R^2引力中的宇宙学：高阶导数标量凝聚背景的影响

Raj Kumar Das, [1], * Aurindam Mondal, [1], † Subir Ghosh, [1], ‡ 和 Supriya Pan[2], [3], §

[1] *Physics and Applied Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, 203 B. T. Road, Kolkata 700108, India*

[2] *Department of Mathematics, Presidency University, 86/1 College Street, Kolkata 700073, India*

[3] *Institute of Systems Science, Durban University of Technology, PO Box 1334, Durban 4000, Republic of South Africa*

爱因斯坦广义相对论的一个著名扩展是加入 R^2项；该项没有鬼激发，并且在线性化框架下，会还原为爱因斯坦广义相对论和一个额外的高阶导数标量。根据 [1], 上述标量扇区能够维持类似时间晶体的最低能态，并具有非平凡的时间依赖性。利用此前关于该标量在最低能量下能够维持具有周期性时间依赖的模式这一结果，我们将这种凝聚态视为一个源，并研究此背景下的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）宇宙学。该 R^2项的影响可解释为一种反作用。这种凝聚态的一个显著结果是，无论宇宙的几何结构是开放还是封闭，在适当的参数范围内，凝聚态都能在加速膨胀开始之前引发一个减速阶段；此外，在某些情况下，它还有助于避免减速参数出现奇点（该奇点存在于常规 FLRW 宇宙学中）。

arXiv:2304.03803v2 [gr-qc] 8 Aug 2024

I. 引言

现代宇宙学令人振奋，这要归功于各类天文观测任务提供的大量观测数据。早期宇宙和晚期宇宙的物理学仍然神秘莫测，这引发了科学界的浓厚兴趣。过去数年来，宇宙学家一直在努力理解我们宇宙的动力学，而这些动力学应与高、低红移处现有的观测探针相一致。然而，尽管开展了许多观测任务，宇宙的实际动力学仍有待揭示。宇宙的动力学隐藏在爱因斯坦引力方程中，该方程将时空几何与物质分布联系起来。在大尺度上均匀各向同性宇宙的背景下， [2, 3]其几何由弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克（FLRW）几何刻画；只要给定引力理论和物质分布，便可研究宇宙的动力学。在暗能量（爱因斯坦广义相对论框架下的奇异流体） [4, 5]或修正引力理论 [6–20] 的背景下，人们提出了不同的宇宙动力学模型。尽管暗能量模型和修正引力模型已广泛接受现有观测数据的检验，但我们仍有许多问题尚未充分理解或尚无答案。初始奇点便是其中之一，在那里物理定律不再成立。这促使宇宙学家寻找一种能够避免初始奇点并符合观测证据的替代理论。时间周期宇宙学便是这类尝试之一。由 Steinhardt 和 Turok 提出的宇宙学时间周期演化形式——循环宇宙学 [21], 在科学界引起了广泛关注，因为它有望解决宇宙学中的均匀性、平坦性、密度涨落等问题，尤其是奇点问题。此前相关研究并不令人满意，因为当 FLRW 宇宙的尺度因子 $a(t)$趋近于零时，物质和辐射密度会接近普朗克密度（因而取决于未知的量子引力效应），从而对 $a(t)$的反弹性质产生不利影响（相关讨论见例如[22]）。然而，在 [23] 该模型中，宇宙呈现永无止境的“大爆炸”与“大坍缩”阶段交替序列，使得宇宙的温度和密度在每次从大坍缩转变到大爆炸时都保持有限。有趣的是， [23]中提出的模型包含高阶导数动能项以及一个三次 Galileon 场；这与我们的研究相关，因为我们的模型中也包含一个高阶导数标量（不含 Galileon 项）。宇宙学循环模型的进一步完善版本见 [24]。

从这一视角出发，我们引入一种新型宇宙学，它由一种特殊形式的 $f(R)$ 引力所产生，其中包含至二次的 R 项（R 为黎奇标量），并具有固有的时间周期性特征。这类模型是一种高阶导数理论，且没有鬼问题，并支持暴胀；它由 Starobinsky [25], 提出后引发了大量研究活动，尤其是在宇宙学领域。按照惯例，其激发谱是在一个线性化框架中揭示的 [26]。非常有趣且对我们的目的至关重要的是，研究表明，在德西特时空（dS）或反德西特时空（AdS）背景下，线性化模型会解耦为常规的自旋 2 引力子和一个高阶导数标量（*HDS*）模。这个额外的标量模已经令人头疼；除此之外，它本质上还是高阶导数的。当然，任何能量分布都会通过其能量-

* raj1996cool@gmail.com
† aurindammondal99@gmail.com
‡ subirghosh20@gmail.com§
supriya.maths@presiuniv.ac.in

动量张量。在本研究中，我们希望以一种新颖的方式，将 HDS 对宇宙学演化的影响解释为 R^2项对常规爱因斯坦引力的反作用。具体而言，我们分析了存在这种 HDS 时的 FLRW 方程，并将其能量-动量张量作为源。在一项早期研究中 [1], (其中包括本文的一位作者)，研究表明，最低能态由于 HDS 具有非正则的高阶导数结构，能够维持一种显式依赖时间的模式（随时间周期性变化）。值得强调的是，在 [26] 本文所考虑的模型中并未引入任何外部的临时源，而且 HDS 实际上是度规张量场分量的组合； R^2项的高阶导数性质赋予了系统这一额外自由度。因此，将这一模式视为空间-时间织构本身的涟漪是再自然不过的，由此引入了一个新的维度尺度——HDS 模式的频率。事实上，我们期望揭示定性上的新现象，因为 HDS 源的最低能态随时间演化，其频率的显式表达式已在本文中导出。由于我们已给出最低能模式的频率关于 R^2引力参数的显式表达式，因此本文推导出的修正显然将取决于这些参数。

最后，我们想推测一下，上文讨论的 HDS 最低能量模与时间晶体（TC）之间可能存在的联系（详情见 [27–29]）。正如 [1], 所指出的，HDS 的最低能量模被认定为具有时间晶体特性的凝聚态。在广义相对论的非对易扩展中 [30]，以及在宇宙学背景下，这一问题引起了相当多的关注 [31, 32]。然而，本研究的思路更接近一种时间晶体式系统的替代性表述，该表述由本文作者之一提出 [33], ：在二次作用量中含有高阶时间导数的模型，可以在 动量空间发生自发对称性破缺（SSB），从而使最低能量态出现非零傅里叶模。这是由于能量和动量空间中同时存在 $|K|^4$ 项与 $|K|^2$ 项所致， $|K|$ 表示动量或能量。事实上，这种现象与坐标空间中的常规自发对称性破缺颇为相似，后者可由四次和二次势生成能量更低的凝聚态。沿着这一思路， [1] 证明了 HDS 表现得如同时间晶体，而本文正是在 R^2-引力的宇宙学背景下研究这一系统。

