arXiv:2304.03806v1 [quant-ph] 7 Apr 2023

耗散保护的 GKP量子比特的稳定性与退相干率

Lev-Arcady Sellem*† R´emi Robin*
Philippe Campagne-Ibarcq* Pierre Rouchon*

2023年4月11日

摘要

我们分析了一个量子谐振子的、实验上可实现的 Lindblad主方程。该方程可近似稳定有限能量的周期栅格态，即 Gottesman-Kitaev-Preskill（GKP）态；这类态可用于编码和保护逻辑量子比特。我们给出了Lindblad主方程解的能量的显式上界。我们利用三个周期可观测量定义逻辑量子比特的布洛赫球坐标，并证明其动力学由二维环面上的一个带有Witten拉普拉斯算子的扩散偏微分方程所支配。我们证明，即使相空间两个正交分量上存在微弱的扩散噪声过程，这些逻辑坐标的演化仍然极其缓慢。数值模拟表明，对于其他具有物理意义的噪声过程，也有类似结果。

引言

量子纠错（QEC）是构建能够运行实用算法的通用量子计算机时尚缺的关键环节。事实上，目前所有可用的量子计算平台都受到高退相干（即不受控噪声）的影响，这限制了信息丢失前可运行的计算规模和时长。

概括而言，量子纠错码，例如色码 [2]或表面码 [3]（另请参见 [1]，其中有更全面的综述），将一个逻辑量子比特编码到一组物理量子比特中，从而以一种使典型物理错误转换为两个二维子空间之间的跃迁、并可在之后加以纠正的方式，将其嵌入到更高维的希尔伯特空间中 [15]。然而，这些编码通常只有在影响物理量子比特的噪声能够保持在给定阈值以下时才能发挥作用（该阈值的确切值取决于所考虑的具体编码）；尽管在降低噪声水平和提高编码阈值方面已经取得了长足进展，但这一条件尚未在实验中得到满足[6, 10]。

*高等师范学院物理实验室，巴黎矿业学院-PSL、法国国家科学研究中心、巴黎高等师范学院-PSL、法国国家信息与自动化研究所、索邦大学、巴黎文理研究大学，法国巴黎。
†通讯作者：lev-arcady.sellem@inria.fr

©2023。本研究已被国际自动控制联合会接收，将依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎许可发表。

玻色编码提供了一种有前景的替代方案：不再使用一组含噪物理量子比特的希尔伯特空间，而是将一个逻辑量子比特编码在量子谐振子的无限维状态空间中。目标既可以是完全取代QEC编码，也可以更现实地达到低于给定QEC编码阈值的错误水平。在后一种情况下，可以通过一种编码级联的形式实现完整的量子纠错：最内层编码实际上是一种玻色编码方案，可以将其视为一种硬件高效的纠错码，而后续的（可能有多个）编码则是传统的QEC编码（参见例如 [9, 5, 16]）。在玻色编码中，用于编码量子比特的二维子空间必须经过选择，使典型的噪声过程（取决于具体的物理实现）对所编码信息的扰动最小。这通常需要利用振子的奇异态；例如，二项式编码中的福克态[12], 猫编码中的相干态叠加 [7]或Gottesman-Kitaev-Preskill（GKP）编码中的周期栅格态 [8]。对这些奇异态进行实验稳定和操控可能会带来重大的实验挑战。

对于 GKP 码，相关网格态的稳定化已在超导电路 [4]和囚禁离子 [14]中通过实验得到验证；这些实验依靠与辅助系统反复相互作用，以执行离散时间反馈控制回路。这种策略受到辅助系统耦合强度、辅助系统误差向量子比特的传播以及离散时间反馈回路速度的限制。另一种方案是，通过精心设计系统与耗散环境之间的耦合，实现自主连续时间稳定化，使系统自然弛豫至编码逻辑信息的奇异态。猫码已通过实验实现这一方案 [11], ，但 GKP 码尚未实现。

在 [17], 中，作者通过数值研究探讨了含有两个耗散子的 Lindblad主方程在自主稳定有限能量 GKP 态方面的潜力，但没有考察所提出动力学的稳定性或收敛速率。此外，他们引入的耗散子能否利用当前技术在实验中实现，尚不明确；他们提出改用一种非自主方案来近似实现这些耗散子，该方案基于与辅助量子比特的耦合、对辅助量子比特进行重复测量，并随后施加反馈脉冲。

在 [19], 中，作者基于李雅普诺夫方法，为含有四个可稳定有限能量GKP态的耗散子的Lindblad主方程，给出了明确的收敛速率，并提供了数值证据，证明其动力学在保护量子信息方面具有潜力。据我们所知，对于仅含两个耗散子的Lindblad主方程，目前尚无关于GKP态稳定性和收敛性的类似结果。所考虑的耗散子似乎也超出了当前技术的能力范围；然而，后来有人在 [18], 中提出了在现实物理约束下，于电路量子电动力学器件中实现这些耗散子的近似版本，并通过数值证据表明，这些近似耗散子在量子比特（qubits）的编码、保护和操作方面仍具有令人期待的性质。本文分析了由这四个近似耗散子诱导的动力学的数学性质。

在第 1 节中，我们定义所研究的 Lindblad主方程。在第 2 节中，我们证明 Lindblad 动力学的稳定性，并推导系统能量的显式界限。在第 3 节中，我们表明，仅考虑正交分量噪声时，无需实际求解 Lindblad 方程，即可显式计算编码量子信息的退相干率。对于更现实的噪声模型，我们提供了数值模拟，表明所观察到的保护具有鲁棒性。结论和可能的进一步发展汇总于第 4 节。计算细节见附录。

1 Lindblad 主方程

在 [18]量子谐振子的希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 上，考虑两种不同的 Lindblad主方程，用于稳定振子的有限能量 GKP 网格态。这两个 Lindblad 方程分别涉及四个（六个）耗散子，对应于正方形（六边形）网格态。我们可以从 [19] 中引入的有限能量耗散子重新推导出这两族耗散子。取 $\eta > 0, \Delta > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$；考虑量子谐振子的厄米相空间算符 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}$，它们满足对易关系 $[\mathbf{q},\mathbf{p}] = i$，以及光子数算符$\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2 - \mathbf{1})$。根据 [19],，我们可以定义算符 _

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{E}_\Delta \left(e^{i\eta\mathbf{q}} - \mathbf{1}\right) \mathbf{E}_\Delta^{-1} \tag{1}$$

以$\mathbf{E}_\Delta = e^{-\Delta\mathbf{N}}$ 作为正则化算符。该算符及其在相空间中角度为 $\theta_k = k\pi/M$ 的旋转由

$$\mathbf{V}_k = e^{i\theta_k\mathbf{N}}\, \mathbf{V}_0\, e^{-i\theta_k\mathbf{N}}, \quad 0 \le k \le 2M-1, \tag{2}$$

