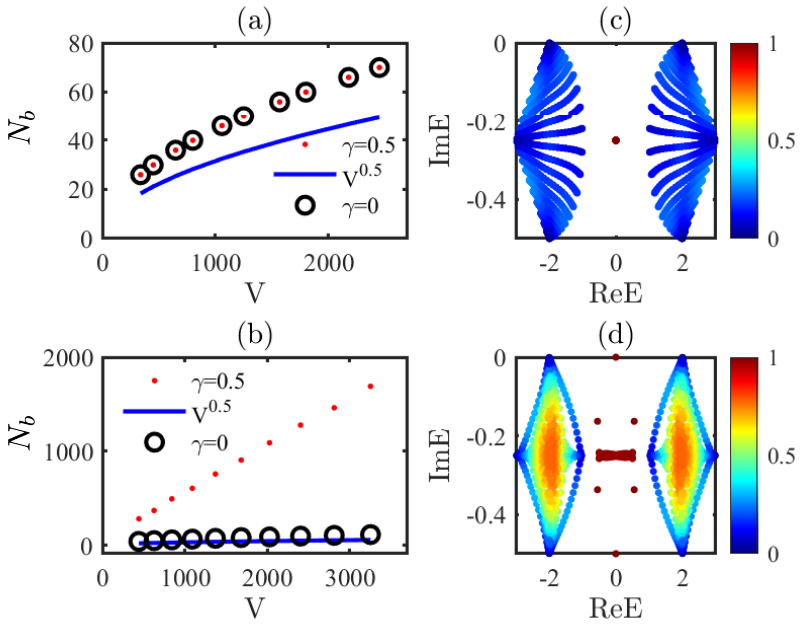


图 S2. **非厄米 sp 梯子模型的面积律和局域化性质**。**(a)** 和 **(b)** 方形几何和菱形几何中边界模数目随系统体积的变化。红点（黑色圆圈）对应具有 $\gamma = 0.5\,(\gamma = 0)$ 的边界模。蓝线由 $N_b = \sqrt{V}$ 给出，作为对比。边界模定义为其在晶格格点最外侧两层上的密度为 $\rho_b > 1/2$ 的本征态。**(c)** 和 **(d)** 分别为方形几何和菱形几何的 OBC 能谱，本征态根据 ρ_b 以不同颜色标记。方形几何和菱形几何的尺寸分别为 $L_x \times L_y = 25 \times 25\,(V = 625)$ 和 $L_x \times L_y = 39 \times 39\,(V = 761)$。$L_{x,\,y}$ 表示菱形几何的对角线长度。其他参数为 $t_s = 1$，$t_p = 1$，$t_{sp} = 1$，$t'_{sp} = 0.5$。

II. 几何依赖的皮肤效应的体积律

广义趋肤效应的体积律表明，边界（趋肤）模的数量与晶格的体积成正比，$N_b \propto V$。为验证这一说法，我们将边界模定义为其在选定边界处的总密度 $\rho_b > 0.5$ 的模，其中

$$\rho_b := \sum_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{B}} \sum_{\alpha=s,p_x} |\psi_{n,\alpha,\boldsymbol{r}}|^2$$

以及 $\mathcal{B}$ 选定边界（定义为晶格格点最外侧两层）。需要注意的是，该定义无法区分非厄米皮肤模与源自厄米拓扑的常规边缘态。用于验证广义趋肤效应体积律的结果如图S2 （a）和（b）所示。在方形几何中，N_b 与$\sqrt{V}$呈现相似的标度关系，并且厄米情形与非厄米情形之间没有差异（分别对应 为零和非零）。因此，我们可以得出结论，此处的边缘态源自厄米拓扑性质。相比之下，对于菱形几何，当非厄米性开启时，N_b 会显著增大，并且与系统体积成正比，表明非厄米皮肤模的出现。因此，我们通过数值计算验证了二维 sp梯子模型的体积律。在图S2 （c）和（d）中，我们展示了不同几何结构下系统的复能谱，不同颜色表示每个本征态的边界密度 ρ_b。可以清楚地看到，在方形几何中，只有部分带隙内零能本征态局域于系统边界（），而大多数

本征态在菱形几何中都成为边界模（ ρ_b 较小，但仍大于 0.5）。

III. sp 梯子模型中沿斜向的非厄米趋肤效应

布洛赫哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}(k_x,k_y)=\boldsymbol{h}(k_x,k_y)\cdot\boldsymbol{\sigma}-i\gamma(\sigma_0-\sigma_z)/2, \tag{S11}$$