尽管这不是我们的主要关注点，但鉴于其可能与上文提到的 TC 存在联系，在宇宙学语境下仍需作出澄清。由于我们处于纯粹的经典状态，我们将所讨论的状态称为最低能量解。事实上，众所周知，在引力或广义相对论的语境下定义能量是有问题的。在当前情况下，可以通过两种方式解释最低能态： （i）注意到，使用 R^2-引力的线性化形式，如在[26] 中那样，我们实际上得到的只是一个引力子加上 HDS 理论，而我们以最合理的限制条件，即正定性，来最小化能量，并且 (ii)在 [31, 34], 中，外部物质内容并非趋于静态的最低能量构型，而是趋于一种类似时间晶体的状态，该状态无限期地振荡。这类似于我们的模型，但有一个重要区别：HDS物质内容是由二次 R 引力在内部诱导产生的（而不是从外部引入的）。在所有这些最低能量状态中，由于时间上的周期性，连续平移对称性被部分破缺。

在本研究中，我们沿着自然的下一步展开：探讨这种高阶导数标量凝聚（HDSC）作为反作用对宇宙学产生的直接影响。我们计算 HDSC 的能量-动量张量，并将其作为爱因斯坦广义相对论（GR）的源，其中的 R^2项会产生反作用。该 TC凝聚态将如何影响宇宙学图景？为回答这个问题，我们建立了存在 HDSC 源时的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）方程。由于 HDSC 随时间演化，且其频率可由本文推导出的显式表达式给出，我们确实预期并揭示了定性上的新现象。

本文结构如下。在II节中，我们介绍二次引力的引力作用量以及 HDSC 的产生。在III 节中，我们讨论由二次引力和 HDSC 态产生的能量-动量张量的极小化。在 IV 节中，我们在当前理论框架下给出均匀各向同性背景中的弗里德曼方程，并给出宇宙学参数的解析解。随后在V节中，我们根据关键宇宙学参数的演化以及结果的含义，描述 HDS 背景下的宇宙学动力学。最后，在VI节中，我们通过简要总结全文、主要结论和未来方向，对本文作结。

II. R^2 引力和高阶导数标量凝聚

在继续讨论 R^2 模型之前，我们先考虑曲弯背景中的标量场高阶导数作用量的一般形式（例如参见 ϕ ） [35])

$$S=-\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\Big[(\Box\phi)^2+(m_1^2+m_2^2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+m_1^2m_2^2\phi^2\Big] \tag{1}$$

其运动方程和能量-动量张量分别为

$$\big[(\Box-m_1^2)(\Box-m_2^2)\big]\phi=0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}=&-(\partial_\mu\Box\phi)\partial_\nu\phi-(\partial_\nu\Box\phi)\partial_\mu\phi\\&+\frac{g_{\mu\nu}(\Box\phi)^2}{2}-\frac{m_1^2m_2^2}{2}g_{\mu\nu}\phi^2+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Box\phi)\partial_\beta\phi\\&+(m_1^2+m_2^2)\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right)\end{aligned} \tag{3}$$

这一表达式将在后续分析中发挥重要作用。我们关注的量子引力作用量为[26]

$$A=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x\ \sqrt{-g}\Big[R+\alpha R^2-2\Lambda\Big] \tag{4}$$

为避免快子激发，按照惯例α 取为正值。在文献 [26], 中，作者证明了该 R^2 作用量会解耦为传统引力理论（包含一个自旋2引力子）以及一个高阶导数标量扇区（除表面项外）。非常有趣的是，初始 R^2作用量的高阶导数性质被限制在下面给出的解耦标量扇区中

$$\frac{A_{HDS}}{\Sigma}=-\frac{1}{2}\int d^4x\ \sqrt{-\widetilde{g}}\Big[(\Box\phi)^2-\frac{R_0}{18\alpha}\phi^2 +\left(\frac{R_0}{3}-\frac{1}{6\alpha}\right)\phi\Box\phi\Big] \tag{5}$$

其中， $\Sigma=(-\frac{9\alpha c^4}{8.16\pi G})$ 是任意背景度规（不过在本文中，我们将其限制为德西特时空或反德西特时空）， $\widetilde{g}_{\mu\nu}$ 据此定义。我们将 $\Box$ 视为与最大对称背景时空 R_0 相对应的常曲率。

利用（3）对于（5）能量-动量张量变为

$$\begin{aligned}\frac{T_{\mu\nu}}{\Sigma}=&-(\partial_\mu\Box\phi)\partial_\nu\phi-(\partial_\nu\Box\phi)\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Box\phi)^2\\&+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\Box\phi)\partial_\beta\phi+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{R_0}{18\alpha}g_{\mu\nu}\phi^2\\&+\left(\frac{1}{6\alpha}-\frac{R_0}{3}\right)\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right)\end{aligned} \tag{6}$$

其中我们将参数确定为

$$(m_1^2+m_2^2)=\left(\frac{1}{6\alpha}-\frac{R_0}{3}\right)\ ;\quad m_1^2m_2^2=\left(-\frac{R_0}{18\alpha}\right) \tag{7}$$

很容易验证壳上守恒定律 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$。我们考虑所使用的单位制，l （长度）、 m （质量）、 t （时间），使得$[T_{\mu\nu}]=(ml^2/t^2)(1/l^3)=$ 能量密度。对于 m_1， m_2 的实数值，以及对于 $\alpha>0$，我们施加 $R_0=-|R_0|$ (~反德西特时空背景)，并得到

$$m_1=\sqrt{\frac{1}{6\alpha}}\ \ ;\quad m_2=\sqrt{\frac{|R_0|}{3}} \tag{8}$$

由于 ϕ 与爱因斯坦引力扇区解耦，我们提出将 $T_{\mu\nu}(\phi)$解释为一个源，并利用爱因斯坦引力方程，可以探索存在 $T_{\mu\nu}(\phi)$ 时的宇宙学。我们方案的主要新颖之处在于，这一“物质”扇区并非从外部引入，而实际上是由 αR^2 项中的 R^2 作用量。因此，此设置下的爱因斯坦方程为

$$\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{9}$$

其中，左侧由爱因斯坦的GR作用量提供，而右侧的 $\sim\int\sqrt{-g}R$, $\overline{T_{\mu\nu}}(\phi)$将在下一节中使用$\phi$ 的特定高阶导数标量凝聚解明确给出。

III. 能量-动量张量的极小化与 TC 基态

我们快速回顾先前的工作 [1] （其中一位作者也参与了这项工作），以求得能量最低的 HDSC 解。具体而言，这意味着真空被 *TC*凝聚态取代，后者充当爱因斯坦引力的舞台。通过最小化~动量空间中的能量 T_{00} ，即可求出 HDSC 参数的显式形式。我们来考虑频率为 ω 、波数为K的平面波叠加，

$$\widetilde{\phi}(K)=\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-i(\omega\eta-K.x)}\phi(x) \tag{10}$$