其构造使其在有限能量的GKP晶格态上恒等为零。

现在，利用Baker-Campbell-Hausdorff公式，我们得到

$$\mathbf{E}_\Delta\, \mathbf{q}\, \mathbf{E}_\Delta^{-1} = \cosh(\Delta)\mathbf{q} + i\sinh(\Delta)\mathbf{p} \tag{3}$$

从而得到对 Δ进行一阶展开的$\mathbf{V}_0$ 形式近似:

$$\mathbf{V}_0 = e^{-\frac{1}{2}\eta^2\cosh(\Delta)\sinh(\Delta)}\, e^{i\eta\cosh(\Delta)\mathbf{q}}\, e^{-\eta\sinh(\Delta)\mathbf{p}} - \mathbf{1} \tag{4}$$

$$\simeq \mathcal{A}\, e^{i\eta\mathbf{q}}\,(\mathbf{1} - \epsilon\mathbf{p}) - \mathbf{1} \triangleq \mathbf{L}_0 \tag{5}$$

其中 $\epsilon = \eta\sinh(\Delta)$ 以及 $\mathcal{A} = e^{-\epsilon\eta/2}$。对于由其密度算符 ρ 描述的量子谐振子（即在 $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 上的迹类厄米正算符，且 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$），我们考虑 Lindblad 主方程

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathcal{D}[\mathbf{L}_k]\rho \tag{6}$$

其中我们定义了一族林德布拉德算符

$$\mathbf{L}_k = e^{i\theta_k\mathbf{N}}\, \mathbf{L}_0\, e^{-i\theta_k\mathbf{N}} \tag{7}$$

对应于相空间中转角为 θ_k 的$\mathbf{L}_0$ 旋转，耗散子$\mathcal{D}[\mathbf{L}]$定义为

$$\mathcal{D}[\mathbf{L}](\rho) = \mathbf{L}\rho\mathbf{L}^\dagger - \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\,\rho + \rho\,\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\right). \tag{8}$$

在这一通用框架下，通过以下选择，我们恢复了稳定正方形 GKP 码空间的 Lindblad主方程（即 由对应于正方形网格态的 GKP 态张成的空间）

$$M = 2, \quad \eta = 2\sqrt{\pi} \tag{9}$$

而通过这一选择，我们恢复了稳定六角形 GKP 码空间的 Lindblad 主方程

$$M = 3, \quad \eta = 2\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}. \tag{10}$$

请注意，我们的框架可以轻松调整，以涵盖方形 GKP 码的变体，例如基于矩形或平行四边形格点的变体；也可以将其用于编码维数为 d 的 qudit，而非量子比特（对应于 $d = 2$）。例如，在方形格点中编码 qudit，相当于选取 $M = 2$, $\eta = \sqrt{2d\pi}$。我们预计，本文展示的结果可以轻松推广到这类广义几何结构，但将这一问题留待未来研究。

在这一阶段，式 (5) 中所作近似的主要影响是：与 [19], 中考虑的林德布拉德算符不同，林德布拉德算符 $\mathbf{L}_k$彼此不对易，并且在有限能量 GKP 格点态上不恒为零；因此，我们不再能期望精确地稳定这些态。换言之，为了获得实验可实现的动力学而作的近似会引入内在的残余退相干。然而，我们将在接下来的章节中证明，式 (6) 的解的能量沿轨迹保持有界，并且可以计算系统中编码的逻辑量子比特在模型所引入的额外噪声通道存在时的退相干率；特别是，将噪声强度设为零后，我们将看到，由格点态稳定不完善导致的内在退相干率在 $1/\epsilon$ 中呈指数级小。

2 稳定性分析

我们可以计算沿着由方程（6）控制的密度算符的轨迹的能量显式界，能量定义为光子数算符$\mathbf{N}$的期望值 $\langle \mathbf{N} \rangle = \mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho)$。在此，我们暂且不考虑编码逻辑信息的目标，只关注林德布拉德动力学的稳定性性质。具体而言，我们给出任意 η 和 M 取值下的能量界；而下一节将仅讨论方程（9）–（10）中的两种选择，它们用于编码一个量子比特。

我们通过形式计算，对方程（6）的解得到先验 估计；这些计算仿佛底层希尔伯特空间是有限维的（尤其忽略了与所涉及无界算符的定义域相关的任何潜在问题）。我们计划在未来的论文中利用这些估计，作为开展完全严格的数学分析的第一步。

定理1. 假设$\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_0) < +\infty$, $\epsilon\eta/2 < 0.4$ 且 ρ_t的演化由 *Lindblad* 方程 *(6)* 控制。那么，对于任意 $r \in (0,1)$ 以及所有

$t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_t) \leq -\lambda(r,\epsilon,\eta)\,\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_t) + \mu(r,\epsilon,\eta) \tag{11}$$

其中

$$\lambda(r,\epsilon,\eta) = 2M\mathcal{A}\,r\epsilon\eta\,\phi_{\epsilon,\eta} > 0, \tag{12}$$

$$\mu(r,\epsilon,\eta) = M\mathcal{A}\Big[(\epsilon^2+\eta^2)\mathcal{A} + \frac{\epsilon\eta^3}{2} + \frac{\epsilon}{2\eta(1-r)\,\phi_{\epsilon,\eta}} - r\epsilon\eta\,\phi_{\epsilon,\eta}\Big], \tag{13}$$

$$\phi_{\epsilon,\eta} = (2-\epsilon\eta/2)\mathcal{A} - 1 = (2-\epsilon\eta/2)\,e^{-\epsilon\eta/2} - 1. \tag{14}$$

定理1的证明见附录A。我们可以利用定理1的微分不等式，通过Gr¨onwall引理获得任意时刻的能量估计：

推论 2。 在与定理*1*相同的假设下，能量满足以下界：

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_t) \leq e^{-\lambda(r,\epsilon,\eta)t}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_0) + \Big(1 - e^{-\lambda(r,\epsilon,\eta)t}\Big)\,C(r,\epsilon,\eta) \tag{15}$$

其中 $C(r,\epsilon,\eta) = \mu(r,\epsilon,\eta)/\lambda(r,\epsilon,\eta)$.