其中， $\boldsymbol{\sigma}$ 是由 2×2 单位矩阵和泡利矩阵组成的向量， $\boldsymbol{h}(k_x,k_y)$ 是一个具有四个分量的向量，$h_0(k_x,k_y)=\cos k_x$， $h_x(k_x,k_y)=-2t'_{sp}\sin k_y\sin k_x$， $h_y(k_x,k_y)=2t_{sp}\sin k_x+2t'_{sp}\cos k_y\sin k_x$， $h_z(k_x,k_y)(t_p+t_s)\cos k_x$。为观察沿斜向的非厄米趋肤效应，我们定义

$$\begin{cases}k_+=\frac{k_x+k_y}{2},\\ k_-=\frac{k_x-k_y}{2}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_x=k_++k_-,\\ k_y=k_+-k_-,\end{cases}$$

其中， k_+ 和 k_- 分别是沿 $x+y$ 和 $x-y$ 方向的晶体动量。因此，哈密顿量可以写成

$$\mathcal{H}(k_+,k_-)=\boldsymbol{h}(k_+,k_-)\cdot\boldsymbol{\sigma}-i\gamma(\sigma_0-\sigma_z)/2, \tag{S12}$$

with

$$\begin{aligned}
&h_0(k_+,k_-)=(t_p-t_s)\cos(k_++k_-)=(t_p-t_s)\cos k_+\cos k_--(t_p-t_s)\sin k_+\sin k_-,\\
&h_x(k_+,k_-)=-2t'_{sp}\sin(k_+-k_-)\sin(k_++k_-)=t'_{sp}\cos(2k_+)-t'_{sp}\cos(2k_-),\\
&h_y(k_+,k_-)=2t_{sp}\sin(k_++k_-)+2t'_{sp}\cos(k_+-k_-)\sin(k_++k_-)\\
&=2t_{sp}\sin k_+\cos k_-+2t_{sp}\cos k_+\sin k_-+t'_{sp}\sin(2k_+)+t'_{sp}\sin(2k_-),\\
&h_z(k_+,k_-)=-(t_p+t_s)\cos(k_+-k_-)=-(t_p+t_s)\cos k_+\cos k_--(t_p+t_s)\sin k_+\sin k_-.
\end{aligned}$$

将哈密顿量改写为 $\beta_+=\exp(ik_+)$和 $\beta_-=\exp(ik_-)$的形式，可得

$$H(\beta_+,\beta_-)=\begin{pmatrix}-\beta_+\beta_-t_s-\frac{t_s}{\beta_+\beta_-} & -t'_{sp}\beta_-^2-t_{sp}\beta_+\beta_-+\frac{t'_{sp}}{\beta_+^2}+\frac{t_{sp}}{\beta_+\beta_-}\\ t'_{sp}\beta_+^2+t_{sp}\beta_+\beta_--\frac{t_{sp}}{\beta_+\beta_-}-\frac{t'_{sp}}{\beta_-^2} & \beta_+\beta_-t_p+\frac{t_p}{\beta_+\beta_-}-i\gamma\end{pmatrix}$$

接下来，我们将 β_- 视为参数，并写出多项式 $f(\beta_+,E)=\det[H(\beta_+,\beta_-)-E]$ 为

$$\begin{aligned}
&f(\beta_+,E(\beta_-))=\beta_+^3t_{sp}t'_{sp}\beta_-+\beta_+^2\left(-t_pt_s\beta_-^2+t_{sp}^2\beta_-^2+{t'_{sp}}^2\beta_-^2\right)\\
&\beta_+\left(-Et_p\beta_-+Et_s\beta_-+i\gamma t_s\beta_-+t_{sp}{t'_{sp}}^2\beta_-^3-\frac{2t_{sp}t'_{sp}}{\beta_-}\right)\\
&+E^2+i\gamma E-2t_pt_s-2t_{sp}^2-2{t'_{sp}}^2\\
&+\frac{1}{\beta_+}\left(-\frac{Et_p}{\beta_-}+\frac{Et_s}{\beta_-}+\frac{i\gamma t_s}{\beta_-}+\frac{t_{sp}t'_{sp}}{\beta_-^3}-2t_{sp}t'_{sp}\beta_-\right)\\
&+\frac{1}{\beta_+^2}\left(-\frac{t_pt_s}{\beta_-^2}+\frac{t_{sp}^2}{\beta_-^2}+\frac{{t'_{sp}}^2}{\beta_-^2}\right)\\
&+\frac{t_{sp}t'_{sp}}{\beta_+^3\beta_-}.
\end{aligned}$$

