arXiv:2304.03810v1 [cs.LO] 7 Apr 2023

有界度图中一阶性质的可检验性以及与邻近无关测试的联系

Isolde Adler*, Noleen K ¨OHLER†, 和 Pan Peng‡

摘要。我们研究有界度图模型和关系结构模型中可由一阶逻辑（FO）定义的性质的性质测试。我们证明，任何由具有量词前缀 $\exists^*\forall^*$ 的公式定义的一阶性质都是可测试的（即具有常数查询复杂度），而存在一个由具有量词前缀 $\forall^*\exists^*$ 的公式表达的一阶性质是不可测试的。在稠密图模型中，类似的结论早已为人所知（Alon、Fischer、Krivelevich、Szegedy，Combinatorica 2000），尽管这两个模型的性质截然不同。特别地，我们通过一个定义有界度扩展图类的一阶逻辑公式获得了我们的下界，该公式基于图的之字形乘积。我们认为这一结果本身也具有独立意义。

然后，我们利用一阶可定义有界度扩展图这一类，回答了关于 *proximity-oblivious testers (POTs)* 的一个长期悬而未决的问题。POT 是一类特别简单的测试算法，其中基本测试会执行若干次，执行次数可能取决于邻近参数，但基本测试本身独立于邻近参数。

在他们的开创性工作中，Goldreich 和 Ron [STOC 2009；SICOMP 2011] 证明，在有界度模型中可由常数次查询进行邻近无关测试的图性质，恰好是那些能够表示为满足 *non-propagation* 条件的 *generalised subgraph freeness (GSF)* 性质。非传播条件是否必要仍未解决。事实上，他们将可表示为广义子图自由性质的性质称为 *GSF-local properties*，并提出了一个问题：所有 GSF-局部性质是否都是非传播的？我们给出了否定答案，证明了我们的性质是 GSF-局部且具有传播性。因此，尽管该性质是 GSF-局部的，它仍不允许 POT。为得到这一结果，我们通过邻域概况建立了一阶性质与 GSF-局部性质之间的新联系。

最后，受我们的下界以及一阶逻辑的Hanf局部性启发，我们探讨了关于邻域同构类型的性质的可测试性。

关键词。图性质测试、一阶逻辑、邻近无关测试、局部性、下界

MSC分类号。68Q25、68R10、68W20、03B70

1. 引言。图性质测试是一个研究抽样算法的框架，这类算法用于求解图上经典判定问题的一种松弛形式。给定一个图 G 和一个性质 $\mathcal{P}$（例如，无三角形性），图性质测试算法（称为图性质测试器）的目标是区分图是否满足 $\mathcal{P}$，还是远未满足 $\mathcal{P}$；其中“远”的定义取决于所采用的模型。Rubinfeld 和 Sudan [34], 最早提出了性质测试的一般概念，旨在推动程序检查研究。随后，Goldreich、Goldwasser 和 Ron [19]将性质测试引入组合对象和图。他们形式化了用于测试图性质的稠密图模型：在该模型中，算法可以查询输入图 G 的任意一对顶点（该图有 n 个顶点）是否相邻；目标是以至少 $2/3$的概率区分以下两种情形： G满足性质 $\mathcal{P}$，或者必须修改（删除或插入）超过 εn^2 条边才能使其满足 $\mathcal{P}$，其中邻近参数 $\varepsilon \in (0,1]$）为任意指定值。若某个性质 $\mathcal{P}$ 可以通过常数查询复杂度进行测试，即测试器所进行的查询次数受 ε 的某个函数所限制，且与输入图的规模无关，则称该性质（在稠密图模型中）是可测试的。由于 [19], 人们已在该模型下对图性质的可测试性投入了大量研究

*班贝格大学，德国班贝格（isolde.adler@uni-bamberg.de）。

†巴黎多菲纳大学、PSL大学、CNRS UMR7243、LAMSADE，法国巴黎（noleen.kohler@dauphine.psl.eu）。

‡中国科学技术大学，中国合肥（ppeng@ustc.edu.cn）。

这些研究最终 culminate 于 Alon 等人 [5], 的工作，他们证明了一个性质可测试，当且仅当它可以归约为对有限个正则划分进行测试。

自Goldreich 和Ron的开创性工作 [21] 引入有界度图上的性质测试以来，人们对稀疏图中的性质测试给予了大量关注。然而，我们对这类图中性质可测试性的理解仍然有限。在有界度图模型 [21], 中，算法可以通过预言机访问输入图 G ，其最大度 d被假设为常数，并且允许向预言机执行邻点查询。也就是说，对于任意指定的顶点 v 和索引 $i \leq d$，预言机会在常数时间内返回 v的第 i个邻点（如果存在），否则返回特殊符号 $\perp$ 。具有 n个顶点的图 G 被称为距满足性质 $\mathcal{P}$的状态 ε-远，如果需要修改超过 εdn 条边才能使其满足 $\mathcal{P}$。现在的目标是：对于任意指定的邻近参数 $\varepsilon \in (0, 1]$，以至少 $2/3$的概率区分 G 是否满足性质 $\mathcal{P}$ ，或者是否距满足 $\mathcal{P}$ 的状态 ε-远。同样地，如果某个性质能够以常数查询复杂度进行测试，则称其在有界度模型中是可测试的，其中该常数可以依赖于 ε、d ，但与 n无关。迄今为止，已知一些性质是可测试的，包括子图无关性、 k-边连通性、无环性、欧拉性、度正则性 [21], 无minor 性 [7, 25, 29], 超有限性质 [31]、 k-顶点连通性 [35, 16], 以及细分无关性 [28]。下面我们讨论本文的贡献。

1.1. 我们的贡献。

1.1.1.一阶逻辑的不可测试性。我们研究有界度图模型中可由一阶逻辑（一阶逻辑）定义的性质的可测试性。回顾一下，图上的一阶逻辑公式由边关系和平等的谓词构成，使用布尔连接词 $\vee$、$\wedge$、$\neg$ 以及全称量词和存在量词 $\forall$、$\exists$，其中变量表示图的顶点。一阶逻辑例如可以表达子图无关性（即，某个固定图 H 的同构副本不会作为子图出现）和子图包含（即，某个固定 H 的同构副本作为子图出现）。然而请注意，存在一些常数查询可测试的性质，例如连通性和无环性，它们无法用一阶逻辑表达。我们研究哪些一阶性质在有界度图模型中是可测试的。我们的研究扩展到有界度关系结构模型[1], ，同时我们重点关注具有二元关系的关系结构类，即边着色有向图。在这种关系结构模型中，可以执行邻点查询，同时查询入邻点和出邻点，以及连接它们的边颜色。在关系数据库的语境下，这一模型是很自然的，因为每个（边）关系都由其所包含的元组列表给出。

我们根据量词交替来研究有界度模型中一阶性质的可测试性，此研究受到 Alon 等人对稠密图所做类似研究的启发 [4]。对于定义在固定有限签名上的有界度关系结构，我们有以下简单观察：任何由不含量词交替的句子定义的一阶性质都是可测试的。这意味着，该句子要么由形如 $\exists^*$ （任意有限个存在量词）的量词前缀和其后的无量词公式组成，要么由形如 $\forall^*$ （任意有限个全称量词）的量词前缀和其后的无量词公式组成。基本上，任何形如 $\exists^*$ 的性质都是可测试的，因为只要输入结构足够大（具体取决于公式），就可以通过少量元组修改，将公式的无量词部分所要求的结构植入其中；否则，我们可以使用精确算法在常数时间内确定答案

。任何形如 $\forall^*$ 的性质都是可测试的，因为形如 $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ 的公式（其中 φ 是无量词的）在逻辑上等价于形如 $\neg \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ 的公式（其中 ψ 是无量词的）。测试 $\neg \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ 相当于检测是否不存在有限多个诱导子结构，这与测试子图自由性 [21]类似。若一个性质由含有量词交替的句子定义，其可测试性就不那么明确了。形式上，我们令 Π_2（分别令 Σ_2）表示可由 $\forall^*\exists^*$-前缀类（分别由 $\exists^*\forall^*$-前缀类）中的公式表达的性质集合。我们得到以下结果。

Σ_2 中的每个一阶性质在有界度模型中都是可测试的（定理 6.1）。另一方面，Π_2中存在一个一阶性质，在有界度模型中不可测试（定理 4.7）。

我们在上述陈述中提到的定理讨论的是关系结构，而我们还给出了关于图的下界（定理 5.1），因此将范围限制为图上的一阶逻辑时，该陈述也成立。有趣的是，尽管这两种模型的性质截然不同，上述分界与稠密图模型 [4], 中一阶性质的分界相同。我们的证明运用了多种新的证明技巧，结合了图论、组合学和逻辑。