在 $\epsilon \to 0^+$ 的极限下，我们得到以下渐近形式：

$$\lambda(r,\epsilon,\eta) \sim 2r\,M\,\epsilon\eta, \tag{16}$$

$$C(r,\epsilon,\eta) \sim \frac{1}{2r}\,\frac{\eta}{\epsilon}. \tag{17}$$

注意，此处， $r \in (0,1)$ 是我们在定理1的证明中需要引入的自由参数。当只关注 ϵ 较小时能量上界的渐近值时，取值 $r = 1 - \sqrt{\epsilon}$ 可得到更简单的渐近形式 $\lambda(\epsilon,\eta) \sim 2M\epsilon\eta$， $C(\epsilon,\eta) \sim \eta/(2\epsilon)$。另一方面，假设 $\epsilon\eta/2 < 0.4$ 只是确保 $\phi_{\epsilon,\eta} = (2-\epsilon\eta/2)\mathcal{A} - 1 > 0$ 的充分条件，可以放心地在脑中将其替换为 当足够小时 ϵ。特别是，这在此处给出的每次数值模拟中都得到了满足。

除了证明动力学的稳定性之外，上述估计从数值计算的角度来看也很有用。模拟量子谐振子的常用方法依赖于所谓的 Fock 基底中的伽辽金近似；该基底是由 $\mathbf{N}$ 的特征向量构成的 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ 正交归一基。在我们的情形中，式（15）的能量估计为选择该基底中的适当截断提供了依据。

3 显式退相干率

（逻辑）量子比特是希尔伯特空间 $\mathbb{C}^2$ 上的密度算符 ρ_L ，通常在布洛赫球上由其坐标（x， y， z）表示为

$$\rho_L = \frac{\mathbf{1} + x\,\boldsymbol{\sigma}_x + y\,\boldsymbol{\sigma}_y + z\,\boldsymbol{\sigma}_z}{2}, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ 是通常的泡利矩阵，并且

$$x = \mathrm{Tr}(\rho_L \boldsymbol{\sigma}_x),\ y = \mathrm{Tr}(\rho_L \boldsymbol{\sigma}_y),\ z = \mathrm{Tr}(\rho_L \boldsymbol{\sigma}_z).$$

要在量子谐振子的状态中编码一个量子比特，该状态由其在希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ 上的密度算符 ρ 描述，我们必须指定一个编码映射

$$\mathcal{E}\colon \rho \mapsto \rho_L. \tag{19}$$

当谐振子按照 Lindblad 方程演化时

$$\frac{d}{dt}\ \rho = \mathcal{L}(\rho) \tag{20}$$

我们希望计算编码后的逻辑量子比特所对应的演化，例如

$$\dot{x} = \mathrm{Tr}\left(\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\rho)\,\boldsymbol{\sigma}_x\right). \tag{21}$$

在我们的情形中，[18] 采用了一个编码映射 $\mathcal{E}$，通过在 $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ 上引入以下所谓的广义 Pauli 算符，使其适用于研究栅格态:

$$\mathbf{Z} = \mathrm{Sign}(\cos(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}_1)) \tag{22}$$
$$\mathbf{X} = \mathrm{Sign}(\cos(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}_2)) \tag{23}$$
$$\mathbf{Y} = -i\,\mathbf{Z}\mathbf{X} \tag{24}$$

其中，对于方形 GKP 码空间，$\eta = 2\sqrt{\pi}$、$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$、$\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}$；对于六角形 GKP 码空间，$\eta = 2\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$、$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$、$\mathbf{q}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{p}$。在这两种情况下，可以验证这定义了具有谱 $\{-1, 1\}$ 的有界厄米算符；这些算符彼此反对易，并满足通常的 Pauli 代数

$$\mathbf{X}\mathbf{Y} = i\,\mathbf{Z},\quad \mathbf{Y}\mathbf{Z} = i\,\mathbf{X},\quad \mathbf{Z}\mathbf{X} = i\,\mathbf{Y}. \tag{25}$$

编码随后定义为

$$x = \mathrm{Tr}(\mathbf{X}\rho),\quad y = \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}\rho),\quad z = \mathrm{Tr}(\mathbf{Z}\rho). \tag{26}$$

现在让我们假设 ρ 根据式(6)演化，其中还可能加入用于模拟例如实验缺陷的额外误差项:

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathcal{D}[\mathbf{L}_k](\rho) + \kappa\,\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) \tag{27}$$

在无噪声情形（$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}} = 0$）下，或在考虑正交分量噪声（$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}} = \mathcal{D}[\mathbf{q}] + \mathcal{D}[\mathbf{p}]$）时，我们证明了，沿轨迹的逻辑坐标（$x,\ y,\ z$）的衰减率无需求解 Lindblad 方程（27）即可计算。更准确地说，我们利用了式（24）中定义的广义 Pauli 算符是由$\mathbf{q}_1$ 和$\mathbf{q}_2$ 的周期函数之积这一事实，得到以下结果:

定理 3（方形情形）**：** 设 $M=2$、 $\eta=2\sqrt{\pi}$ 和¯f、 g 是两个取实值的 2π-周期函数。定义周期函数 $h\left(\theta_1\text{、 }\theta_2\right) =f\left(\theta_1\right) g\left(\theta_2\right)$ 以及周期算子

$$\mathbf{h}=h(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q},\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})=f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) \tag{28}$$

并假设 ρ 通过加入正交分量噪声的式 *(6)* 演化：

$$\frac{d}{dt}\rho_t=\sum_{k=0}^{2M-1}\mathcal{D}[\mathbf{L}_k](\rho_t)+\kappa\,\mathcal{D}[\mathbf{q}](\rho_t)+\kappa\,\mathcal{D}[\mathbf{p}](\rho_t). \tag{29}$$

那么，$\mathbf{h}$ 的期望值满足：

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\mathbf{h}\rho_t)=-\mathcal{A}\epsilon\eta\operatorname{Tr}\left(\mathcal{L}_\sigma h(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q},\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\,\rho_t\right) \tag{30}$$

with

$$\mathcal{A}=e^{-\epsilon\eta/2}, \tag{31}$$

$$\sigma\equiv\sigma(\epsilon,\eta,\kappa)=\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4}+\frac{\kappa\eta}{8\mathcal{A}\epsilon}, \tag{32}$$

$$\mathcal{L}_\sigma=\mathcal{T}_\sigma\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes\mathcal{T}_\sigma, \tag{33}$$

$$(\mathcal{T}_\sigma f)(\theta)=\sin(2\theta)f'(\theta)-\sigma f''(\theta). \tag{34}$$

定理 3 的证明见附录 B。因此，若已知 $\mathcal{L}_\sigma$的特征值和特征函数（可由 $\mathcal{T}_\sigma$ 的特征值和特征函数推得），我们便能计算 $\mathbf{Tr(h}\rho_t\mathbf{)}$ 的演化。可以验证，对于标量积 $-\pi,\pi$， $\mathcal{T}_\sigma$ 在 H^2_{per}上是自伴的

$$\langle f,g\rangle_\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1-\cos(2\theta)}{2\sigma}}f(\theta)g(\theta)d\theta \tag{35}$$

并且

$$\langle f,\mathcal{T}_\sigma f\rangle_\sigma=\sigma\left\langle f',f'\right\rangle_\sigma, \tag{36}$$

由此，运用经典论证（例如见*e.g.* [20]），我们可以推知 $\mathcal{T}_\sigma$ 的谱是离散、实数且非负的，因此可记为

$$0=\mu_{0,\sigma}\leq\mu_{1,\sigma}\leq\mu_{2,\sigma}\leq\ldots \tag{37}$$

其中 $\mu_{0,\sigma}=0$ 是与常数特征函数对应的平凡特征值。 [13] 关于 Witten 拉普拉斯算子的结果可用于 $\mathcal{T}_\sigma$，从而得到其在 $\sigma\to0^+$范围内的下一个特征值：