将 $f(\beta_+,E(\beta_-))=0$ 的六个根按绝对值排序，当第三个和第四个根的绝对值相等时，该模型的广义布里渊区解由这两个根给出，它描述了沿 $x+y$ 方向的趋肤积聚。同样地，将 β_+ 视为参数，我们可以将多项式改写为

$$\begin{aligned}
&g(\beta_-,E(\beta_+))=\beta_-^3t_{sp}t'_{sp}\beta_++\beta_-^2\left(-t_pt_s\beta_+^2+{t_{sp}}^2\beta_+^2+{t'_{sp}}^2\beta_+^2\right)\\
&+\beta_-\left(-Et_p\beta_++Et_s\beta_++i\gamma t_s\beta_++t_{sp}t'_{sp}\beta_+^3-\frac{2t_{sp}t'_{sp}}{\beta_+}\right)\\
&-2t_pt_s-2{t_{sp}}^2-2{t'_{sp}}^2+E^2+i\gamma E\\
&+\frac{1}{\beta_-}\left(-\frac{Et_p}{\beta_+}+\frac{Et_s}{\beta_+}+\frac{i\gamma t_s}{\beta_+}+\frac{t_{sp}t'_{sp}}{\beta_+^3}-2t_{sp}t'_{sp}\beta_+\right)\\
&+\frac{1}{\beta_-^2}\left(-\frac{t_pt_s}{\beta_+^2}+\frac{{t_{sp}}^2}{\beta_+^2}+\frac{{t'_{sp}}^2}{\beta_+^2}\right)+\frac{t_{sp}t'_{sp}}{\beta_+\beta_-^3},
\end{aligned}$$

其中 $f(A,E(B))=g(A,E(B))$。因此，沿着 $x+y$和 $x-y$的广义布里渊区解（以及趋肤积聚）是等价的，这与正文中指出的互易-镜像对称性有关。

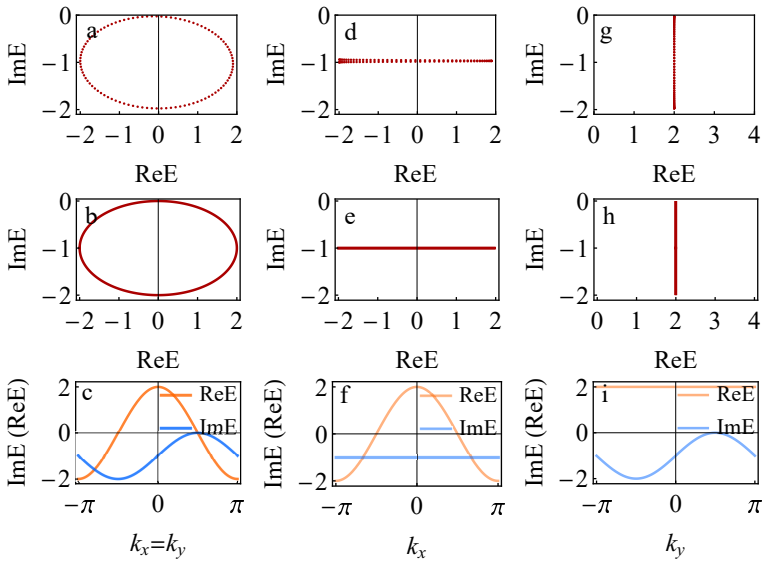


图 S3. **二维 Hatano-Nelson 模型的动态重构能量轨迹与复能谱的比较。a)** 当波包的动量沿 $k_x = k_y$ 方向变化时，利用 $F_x = F_y = 10$ 重构得到的能量轨迹（一个环）。**(b-c)** 布里渊区中沿 $k_x = k_y$ 方向的能谱。**(d)** 当波包的动量沿 k_x 方向变化时，利用 $F_x = 10, F_y = 0$ 重构得到的能量轨迹（一段弧）。**(e-f)** 沿 $k_y = 0$方向的能谱。**(g)** 利用 $F_x = 0, F_y = 10$ 重构得到的能量轨迹（一段弧），波包的动量沿 k_y 方向变化。**(h-i)** 沿 $k_x = 0$方向的能谱。系统的尺寸选为 $L_x = L_y = 33$。