利用上述结果， T_{00} 由方程（6）可得，在 K空间中为

$$\frac{\widetilde{T}_{00}}{\Sigma}=f(\omega,K)|\widetilde{\phi}(K)|^2 \tag{11}$$

其中 $f(\omega,\ K)$ 具有如下形式

$$\begin{aligned}f(\omega,K)=-\alpha\Bigg[&\frac{(-3\omega^4+2c^2K^2\omega^2+c^4K^4)}{2c^2a^2}\\&+\frac{(m_1^2+m_2^2)(\omega^2+c^2K^2)}{2}+\frac{c^2a^2(m_1m_2)^2}{2}\Bigg]\end{aligned} \tag{12}$$

下文将采用两条色散关系。

- 色散关系 I：由方程（2）和（8）可得，第一条色散关系为

$$\omega^2=c^2\left(K^2+\frac{|R_0|a^2}{3}\right). \tag{13}$$

~将其代入（12）后，我们从 T_{00}（K）中求极小值$\frac{d}{dK}\left(\frac{\widetilde{T}_{00}}{\Sigma}\right)=0$; $\frac{d^2}{dK^2}\left(\frac{\widetilde{T}_{00}}{\Sigma}\right)>0$ （或 $\widetilde{T}_{00}$（ω）对于 ω）以求得以下 TC 参数

$$K_0=0\ \ ;\quad \omega_0^2=\left(\frac{c^2|R_0|a^2}{3}\right) \tag{14}$$

在约束条件 $\alpha > 0$, $|R_0| > 0$, $(1 - 2\alpha|R_0|) < 0$ 下，将上述结果代入后，凝聚态的最小能量密度为

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{T}_{00}|_{min}}{\Sigma} &= -\alpha\left[K_0^2\left(\frac{1}{6\alpha}-\frac{|R_0|}{3}\right)\right.\\ &\left.+\frac{|R_0|a^2}{6}\left(\frac{1}{3\alpha}-\frac{2|R_0|}{3}\right)\right]|\widetilde{\phi}|^2\\ &= -\frac{|R_0|a^2}{18}\left(1-2\alpha|R_0|\right)|\widetilde{\phi}|^2 \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $(1 - 2\alpha|R_0|)$ 为负值，因此该量为正。由此我们揭示了一个重要结果：在二次引力中， R 和 R^2 项可以共同作用，生成一个稳定的最低能量凝聚态 – HDSC。

- 色散关系 *II*：类似地，色散关系 II 给出极小化条件 $K_0 =0$, $\omega_0^2 = \frac{c^2a^2}{6\alpha}$ 其中 $\alpha > 0$, $|R_0| > 0$, $(1-2\alpha|R_0|) > 0$。再次得到一个具有正能量密度的最低凝聚态

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{T}_{00}|_{min}}{\Sigma} &= \alpha\omega^2\left(\frac{1}{6\alpha}-\frac{|R_0|}{3}\right)|\widetilde{\phi}|^2\\ &= \frac{a^2}{36\alpha}\left(1-2\alpha|R_0|\right)|\widetilde{\phi}|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

IV. HDSC 背景下的弗里德曼方程

共形时间 η 下的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）度规为

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-c^2d\eta^2+\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{17}$$

其中 $a(\eta)$ 是宇宙的膨胀尺度因子，而 k 表示宇宙的空间几何；$k = 0$, $+1$, -1分别代表平坦、封闭和开放宇宙。爱因斯坦方程（9）导出弗里德曼方程

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left[-\frac{8\pi Ga^2}{3}T_0^0+\frac{c^2\Lambda}{3}a^2-kc^2\right], \tag{18}$$

$$\frac{a''}{a}-\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left[\frac{4\pi Ga^2}{3}(T_0^0-3T_i^i)+\frac{a^2c^2\Lambda}{3}\right], \tag{19}$$

其中 $a' \equiv da/d\eta$。出现在方程（18、19）中的能量-动量张量分量为

$$\widetilde{T}_0^0 = \Sigma\left[\frac{1}{c^6a^8}\left(\frac{\phi''^2}{2}+4\phi'\phi''\frac{a'}{a}+\frac{11\phi'^2}{2}\frac{a'^2}{a^2}-\phi'^2\frac{a''}{a}-\phi'\phi'''\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{m_1^2+m_2^2}{2c^4a^4}\right)\phi'^2-\left(\frac{m_1^2m_2^2}{2c^2}\right)\phi^2\right], \tag{20}$$

$$\widetilde{T}_i^i = \Sigma\left[\frac{1}{c^6a^8}\left(\frac{\phi''^2}{2}-2\phi'\phi''\frac{a'}{a}-\frac{9\phi'^2}{2}\frac{a'^2}{a^2}+\phi'^2\frac{a''}{a}+\phi'\phi'''\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m_1^2+m_2^2}{2c^4a^4}\right)\phi'^2-\left(\frac{m_1^2m_2^2}{2c^2}\right)\phi^2\right], \tag{21}$$

其中 $\phi' \equiv d\phi/d\eta$。由方程（18）、（19）可推导出一个二次方程

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2-\frac{3\alpha\phi'\phi''}{4c^2a^6}\left(\frac{a'}{a}\right)-\Gamma = 0, \tag{22}$$

其中 Γ 由下式给出

$$\Gamma = \left(\frac{c^2\Lambda a^2}{3}-\frac{\phi'^2}{64a^2}+\frac{c^2a^2R_0\phi^2}{192}-kc^2\right)G(\alpha), \tag{23}$$

其中

$$G(\alpha) = \left[1-\frac{3\alpha}{16c^2a^6}\left(\frac{\frac{13\phi'^4}{128}+\frac{\phi'^2}{2}\left(9kc^2-R_0c^2a^4-\frac{7c^2\Lambda a^2}{3}\right)-\frac{7}{2}\left(\frac{c^2a^2R_0\phi^2\phi'^2}{192}\right)-\left(\frac{\phi''^2-2\phi'\phi'''}{2}\right)}{\left(\frac{c^2\Lambda a^2}{3}-\frac{\phi'^2}{64a^2}+\frac{c^2a^2R_0\phi^2}{192}-kc^2\right)}\right)\right]. \tag{24}$$

注意，在没有 αR^2 项的情况下，不会生成 HDSC ϕ，我们将恢复包含曲率和宇宙学常数的弗里德曼方程。

为了进一步推进，我们考虑一些近似：(I) 我们假设 α 很小，因此 αR^2 项的影响可以按微扰方式处理，即 $O(\alpha^2) \approx 0$ 以及

我们得到

$$\frac{a'}{a} = \left(\frac{3\alpha}{8c^2a^6}\phi'\phi''\pm\sqrt{\Gamma}\right). \tag{25}$$