事实 4。

$$\mu_{1,\sigma}=\left(\frac{4}{\pi}+o(1)\right)e^{-1/\sigma}, \tag{38}$$

$$\exists\epsilon_0>0,\forall\sigma>0,\quad\mu_{2,\sigma}\geq\epsilon_0. \tag{39}$$

结合式(39)和(33)，我们推导出 $\mathcal{L}_\sigma$ 的特征值，将其记为

$$0 = \lambda_{0,\sigma} \le \lambda_{1,\sigma} \le \lambda_{2,\sigma} \le \dots \tag{40}$$

$$\lambda_{1,\sigma} = \mu_{0,\sigma} + \mu_{1,\sigma} = \left(\frac{4}{\pi} + o(1)\right) e^{-1/\sigma}, \tag{41}$$

$$\lambda_{2,\sigma} = \mu_{1,\sigma} + \mu_{0,\sigma} = \left(\frac{4}{\pi} + o(1)\right) e^{-1/\sigma}, \tag{42}$$

$$\lambda_{3,\sigma} = \mu_{1,\sigma} + \mu_{1,\sigma} = \left(\frac{8}{\pi} + o(1)\right) e^{-1/\sigma}, \tag{43}$$

$$\lambda_{4,\sigma} = \mu_{2,\sigma} + \mu_{0,\sigma} \ge \epsilon_0. \tag{44}$$

具体而言，与特征值 $\lambda_{k,\,\sigma}$相关的特征函数的贡献，其衰减速率随 σ 的变化呈指数级快于与前三个非零特征值相关的三个特征函数的贡献。回到定理 3 的结果，我们看到，在经历典型时间尺度为 $\tau_{trans} = (\mathcal{A}\epsilon\eta)^{-1}$ 的初始瞬态后，任意周期观测量（尤其是定义逻辑坐标的那些观测量）的期望值都会在指数级更慢的时间尺度 $\tau_{decay} = \left(\frac{4}{\pi}\mathcal{A}\epsilon\eta\, e^{-1/\sigma}\right)^{-1}$ 上衰减。

遗憾的是，对于比正交分量噪声更一般的噪声模型，我们无法调整上述分析，因为定理 3 的证明高度依赖于参与动力学的林德布拉德算符与周期算子之间的对易关系。然而，为了评估所提出的 GKP 编码对各种噪声过程的鲁棒性，我们在图 1 中将针对不同 $\mathcal{L}_{\text{noise}}$、通过对式 (27) 进行完整林德布拉德模拟提取出的实际退相干率，与正交分量噪声下得到的渐近值 $\lambda_{1,\,\sigma}$ 进行了比较。尽管每种噪声都会产生定量上不同的退相干率，但我们观察到，退相干率随噪声强度 κ 变化呈现出定性上相似的衰减。请注意，在无噪声时 ($\kappa = 0$) 退相干率仍不为零；第 1 节将此归因于近似的有限能量林德布拉德算符 $\mathbf{L}_k$ 并不对易：为获得实验可实现的动力学所作的近似会导致内禀的残余退相干，其速率 $1/\tau_{decay} = \frac{4\mathcal{A}\epsilon\eta}{\pi}\, e^{-4/(\mathcal{A}\epsilon\eta)}$ 关于 $1/\epsilon$ 呈指数级小。

最后，也可以对六角形 GKP 码开展类似的分析：

定理 5 （六角形情形）。设 $M = 3$, $\eta = 2\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$，以及 f, g 是两个实值 2π-周期函数。定义周期函数 $h(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1)g(\theta_2)$以及周期算子

$$\mathbf{h} = h(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}, \tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}_2) = f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\, g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}_2) \tag{45}$$

其中 $\mathbf{q}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{p}$。假设 ρ 根据加入正交分量噪声的式(6)演化：

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathcal{D}[\mathbf{L}_k](\rho_t) + \kappa\, \mathcal{D}[\mathbf{q}](\rho_t) + \kappa\, \mathcal{D}[\mathbf{p}](\rho_t). \tag{46}$$

那么，$\mathbf{h}$ 的期望值满足：

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}(\mathbf{h}\rho_t) = -\mathcal{A}\epsilon\eta\operatorname{Tr}\left(\mathcal{L}_\sigma h(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}, \tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}_2)\,\rho_t\right) \tag{47}$$

with

$$\mathcal{A} = e^{-\epsilon\eta/2}, \tag{48}$$

$$\sigma \equiv \sigma(\epsilon,\eta,\kappa) = \frac{3\mathcal{A}\epsilon\eta}{8} + \frac{\kappa\eta}{8\mathcal{A}\epsilon}, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma h = &\left(\sin(2\theta_1) + \frac{1}{2}\sin(2\theta_1+2\theta_2) - \frac{1}{2}\sin(2\theta_2)\right)\frac{\partial h}{\partial\theta_1}\\ &+\left(\sin(2\theta_2) + \frac{1}{2}\sin(2\theta_1+2\theta_2) - \frac{1}{2}\sin(2\theta_1)\right)\frac{\partial h}{\partial\theta_2}\\ &-\sigma\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\theta_1^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial\theta_1\partial\theta_2} + \frac{\partial^2 h}{\partial\theta_2^2}\right).\end{aligned} \tag{50}$$

定理 5 的证明依赖于与附录 B 中定理 3 证明所展示的计算类似、但略为繁琐的计算。最重要的是，这个新微分算子的特征值 $0 = \lambda_{0,\sigma} \le \lambda_{1,\sigma} \le \cdots$ 也可以利用在 [13] 中开发的工具计算；我们发现

事实 6。

$$\lambda_{k,\sigma} = \left(\frac{12\sqrt{3}}{\pi} + o(1)\right) e^{-2/\sigma}, \quad 1 \le k \le 3, \tag{51}$$

$$\exists \epsilon_0 > 0,\, \forall \sigma > 0, \quad \lambda_{4,\sigma} \ge \epsilon_0. \tag{52}$$

我们强调，尽管本节所采用的特征值分析仅适用于正交分量噪声，但它在我们对 GKP量子比特的研究中有多种用途。首先，在给定的参数范围内获得逻辑退相干率的闭式表达式，有助于我们深入理解能量截断与可实现的逻辑性能之间的相互作用。此外，它还可作为基准真值，用于校准数值模拟方案的参数，因为对于正交分量噪声的模拟，可以精确检验数值收敛性；这些数值参数随后可用于其他类型噪声的模拟。从长远来看，在模拟由逻辑门控制的多量子比特架构时，仅仅由于希尔伯特空间的维数随量子比特数量呈指数增长，对完整林德布拉德方程进行蛮力模拟就将变得不可能。因此，将上述显式解推广到这些架构（即使仅限于给定的噪声模型），或可成为分析它们的重要工具（此外，还需要开发适用于林德布拉德方程的模型降阶等技术，以降低问题的数值维度）。