我们指出，我们的下界，即存在一个在 Π_2 中不可测试的性质，这一点（直觉上）颇令人惊讶，原因有二。首先，这一下界是通过构造一个一阶逻辑可定义的结构类来证明的，该结构类编码了一个扩展图类；这凸显了一阶逻辑在有界度图上的表达能力出人意料地强，尽管它具有局部性 [24, 17, 32]。其次，众所周知，有界度模型中的性质测试算法通过从输入图中采样顶点并探索其局部邻域来运行，而一阶逻辑只能表达“局部”性质；然而，我们的下界表明，这不足以保证可测试性。下面我们将对此进一步阐述。一方面，Hanf 定理 [24] 揭示了有界度图上的一阶逻辑特性，并蕴含一种称为 Hanf 正规形式（HNF）的强正规形式；我们将在 [9], 中对此作简要介绍。对于最大度为 d 的图 G 以及 G中的顶点 x ，可以用一阶公式 $\tau_r(x)$描述 G 中以 x 为中心、半径固定为 r 的邻域，且描述精确到同构为止。Hanf 句子是一种一阶句子，其形式为“至少有 ℓ 个顶点 x 的邻域（同构）类型为 $\tau_r(x)$”。如果一个一阶句子是若干 Hanf 句子的布尔组合，那么它就属于 HNF。根据 Hanf 定理，在有界度图上，每个一阶句子都等价于一个 HNF 句子 [24, 32, 14]。请注意，Hanf 句子只涉及局部邻域。因此，该定理表明，一阶逻辑只能表达局部性质。另一方面，如果某个性质在有界度图模型中是常数查询可测试的，那么就可以通过近似局部邻域的分布来测试它（见 [11] 和 [22]）。也就是说，常数查询测试器本质上只能测试那些接近于由局部邻域分布所定义的性质。因此[1], , 先验而言，每个能够用一阶逻辑表达的性质都可能在有界度模型中可测试。事实上， [1]曾将这一说法是否成立列为一个开放问题。然而，我们的下界对此给出了否定答案。

[1]此外，此前已知典型的一阶逻辑性质均可测试，包括对于给定固定度数的度正则性、包含一个 k 团，以及包含大小为 k 的支配集合（对于固定的 k）（这些性质显然可测试），还有前文提到的子图无关性和子图包含（参见例如 [18]）。

1.1.2. GSF-局部性不足以实现邻近无关测试。典型的性质测试器仅依据局部视图来判断图的全局性质。在极端情况下，测试器可以使局部视图的大小与到某个预先确定的图集合的距离 ε 无关。受此启发，Goldreich 和 Ron [22] 开创了对图的（单侧误差）邻近无关测试器（POT）的研究：测试器只需重复基本测试若干次，重复次数取决于邻近参数，而基本测试器本身不受邻近参数影响。他们分别针对稠密图模型和有界度模型，刻画了可由 POT 以常数查询复杂度测试的图性质。在这两种模型中，已知具有常数查询 POT 的性质类，严格包含于（由标准测试器）可测试的性质类。

非正式地说，针对性质 $\mathcal{P}$ 的（单侧误差）POT是一种测试器：如果图 G 满足 $\mathcal{P}$，它总是接受该图；而对于 G ，它以一个关于图 G 与性质 $\mathcal{P}$之间距离的单调递增函数所给出的概率拒绝该图。我们称 $\mathcal{P}$ 是邻近无关可测试的，如果存在这样一种针对 $\mathcal{P}$ 的测试器，且其查询复杂度为常数。为了刻画有界度模型中的邻近无关可测试性质，Goldreich和Ron [22] 引入了广义子图自由性的概念，该概念扩展了诱导子图自由性和（非诱导）子图自由性的概念。如果一个图性质可以表示为 GSF 性质，则称其为GSF-局部性质。已有研究表明， [22] 图性质是常数查询的邻近无关可测试性质，当且仅当它是满足所谓非传播条件的 GSF-局部性质。非正式地说，如果修复不满足 $\mathcal{P}$ 的图 G 不会触发必要修改的全局“连锁反应”，则GSF-局部性质 $\mathcal{P}$ 是非传播的。形式化定义请参阅第7.1节。

在 [22] 中尚未解决的一个重要问题是，每个 GSF-局部性质是否都满足非传播条件。通过利用上述不可测试的一阶逻辑性质，并建立一阶性质与 GSF-局部性质之间的新联系，我们给出了以下否定性结果，从而解决了这个问题。

存在一种度至多为 3 的图的 GSF-局部性质，在有界度模型中不可测试。因此，并非所有 GSF-局部性质都是非传播的（定理 7.5）。

我们预计，这一结果将有助于全面刻画有界度模型中的可测试性质。事实上，在 Ito 、 Khoury 和 Newman 最近的一项工作中， [27]，作者刻画了有界度图模型中具有单侧误差的可测试单调图性质和可测试遗传图性质；他们还提出了一个尚未解决的问题：“由一组禁用构型定义的每种性质都可测试吗？”由于他们所定义的“由一组禁用构型定义的性质”等价于 GSF-局部性质，因此我们的上述结果也对这一问题给出了否定答案。

我们通过证明以下结果来使这一图景完整。

每个度至多为 2 的图的 GSF-局部性质都是非传播的（定理 7.16）。

1.1.3. 邻域自由性与邻域正则性。受我们下界的启发，我们重新讨论 Hanf 标准形中的一阶逻辑句子。Hanf 句子是可测试的（它们属于 Σ_2），我们接下来探讨由取反的 Hanf 句子定义的性质是否可测试。为此，我们针对某些涉及邻域同构类型的一阶性质，给出具有常数

查询复杂度的测试器。对于一个度有界图，顶点 x 周围的 r-球是图中以 x 为中心、半径为 r 的邻域。我们将 r-球的同构类型称为 r-类型。我们考虑两种基本性质，分别称为 τ-邻域正则性和 τ-邻域自由性，它们分别对应于“所有顶点都具有 r-类型 τ”和“没有顶点具有 r-类型 τ”。（邻域正则性可视为度正则性的推广，而已知度正则性是可测试的 [18]；测试邻域自由性则对应于测试一个取反的 Hanf 句子。）正如我们在引理 8.1 中所示，存在 1-型 τ、τ'，使得 τ-邻域自由性和 τ'-邻域正则性都无法由一阶逻辑中的公式定义。因此，我们先前针对 Σ_2 的测试器无法用于这些性质。在 τ 满足某些条件时，我们为它们给出常数查询复杂度的测试器（定理 8.3、8.4 和 8.5）。对于任意邻域类型 τ，τ-邻域自由性和 τ-邻域正则性都可以由 Π_2 中的公式定义。因此，我们的结果表明，存在由 $\Pi_2 \setminus \Sigma_2$ 中的公式定义且可测试的性质。

1.2. 我们的技术。

1.2.1. 一阶逻辑性质的可测试性与不可测试性。为了证明每个由 Σ_2 中的公式 φ 定义的性质 $\mathcal{P}$（即形如 $\exists^*\forall^*$ 的性质）都是可测试的，我们证明 $\mathcal{P}$ 等价于性质 $\mathcal{P}_i$ 的并集，其中每个性质都与一个由形如 $\forall^*$ 的公式定义的性质 $\mathcal{Q}_i$ “不可区分”。这里的不可区分性是指，我们可以通过修改结构中一小部分元组，将任何满足 $\mathcal{P}_i$ 的结构转化为满足 $\mathcal{Q}_i$ 的结构，反之亦然。这样，我们就能将测试 $\mathcal{P}$ 的问题化归为测试由 $\forall^*$ 公式定义的性质。于是 $\mathcal{P}$ 的可测试性便随之成立，因为任何形如 $\forall^*$ 的性质都是可测试的，而且可测试性质对并集 [18] 封闭。这里的主要挑战在于处理存在量化变量与全称量化变量之间的相互作用。直观来说，度数上界限制了全称量化变量所能施加的结构。利用这一点，我们能够将存在变量与这些相互作用一并处理：通过“植入”一个所需的常数规模子结构，使其与形如 $\forall^*$ 的公式之间只相差常数次修改。