IV. 布洛赫振荡中的非幺正动力学与非厄米趋肤效应

趋肤效应与谱拓扑相关，可用绕数表征。为了测量复本征能量的谱绕数，我们采用一种利用布洛赫振荡重构能谱的方法。该方法最初用于研究二维（2D）Hatano–Nelson 模型 [S2]。将该方法扩展到二维后，我们便可研究高维趋肤效应。具体而言，当对系统施加静力 $\boldsymbol{F}$ 时，波包将在晶格中周期性振荡（即布洛赫振荡），其运动可由经典运动方程描述 [S3–S6]

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{F}, \frac{d\langle \boldsymbol{r}\rangle_t}{dt} = \mathrm{Re}\nabla_{\boldsymbol{k}} E(\boldsymbol{k}), \frac{d\ln(\mathcal{N}_t)}{dt} = 2\mathrm{Im}E(\boldsymbol{k}), \tag{S13}$$

其中， $\mathcal{N}_t$ 和 $\langle \boldsymbol{r}\rangle_t$ 分别是时间 t 时瞬时态的范数和质心。因此，我们可以根据波包的运动重构布里渊区中特定路径上的复谱。

A. 二维中的单能带情形 ns

作为一个简单示例，我们首先考虑一个表现出几何依赖的趋肤效应的二维单带模型。该模型的哈密顿量为 [S7]

$$H(\boldsymbol{k}) = 2\cos k_x + i\sin k_y - i. \tag{S14}$$

为了动力学地 重构其谱时，我们将一个高斯波包作为初始态 ，

$$|\psi_0\rangle = A\exp\left[-(x-x_0)^2/W - (y-y_0)^2/W + ik_x^0 x + ik_y^0 y\right]$$

与 $k_x^0 = k_y^0 = 0$，其中 A 是归一化因子，参数 W 控制波包的宽度。由不同静力下的公式（S13）得到的结果如图S3（a）、（d）和（g）所示，准确再现了沿 $x + y$ 方向的环状谱，见图 [S3（b）]，，以及沿 x 和 y方向各自的弧状谱，见图 [S3 （e）和（h）]。为更清晰地展示能带结构，这些谱的实部和虚部分别显示于图S3（c）、（f）和（i）中。

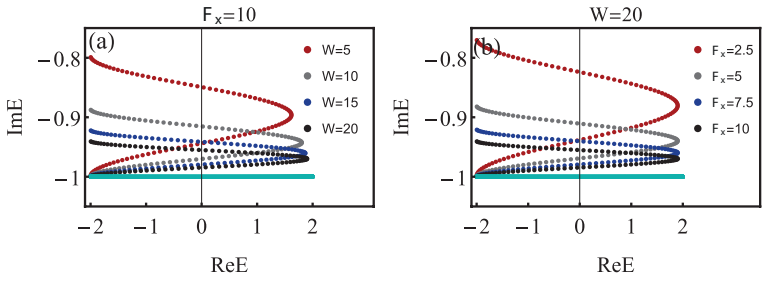


图 S4。**重构的能量轨迹，其中 $F_y = 0$ 具有不同宽度的初始波包和不同的静力**。。（a）当增加 W 时，重构的能量轨迹逐渐趋近于能谱。（b）当增加 F_x 时，重构的能量轨迹逐渐趋近于能谱（青色线）。 $F_y = 0$在两个面板中均设定，且预期动力学结果（点）沿着 k_x ，通过 $k_y = 0$ （青色线）重构能谱。

为了进一步研究波包有限宽度的影响，我们计算了沿 x 方向、具有不同波包宽度或不同力的轨迹。如图S4 （a）所示，随着波包宽度 W 增大，重构的能量轨迹逐渐趋近于理论轨迹。这是因为较大的波包宽度对应于动量空间中更窄的展宽。另一方面，布洛赫振荡的周期与所施加力的强度成反比，因此，较强的力对应于更短的振荡时间，并能抑制波包的展宽。与此一致，随着力 F_x增大，重构的能量轨迹逐渐趋近于理论轨迹，如图S4 （b）所示。

B. 一维中的双能带示例

将该方法推广到多带模型是一项非平凡的任务，因为绝热定理会失效 [S8]。作为示例，我们在此考虑一个广义的一维苏-施里弗-希格尔（SSH）哈密顿量[S9–S12]，