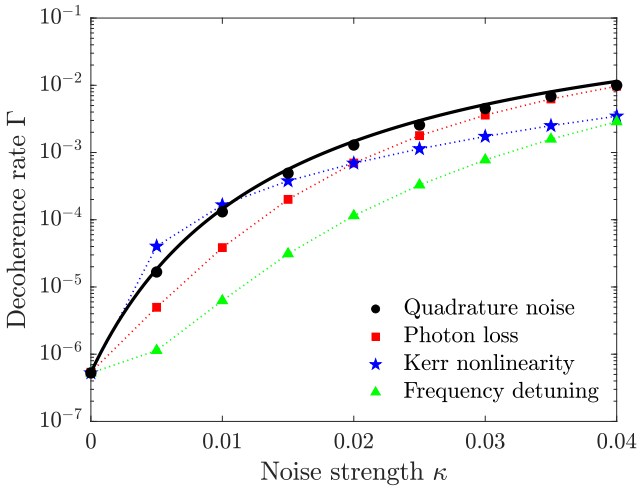

图 1：典型噪声过程对应的逻辑退相干率。我们在方形情形下模拟式 (27)（$M = 2$、$\eta = 2\sqrt{\pi}$，并在此处取 $\epsilon = 0.1$）：$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{3} \mathcal{D}[\mathrm{L}_k](\rho) + \kappa\,\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho)$，针对不同的 $\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}$取值进行计算，以模拟电路量子电动力学实验中的典型噪声过程。对于每种噪声（对应一种颜色），我们根据沿轨迹的 $\mathrm{Tr}(\mathrm{X}\rho)$ 期望值衰减拟合得到退相干率 Γ（彩色圆点），并将其表示为噪声强度 κ的函数。彩色虚线仅用于引导视线。黑色实线表示理论渐近退相干率 $\Gamma_0(\kappa) = \frac{4\mathcal{A}\epsilon\eta}{\pi}\, e^{-(\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4} + \frac{\kappa\eta}{8\mathcal{A}\epsilon})^{-1}}$，其计算方法是在式 (30) 中取 h为与林德布拉德算符 $\mathcal{L}_\sigma$ 的首个非零特征值对应的特征函数，并将该特征值替换为式 (41) 中其渐近展开的首项。黑色圆点对应正交分量噪声：$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) = \mathcal{D}[\mathrm{q}](\rho) + \mathcal{D}[\mathrm{p}](\rho)$；这是第 3 节的方法能够给出显式退相干率的唯一噪声类型。可以看到，在所考虑的范围内，这些退相干率与渐近退相干率 Γ_0 吻合良好。红色方块对应光子损耗（模拟实验中的泄漏）：$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) = \mathcal{D}[\mathrm{a}](\rho)$，其中 $\mathrm{a} = \mathrm{q} + i\mathrm{p}/\sqrt{2}$ 为湮灭算符。绿色三角形对应失谐哈密顿量（模拟实验中的频率失配）：$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) = -i\,[\mathrm{N}, \rho]$。蓝色星形对应克尔哈密顿量（模拟一种非线性效应）：$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) = -i\frac{\epsilon}{\eta}\,[\mathrm{N}^2, \rho]$。引入因子 ϵ/η是为了考虑到该过程涉及 N 的二阶多项式项，因此其预期标度与低阶过程不同。我们通过平均场论证推断这一标度：预期强度为 κ 的克尔哈密顿量所引入的退相干，与强度为 $\langle \mathrm{N} \rangle \kappa$的失谐哈密顿量所引入的退相干处于相似量级；第 2 节已证明，平均光子数 $\langle \mathrm{N} \rangle$ 的标度为 η/ϵ。对于退相位（为保持清晰而未显示），也观察到了类似的标度：$\mathcal{L}_{\mathrm{noise}}(\rho) = \frac{\epsilon}{\eta}\,\mathcal{D}[\mathrm{N}](\rho)$；对此同样适用上述平均场论证（请注意，耗散子是相应林德布拉德算符的二次表达式）。

4 结论

此处获得的指数级微小退相干率表明，由工程化耗散环境稳定的有限能量GKP网格态，可用于编码逻辑量子比特，其残余逻辑错误率能够满足量子纠错的严格要求。我们针对不同类型的物理相关噪声过程进行的数值模拟表明，这种保护应能抵御小幅实验瑕疵。

此处所考虑模型的一项关键优点是，所需构造的林德布拉德动力学可利用当前的电路 QED 技术实现，为实验实现并验证预测的逻辑保护特性铺平道路。从实验角度看，存在正交分量噪声时退相干率的显式公式，初步而言，可用于估算达到给定逻辑保护水平所需的实验参数范围，例如与将要和 GKP 编码级联的特定纠错码的阈值相关；反过来，这些参数估算也有助于确定需要解决的制造难题。

最后，在未来的出版物中，我们希望一方面利用形式上的先验 能量估计，对该系统进行完全严格的分析；另一方面，将我们的结果扩展到多量子比特架构。

致谢。 我们感谢Alain Sarlette富有帮助的讨论和评论。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）在欧盟“地平线 2020”研究与创新计划下的资助（资助协议编号：884762）。

参考文献

[1] Victor V. Albert 和Philippe Faist。《纠错动物园》。2021-。 URL: https://errorcorrectionzoo.org/.[2] H.Bombin 和M. A. Martin-Delgado。“拓扑量子蒸馏”。载于：*Physical Review Letters* 97.18（2006），第180501页。 DOI: 10.1103/ PhysRevLett.97.180501.[3] S. B. Bravyi 和A.YuKitaev。《具有边界的晶格量子码》。1998 年。 DOI: 10 . 48550 /arXiv . quant -ph / 9811052。arXiv: quant- ph / 9811052.[4] P.Campagne-Ibarcq 等。“振荡器网格态中编码量子的量子纠错”。载于：*Nature* 584.7821（2020），第 368–372 页。ISSN:1476-4687。 DOI: 10.1038/s41586-020-2603-3.[5] Christopher Chamberland 等。“使用级联猫码构建容错量子计算机”。载于：*PRX Quantum* 3.1（2022），第 010329 页

DOI:10.1103/PRXQuantum.3.010329.[6] ZijunChen 等。“通过循环纠错指数级抑制比特错误或相位错误”。载于：《自然》595.7867（2021），第 383–387 页。 ISSN: 1476-4687。 DOI:10.1038/s41586-021-03588-y。