与此互补，我们利用 Hanf 定理观察到，每个定义在度正则结构上的一阶性质都属于 Π_2（见引理 4.5）。因此，要证明存在一个由 Π_2 中的公式定义且不可测试的性质，只需证明存在一个既不可测试又度正则的一阶性质。对于后者，我们注意到，只需构造一个公式 φ，它定义一类仅包含二元关系的关系结构（边着色有向图），且这些结构的底层无向图都是扩展图。为此，我们利用一项已有结果：如果某个性质是常数查询可测试的，那么满足该性质的关系结构 A 与距离该性质尚有 φ 之遥的关系结构 B 之间的局部（常数规模）邻域分布距离必须相对较大（见 [1]；该结果又以 [11, 22]中针对有界度图的所谓“规范测试器”为基础）。接着，我们利用 Alon 的一项结果（见 [30]中的命题 19.10）：任意大的关系结构 A 的邻域分布，可以由一个小型常数规模结构 H 的邻域分布近似。因此，对于 φ中的任意 A，通过取“许多”个互不相交的“较小”结构 H的副本之并，我们得到另一个结构B，使得 A 与 B 的局部邻域分布之间的距离很小。如果 φ 中的结构的底层无向图都是扩展图，那么

立即可知， B 与公式 φ所定义的性质相距甚远，由此可以得出结论：性质 φ 不可测试。我们指出，对于简单无向图，先前已有结果表明，任何仅由扩展图构成的性质都不可测试 [15]。

现在我们构造一个公式 φ，它定义了一个仅含二元关系的关系结构类，其底层无向图是由Reingold、Vadhan和Wigderson [33]的之字形乘积产生的扩展图。为了在一阶逻辑中的可表达性，我们将扩展图的之字形构造与树结构混合起来。粗略地说，我们从一个小图 H开始，它是一个良好的扩展图，而公式 φ 表达了每个模型[2] 都类似于一个有根的 k叉树（对于某个适当固定的 k），其中第0 层仅由根组成，第 1层包含 $G_1 := H^2$，而第 i层包含 G_{i-1}^2 与 H的之字形乘积。树类无法用一阶逻辑定义。然而，我们实现了如下性质：我们的公式的每个有限模型都是连通的，并且类似于一棵 k叉树，其各层带有期望的图。这一结构通过递归式的“复制—膨胀”机制获得，用于局部模拟连续层之间的扩展图构造。为此，我们使用常数数量的边颜色：一组颜色用于树的边，另一组用于“层”图的边G_i。在此过程中，需要处理许多技术细节，例如将之字形构造编码进局部复制机制中（并实现正确的度），以及最终证明连通性。然后我们证明， φ 的模型的底层无向图是扩展图。利用一种困难性归约，在其中插入精心设计的构件来编码不同的边颜色，我们最终获得了一个在无向 3-正则图上不可测试的性质。

1.2.2. 关于 GSF-局部性与 POT。接下来，我们将证明这一 3-正则图的性质是 GSF-局部的。为此，我们首先研究一阶逻辑的局部性与 GSF-局部性之间的关系。Hanf 定理 [24] 意味着，我们可以将一阶逻辑的局部性理解为：对某些局部邻域（同构）类型的出现次数规定上界和下界。另一方面， [22] 中定义的 GSF-局部性质规定了某些常数大小的标记图不存在，其中，标记图 F 规定了一个诱导子图，以及它如何与图的其余部分“交互”（见定义 7.1）。直观地说，这样的性质只规定图的局部邻域 G 应满足的条件，即某些类型的局部邻域不能出现在 G中，或者等价地说，这些类型的出现次数为 0。然而，并不能由此推出每个 GSF-局部性质都是一阶可定义的，因为禁用标记图的集合取决于该类中图的大小 n 。事实上，不难构造出一些 GSF-局部的不可判定性质。

为了建立一阶性质与 GSF-局部性质之间的联系，我们首先将局部邻域类型出现次数的界编码为我们所称的邻域轮廓，并将有界度关系结构的一阶可定义性质刻画为由邻域轮廓定义的性质的有限并（引理 7.7）。接着，我们证明，任何由非平凡有限并构成的一阶逻辑公式——其中每个性质都由一个 0-剖面定义，即规定的下界均为 0——都是 GSF-局部的（定理 7.9）。鉴于局部性质在图论和图极限 [30], 中的根本作用，我们认为这一新的联系本身就值得关注。

[2]在上下文明确时，我们使用“模型”表示某个结构满足某个公式。这不应与我们的计算模型名称混淆，例如有界度模型。

出于技术原因，我们没有直接使用那个不可测试的 3-正则图性质，而是使用了由上文公式 φ 定义的性质；该性质是一个在有界度模型中不可测试的关系结构性质。我们证明，由 φ 定义的性质实际上可以由 0-轮廓定义（引理 7.12）。随后，我们通过证明该归约保留了由 0-轮廓定义这一性质，推出那个不可测试的 3-正则图性质也是 GSF-局部的（引理 7.14）。

1.2.3. 关于邻域正则性和邻域无禁型的测试。为了得到针对 τ-邻域正则性和 τ-邻域无禁型的测试器，我们证明：如果一个图 G 距离满足该性质至少有 ε 条边修改，那么它包含线性比例的常数规模邻域，这些邻域可以证明 G 不满足该性质。这样的说法直观上可能成立，但证明起来颇为棘手。假设我们要测试是否无 τ，其中 r 是某种固定的 τ 邻域类型，并且假设一个图 G 有一个顶点 x，其邻域类型为禁型 τ。为了消除 τ，通过边修改改变 x 的 r 邻域，可能会在距离 x 较近的顶点周围引入新的禁型邻域，从而引发一场必须进行更多修改的“连锁反应”。这意味着，一个图可能距离成为 τ-无禁型有 ϵ 条边修改之远，但我们通过在图中抽样常数个邻域却无法察觉这一点。测试度正则性时也已发现过这种微妙的困难（参见 [18] 中的断言 8.5.1）。我们证明，在适当的假设下，可以通过仔细修正 x 的邻域来避开这种“连锁反应”，同时不改变 x周围顶点的邻域类型。尽管这一做法相当简单，却需要非平凡的分析，才能在不引发“连锁反应”的情况下处理局部距离与全局距离之间关系这一微妙难题。

1.3. 其他相关工作。除了上述关于在有界度图模型中以常数查询复杂度测试性质的研究外，Goldreich 和 Ron [22] 还刻画了这样一类性质：在有界度图（以及稠密图）中，该类性质可由常数查询的邻近无关测试器进行测试。这类性质是所有常数查询可测试性质的一个相当受限的子集。Fichtenberger 等人 [15] 证明，每个可测试性质要么是有限的，要么包含一个无限超有限子性质（见定义 A.1）。Ito 等人 [27] 分别刻画了有界度（有向和无向）图模型中单侧误差（常数查询）可测试的单调图性质，以及单侧误差可测试的遗传图性质。

在有界度图模型中，还有一些性质（例如二分性、扩展性和 k-可聚类性）需要 $\Omega(\sqrt{n})$ 次查询；另一些性质（例如 3-可着色性）则需要 $\Omega(n)$ 次查询。关于这些内容，读者可参阅 Goldreich 的新著作 [18]。

关系结构上的性质测试最近因其在数据库中的应用而受到关注。除了前述研究外，[1], Chen 和 Yoshida [10]还在性质测试框架下，研究了每种关系结构上关系数据库查询的可测试性。

POT 的概念在 [8] 中得到了隐式定义。Goldreich 和 Shinkar [23]研究了稠密图模型和有界度图模型中的双边错误无偏近似测试。Goldreich 和 Kaufman [20] 探讨了以适当方式保持不变的局部条件与具有常数查询数的无偏近似测试器的性质之间的关系。

本文综合并扩展了两篇会议论文 [3] 和 [2]的结果。在本文中，我们对 [3] 中用于证明下界的性质稍作修改，使其

成为 GSF-局部性质，这使我们既能将其用作不可测试的 Π_2-性质，也能将其用作具有传播性的 GSF-局部性质。我们还给出了一个从关系结构到无向图的改进归约，将原来的（较大）度数上界降至 3。最后，我们补全了这一图景，证明所有度数至多为 2 的 GSF- 局部性质都是非传播的。

1.4. 论文结构。第2节介绍预备知识，包括逻辑、性质测试以及扩展图的之字形构造。在第 3 节中，我们构造一阶逻辑公式 φ，并证明其模型的性质。在第4节中，我们通过证明由 φ 定义的有界度结构上的性质不是常数查询可测试的，证明存在一个不可测试的 Π_2-性质。随后，在第5节中，我们通过归约给出一个度至多为 3 的无向图的不可测试 Π_2-性质。在第6节中，我们证明所有 Σ_2 性质都是可测试的。接着，在第 7 节中，我们转而讨论 POT，证明我们的度至多为 3 的无向图的 Π_2-性质是 GSF-局部且传播的。然后，我们证明度至多为 2 的所有 GSF-局部性质都是非传播的。在第8节中，我们针对一些涉及邻域同构类型的一阶性质给出正面结果。最后，我们在第9节总结全文。