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_L + t'_R e^{-ik} \\ t_R + t'_L e^{ik} & 0 \end{pmatrix}. \tag{S15}$$

请注意，我们忽略了由于贝里联络 [S8]，所导致的修正，这不会影响我们数值计算中的谱绕数。为了动态重构其谱，我们将初始态选为 $\psi(t=0) = u^+_{k_0} \exp(ik_0 r) \exp\left(-\frac{(r-r_c)^2}{2\sigma^2}\right)$，其中 $r_c = L/2$、 $\sigma = 10$ 和 $u^+_{k_0}$ 是 $H(k_0)$ 中具有较大虚部本征值的本征态。初始动量 k_0 的选择将在下面对具体示例的讨论中给出。

如图 S5(a) 所示，在参数范围 $t_L t'_L = t_R t'_R$内，该模型具有两个可分离的能带，在复能量平面上形成两段弧线，其本征能满足 $E(k) = E(\pi - k)$。另一方面，如图 S5(b) 所示，它们的虚部能量在 $k_x = 0$ 和 π处交叉。预计在这些交叉点之间不同动量区间内的动力学将由虚部能量较大的能带主导。在图 figS2(c) 和 (d) 中，我们展示了在两个不同动力学过程中，由波包动力学重构得到的能谱，其中 k_0 取为 0， $-\pi$ 取为相应值。结果确实重现了复谱中虚部能量较大的部分。重构出的轨迹两次经过同一个能量点，这表明整个谱的谱绕数为零，且不存在虚部能量劈裂；两者均说明不存在非厄米趋肤效应。

在图 S6中，我们考虑了广义 SSH 模型的另一种参数区域，其中存在 NHSE。其谱在复能量平面 [图 S6(a)], 中形成一个单一环状结构，并且两个不可分离能带的虚部能量在布里渊区中仅交叉一次 [图 S6(b)]。因此，我们能够恢复单环状谱的一半，如 [图 S6(c) 和 (d)]所示。我们可以从重构出的能量轨迹在时间演化过程中仅经过复能量平面中的每个点一次这一事实，推断出 NHSE 的存在。

最后，我们在图 S7中展示了另一个具有可分离能带和 NHSE 的例子。在这种情况下，两个能带中的一个始终具有更大的虚部能量，并拥有带有非平庸绕数的环状谱。重构出的能量轨迹能够捕捉这一特征，从而揭示此时 NHSE 的存在。

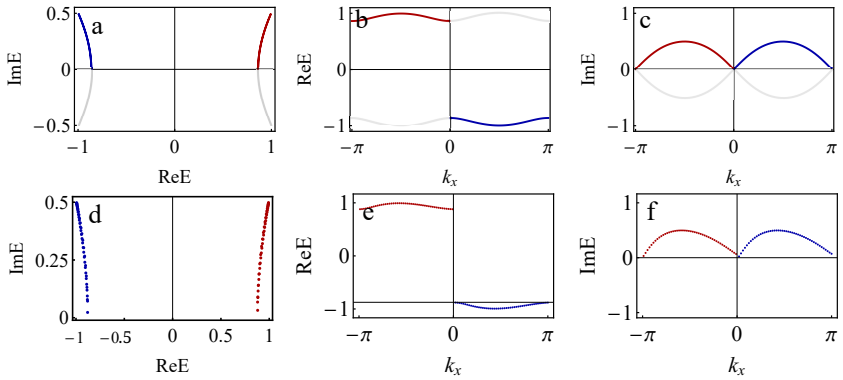


图 S5. **无非厄米趋肤效应的非厄米 SSH 模型的能谱及其动力学重构。(a)** 复能量平面上的可分离弧状谱。红色（蓝色）弧线对应于虚部较大的本征能，分别对应 $k \in (-\pi,\ 0]$ ($k \in (0,\ \pi]$)。**(b)** 实部和 **(c)** 虚部本征能随 k_x 的变化关系。**(d)** 至 **(f)** 分别为 **(a)** 至 **(c)** 中本征能的动力学重构。参数为 $L = 400$, $t_L = 12/11$, $t_R = 10/11$, $t'_L = -5/11$,$t'_R = 6/11$, 静力为 $F = 0.1$。蓝色圆点的初始动量为 $k_0 = 0$，红色圆点的初始动量为 $k_0 = -\pi$。