[7] P. T. Cochrane、G.J.Milburn和W. J. Munro。《宏观上不同的量子叠加态：作为振幅阻尼的玻色编码》。载于：《Physical ReviewA》59.4（1999），第 2631–2634页。 DOI：10.1103/PhysRevA. 59.2631。[8] Daniel Gottesman、AlexeiKitaev 和 John Preskill。《在振子中编码量子比特》。载于：《PhysicalReviewA》64.1（2001），第012310 页。 DOI：10.1103/PhysRevA.64.012310。[9] J´ér´emieGuillaud和Mazyar Mirrahimi。《用于容错量子计算的重复猫量子比特》。载于：《PhysicalReviewX》9.4（2019），第041053 页。ISSN：2160-3308。 DOI：10.1103/PhysRevX.9.041053。arXiv：1904.09474。[10] SebastianKrinner 等。《在距离为三的表面码中实现重复量子纠错》。载于：《Nature》605.7911（2022），第669–674 页。ISSN：1476-4687。 DOI：10.1038/s41586-022-04566-8。[11] Rapha¨el Lescanne 等。《在振子中编码的量子比特中对比特翻转的指数抑制》。载于：《NaturePhysics》16.5（2020），第509–513 页。ISSN：1745-2481。 DOI：10.1038/s41567-020-0824-x。[12] Marios H. Michael 等。《玻色模的新型量子纠错码》。载于：《PhysicalReviewX》6.3（2016），第031006 页。 DOI：10.1103/PhysRevX.6.031006。[13] LaurentMichel。《关于 Witten拉普拉斯算子的小特征值》。载于：《Pureand AppliedAnalysis》1.2（2019），第149–206 页。 ISSN：2578-5885。 DOI：10.2140/paa.2019.1.149。[14] Brennande Neeve等。通过耗散泵浦对逻辑网格态量子比特进行纠错。2020 年。 DOI：10. 48550/arXiv. 2010 .09681。arXiv：2010。09681 [quant-ph]。[15] M.A. Nielsen 和I.L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2000 年。[16] Kyungjoo Noh、Christopher Chamberland 和 Fernando G.S.L.Brand˜ao。《利用表面码-GKP码进行低开销容错量子纠错》。载于：《PRX Quantum》3.1（2022），第 010315 页。 DOI：10.1103/PRXQuantum.3.010315。[17] Baptiste Royer、Shraddha Singh 和 S. M. Girvin。《有限能量 Gottesman-Kitaev-Preskill 态的稳定化》。载于：《Physical ReviewLetters》125.26（2020），第 260509 页。 ISSN：0031-9007, 1079-7114。 DOI：10. 1103 / PhysRevLett.125.260509。arXiv：2009.07941。[18] Lev-ArcadySellem等。由微波频率梳驱动的高阻抗超导电路中受耗散保护的 GKP量子比特。2023 年。 DOI：10.48550/arXiv.2304.01425。arXiv：arXiv:2304.01425。[19] Lev-ArcadySellem 等。《耗散量子系统向振子的有限能量网格态的指数收敛》。载于：2022 年 IEEE第 61届决策与控制会议（CDC）。2022 年，第 5149–5154 页。DOI：10.1109/CDC51059.2022.9992722。[20] A.Zettl。《Sturm-Liouville 理论》。数学综论与专著，第 121 卷，美国数学学会，2005 年。

定理1的证明

根据算符$\mathbf{L}_k$的定义，我们计算$\mathbf{N}$ 的演化，得到

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{N}\rho_t) = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathrm{Tr}(\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{N})\rho_t) \tag{53}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^*[\mathbf{L}](\mathbf{N}) &= \mathbf{L}^\dagger\mathbf{N}\mathbf{L} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\right) &(54)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathbf{L}^\dagger\,[\mathbf{N},\mathbf{L}] + \mathrm{h.c.} &(55)\end{aligned}$$

并且在本附录中，h.c. 始终表示厄米共轭 。由于$\mathbf{N} =\frac{1}{2}\left(\mathbf{q}^2+\mathbf{p}^2-\mathbf{1}\right)$，我们只需计算$\mathbf{q}^2$ 和$\mathbf{p}^2$的演化。利用[q,p] = i ，得到

$$[\mathbf{q}^2,\mathbf{L}_0] = \left[\mathbf{q}^2,\mathcal{A}e^{i\eta\mathbf{q}}\left(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}\right)-\mathbf{1}\right] = -2i\epsilon\mathcal{A}\,\mathbf{q}e^{i\eta\mathbf{q}} \tag{56}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0^\dagger[\mathbf{q}^2,\mathbf{L}_0] &= \left(\mathcal{A}\left(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}\right)e^{-i\eta\mathbf{q}}-\mathbf{1}\right)[\mathbf{q}^2,\mathbf{L}_0]\\ &= -2i\epsilon\mathcal{A}^2\mathbf{q} + 2i\epsilon^2\mathcal{A}^2\mathbf{p}\mathbf{q} + 2i\epsilon\mathcal{A}\mathbf{q}e^{i\eta\mathbf{q}}\end{aligned} \tag{57}$$

and

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{L}_0^\dagger[\mathbf{q}^2,\mathbf{L}_0] + \mathrm{h.c.} = \epsilon^2\mathcal{A}^2\,\mathbf{1} - 2\epsilon\mathcal{A}\,\mathbf{q}\sin(\eta\mathbf{q}). \tag{58}$$

类似地，也利用 $[f(\mathbf{q}),\mathbf{p}] = i\,f'(\mathbf{q})$（对于解析函数 f）：

$$\begin{aligned}[\mathbf{p}^2,\mathbf{L}_0] &= \left[\mathbf{p}^2,\mathcal{A}e^{i\eta\mathbf{q}}\left(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}\right)-\mathbf{1}\right]\\ &= \eta\mathcal{A}\,e^{i\eta\mathbf{q}}\left(2\mathbf{p}+\eta\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}\right)\end{aligned} \tag{59}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0^\dagger[\mathbf{p}^2,\mathbf{L}_0] &= \left(\mathcal{A}\left(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}\right)e^{-i\eta\mathbf{q}}-\mathbf{1}\right)[\mathbf{p}^2,\mathbf{L}_0]\\ &= \eta^2\mathcal{A}^2\mathbf{1} + 2\eta(1-\epsilon\eta)\mathcal{A}^2\mathbf{p} + 2\epsilon^2\eta\mathcal{A}^2\mathbf{p}^3\\ &\quad - \epsilon\eta(4-\epsilon\eta)\mathcal{A}^2\mathbf{p}^2 - \eta^2\mathcal{A}e^{i\eta\mathbf{q}}\\ &\quad - \eta(2-\epsilon\eta)\mathcal{A}e^{i\eta\mathbf{q}}\mathbf{p} + 2\epsilon\eta\mathcal{A}e^{i\eta\mathbf{q}}\mathbf{p}^2\end{aligned} \tag{60}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\mathbf{L}_0^\dagger[\mathbf{p}^2,\mathbf{L}_0] + \mathrm{h.c.}\\ &= \eta^2\mathcal{A}^2\mathbf{1} + 2\eta(1-\epsilon\eta)\mathcal{A}^2\mathbf{p} - \epsilon\eta(4-\epsilon\eta)\mathcal{A}^2\mathbf{p}^2\\ &\quad + 2\epsilon^2\eta\mathcal{A}^2\mathbf{p}^3 + \frac{\epsilon\eta^3}{2}\mathcal{A}\cos(\eta\mathbf{q}) + 2\epsilon\eta\mathcal{A}\,\mathbf{p}\cos(\eta\mathbf{q})\mathbf{p}\\ &\quad - \eta(2+\epsilon\eta)\mathcal{A}\cos(\eta\mathbf{q})\mathbf{p} - i\frac{\eta^2}{2}(2+\epsilon\eta)\mathcal{A}\sin(\eta\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{61}$$