2. 预备知识。我们用 $\mathbb{N}$ 表示包含 0 在内的自然数集合，并且 $\mathbb{N}_{>0} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $[n] := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 表示前 n 个自然数构成的集合。对于集合 S 和 $k \in \mathbb{N}$，我们用 S^k 表示 S 的 k 个副本的笛卡尔积 $S \times \cdots \times S$。我们用 $\binom{S}{2}$ 表示 S 的所有二元子集构成的集合，用 $\sqcup$ 表示集合的不交并，用 $\triangle$ 表示对称差。

2.1. 无向图。除非另有说明，我们允许图中存在自环和平行边。我们将无向图 G 表示为三元组 (V, E, f)，其中 V 是顶点集，E 是边集，$f\colon E \to V \cup \binom{V}{2}$ 是关联映射。从 $G_1 = (V_1, E_1, f_1)$ 到 $G_2 = (V_2, E_2, f_2)$ 的同构是由双射 (h_V, h_E) 构成的一对映射，其中 $h_V\colon V_1 \to V_2$ 且 $h_E\colon E_1 \to E_2$，并且对于任意 $e \in E_1$，都有 $h_V(f_1(e)) = f_2(h_E(e))$；对于任意集合 $X \subseteq V_1$，有 $h_V(X) := \{h_V(x) \mid x \in X\}$。没有自环和平行边的无向图称为简单图。对于简单图 G，我们也将 G 表示为元组 $G = (V(G), E(G))$，其中 $V(G)$ 是顶点集，且 $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$。图 G 中顶点 v 的度 $\deg_G(v)$ 是与 v 关联的边数。特别地，自环对度的贡献为 1。对于某个 $d \in \mathbb{N}$，若图 G 中的每个顶点的度都为 d，我们称该图为 d-正则图。我们用顶点元组表示图中的路径。我们还规定所有路径和环都是简单的，即没有顶点会重复出现。由 n 个顶点构成的路径长度为 $n-1$。我们将图 G 中两个顶点 v 和 w 之间的距离记为 $\mathrm{dist}_G(v, w)$，定义为从 v 到 w 的最短路径长度；若图 G 中不存在从 v 到 w 的路径，则距离为 ∞。任意顶点子集 $S \subseteq V$ 都导出一个图 $G[S] := (S, \{e \in E \mid f(e) \in S \cup \binom{S}{2}\}, f|_S)$。图 G 的一个连通分量是由一个极大集合 S 导出的图，使得其中每一对 $v, w \in S$ 在 G 中的距离有限。若一个图只有一个连通分量，则称其为连通图。关于图论的基本概念，请参阅 [12]。

我们还考虑有根无向树。指定一个根后，我们便可以唯一地将边定向为背离根的方向。因此，对于有根无向树，我们可以使用子节点和父节点这两个术语。若一棵树是 k 元的，则称其为 k 元树；如果每个顶点要么没有子节点，要么恰有 k 个子节点。若对于每个 $i \in \mathbb{N}$，距该树的根 i 的顶点数恰为 k^i 个或为零，则称这棵树是完全的。

2.2. 关系结构与一阶逻辑。我们将简要介绍结构和一阶逻辑，并请读者参阅 [14]，以了解更详细的介绍。一个（关系）签名是由关系符号构成的有限集合 $\sigma = \{R_1, \dots, R_\ell\}$。每个关系符号 R_i $1 \leq i \leq \ell$ 都有一个元数 $\mathsf{ar}(R_i) \in \mathbb{N}_{>0}$。一个 σ-结构是一个元组 $A = (U(A), R_1(A), \dots, R_\ell(A))$，其中 $U(A)$ 是一个有限集合，称为 A 的论域；而 $R_i(A) \subseteq U(A)^{\mathrm{ar}(R_i)}$ 是论域 $U(A)$ 上的一个 $\mathsf{ar}(R_i)$ 元关系。注意，如果$\sigma = \{E_1, \dots, E_\ell\}$是一个签名，且其中每个 E_i 都是二元关系符号，那么 σ-结构就是具有 ℓ 种边颜色的有向图。设 $\sigma_{\mathrm{graph}} := \{E\}$ 是一个仅含一个二元关系符号 E 的签名。那么，可以将无向简单图理解为满足关系 E 对称（每条无向边由两个元组表示）且自反性缺失的 σ_{graph}-结构。借助这一点，我们可以将下文定义的所有概念推广到简单图。通常，我们用 G、H、F 表示图；图 G 的顶点集合记为 $V(G)$，边集合记为 $E(G)$；顶点通常记作 u、v、w、u'、v'、w'，.....。相比之下，谈论一般关系结构时，我们用 A、B 和 a、b、a'、b'、.....表示论域中的元素。

以下设 σ 为一个关系签名。若存在一个从 $U(A)$ 到 $U(B)$ 的双射映射，且该映射保持所有关系不变，则称两个 σ-结构 A 和 B 同构。对于一个 σ-结构 A 和一个子集 $S \subseteq U(A)$，记 $A[S]$ 为由 S 导出的 A 的子结构，即 $A[S]$ 的论域为 S，并且对于所有 $R \in \sigma$，都有 $R(A[S]) := R(A) \cap S^{\mathrm{ar}(R)}$。元素 $a \in U(A)$ 的度记为 $\deg_A(a)$，定义为包含 a 的 A 中元组的数量。我们将 A 的度定义为其各元素的最大度，记为 $\deg(A)$。若对于某个 $d \in \mathbb{N}$，每个元素 $a \in U(A)$ 的度均为 d，则称结构 A 是 d-正则的。给定一个签名 σ 和一个常数 d，记 $\mathcal{C}_{\sigma, d}$ 为所有度至多为 d 的 σ-结构组成的类，并记 $\mathcal{C}_d$ 为所有度至多为 d 的图的集合。注意，图的度与相应 σ_{graph}-结构的度恰好相差 2 倍。设 $\mathcal{C}$ 是任意一个在同构下封闭的 σ-结构类。在 $\mathcal{C}$ 中，若性质 $\mathcal{P}$ 是在同构下封闭的 $\mathcal{C}$ 的子集，则称其为一个性质。若 $A \in \mathcal{P}$，则称结构 A 具有性质 $\mathcal{P}$。

一阶逻辑的语法和语义按通常方式定义（例如参见 [14]）。我们用$\exists^{\geq m} x\, \varphi$（以及分别用 $\exists^{=m} x\, \varphi$、 $\exists^{\leq m} x\, \varphi$）作为一阶逻辑公式的简写，表示满足 φ 的见证 x 的数量至少为 m （恰好为 m、至多为 m）。如果一个变量至少有一次出现未受任何量词约束，我们就说该变量在一阶逻辑公式中自由出现。我们用 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ 表示一阶逻辑公式 φ 中自由出现的变量集合是$\{x_1, \dots, x_k\}$的子集。对于公式 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$、一个 σ-结构 A 以及 $a_1, \dots, a_k \in U(A)$，如果将 a_i 赋给 x_i（其中 $1 \leq i \leq k$）后， φ的求值为真，我们就记作 $A \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$。一阶逻辑句子是没有自由变量的公式。对于一阶逻辑句子 φ，如果 $A \models \varphi$，我们就称 A 是 φ 的模型，或称 A 满足 φ。设 $\mathcal{C}$ 是一个在同构下封闭的 σ-结构类。每个关于 σ 的一阶句子 φ 都定义了$\mathcal{C}$上的一个性质 $\mathcal{P}_\varphi \subseteq \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{P}_\varphi := \{A \in \mathcal{C} \mid A \models \varphi\}$。

Hanf 范式。 σ-结构 A 的盖夫曼图是无向图$G(A) = (U(A), E)$，其中 $\{v, w\} \in E$，若 $v \neq w$且存在一个 $R \in \sigma$和一个元组$\overline{a} = (a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(R)}) \in R(A)$，使得 $v = a_j$ 且对于某个 $1 \leq k, j \leq \mathsf{ar}(R)$。我们用 $G(A)$ 将图论概念应用于关系结构。注意，对于任意图，相应对称σ_{graph}-结构的盖夫曼图就是该图本身。若一个 σ-结构 A 的盖夫曼图 $G(A)$是连通的，我们称其为连通。对于两个元素 $a, b \in U(A)$，我们将 a 与 b 在 A中的距离记为 $\mathsf{dist}_A(a, b)$，定义为 a 到 b 在 $G(A)$中的最短路径长度；若不存在这样的路径，则为 ∞。对于 $r \in \mathbb{N}$ 和 $a \in U(A)$， a 的 r-邻域是集合 $N_r^A(a) := \{b \in U(A) : \mathsf{dist}_A(a, b) \leq r\}$。我们定义 $\mathcal{N}_r^A(a) := A[N_r^A(a)]$ 为