注意，由于小量 α 近似，使用 m_2 于 (8) 中并不合适，因此我们将仅使用 m_1。（II）

其次，将式（14）代回式（10），并取实部，可得 $\phi \sim \cos(\omega\eta)$，其中 $\omega = ca\sqrt{\frac{|R|}{3}}$。我们利用 ϕ 的这一显式形式来计算式（ a'/a （25）中的 η，并进一步作小$\omega\eta$近似，使得 sin(~ 0)；cos($\omega\eta$) ~ 1 ，从而得到共形时间下哈勃参数的一个易处理结果。

在后续工作中，我们转而采用宇宙时间 t，并推导哈勃参数

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \approx \pm\sqrt{\left(\frac{c^2\Lambda}{3} + \frac{c^2 R_0}{192} - \frac{kc^2}{a^2}\right)\left[1 + \left(\frac{\alpha R_0^2 c^2}{192a^4}\right)\left(\frac{1}{\frac{c^2\Lambda}{3} + \frac{c^2 R_0}{192} - \frac{kc^2}{a^2}}\right)\right]} \tag{26}$$

保留参数 α 的一阶项，该参数表示 R^2 项的耦合。引入有效宇宙学常数 $\Lambda_{\rm eff} = \Lambda + \frac{|R_0|}{64}$ 后，哈勃方程可改写为

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \left(\frac{c^2\Lambda_{\rm eff}}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \alpha\frac{R_0^2 c^2}{96a^4}\right). \tag{27}$$

一个有趣的观察是，在我们粗略的近似下，TC凝聚态修正的表现类似于辐射贡献，且完全由度规产生。

采用一种方便的参数化方式，写作

$$\frac{H(a)}{H_0} = \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_\alpha\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}} \tag{28}$$

其中，式（27）用于在 $a = a_0$ （等价地， $t = t_0$）处定义

$$H_0^2 = \left(\frac{c^2\Lambda_{eff}}{3} - \frac{kc^2}{a_0^2} + \frac{\alpha c^2|R_0|^2}{96a_0^4}\right). \tag{29}$$

这里，Ω_Λ，Ω_k，Ω_α 是当前时刻相关流体组分的无量纲密度参数，定义为

$$\Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda_{\rm eff}}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2}, \quad \Omega_\alpha = \frac{\alpha c^2|R_0|^2}{96H_0^2 a_0^2}, \tag{30}$$

根据方程（28），我们得到约束关系 $\Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_\alpha = 1$。此外，尺度因子$a$（$t$）可以表示为密度参数的形式

$$a(t) = \left[\frac{\chi}{2}e^{2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_\star)} + \left(\frac{\Omega_k^2}{8\Omega_\Lambda^2} - \frac{\Omega_\alpha}{2\Omega_\Lambda}\right)e^{-2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_\star)} - \frac{\Omega_k}{2\Omega_\Lambda}\right]^{1/2} \tag{31}$$

其中

$$\chi(a_\star) = \left(a_\star^2 + \frac{\Omega_k}{2\Omega_\Lambda}\right) + \sqrt{\left(a_\star^2 + \frac{\Omega_k}{2\Omega_\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\Lambda} - \frac{\Omega_k^2}{4\Omega_\Lambda^2}\right)}. \tag{32}$$

$a(t)$ 的另一个独立解为

$$a(t) = \left(-\frac{\chi}{2}e^{2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_\star)} + \left(\frac{\Omega_\alpha}{2\Omega_\Lambda} - \frac{\Omega_k^2}{8\Omega_\Lambda^2}\right)e^{-2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_\star)} - \frac{\Omega_k}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

减速参数，以宇宙时间 $q \equiv -1 - \dot{H}/H^2 = -(a\ddot{a})/(\dot{a})^2$，定义，结果为

$$q(a) = \left[-1 + \left(\frac{\Omega_k(\frac{a}{a_0})^{-2} + 2\Omega_\alpha(\frac{a}{a_0})^{-4}}{\Omega_\Lambda + \Omega_k(\frac{a}{a_0})^{-2} + \Omega_\alpha(\frac{a}{a_0})^{-4}}\right)\right] \tag{34}$$

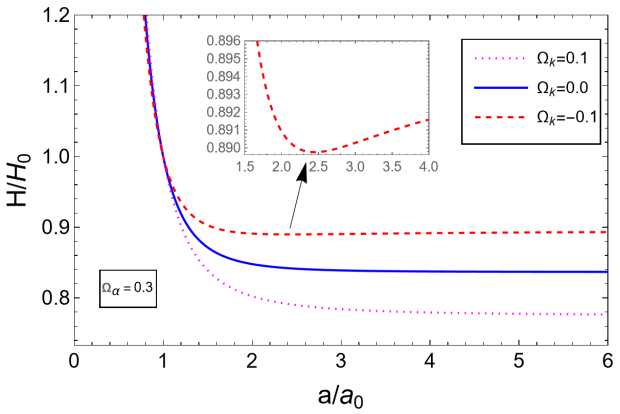

图 1。对于固定的Ω_α (= 0.3)值，展示了无量纲哈勃函数相对于宇宙尺度因子的演化，涵盖宇宙的三种空间几何，即开放宇宙（洋红色点线）、平坦宇宙（蓝色实线）和封闭宇宙（红色虚线）。此处，$\Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_\alpha = 1$。

V. 结果及其影响

最后，我们来讨论这种新型高阶导数标量（或类似时间晶体）凝IV聚态对宇宙演化可能产生的主要影响。如第 $a(t)$ 节所述，HDSC 背景可以用密度参数 Ω 表示尺度因子 j ($j = \Lambda,\ \alpha,\ k$)。由此可得两个著名的宇宙学参数，即哈勃参数 $H(a)$ 和减速参数 q（a），它们清晰地展现了我们宇宙的动力学。为了理解宇宙的动力学，我们在图1、2、3、4中，通过 H（a）和 q（a），给出了不同曲率情形和不同 HDSC 强度下的图示描述。所有图中，Ω_k 可取正值、负值或零，分别对应开放（负曲率）、封闭（正曲率）或平坦（零