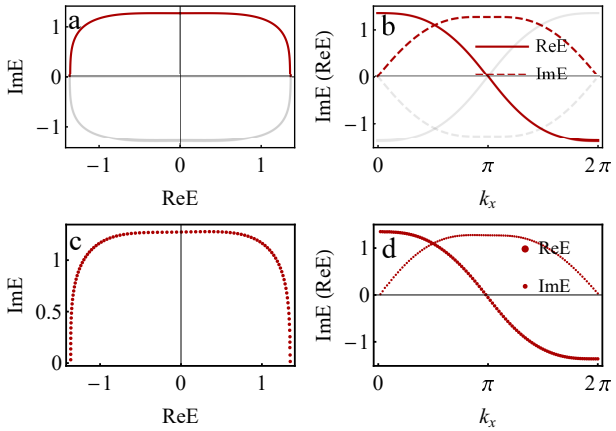


图 S6。**具有非厄米趋肤效应的非厄米SSH 模型的能谱及其动力学重构，情况 I。(a)** 复能量平面上的不可分离环状能谱。红色弧线对应于 $k \in (0, 2\pi]$ 的虚部较大的本征能。**(b)** 实部和虚部本征能随 k_x 的变化。**(c)**和 **(d)** 分别对 **(a)**和**(b)** 中的本征能进行动力学重构。参数为 $L = 400$、 $t_L = 1.3$、 $t_R = 0.7$、 $t'_L = 1.6$、 $t'_R = -0.5$，静力为 $F = 0.1$。初始动量为 $k_0 = 0$。

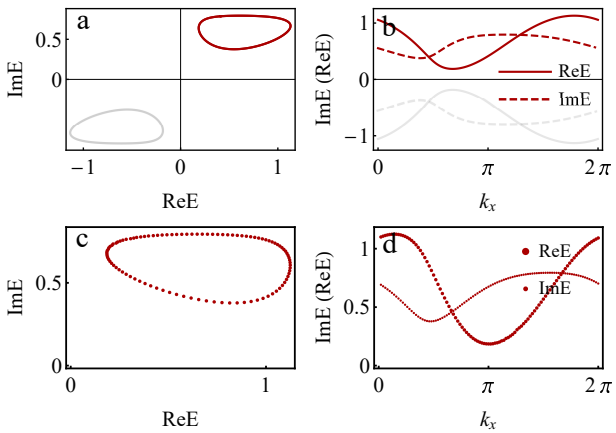


图 S7。**具有非厄米趋肤效应的非厄米 SSH 模型的能谱及其动力学重构，情况 II。(a)** 复能量平面上的可分离环状谱。红色弧线对应于 $k \in (0, 2\pi]$ 中具有较大虚部的本征能。**(b)** 本征能随 k_x 变化的实部和虚部。**(c)**和 **(d)** 分别对 **(a)**和**(b)** 中的本征能进行动力学重构。参数为 $L = 400$、 $t_L = 1.3i$、 $t_R = 0.7$、 $t'_L = 0.2$、 $t'_R = 0.9$, 静力为 $F = 0.025$。初始动量为 $k_0 = 3\pi/4$。

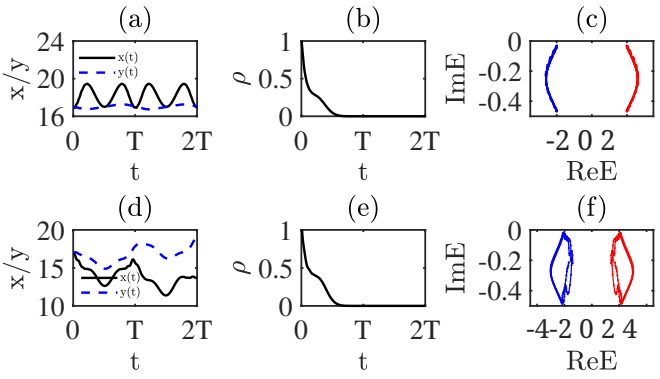


图 S8. **二维非厄米布洛赫振荡** sp **梯子晶格。** **(a)** 至**(c)** 静力$(F_x, F_y) = (0.25, 0)$ 下的质心、密度和相应的重构能量轨迹。可以看出，波包的空间分布以 $T = 2\pi/F_x$ 为周期振荡，但其密度在 $t \geqslant T$ 后消失。(d) 至 (f) 与 (a) 至 (c) 相同，但$(F_x, F_y) = (0.25, 0.25)$。其他参数与正文图 3 相同。