由 a的 r-邻域导出的 A 子结构。对于 $r \in \mathbb{N}$，一个 r-球是一个元组 (B, b)，其中 B是一个 σ-结构，$b \in U(B)$ 且 $U(B) = N_r^B(b)$，也就是说，B的半径为 r，而 b 是其中心。注意，根据定义，对于任意 σ-结构A和 $a \in U(A)$，$(\mathcal{N}_r^A(a)\ a)$都是一个 r-球。若存在一个 σ-结构同构，将 b 映射到 b'，则称两个 r-球 (B, b)、(B', b') 同构。我们将r-球的同构类称为 r-类型。对于一个 r-类型 τ和一个元素 $a \in U(A)$，若 $(\mathcal{N}_r^A(a)\ a) \in \tau$，则称 a 具有(r-)类型 τ。此外，给定这样的一个 r-类型 τ，存在一个公式 $\varphi_\tau(x)$，使得对于每个 σ-结构 A以及每个 $a \in U(A)$，$A \models \varphi_\tau(a)$当且仅当$(\mathcal{N}_r^A(a)\ a) \in \tau$。Hanf 句子是形如 $\exists^{\geq m} x \varphi_\tau(x)$的句子，其中 τ 是某个 r-类型。若一阶逻辑句子是 Hanf 句子的布尔组合[3]，则称其处于 Hanf 范式。签名 σ 上的两个公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$和 $\psi(x_1, \ldots, x_k)$称为 d-等价，记作 $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \equiv_d \psi(x_1, \ldots, x_k)$，如果它们在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上等价；也就是说，对于所有 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 以及所有 $(a_1, \ldots, a_k) \in U(A)^k$，都有 $A \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$当且仅当 $A \models \psi(a_1, \ldots, a_k)$。一阶逻辑 [24] 的 Hanf 局部性定理推出以下结论。

THEOREM 2.1（Hanf [24]）。设 $d \in \mathbb{N}$。每个一阶逻辑句子都d等价于一个 Hanf 范式中的句子。

一阶公式的量词交替。设 σ 为任意关系签名。我们采用以下递归定义，根据量词前缀中量词交替的次数对一阶公式进行分类。设 $\Sigma_0 = \Pi_0$ 为关于 σ的所有无量词一阶公式构成的类。于是，对于每个 $i \in \mathbb{N}_{>0}$，令Σ_i 为所有形如 $\varphi(y_1, \ldots, y_\ell)$ 的一阶公式构成的集合，其中存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及一个公式$\psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell) \in \Pi_{i-1}$，使得

$$\varphi \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_k \psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell).$$

类似地，Π_i 由所有形如 $\varphi(y_1, \ldots, y_\ell)$ 的一阶公式构成，其中存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及一个公式 $\psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell) \in \Sigma_{i-1}$，使得

$$\varphi \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_k \psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell).$$

我们进一步称性质 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ 属于 Σ_i 或 Π_i，如果分别存在一个一阶句子 φ 属于Σ_i 或 Π_i，使得 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\varphi$。

EXAMPLE 1 （子结构自由性）。设 B 是一个 σ-结构，并设 $d \in \mathbb{N}$。该性质

$$\mathcal{P} := \{A \in \mathcal{C}_{\sigma,d} \mid A \textit{ does not contain } B \textit{ as substructure}\}$$

属于 Π_1。

2.3. 性质测试。下文将给出两种性质测试模型的定义：一种是 [21] 中为简单图引入的有界度模型，另一种是类似于 [1] 中所引入模型的关系结构有界度模型。这里描述的关系结构模型旨在简化记号。它与 [1] 中的模型在查询访问的定义方式上有所不同；不过，两者等价，即在任一模型中可测试的性质，在另一模型中也可测试。利用第 5.2 节中定义的局部归约，可以很容易地看出这一点。关系结构的有界度模型扩展了 [21] 中为无向图引入的有界度模型，并符合 [11] 的双向模型。

[3]我们所说的布尔组合，始终指 *finite* 布尔组合。

为方便记号， $\mathcal{C}$ 将表示一个在同构下封闭的有界度图类 d ，或者表示某个签名 σ 和某个 $d \in \mathbb{N}$ 下、在同构下封闭的有界度 σ-结构类 d。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个性质。下文也将图和 σ-结构统称为结构。设 $\mathcal{P}_n$ 是 $\mathcal{P}$ 中具有 n 个顶点/元素的子集。因此 $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$。我们将具有 n 个顶点/元素的结构 A 到性质 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 的距离定义为

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{P}) := \min_{B\in\mathcal{P}_n} \frac{\sum_{R\in\sigma} |R(A)\triangle R(B)|}{dn}.$$

对于 $\epsilon \in (0,1)$，我们称一个具有 n 个顶点/元素的结构 A 与 $\mathcal{P}$ 是 ϵ-接近的，如果 $\operatorname{dist}(A,\mathcal{P}) \leq \epsilon$；也就是说，可以通过至多添加 / 删除 ϵdn 个属于 A 的元组，将 A 修改为 $\mathcal{P}$ 中的一个结构。如果 A 不与 $\mathcal{P}$ ϵ-接近，我们就称 A 与 $\mathcal{P}$ ϵ-相距甚远。

处理结构 $A \in \mathcal{C}$ 的算法不会像通常那样获得 A 的位串编码。相反，我们假设算法会接收 A 中元素/顶点的数量 n，并且 A 中的元素/顶点编号为 $1, 2, \ldots, n$。此外，算法可以通过一个预言机直接访问 A；该预言机能在常数时间内回答 A 中关于邻点的查询。对一个度有界的 d 的 σ-结构 A 的查询形式为 (a,i)，其中 $a \in U$ 是一个元素（A），$i \in \{1,\ldots,d\}$；其回答为 $\operatorname{ans}(a,i) := (R, a_1, \ldots, a_{\operatorname{ar}(R)})$，其中 $(a_1,\ldots,a_{\operatorname{ar}(R)})$ 是包含 a 的第 i 个元组（按某个固定顺序排列），且 $(a_1,\ldots,a_{\operatorname{ar}(R)}) \in R(A)$。对度有界的图 G 的查询形式为 (v,i)，其中 $v \in V(G)$，$i \in \{1,\ldots,d\}$；其回答为 $\operatorname{ans}(v,i) := w$，其中 w 是 v 的第 i 个邻点。

现在我们给出标准性质测试和邻近无关测试的形式化定义。

Definition 2.2（（标准）性质测试）。令 $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 为一个性质。用于 $\mathcal{P}_n$ 的 ϵ-测试器是一种概率算法，它在获得对具有 n 个顶点/元素的结构 $A \in \mathcal{C}$ 的查询访问后，

- 接受 A 的概率为 $2/3$，如果 $A \in \mathcal{P}_n$。
- 如果 A 与 $\mathcal{P}_n$相差至少 ϵ，则以 $2/3$的概率拒绝 A。

我们称性质 $\mathcal{P}$ 可测试，如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon \in (0,1)$，都存在一个用于 $\mathcal{P}_n$ 的 ϵ-测试器，至多进行 $q = q(\epsilon, d)$ 次查询。我们称性质 $\mathcal{P}$ 具有单侧误差可测试性，如果该 ϵ-测试器在 $A \in \mathcal{P}$ 时总是接受 A。

下面我们给出邻近无关测试器的形式化定义。

Definition 2.3（邻近无关测试（单侧误差））。设 $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 是一个性质。设 $\eta : (0,1] \to (0,1]$ 是一个单调不减函数。对 $\mathcal{P}_n$ 而言，检测概率为 η 的邻近无关测试器（POT）是一种概率算法：给定对具有 n 个顶点/元素的结构 $A \in \mathcal{C}$ 的查询访问，

- 若 $A \in \mathcal{P}_n$，则以概率 1 接受 A。
- 若 $A \notin \mathcal{P}_n$，则以至少 $\eta(\operatorname{dist}(A,\mathcal{P}_n))$ 的概率拒绝 A。

我们称性质 $\mathcal{P}$ 是邻近无关可测试的，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个用于 $\mathcal{P}_n$ 的 POT，其查询复杂度为常数，检测概率为 η。

我们在此提醒读者以下我们在引言中论证过的内容。

注 2.4。设 $d \in \mathbb{N}$。每个可在 Σ_1 中定义的 propery 都可在 C_d 上测试；每个可在 Π_1 中定义的性质都可在 C_d 上测试。