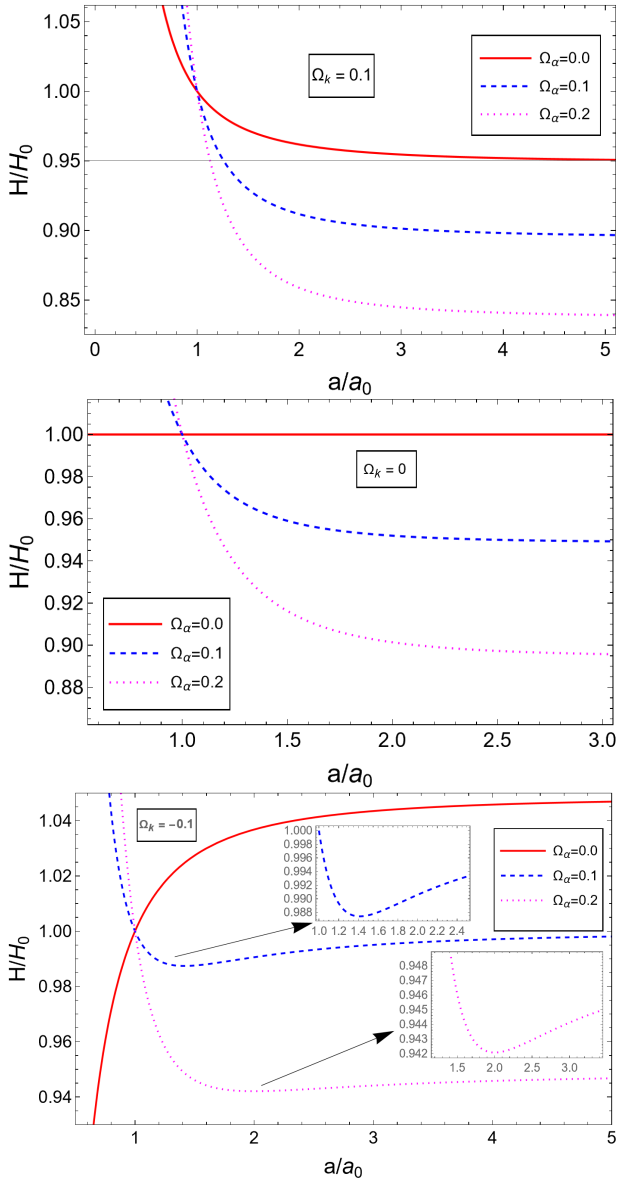

图 2. 我们展示了考虑宇宙的三种空间几何——开放宇宙（上图）、平坦宇宙（中图）和闭合宇宙（下图）时，不同 Ω_α取值对应的无量纲哈勃函数随宇宙尺度因子的演化。每幅图中，红色实线对应 $\Omega_\alpha = 0$；蓝色虚线对应 $\Omega_\alpha = 0$；洋红色点线对应 Ω α = 0.2 Λ + k + α = 1 。

此处，Ω Ω Ω。

曲率）宇宙。绘制曲线时，我们选择密度参数的取值，使其满足闭合方程 $\sum_i \Omega_i = 1$ 。

在图 1中，对于$\Omega_\alpha = 0.3$，无量纲哈勃参数的演 H/H_0 化显示为相对于 a/a_0 Ω 为正、为负和为零时$_k$。由于根据方程（30），显然 Ω_Λ、Ω_α始终为正，但 Ω_k 可以随着 k 而

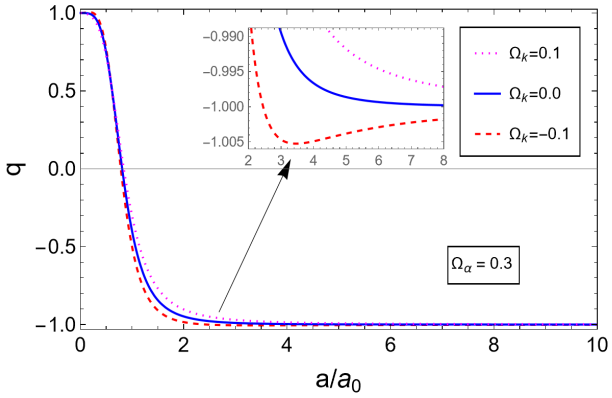

图 3. 对于固定的 Ω_α (= 0.3)，图中展示了减速参数在不同宇宙空间几何下的演化：开放宇宙（洋红色点线）、平坦宇宙（蓝色实线）和闭合宇宙（红色虚线）。此处，$\Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_\alpha = 1$。

取三个不同的值 $(0, +1, -1)$，并且只有在 Ω_k 为负值时（即正曲率或闭合宇宙），它才会产生相反的贡献，并且$H(a)$ $vs.$ a 分布中存在驻点（在当前情况下为极小值）的可能性。

为清楚揭示 HDSC 的影响，在图 2 中，我们绘制了三种不同宇宙空间几何下哈勃参数关于a/a_0 的演化，分别对应 $\Omega_k = 0.1$ （图 2 左上图）、$\Omega_k = 0$（图 2 右上图）和 $\Omega_k = -0.1$ （图 2 下图）；对于每种情况，我们分别取 Ω_α 的三个不同取值，即 $\Omega_\alpha = 0$、0.1、0.2，同时考虑到其为正且较小，并相应固定 Ω_Λ 。请注意，对于 $\Omega_k > 0$ （开放宇宙），曲线形态在定性上相似（见图 2 左上图），随着 Ω_α 增大，仅存在定量差异。然而，对于 $\Omega_k = 0$ （平坦宇宙），曲线变化显著：$\Omega_\alpha = 0$ 给出众所周知的常数值 $H(a)$，而非零的 Ω_α则表明 $H(a)$ 随 a 发生明显变化（见图 2 右上图）。再者，$\Omega_k < 0$的情形（见图 2 下图，即闭合宇宙）最为有趣：非零的 Ω_α 会产生与 $\Omega_\alpha = 0$ （无 HDSC）完全不同的曲线形态；前者在 a较大时趋于饱和之前会先达到最小值。从方程（28）也很容易看出，不同 Ω_α 对应的所有曲线都会在 $a = a_0$处相交。

现在，我们研究与前文相同参数组下减速度参数 $q(a)$ 的行为。图 3 展示了一个非常有趣的事实：对于任何宇宙（无论 Ω_k 为正、为负还是为零），非平凡的 Ω_α 都会导致 的符号发生变化：当 $q(a)$ 从正变为负，随着‘a’从 0 增大。这表明，HDSC 会在加速开始之前产生一个减速阶段。显然，这意味着宇宙在减速阶段之后进入晚期加速阶段。