V. 多个布洛赫振荡周期中的动力学 S

在正文中，我们对布洛赫振荡周期采用了与厄米情形相同的定义（即一维中的 $T_B = 2\pi/F$）。然而，由于衰减效应和绝热定理失效，非厄米情形存在细微差别。本节将解释厄米系统与非厄米系统中的布洛赫振荡之间的差异，并进一步展示正文中二维 sp 梯子模型在后一种情形下的更多细节。

在厄米系统中，对系统施加静力会引发布洛赫振荡，使波包周期性演化。波包要么始终处于同一能带中（即静力远弱于带隙时的绝热过程），要么在不同能带之间跃迁（即静力较强时的非绝热过程）。在非厄米情形中，可能出现的粒子损失会带来两种影响时间演化的后果：（i）衰减效应，即波包会在演化过程中逐渐衰减并最终消失；（ii）绝热定理失效，即能量虚部最大的能带对应最弱的衰减率，从而导致波包以另一种方式在不同能带之间跃迁。鉴于这两种效应都需要一定时间才会显现，我们需要恰当选择所施加静力和非厄米损失的参数，使时间演化足够缓慢以满足绝热条件，同时又不能相对于系统的损失率过于缓慢。

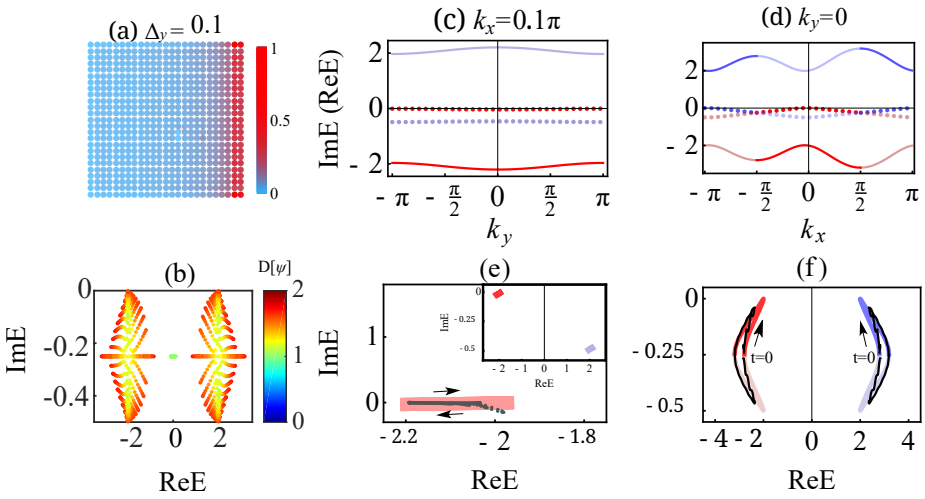
要动态重构能谱的明确条件仍需进行更详细的研究。或者，我们对不同参数下的波包动力学进行了数值研究，发现确实可以几乎完美地重构完整能谱，如图S8 （以及正文中的图 3）所示。在图S8（a）中，从波包的空间分布可以看到周期性振荡，这证明了我们对非厄米布洛赫振荡时间周期的定义是合理的。非厄米损耗仍会导致波包显著衰减 [图S8（b）], ，使实验观测变得困难。尽管如此，仍然可以从消失的波包中提取完整能谱，如图S8（c）所示。在图S8（d）至（f）中，我们展示了另一个例子，其中能量轨迹形成了一些环，这对应于非厄米趋肤效应的存在。振荡的周期性不如前一种情况明显，但仍可定性地获得具有非平庸绕数的环状谱。

VI. 非厄米趋肤效应的对称性破缺与转变

在厄米情况下 $\gamma = 0$， sp 梯子模型在旋转单个格点上的原子时会发生拓扑相变，这会诱导 s 和 p_x 轨道之间在每个晶胞内发生隧穿，并打破时间反演对称性和宇称对称性 [S13]。额外的哈密顿量项为 $\delta H = \Delta_y \sum_j C_j^\dagger \sigma_y C_j$，