2.4. 扩展性与之字形乘积。本节回顾 [33] 中引入的一类扩展图的构造。该构造使用含有平行边和自环的无向图。

设 $G=(V,E,f)$ 是一个具有 N 个顶点的无向 D-正则图。我们采用如下约定：每个自环计入度 1。设 I 是一个大小为 D 的集合。那么， G 的旋转映射是一个函数 $\mathrm{ROT}_G: V\times I\to V\times I$，满足对于任意两个不一定不同的顶点 $u,v\in V$

$$|\{(i,j)\in I\times I \mid \mathrm{ROT}_G(u,i)=(v,j)\}| = 2|\{e\in E \mid f(e)=\{u,v\}\}|$$

并且 ROT_G 是自反的，即对于所有 $v\in V$、$i\in I$，$\mathrm{ROT}_G(\mathrm{ROT}_G(v,i)) = (v,i)$。旋转映射是图的一种表示，它还为每个顶点 v 指定了与 v 相 incident 的所有边的顺序。我们将 G 的归一化邻接矩阵 M 定义为

$$M_{u,v} := \frac{1}{D}\cdot|\{e \mid f(e)=\{u,v\}\}|.$$

由于 M 是实对称矩阵、不含负项且所有列的和均为 1，因此其所有特征值都属于实区间 $[-1,1]$。令 $1=\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_N\geq -1$ 表示 M 的特征值。我们令 $\lambda(G):=\max\{|\lambda_2|,|\lambda_N|\}$。注意，这些概念不依赖于旋转映射。若 G 有 N 个顶点、是 D-正则图，且 $\lambda(G)\leq\lambda$，则称该图为 (N,D,λ)-图。我们将使用以下引理。

Lemma 2.5 ([26])。图 G 连通，当且仅当 $\lambda_2<1$。此外，如果图 G 连通，那么 G 是二分图，当且仅当 $\lambda_N=-1$。

对于任意子集 $S,T\subseteq V$，令 $\langle S,T\rangle_G := \{e\in E \mid f(e)\cap S\neq\emptyset, f(e)\cap T\neq\emptyset\}$ 为跨越 S 与 T之间的边集合。

Definition 2.6. 对于任意集合 $S\subseteq V$，我们令 $h(S) := \frac{|\langle S,\overline{S}\rangle_G|}{|S|}$ 为S的扩展性。我们令 $h(G)$ 为 G 的扩张比，定义为 $h(G) := \min_{\{S\subset V \mid |S|\leq N/2\}} h(S)$。

对于任意常数 $\epsilon>0$，如果对于所有 $m\in\mathbb{N}_{>0}$，$h(G_m)\geq\epsilon$，我们称由顶点数递增的图组成的序列 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为 ϵ-扩展图族。我们称一个图族为扩展子图族，如果它对于某个常数 $\epsilon>0$是 ϵ-扩展图族。我们还经常将扩展子图族中的图称为扩展图。在 $h(G)$与 $\lambda(G)$之间存在如下联系。

Theorem 2.7 ([13, 6]). 设 G 是一个 D-正则图。那么有 $h(G)\geq D(1-\lambda(G))/2$.

这意味着，对于顶点数不断增加的图序列 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}}$，如果存在一个常数 $\epsilon<1$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}_{>0}$都有 $\lambda(G_m)\leq\epsilon$，那么序列 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}}$ 就是一族 $D(1-\varepsilon)/2$-扩展图。

Definition 2.8. 设 G 是一个具有旋转映射 $\mathrm{ROT}_G: V\times I\to V\times I$ 的 D-正则图，其顶点数为 N，且 I 是一个大小为 D的集合。那么 G的平方图，记作G^2，是一个具有旋转映射 $\mathrm{ROT}_{G^2}(u,(k_1,k_2)) := (w,(\ell_2,\ell_1))$ 的 D^2-正则图，其顶点数为 N，其中

$$\mathrm{ROT}_G(u,k_1) = (v,\ell_1) \text{ and } \mathrm{ROT}_G(v,k_2)=(w,\ell_2),$$

以及 $u,v,w\in V$, $k_1,k_2,\ell_1,\ell_2\in I$。

注意， G^2 的边对应于 G 中长度为 2 的游走，并且 G^2 的邻接矩阵是 G的邻接矩阵的平方。还要注意，如果 G 是二分图，那么 G^2 就不是连通的，这一点可由引理 2.5 轻易看出。

Lemma 2.9 ([33]). *If G is a (N,D,λ)-graph then G^2 is a (N,D^2,λ^2)-graph.*

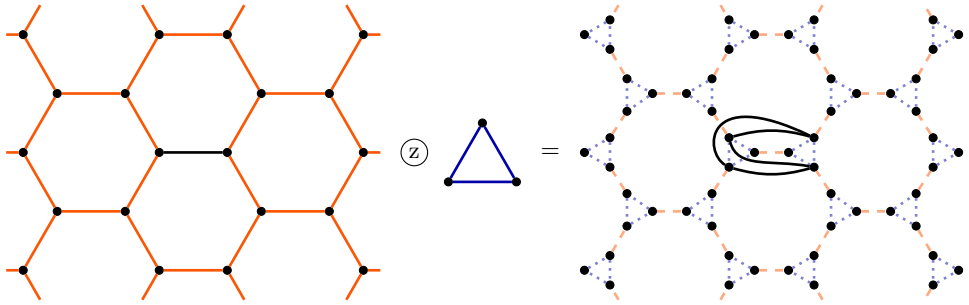


图 1：3-正则网格与三角形的之字形乘积

DEFINITION 2.10. 设 $G_1 = (V_1, E_1, f_1)$ 是一个定义在 N_1 个顶点上的 D_1-正则图，I_1 是一个大小为 D_1 的集合，且 $\mathrm{ROT}_{G_1} : V_1 \times I_1 \to V_1 \times I_1$ 是 G_1 的一个旋转映射。设 $G_2 = (I_1, E_2, f_2)$ 是一个 D_2- 正则图，I_2 是一个大小为 D_2 的集合，且 $\mathrm{ROT}_{G_2} : I_1 \times I_2 \to I_1 \times I_2$ 是 G_2 的一个旋转映射。那么，G_1 与 G_2 的之字形乘积记作 $G_1 \,\textcircled{z}\, G_2$，它是一个顶点集为 $V_1 \times I_1$ 的 D_2^2-正则图，其旋转映射定义为 $\mathrm{ROT}_{G_1 \,\textcircled{z}\, G_2}((v,k),(i,j)) := ((w,\ell),(j',i'))$，其中

$$\mathrm{ROT}_{G_2}(k,i) = (k',i'),\ \mathrm{ROT}_{G_1}(v,k') = (w,\ell'),\ \ and\, \mathrm{ROT}_{G_2}(\ell',j) = (\ell,j'),$$

以及 v、$w \in V_1$、k、k'、ℓ、$\ell' \in I_1$、i、i'、j、$j' \in I_2$。

之字形乘积 $G_1 \,\textcircled{z}\, G_2$ 可以看作以下构造的结果。首先，为 G_2的顶点选定一种编号。然后，将 G_1 中的每个顶点替换为 G_2 的一个副本，其中我们将来自 G_1的边涂成红色，将来自 G_2 的边涂成蓝色。我们以这样的方式进行构造：顶点 v 的 G_1 中的第 i条边，将与 G_2的对应副本中的顶点 i 相 incident。然后，对于每条红边 (v,w) 以及每个元组 $(i,j) \in I_2 \times I_2$，我们在之字形乘积 $G_1 \,\textcircled{z}\, G_2$ 中添加一条连接v' 和 w' 的边，其中 v' 是从 v 沿其第 i条蓝边到达的顶点，而 w' 可以从 w 沿其第 j条蓝边到达。图 1展示了一个例子：在右侧的图中，我们展示了针对左侧图中高亮显示的边而添加到之字形乘积中的 4 条边。

THEOREM 2.11([33])。如果 G_1 是一个(N_1, D_1, λ_1)-图，且 G_2 是一个 (D_1, D_2, λ_2)- 图，那么 $G_1 \,\textcircled{z}\, G_2$ 是一个 $(N_1 \cdot D_1, D_2^2, g(\lambda_1,\lambda_2))$-图，其中

$$g(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}(1-\lambda_2^2)\lambda_1 + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\lambda_2^2)^2\lambda_1 + 4\lambda_2^2}.$$

这个函数具有以下性质。

如果 $\lambda_1 < 1$ 和 $\lambda_2 < 1$，则 $g(\lambda_1,\lambda_2) < 1$。2. $g(\lambda_1, \lambda_2) < \lambda_1 + \lambda_2$。