我们再次分析 Ω_α 的强度，针对这三种

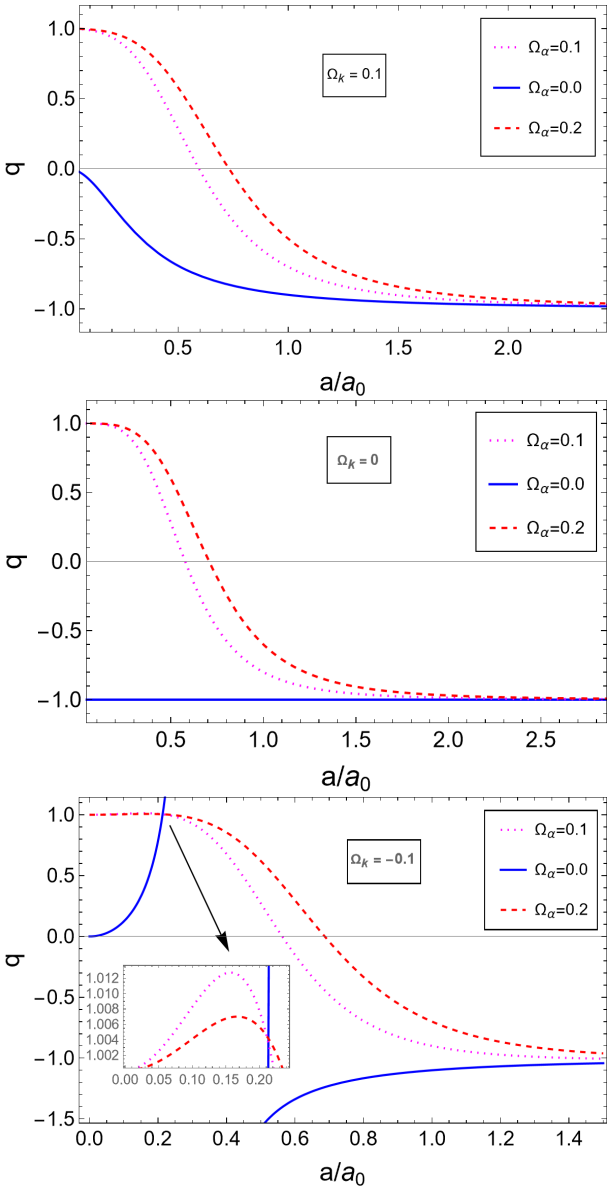

图4。我们展示了针对不同Ω_α、考虑宇宙的三种空间几何时减速参数的演化，即开放宇宙（上图）、平坦宇宙（中图）和封闭宇宙（下图）。在每幅图中，实红线对应于$\Omega_\alpha = 0$，蓝色虚线对应于$\Omega_\alpha = 0$，洋红色点线对应于 $\Omega_\alpha = 0.2$。这里，$\Omega_\Lambda + \Omega_k + \Omega_\alpha = 1$。

不同的宇宙空间结构。在图 4 中，我们总结了 Ω 的减速参数演化$_k$ 为正（对应图 4 左上图）、为零（图 4 右上图）和为负（图 4 下图）的情形，分别取 Ω 的三个不同值α 以表征 HDSC 背景的强度，即 $\Omega_\alpha = 0$，0。1，0。2。图 4 左上图（对应 $\Omega_k > 0$）和图 4 右上图（$\Omega_k = 0$）显示了早期宇宙中减速阶段的出现，此时尚未

当 Ω 的三个取值均满足时，便会出现加速阶段α。然而，从图 4 的下方曲线（对应于 $\Omega_k < 0$）可以看出，在不含 $q(a)$ 项的传统情形下，凝聚态能够缓解奇点。这一点从式（34）可清楚看出：当 $\Omega_\alpha = 0$， q 将在 $a/a_0 = \sqrt{\Omega_k/\Omega_\Lambda}$ 时变为奇点，其中 Ω_k为负值。

回顾一下，在传统宇宙学中，只有从外部引入物质，才会出现减速阶段。然而，在我们的情形中，并未引入外部物质，这一减速阶段完全由 HDSC 产生（来自 αR^2 项）。我们推测，HDSC 或许可以被视为一种具有类辐射行为的新型物质候选者。图4 左上和右上图展示了 TC凝聚态的强度如何通过不同曲线影响 q 的行为，这些曲线渐近地与 $\Omega_\alpha = 0$ 曲线合并。然而，$\Omega_k = -0.1$ 的情况则大不相同，如图4 下图所示。在较小的 a 扇区中，Ω q 对应的$_\alpha = 0$ 会出现不连续性（标准 GR，不含 R^2 项，因此没有凝聚态）；而当 Ω_α (R^2项产生凝聚态效应时，不连续性会变得平滑，最终所有曲线在较大的 q处渐近趋于一个负值 $a_\circ$

VI. 总结与结论

这项工作提出的主要新颖观点是，由 R^2对爱因斯坦引力的修正所产生的额外高阶导数标量激发（除常规的自旋 2 引力子之外），可以形成一种具有显式周期性时间依赖的最低能量类凝聚态（HDSC）。正如本文所述，这种 HDSC 显然令人联想到新近提出的类时间晶体（TC）态的构想 [28]（另见 [27, 29, 33]）。正如多位研究者所论证的，TC 可能会对宇宙学动力学产生一些影响 [31, 32, 36–42]。然而，需要强调的是，宇宙学中引入的 TC 与此处所考虑的、由二次 R^2 项诱导的 HDSC 之间存在重要的定性区别。请回想此前的研究中，TC 特征被纳入外部引入的物质中，而在我们的框架下，TC 凝聚态是在 R^2-引力扇区内部产生的。[1] 在当前情形中，只有在引力作用量中存在 *iff* R^2-项时，HDSC 才会由度规张量分量的组合在内部产生。

[1] 需要指出的是，除了宇宙学常数外，本研究未引入外部物质扇区。不过，鉴于当前观测数据支持ΛCDM 宇宙学模型，进一步在方程（4）中加入物质扇区将很有意义。显然，TC凝聚态背景仍将存在，但物质自由度可能对 TC 参数产生非平凡的影响，进而影响宇宙演化。

如前文所述，我们利用 $f(R) \sim R + \alpha R^2$ 可将常规引力与高阶导数标量扇区解耦这一特性，并提出一种模型：前者在后者的背景中演化，而后者处于高阶导数标量凝聚相。因此，相应 HDSC 的能量-动量张量充当宇宙学动力学的源，其特征由 FLRW 线元描述。我们发现，在某些近似条件下，可以解析求得 FLRW 宇宙的尺度因子，进而求得其他宇宙学参数。我们以图形方式展示了宇宙学参数的行为，即哈勃率（$H(a)$和减速参数（$q(a)$）（见图 1、2、3、4），涵盖不同空间几何的宇宙以及不同强度的 HDSC；HDSC 由引力作用量中的 α 项产生，该项源自 αR^2。我们发现了一些有趣的现象，清楚地表明 HDSC 能显著影响宇宙学动力学。

从封闭宇宙的哈勃率演化（见图 2的下图）中，我们注意到，Ω_α 的非零值会产生与$\Omega_\alpha = 0$ （无 HDSC）完全不同的曲线，前者在趋于大 a值时会先达到最小值。另一方面，从图 3中我们注意到，无论宇宙的空间几何如何，HDSC都会在宇宙开始加速之前产生一个减速阶段。这表明，在宇宙早期的减速阶段之后，它会进入晚期加速阶段。由于非平凡的 Ω_α 给出了与宇宙曲率无关的一些有趣结果，因此在图 4 中，我们进一步研究了不同空间几何下，减速参数的演化如何依赖于通过Ω_α 量化的 HDSC 的不同强度。对于 $\Omega_k > 0$ （图 4的左上图），$\Omega_k = 0$ （图 4的右上图）宇宙会在减速阶段之前进入早期加速阶段，并且对于 Ω_α的不同取值，这一结论仍然成立。然而，对于封闭宇宙（对应图 4的下图），我们发现 HDSC 可以避免 q（a）中的奇点，该奇点会在没有 αR^2 项的传统情形中出现。