现在让我们定义 $\theta_k = \frac{k\pi}{M}$，用于 $k \in \mathbb{Z}$ 和

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= e^{i\theta_k \mathbf{N}}\, \mathbf{q}\, e^{-i\theta_k \mathbf{N}} = \cos(\theta_k)\mathbf{q} + \sin(\theta_k)\mathbf{p}, \\ \mathbf{p}_k &= e^{i\theta_k \mathbf{N}}\, \mathbf{p}\, e^{-i\theta_k \mathbf{N}} = \cos(\theta_k)\mathbf{p} - \sin(\theta_k)\mathbf{q}. \end{aligned} \tag{62}$$

采用这些记号，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{N}) &= e^{\frac{ik\pi}{M}\mathbf{N}}\, \mathcal{D}^*[\mathbf{L}_0](\mathbf{N})\, e^{-\frac{ik\pi}{M}\mathbf{N}} \\ &= \frac{1}{2}\, e^{i\theta_k \mathbf{N}}\, \mathcal{D}^*[\mathbf{L}_0](\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2)\, e^{-i\theta_k \mathbf{N}} \\ &= \frac{1}{2}\, e^{i\theta_k \mathbf{N}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{L}_0^\dagger [\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2, \mathbf{L}_0] + \text{h.c.} \right) e^{-i\theta_k \mathbf{N}}. \end{aligned} \tag{63}$$

由于 $\mathbf{q}_{k+M} = -\mathbf{q}_k$，$\mathbf{p}_{k+M} = -\mathbf{p}_k$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{p}_k = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{p}_k^3 = 0 \tag{64}$$

and

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \cos(\eta \mathbf{q}_k)\mathbf{p}_k = \sum_{k=0}^{2M-1} \sin(\eta \mathbf{q}_k) = 0 \tag{65}$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2M-1} e^{i\theta_k \mathbf{N}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{L}_0^\dagger [\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2, \mathbf{L}_0] + \text{h.c.} \right) e^{-i\theta_k \mathbf{N}} \\ &\quad = M(\epsilon^2 + \eta^2)\mathcal{A}^2\, \mathbf{1} - \epsilon \mathcal{A} \sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{q}_k \sin(\eta \mathbf{q}_k) \\ &\qquad - \epsilon\eta(2 - \epsilon\eta/2)\mathcal{A}^2 \sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{p}_k^2 + \frac{\epsilon\eta^3}{4} \mathcal{A} \sum_{k=0}^{2M-1} \cos(\eta \mathbf{q}_k) \\ &\qquad + \epsilon\eta \mathcal{A} \sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{p}_k \cos(\eta \mathbf{q}_k) \mathbf{p}_k. \end{aligned} \tag{66}$$

经过直接计算可得

$$\sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{p}_k^2 = \sum_{k=0}^{2M-1} \mathbf{q}_k^2 = M\left(\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2\right). \tag{67}$$

此外，对于任意 $\alpha, \beta > 0$ 和 $r \in (0, 1)$，以下算子不等式成立：

$$-\mathbf{q}_k \sin(\eta \mathbf{q}_k) \le |\mathbf{q}_k| \tag{68}$$

$$\mathbf{p}_k \cos(\eta \mathbf{q}_k) \mathbf{p}_k \le \mathbf{p}_k^2 \tag{69}$$

$$\cos(\eta \mathbf{q}_k) \le \mathbf{1} \tag{70}$$

$$-\alpha \mathbf{q}_k^2 + \beta |\mathbf{q}_k| \le -r\alpha \mathbf{q}_k^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha(1-r)} \mathbf{1}. \tag{71}$$

利用这些不等式并定义

$$\phi_{\epsilon,\eta} = (2 - \epsilon\eta/2)\mathcal{A} - 1 \tag{72}$$

我们发现

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2M-1} e^{i\theta_k \mathbf{N}} \left(\frac{1}{2}\mathbf{L}_0^\dagger[\mathbf{q}^2 + \mathbf{p}^2, \mathbf{L}_0] + \text{h.c.}\right) e^{-i\theta_k \mathbf{N}} \\
&\quad \le M\left((\epsilon^2+\eta^2)\mathcal{A}^2 + \frac{\epsilon\eta^3}{2}\mathcal{A}\right)\mathbf{1} + \epsilon\mathcal{A}\sum_{k=0}^{2M-1}|\mathbf{q}_k| - \epsilon\eta\mathcal{A}\,\phi_{\epsilon,\eta}\sum_{k=0}^{2M-1}\mathbf{q}_k^2 \\
&\quad \le M\mathcal{A}\left((\epsilon^2+\eta^2)\mathcal{A} + \frac{\epsilon\eta^3}{2} + \frac{\epsilon}{2\eta(1-r)\phi_{\epsilon,\eta}}\right)\mathbf{1} - r\,\epsilon\eta\mathcal{A}\phi_{\epsilon,\eta}\sum_{k=0}^{2M-1}\mathbf{q}_k^2 \\
&\quad = M\mathcal{A}\Big((\epsilon^2+\eta^2)\mathcal{A} + \frac{\epsilon\eta^3}{2} + \frac{\epsilon}{2\eta(1-r)\phi_{\epsilon,\eta}} - r\,\epsilon\eta\phi_{\epsilon,\eta}\Big)\mathbf{1} - 2M\mathcal{A}\,r\,\epsilon\eta\phi_{\epsilon,\eta}\,\mathbf{N}.
\end{aligned} \tag{73}$$

因此，算子不等式

$$\sum_{k=0}^{2M-1}\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{N}) \le -\lambda(r,\epsilon,\eta)\mathbf{N} + \mu(r,\epsilon,\eta)\mathbf{1} \tag{74}$$

其中 λ 和 μ 定义于式 (12)–(13)，分别对应上面最终不等式中 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{1}$ 前面的系数。

B 定理证明 3

我们首先研究无噪声情形，并在本附录末尾说明如何将正交分量噪声考虑在内。因此，Lindblad 动力学为：

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{3} \mathcal{D}[\mathbf{L}_k](\rho) \tag{75}$$

其中 $\epsilon > 0$, $\mathcal{A} = e^{-\epsilon\eta/2}$, $\mathcal{D}[\mathbf{L}](\rho) = \mathbf{L}\rho\mathbf{L}^\dagger - \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\rho + \rho\mathbf{L}^\dagger\mathbf{L}\right)$ 和

$$\mathbf{L}_k = \mathcal{A} e^{ik\frac{\pi}{2}\mathbf{N}}\, e^{i\eta\mathbf{q}}\,(\mathbf{1} - \epsilon\mathbf{p})\; e^{-ik\frac{\pi}{2}\mathbf{N}} - \mathbf{1}. \tag{76}$$

现在让我们计算式（76）下任意如下形式的可分周期观测量的演化

$$\mathbf{h} = h(\mathbf{q},\mathbf{p}) = f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\, g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) \tag{77}$$

其中 f 和 g 是光滑的实值 2π-周期函数：

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Tr}(\mathbf{h}\rho_t) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{h})\,\rho_t\right) \tag{78}$$