DEFINITION 2.12 ([26]). 设 D 为充分大的素数幂（例如 $D = 2^{16}$）。设 H为一个$(D^4, D, 1/4)$扩展图（存在 H的显式构造，参见 *[33]*）。我们定义 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}}$ 为

$$G_1 := H^2, \qquad G_m := G_{m-1}^2 \,\textcircled{z}\, H \ \ for\ m > 1. \tag{2.1}$$

PROPOSITION 2.13（[26]）。对于任意 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，图 G_m 是一个（D^{4m}，D^2，$1/2$）-图。

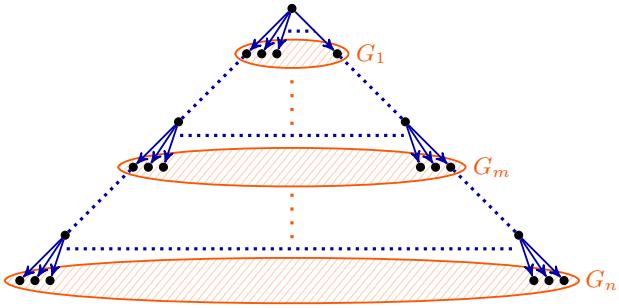


图 2：的模型的示意图φ_{Z}，其中红色（灰色）部分仅包含来自 E 以及来自 F 的关系，分别以蓝色（黑色）表示。关系 R 和 L 被省略。

在下一节中，我们将使用以下引理，其证明推迟至附录??。

LEMMA 2.14. 设 G 是一个 D-正则图， S 是 G^2 的一个连通分量的顶点集合。那么 $\lambda(G^2[S]) < 1$。

证明。设 $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N$ 为 $G^2[S]$ 的特征值。由于 $G^2[S]$ 连通，引理 2.5 蕴含 $\lambda_1 > \lambda_2$。现在假设 -1 是 $G^2[S]$ 的特征值，其特征向量为 $\overline{v}$。那么，由 $\overline{v}'_v = \overline{v}_v$ 定义的向量 $\overline{v}'$，在所有 $v \in S$ 时为 $\overline{v}'_v = 0$，否则为该向量，是图 G^2 的特征值 -1 对应的特征向量。但是，由于 G^2 的每个特征值都是实数的平方，G^2 不可能有负特征值。因此， $\lambda_1 \neq \lambda_N$ 和 $\lambda\left(G^2[S]\right) < 1$，如所述。 □

3. 一阶逻辑可定义的扩展图类。本节定义一个公式，使得其模型的底层图是扩展图。我们先对该公式作高层次的描述。设 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}_{>0}}$ 如定义 2.12 所示。粗略地说，我们公式的每个模型都是一个结构，它由 G_1、.....、G_n 的不交并构成，其中某个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 具有底层树结构，将 G_{m-1} 与所有 G_m 相连（对每个 $m \in \{2,\ldots,n\}$ 均如此）。图 2 给出了示意图。树结构使我们能够为扩展图的构造提供一个可用一阶逻辑检验的证书。该树结构是一棵 D^4 叉树，用于将 G_{m-1} 中的一个顶点 v 与 H 副本中的每个顶点相连；该副本将替换 G_m 中的 v。我们使用 D^4 个关系 $\{F_k\}_{k\in([D]^2)^2}$，为每个顶点的 D^4 个子节点规定顺序。我们使用额外的关系来编码旋转映射。对于 i、$j \in [D]^2$，令 $E_{i,\ j}$ 为一个二元关系。对于每一对 i、$j \in [D]^2$，我们用两个元组 $(v, w) \in E_{i,j}(A)$ 和 $(w, v) \in E_{j,i}(A)$ 表示 G_m 中的一条边 $\{v, w\}$。这样，我们便可以用一阶逻辑中的公式 '$E_{i,j}(v, w)$' 编码关系 $\mathrm{ROT}_{G_m}(v, i) = (w, j)$。

我们使用辅助关系 R 和 L_k 来表示 $k \in([D]^2)^2$,，从而强制模型为度正则。关系 R 包含对应于树的根 r 的元组 (r, r)，而L_k 则包含对应于树的每个叶节点 v 的元组 (v, v)。

现在我们给出该公式的精确定义。我们用 $[n] := \{0, 1, \ldots, n-1\}$表示 $n \in \mathbb{N}$。令

$$\sigma := \left\{\{E_{i,j}\}_{i,j\in[D]^2}, \{F_k\}_{k\in([D]^2)^2}, R, \{L_k\}_{k\in([D]^2)^2}\right\},$$

其中 $E_{i,\ j}$, F_k, R 和 L_k 是用于表示 $i, j \in [D]^2$ 和 $k \in ([D]^2)^2$ 的二元关系符号 .

为方便起见，我们引入辅助关系 E 和 F，使得对于每个 σ-结构 A，都有 $E(A) := \bigcup_{i,\ j\in[D]^2} E_{i,\ j}(A)$ 和 $F(A) := \bigcup_{k\in([D]^2)_2} F_k(A)$。在任意公式中，我们都可以通过以下方式使用这些辅助关系进行反转：将形如“$E(x,y)$”的公式替换为“$\bigvee_{i,\ j\in[D]^2} E_{i,\ j}(x,y)$”，并将形如“$F(x,y)$”的公式替换为“$\bigvee_{k\in([D]^2)_2} F_k(x,y)$”。

我们使用以下公式 $\varphi_{\mathrm{root}}(x)$：$=\forall y\neg F(y,x)$，并称元素$a\in U(A)$ 是结构 A 的根，如果 $A\models\varphi_{\mathrm{root}}(a)$。

我们现在定义一个公式 φ_{tree}，它表达了任何限制在关系 F 上的模型在局部看起来都像一棵 D^4-元树。更准确地说，该公式定义了该结构至多有一个根，每个其他顶点恰好有一个父节点，并且每个顶点要么没有子节点，要么对于 D^4个关系 F_k中的每一个恰好有一个子节点。它还定义了用于使该结构度正则的自环。

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{tree}} := {} & \exists^{\leq 1}x\varphi_{\mathrm{root}}(x)\wedge\forall x\Big(\big(\varphi_{\mathrm{root}}(x)\wedge R(x,x)\big)\vee\\
& \big(\exists^{=1}yF(y,x)\wedge\neg\exists yR(x,y)\wedge\neg\exists yR(y,x)\big)\Big)\wedge\\
& \forall x\Big(\Big[\neg\exists yF(x,y)\wedge\bigwedge_{k\in([D]^2)^2}L_k(x,x)\wedge\forall y\big(y\neq x\rightarrow\\
& \bigwedge_{k\in([D]^2)^2}\neg L_k(x,y)\wedge\bigwedge_{k\in([D]^2)^2}\neg L_k(y,x)\big)\Big]\\
& \vee\Big[\neg\exists y\bigvee_{k\in([D]^2)^2}\big(L_k(x,y)\vee L_k(y,x)\big)\wedge\bigwedge_{k\in([D]^2)^2}\exists y_k\Big(x\neq y_k\wedge F_k(x,y_k)\wedge\\
& \Big(\bigwedge_{k'\in([D]^2)^2,k'\neq k}\neg F_{k'}(x,y_k)\Big)\wedge\forall y(y\neq y_k\rightarrow\neg F_k(x,y))\Big)\Big]\Big).
\end{aligned}
$$

公式 $\varphi_{\mathrm{rotationMap}}$ 将定义关系在 E 中必须具备的性质，以便编码 D^2-正则图的旋转映射。为此，我们确保边颜色编码了一个映射，即对于任意一对顶点 x 和索引 $i\in[D]^2$，至多存在一对顶点 y 和索引 $j\in[D]^2$，使得 $E_{i,\ j}(x,y)$ 成立，并且该映射是自反的，也就是说，若 $E_{i,\ j}(x,y)$，则 $E_{j,\ i}(y,x)$。

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{rotationMap}} := {} & \forall x\forall y\Big(\bigwedge_{i,j\in[D]^2}(E_{i,j}(x,y)\rightarrow E_{j,i}(y,x))\Big)\wedge\\
& \forall x\Big(\bigwedge_{i\in[D]^2}\Big(\bigvee_{j\in[D]^2}\big(\exists^{=1}yE_{i,j}(x,y)\wedge\bigwedge_{\substack{j'\in[D]^2\\ j'\neq j}}\neg\exists yE_{i,j'}(x,y)\big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

现在我们定义一个公式 φ_{base}，它表达结构的每个根 x 在每个关系 $E_{i中j}$ 都有一个自环 (x,x)，并且根的 D^4 子节点构成G_1。设 H为定义 2.12 中的 $(D^4,D,1/4)$-图。假设 H的顶点集为 $([D]^2)^2$。然后，我们将顶点 $k\in([D]^2)^2$ 与元素 y 对应起来，使得对于每个根 x，都有 $(x,y)\in F_k(A)$。令 $\mathrm{ROT}_H:([D]^2)^2\times[D]\rightarrow([D]^2)^2\times[D]$ 为 H的任意旋转映射。固定 H 的旋转映射就确定了 H^2的旋转映射。回顾一下，$G_1:=H^2$。我们可以对 G_1的所有边取合取来定义 G_1。