其中 Δ_y 表示隧穿强度。总哈密顿量变为

$$\mathcal{H}'(k_x, k_y) = \mathcal{H}(k_x, k_y) + \Delta_y \sigma_y \tag{S16}$$



图S9。**对称性破缺相中沿不同方向的布洛赫振荡构造的复能量。线型非厄米趋肤效应、其对应的能谱及动力学探测。(a)** 存在线型非厄米趋肤效应时每个本征态的平均密度分布和 **(b)** 分数维数。**(b)** $\Delta_y = 0.1$对应的每个本征态的分数维数。**(c)** 和 **(d)**分别对应 $k_x = 0.1\pi$ 和 $k_y = 0$ 时的实部（线条）和虚部（点）的能带结构。具有较大（较小）虚部的本征值具有更高（更低）的不透明度。**(e)**和**(f)** 分别为 **(c)** 和**(d)**中相同颜色能带结构对应的复能谱，以及从波包动力学中获得的能量轨迹（黑色曲线）。**(e)**仅展示两个能带中的一个，其完整能谱显示在插图中。在 **(e)** 中，初始波包选取为 $\boldsymbol{k}_0 = (0.1\pi, 0)$，在 **(f)** 中选取为$(\pi/2, 0)$，其对应的静力分别为$(F_x, F_y) = (0.3, 0)$ 和 $\pm(0, 0.3)$。正（负）号表示分别向 k_x 正（负）方向演化，并以蓝色（红色）重构能带。在每种情况下，初始波包的 $u_{\boldsymbol{k}_0}$ 均选取为 $\mathcal{H}(\boldsymbol{k}_0)$的目标能带的本征态。其他参数与正文图 3 相同，其中 $\Delta_y = 0.1$。

其中 $\mathcal{H}(k_x,\ k_y)$ 由正文中的方程 2 给出。当 $\gamma \neq 0$时，这种原子旋转还会在 $\Delta_y \neq 0$时导致系统从广义趋肤效应转变为线型非厄米趋肤效应。这意味着系统从广义互易趋肤效应类（$J = 0$）转变为非互易趋肤效应类（$J \neq 0$），其中 J 是电流函数 [S7]。如图 S9(a) 所示，对于方形几何，所有本征态的平均密度现在都局域在右边界。图 S9(b) 展示了各本征态的分数维数 $D[\psi]$，其中大多数满足 $1 < D[\psi] \leqslant 1.5$，进一步证实了线型非厄米趋肤效应的出现。

遵循正文中的相同策略，我们考虑另一方向动量固定时的一维谱，如图 S9(c) 和 (d) 所示。与正文图 3 (a) 和 (b) 类似，图 S9(a) 中两个能带在实部能量和虚部能量上均充分分离，而图S9(b) 中虚部能量存在交叉点。然而，如图 S9(d) 所示，固定 $k_y = 0$ 时的复谱在复能量平面上形成两个具有非平庸绕数的环，表明沿 x 方向出现了线型非厄米趋肤效应。采用类似的初态和施加的静态力，谱随 k_y 和 k_x变化时非平庸绕数的缺失与存在，也可通过波包动力学捕捉，如图 S9(c) 和 (d) 所示。因此，我们模型中由原子旋转诱导的线型非厄米趋肤效应也可以通过体态动力学进行探测。

[S1] X. Li and W. V. Liu, Reports on Progress in Physics 79, 116401 (2016). [S2] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, Phys. Rev. X 8, 031079 (2018). [S3] S. Longhi, Phys. Rev. Lett. 103, 123601 (2009). [S4] S. Longhi, 《物理评论 A》 92, 042116 (2015). [S5] E. M. Graefe, H. J. Korsch, and A. Rush, New Journal of Physics 18, 075009 (2016). [S6] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, Phys. Rev. X 8, 031079 (2018). [S7] K. Zhang, Z. Yang, and C. Fang, Nature Communications 13, 2496 (2022). [S8] N. Silberstein, J. Behrends, M. Goldstein, and R. Ilan, Phys. Rev. B 102, 245147 (2020). [S9] F. K. Kunst, E. Edvardsson, J. C. Budich, a nd E. J. Bergholtz, Phys. Rev. Lett. 121, 026808 (2018). [S10] B. Zhu, R. L¨u, and S. Chen, 《物理评论 A》 89, 062102 (2014). [S11] T. E. Lee, Phys. Rev. Lett. 116, 133903 (2016).

[S12] S. Lieu, Phys.Rev. B **97**, 045106 (2018). [S13] X. Li、E. Zhao 和 W. Vincent Liu, 《自然·通讯》**4**，1523（2013）。