其中

$$\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{h}) = \mathbf{L}_k^\dagger\,\mathbf{h}\,\mathbf{L}_k - \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_k^\dagger\mathbf{L}_k\,\mathbf{h} + \mathbf{h}\,\mathbf{L}_k^\dagger\mathbf{L}_k\right) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_k^\dagger\,[\mathbf{h},\mathbf{L}_k] + [\mathbf{L}_k^\dagger,\mathbf{h}]\,\mathbf{L}_k\right). \tag{80}$$

关键的是，将 f 和 g 展开为傅里叶级数并使用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式，我们可得

$$[f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}), e^{i\eta\mathbf{p}}] = [g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}), e^{i\eta\mathbf{q}}] = 0. \tag{81}$$

使用公式 (81) 和公式 $[f(\mathbf{q}),\ \mathbf{p}] = if'(\mathbf{q})$（对于 f解析的），我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0^\dagger\,[\mathbf{h},\mathbf{L}_0] &= \mathbf{L}_0^\dagger\,[f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}), \mathcal{A}\,e^{i\eta\mathbf{q}}\;(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}) - \mathbf{1}] \\
&= -\mathcal{A}\epsilon\,\mathbf{L}_0^\dagger\,e^{i\eta\mathbf{q}}\,[f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,,\mathbf{p}]\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) \\
&= -i\,\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\,\mathbf{L}_0^\dagger\,e^{i\eta\mathbf{q}}\,f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) \\
&= -i\,\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\;\left(\mathcal{A}(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}) - e^{i\eta\mathbf{q}}\right)\,f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}),
\end{aligned} \tag{82}$$

$$[\mathbf{L}_0^\dagger,\mathbf{h}]\,\mathbf{L}_0 = i\,\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\,f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\,\left(\mathcal{A}(\mathbf{1}-\epsilon\mathbf{p}) - e^{-i\eta\mathbf{q}}\right), \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_0](\mathbf{h}) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}_0^\dagger\,[\mathbf{h},\mathbf{L}_0] + [\mathbf{L}_0^\dagger,\mathbf{h}]\,\mathbf{L}_0\right) \\
&= -i\,\frac{\mathcal{A}^2\epsilon^2\eta}{4}\,[f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}),\mathbf{p}] + i\,\frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\,f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\,\frac{e^{i\eta\mathbf{q}} - e^{-i\eta\mathbf{q}}}{2} \\
&= \left(\frac{\mathcal{A}^2\epsilon^2\eta^2}{8}\,f''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}) - \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\,\sin(\eta\mathbf{q})f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\right)g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}).
\end{aligned} \tag{84}$$

类似的计算得出

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_2](\mathbf{h}) = \mathcal{D}^*[\mathbf{L}_0](\mathbf{h}),\\
&\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_1](\mathbf{h}) = \mathcal{D}^*[\mathbf{L}_3](\mathbf{h})\\
&\qquad = f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\left(\frac{\mathcal{A}^2\epsilon^2\eta^2}{8}\,g''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) - \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{2}\,\sin(\eta\mathbf{p})g'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\right)
\end{aligned} \tag{85}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{3}\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{h}) =& -\mathcal{A}\epsilon\eta\left(\sin(\eta\mathbf{q})f'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q}) - \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4}f''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\right)g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\\
&-\mathcal{A}\epsilon\eta\, f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\left(\sin(\eta\mathbf{p})g'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) - \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4}g''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\right)\\
&= -\mathcal{A}\epsilon\eta\,\mathcal{L}_\sigma(h)(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q},\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})
\end{aligned} \tag{86}$$

其中 $\sigma = \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4}$和 $\mathcal{L}_\sigma$ 是定义如下的微分算子

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\sigma &= \mathcal{T}_\sigma\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathcal{T}_\sigma,\\
(\mathcal{T}_\sigma f)(\theta) &= \sin(2\theta)f'(\theta) - \sigma f''(\theta).
\end{aligned} \tag{87}$$

值得注意的是，前面的精确特征值分析可以加以调整，以考虑正交分量噪声的影响，即 在所研究的林德布拉德动力学中，$\mathbf{q}$ 和$\mathbf{p}$方向上额外的耗散子。具体而言，取一个可分离的周期观测量$\mathbf{h} = h(\frac{\eta}{2}\mathbf{q}\ \frac{\eta}{2}\mathbf{p}) = f(\frac{\eta}{2}\mathbf{q})\ g(\frac{\eta}{2}\mathbf{p})$，并计算

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\operatorname{Tr}\Big(\mathbf{h}\big(\kappa\mathcal{D}[\mathbf{q}](\rho_t) + \kappa\mathcal{D}[\mathbf{p}](\rho_t)\big)\Big)\\
&\qquad = \kappa\operatorname{Tr}\left(\mathcal{D}^*[\mathbf{q}](\mathbf{h})\rho_t\right) + \kappa\operatorname{Tr}\left(\mathcal{D}^*[\mathbf{p}](\mathbf{h})\rho_t\right).
\end{aligned} \tag{88}$$

我们得到

$$\mathbf{q}^\dagger\,[\mathbf{h},\mathbf{q}] = \mathbf{q}[\mathbf{h},\mathbf{q}] = -i\frac{\eta}{2}\,\mathbf{q}\,f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}), \tag{89}$$

$$[\mathbf{q}^\dagger,\mathbf{h}]\,\mathbf{q} = [\mathbf{q},\mathbf{h}]\,\mathbf{q} = i\frac{\eta}{2}\,f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\,\mathbf{q}, \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^*[\mathbf{q}](\mathbf{h}) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}^\dagger\,[\mathbf{h},\mathbf{q}] + [\mathbf{q}^\dagger,\mathbf{h}]\,\mathbf{q}\right)\\
&= -i\frac{\eta}{4}\left[\mathbf{q}, f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g'(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p})\right]\\
&= \frac{\eta^2}{8}f(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}),
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\mathcal{D}^*[\mathbf{p}](\mathbf{h}) = \frac{\eta^2}{8}f''(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q})\,g(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}). \tag{92}$$

注意，这些项已在式（86）中出现，因此将所有内容合并后，我们得到

$$\sum_{k=0}^{3}\mathcal{D}^*[\mathbf{L}_k](\mathbf{h}) + \kappa\left(\mathcal{D}^*[\mathbf{q}](\mathbf{h}) + \mathcal{D}^*[\mathbf{p}](\mathbf{h})\right) = -\mathcal{A}\epsilon\eta\,\mathcal{L}_\sigma(h)(\tfrac{\eta}{2}\mathbf{q},\tfrac{\eta}{2}\mathbf{p}) \tag{93}$$

其中，微分算子 $\mathcal{L}_\sigma$ 仍由式（87）定义，但其参数 σ现在也通过 κ 而依赖于

$$\sigma = \frac{\mathcal{A}\epsilon\eta}{4} + \frac{\kappa\eta}{8\mathcal{A}\epsilon}. \tag{94}$$