我们分析得出的最终要点如下：

- 本文所研究的高阶导数标量凝聚，似乎纯粹表现为一种几何效应。从这个意义上说，这种具有固有时间尺度的含时凝聚态，是时空本身的一种特征。这暗示，时间平移不变的时空可能会演变为具有时间周期性的时空。

- 高阶引力理论中的一般鬼问题在 R^2-引力中并不存在，然而该理论仍然受到（相对无害的）额外（虚假）标量自由度的困扰。在R^2-引力框架中，正如我们所展示的，这个额外的标量可以充当凝聚态，从而取代真空构成了传统引力的稳定背景，从而带来了具有明确预测的潜在改进。

- 无需任何物质场，也能产生类似辐射的特征（见式（28））。这是一个非常有趣的结果，因为仅凭几何修正，就能实现类似辐射的流体。

因此，结合已有结果以及本文关于晚期和早期宇宙的研究成果，我们认为，HDSC 的物理学需要在宇宙学动力学中得到相当多的关注。特别是，完全从几何部分提取出类似辐射的流体这一现象，更凸显了这一点。几何修正所导致的这一额外相对论性物种，可能意味着宇宙中存在惰性中微子 [43–47], ，而这或许会对哈勃张力问题产生值得关注的影响。研究发现，惰性中微子的存在可能缓解哈勃常数张力 [48–51] （详见 [52] 第 7 节，其中有详细讨论）。此外，自然也会有人想知道，HDSC 是否可能在早期宇宙中产生某种几何暗能量（早期暗能量流体） [53], ，或者能否在解释宇宙学张力方面发挥积极作用[52, 54, 55]。此外，由于当前的宇宙学框架完全建立在几何部分之上，因此还可以进一步探究，在这一新的几何背景下，能否避免各种宇宙学理论中出现的有限时间未来奇点 [56–58]。

此外，我们还想提及一项近期研究[59] ，该研究揭示了减速参数符号翻转与相变之间的联系。在当前背景下寻找类似的关联或许值得一试。

最后，我们回顾一下，本文所考虑的HDSC起源于爱因斯坦引力的线性化版本以及 R^2-项。尽管这种凝聚态结构的具体性质将如何受到非线性效应的影响确实是一个开放问题，但我们相信，本文所考虑的 HDSC的一般特征可能会受到非线性的定量影响，却不会发生定性改变。毫无疑问，作为一个新兴领域，对 HDSC 的本质及其影响的理解，能够为宇宙学和天体物理学开启新的窗口。进一步探究HDSC 在除二次 $f(R)$引力之外的其他替代引力理论中的影响，将会十分有趣。我们希望在不久的将来研究其中的一些理论。

VII. ACKNOWLEDGMENTS

作者感谢匿名审稿人提出的建设性意见，这些意见帮助我们提升了稿件质量。RKD 感谢 Naresh Saha 和 Joydeep Majhi 的有益讨论。SP 感谢科学部提供的经费支持以及。

科技部（DST）、印度政府根据“科学与技术基础设施改善基金（FIST）”计划（文件编号：SR/FST/MS-I/2019/41）。

[1] S. Chakraborty 和 S. Ghosh, 《暗宇宙物理学》35, 100976（2022）, 2001, arXiv: .04680 [广义相对论与量子宇宙学]。[2] K. K. S. Wu、O. Lahav 和 M. J. Rees, 《自然》397, 225（1999）, 9804062, arXiv:宇宙学天体物理/。[3] J. Yadav、S. Bharadwaj、B. Pandey 和 T. R. Se- shadri, 《皇家天文学会月刊》364, 601（2005）, arXiv:astro-ph/0504315。[4] E. J. Copeland、M. Sami 和 S. Tsujikawa, 《国际现代物理学杂志D辑》15, 1753（2006）, arXiv:hep-th/0603057。[5] K. Bamba、S. Capozziello、S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, 《天体物理与空间科学》 **342**, 155 2012 1205 3421 （）, arXiv: . [ ] 广义相对论与量子宇宙学。[6] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, eConf C0602061, 06（2006）, arXiv:hep-th/0601213。[7] S. Capozziello 和 M. Francaviglia, 《广义相对论与引力》 40, 357 （ 2008 ）, 0706, arXiv: .1146 [宇宙学天体物理]。[8] T. Padmanabhan, 《广义相对论与引力》40, 529（2008）, arXiv:0705.2533 [广义相对论与量子宇宙学]。[9] T. P. Sotiriou 和 V. Faraoni, 《现代物理学评论》 82, 451 （ 2010 ）, arXiv:0805.1726 [广义相对论与量子宇宙学]。[10] A. Silvestri 和 M. Trodden, 《物理学进展报告》72, 096901（2009）, 0904, arXiv: . 0024 [宇宙学天体物理]。[11] A. De Felice 和 S. Tsujikawa, 《相对论生活评论》13, 3（2010）, arXiv:1002.4928 [广义相对论与量子宇宙学]。[12] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, 《物理学报告》 505, 59 （ 2011 ）, arXiv:1011.0544 [广义相对论与量子宇宙学]。[13] T. Clifton、P. G. Ferreira、A. Padilla 和 C. Sko- rdis, 《物理学报告》513, 1（2012）, arXiv:1106.2476 [宇宙学天体物理]。[14] K. Hinterbichler, 《现代物理学评论》84, 671（2012）, arXiv:1105.3735 [高能物理理论]。[15] S. Capozziello 和 M. De Laurentis, 《物理学报告》509, 167（2011）, 1108, arXiv: .6266 [广义相对论与量子宇宙学]。[16] M. Sami 和 R. Myrzakulov, 《国际现代物理学杂志D辑》25, 1630031（2016）, 1309, arXiv: .4188 [高能物理理论]。[17] C. de Rham, 《相对论生活评论》17, 7（2014）, arXiv:1401.4173 [高能物理理论]。[18] Y.-F. Cai、S. Capozziello、M. De Laurentis 和 E. N. Saridakis, 《物理学进展报告》79, 106901（2016）, arXiv:1511.07586 [广义相对论与量子宇宙学]。[19] S. Nojiri、S. D. Odintsov 和 V. K. Oikonomou, 《物理学报告》692, 1（2017）, arXiv:1705.11098 [广义相对论与量子宇宙学]。[20] S. Bahamonde、K. F. Dialektopoulos、C. Escamilla- Rivera、G. Farrugia、V. Gakis、M. Hendry、M. Hohmann、J. Levi Said、J. Mifsud 和 E. Di Valentino, 《物理学进展报告》86, 026901（2023）, arXiv:2106.13793 [广义相对论与量子宇宙学]。[21] P. J. Steinhardt 和 N. Turok, 《科学》296, 1436（2002）, arXiv:hep-th/0111030。[22] R. C. Tolman, *Relativity thermodynamics and cosmol-* , 《信使出版ogy 1987 社》 （）。[23] A. Ijjas 和 P. J. Steinhardt, 《物理评论快报》117, 121304（2016）, 1606, arXiv: .08880 [广义相对论与量子宇宙学]。[24] A. Ijjas 和 P. J. Steinhardt, 《物理学快报B辑》795, 666（2019）, arXiv:1904.08022 [广义相对论与量子宇宙学]。[25] A. A. Starobinsky, 《物理学快报B辑》91, 99（1980）。[26] L. Alvarez-Gaume、A. Kehagias、C. Kounnas、D. L¨ust 和 A. Riotto, 《物理学进展》64, 176（2016）, arXiv:1505.07657 [高能物理理论]。[27] A. Shapere 和 F. Wilczek, 《物理评论快报》109,160402(2012), arXiv:1202.2537 [其他凝聚态物理]。[28] F. Wilczek, 《物理评论快报》109,160401(2012), arXiv:1202.2539 [量子物理]。[29] K. Sacha 和 J. Zakrzewski, 《物理学进展报告》81, 01640120181704(), arXiv: 。03735 [量子物理]。[30] P.Das、S. Pan、S. Ghosh和 P.Pal, 《物理评论D辑》98, 024004 2018 1801 (), arXiv: 。07970 [高能物理理论]。[31] J. S. Bains、M.P.Hertzberg和 F. Wilczek, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》05,011 2017 1512 (), arXiv: 。02304 [高能物理理论]。[32] I. Bubuianu、S.I.Vacaru 和 E. V.Veliev, 《欧洲物理学杂志增刊》136,149 (2021), arXiv:1907.05847 [一般物理学]。[33] S. Ghosh, 《物理学A辑：统计力学及其应用》407, 245 (2014), arXiv:1208.4438 [高能物理理论]。[34] D. A. Easson和 A.Vikman, (2016 1607 00996), [ ] arXiv: 。广义相对论与量子宇宙学 。[35] G. W. Gibbons、C.N. Pope 和 S. Solodukhin, 《物理评论D辑》100,105008 (2019), arXiv:1907.03791 [高能物理理论]。[36] S. I. Vacaru, 《经典量子引力》35, 245009 (2018), arXiv:1803.04810 [一般物理学]。[37] A. Addazi、A. Marcian` o、R.Pasechnik 和 G. Prokhorov, 《欧洲物理学杂志C》79, 251 (2019), arXiv:1804.09826 [高能物理理论]。[38] X.-H.Feng、H. Huang、S.-L.Li、H. L¨u 和 H. Wei, 《欧洲物理学杂志C》80,1079 (2020), arXiv:1807.01720 [高能物理理论]。[39] P. Das、S. Pan 和 S. Ghosh, 《物理学快报B辑》791, 66 (2019), arXiv:1810.06606 [高能物理理论]。[40] D. Yoshida 和 J. Soda, 《物理评论D辑》100,123531 (2019), arXiv:1909.05533 [高能物理理论]。[41] S.-L. Li、H.L¨u、H. Wei、P. Wu和 H.Yu, 《物理评论D辑》99,104057(2019), arXiv:1903.03940 [广义相对论与量子宇宙学]。[42] H.-H. Li 和 Y.-S. Piao, 《物理学快报B辑》801,135156(2020), arXiv:1907.09148 [广义相对论与量子宇宙学]。[43] S.Dodelson 和 L. M.Widrow, 《物理评论快报》72,17 (1994), arXiv:hep-ph/9303287。[44] K.N. Abazajian *et al.*, (2012), arXiv:1204.5379 [高能物理唯象学]。[45] L. A. Anchordoqui、H.Goldberg和 G. Steigman, 《物理学快报B辑》718,1162(2013), arXiv:1211.0186 [高能物理唯象学]。[46] T. D. Jacques、L.M.Krauss和 C.Lunardini, 《物理评论D辑》 **87**, 083515 2013 [88, ( ), 勘误: 109901 2013 1301 《物理评论D辑》()], arXiv: 。3119 [宇宙学天体物理]。[47] E. Di Valentino、A.Melchiorri 和 O.Mena, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11,0182013 1304( ), arXiv: 。5981 [宇宙学天体物理]。[48] S. Carneiro、P. C. de Holanda、C. Pigozzo 和 F. Sobreira, 《物理评论D辑》100,023505(2019), arXiv:1812.06064 [宇宙学天体物理]。[49] G. B. Gelmini、A.Kusenko 和V. Takhistov, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》06,002(2021), arXiv:1906.10136 [宇宙学天体物理]。[50] G. B.Gelmini、M. Kawasaki、A. Kusenko、K.Murai和 V. Takhistov, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 **09**, 051 2020 2005 06721 ( ), arXiv:。高 [ ] 能物理唯象学 。[51] E. DiValentino、S. Gariazzo、C. Giunti、O. Mena、S. Pan 和 W. Yang, 《物理评论D辑》105,103511(2022), arXiv:2110.03990 [宇宙学天体物理]。

[52] E. Di Valentino、O. Mena、S. Pan、L. Visinelli、W. Yang、A. Melchiorri、D. F. Mota、A. G. Riess 和 J. Silk，《经典与量子引力》**38**, 153001 2021 2103 01183 ()，arXiv：。[ ]宇宙学天体物理。[53] V. Poulin、T. L. Smith、T. Karwal 和 M. Kamionkowski，《物理评论快报》**122**，221301（2019），arXiv:1811.04083 [宇宙学天体物理]。[54] L. Perivolaropoulos 和 F. Skara，《新天文学评论》**95**，101659 2022 2105（），arXiv：。05208 [宇宙学天体物理]。

[55] M. Kamionkowski 和 A. G. Riess，（2022），arXiv:2211.04492 [宇宙学天体物理]。[56] R. R. Caldwell、M. Kamionkowski 和 N. N. Wein- berg，《物理评论快报》91，071301（2003），arXiv:astro- ph/0302506。[57] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《物理评论D辑》72，023003（2005），arXiv:hep-th/0505215。[58] S. Nojiri、S. D. Odintsov 和 S. Tsujikawa，《物理评论D辑》71，063004（2005），arXiv:hep-th/0501025。[59] T. Duary、N. Banerjee 和 A. Dasgupta，《欧洲物理学杂志C辑》83，815（2023），arXiv:2303.14031 [广义相对论与量子宇宙学]。