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{base}} := {} & \forall x\Big(\varphi_{\mathrm{root}}(x)\rightarrow\Big[\bigwedge_{i,j\in[D]^2}\Big(E_{i,j}(x,x)\wedge\forall y\Big(x\neq y\rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\big(\neg E_{i,j}(x,y)\wedge\neg E_{i,j}(y,x)\big)\Big)\Big)\wedge \bigwedge_{\substack{\mathrm{ROT}_{H^2}(k,i)=(k',i')\\ k,k'\in([D]^2)^2\\ i,i'\in[D]^2}} \exists y\exists y'\big(F_k(x,y)\wedge F_{k'}(x,y')\wedge E_{i,i'}(y,y')\big)\Big]\Big)$$

现在我们将定义一个公式 $\varphi_{\mathrm{recursion}}$，它将确保树的 m 层包含 G_m。回顾一下，$G_m := G_{m-1}^2 \,\mathrm{z}\, H$。因此，我们表达的是：如果两个顶点 x之间存在长度为二的路径，z那么对于每一对 i，$j\in[D]$ 都存在一条边，将 x 和 z 各自对应的子节点连接起来，这符合之字形乘积的定义。这里需要注意的是，x 和 z 在底层树结构中要么都没有子节点，要么都有子节点。这一点也会在公式中编码。

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{recursion}} :=& \forall x\forall z\Bigg[\Big(\neg\exists y F(x,y)\wedge\neg\exists y F(z,y)\Big)\vee \bigwedge_{\substack{k_1',k_2'\in[D]^2\\ \ell_1',\ell_2'\in[D]^2}} \Big(\exists y\big[E_{k_1',\ell_1'}(x,y)\wedge E_{k_2',\ell_2'}(y,z)\big]\rightarrow \\ & \bigwedge_{\substack{i,j,i',j'\in[D],k,\ell\in([D]^2)^2\\ \mathrm{ROT}_H(k,i)=((k_1',k_2'),i')\\ \mathrm{ROT}_H((\ell_2',\ell_1'),j)=(\ell,j')}} \exists x'\exists z'\big[F_k(x,x')\wedge F_\ell(z,z')\wedge E_{(i,j),(j',i')}(x',z')\big]\Big)\Bigg]\end{aligned}$$

最后，我们令 $\varphi_{\mathsf{z}} := \varphi_{\mathrm{tree}}\wedge\varphi_{\mathrm{rotationMap}}\wedge\varphi_{\mathrm{base}}\wedge\varphi_{\mathrm{recursion}}$。至此，公式的定义完成。

3.1. 证明扩展性。在本节中，我们证明公式 φ_{z} 在有界度关系结构上定义了扩展图的一种性质。

令 $d := 2D^2+D^4+1$，其选取方式应确保在 $\mathcal{C}_\sigma$ 中的任意 σ 结构元素，d 都满足：处于 $2D^2$ E-关系中（G_m 是 D^2 正则的，且G_m 的每条边都由两个元组建模），具有 D^4 F-子节点或 D^4 L-自环，并且具有一个 F-父节点或处于一个 R-自环中。

对于每个模型 A 的 φ_{z}，我们将关联一个无向（带有平行边和自环的）图 $\underline{G}(A)$，其顶点集为 $U(A)$。对于 A的每个关系中的每个元组，图 $\underline{G}(A)$中将有一条边。我们将通过旋转映射定义 $\underline{G}(A)$，该映射扩展了由关系 E编码的旋转映射。为此，令 $I := \{0\}\sqcup([D]^2)^2\sqcup[D]^2$ 为一个指标集。形式上，我们将模型 A 的 φ_{z} 的底层图 $\underline{G}(A)$ 定义为具有顶点集 $U(A)$ 的无向图，该图由旋转映射 $\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A)}\colon A\times I\to A\times I$ 定义，定义为

$$\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A)}(v,i) := \begin{cases}(v,0) & \text{if } i=0 \text{ and } (v,v)\in R(A)\\ (w,j) & \text{if } i=0 \text{ and } (w,v)\in F_j(A)\\ (w,0) & \text{if } i\in([D]^2)^2 \text{ and } (v,w)\in F_i(A)\\ (v,i) & \text{if } i\in([D]^2)^2 \text{ and } (v,v)\in L_i(A)\\ (w,j) & \text{if } i\in[D]^2 \text{ and } (v,w)\in E_{i,j}(A).\end{cases}$$

我们可以将这个旋转映射理解为：按如下方式给包含元素 v 的元组标记：$(v,v)\in R(A)$ 或 $(w,v)\in F_k(A)$ 分别标记为 0，$(v,w)\in F_k(A)$

或者 $(v,v) \in L_k(A)$ 分别标记为 k，而 $(v,w) \in E_{i,j}(A)$ 标记为 i。注意，$\underline{G}(A)$ 是 (D^2+D^4+1)-正则的。这里我们选择使用底层图的概念，而非盖夫曼图；这样做尤其便于使用 [33] 中的结果。不过，通过忽略自环和重边，可以从底层图得到盖夫曼图。

THEOREM 3.1. 存在一个 $\epsilon > 0$ 使得类 $\{\underline{G}(A) \mid A \models \varphi_{\mathrm{Z}}\}$ 是一个由 ϵ-扩展图组成的族。

本节余下部分将给出定理 3.1 的证明。设 A 是φ_{Z} 的一个模型。设 $A|_F$是 $\{(F_k)_{k\in([D]^2)^2}\}$-结构 $(U(A), (F_k(A))_{k\in([D]^2)^2})$。回顾一下，我们用 $G(A|_F)$ 表示 $A|_F$的盖夫曼图。设 $A|_E$是 $\{(E_{i,j})_{i,j\in[D]^2}\}$-结构 $(U(A), (E_{i,j}(A))_{i,j\in[D]^2})$。我们进一步将 $A|_E$ 的底层图 $\underline{G}(A|_E)$ 定义为由旋转映射 $\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A|_E)}$ 指定的无向图，其中该映射定义为 $\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A|_E)}(v,i) := (w,j)$，当且仅当 $(v,w) \in E_{i,j}(A)$。这是良定义的，因为 $A \models \varphi_{\mathrm{rotationMap}}$。我们用子结构 $G(A|_F)$ 和 $\underline{G}(A|_E)$ 来表达φ_{Z} 的模型的结构性质。更确切地说，我们想证明 $G(A|_F)$ 是一棵有根完全树，而 $\underline{G}(A|_E)$ 是扩展图 $G_1, \ldots, G_n$的不交并，其中某个 $n \in \mathbb{N}$（引理 3.10）。为证明这一点，我们使用两个技术性引理（引理 3.2 和引理 3.5）。引理 3.2 直观地表明，$\underline{G}(A|_E)$ 的每个连通部分在 $G(A|_F)$ 中的子节点构成该连通部分的平方图与 H 的之字形乘积。引理 3.5 表明 $G(A|_F)$ 是连通的。为证明定理 3.1，我们利用这样一个事实：每一层都有一个扩展图的树具有良好的扩展性。粗略地说，这是因为要沿“水平方向”切断这棵树需要删除许多边，而要沿“垂直方向”切断它则需要切断许多扩展图。

LEMMA 3.2. 设 A 是φ_{Z} 的一个模型，并假设 S 是属于 $(\underline{G}(A|_E))^2$ 的某个不包含根的连通分量的所有顶点的集合，且 $S' := \{w \in U(A) \mid (v,w) \in F(A)\ v \in S\}$。如果 $S' \neq \emptyset$，那么 $\underline{G}(A|_E)[S']$ 是 $\underline{G}(A|_E)$ 的一个连通分量，并且 $\underline{G}(A|_E)[S'] \cong ((\underline{G}(A|_E))^2[S]) \mathbin{\textcircled{Z}} H$。

我们使用$(\underline{G}(A|_E))^2$ 的连通分量，因为 $\underline{G}(A|_E)$的平方图可能不是连通的，在这种情况下，与 H 的连通分量的平方图的之字形乘积无法连通。

引理 3.2的证明。假设 $S' \neq \emptyset$。我们首先证明 $\underline{G}(A|_E)[S'] \cong ((\underline{G}(A|_E))^2[S]) \mathbin{\textcircled{Z}} H$。为此，我们使用以下两个断言。

CLAIM 3.3. 如果

$$\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2[S] \mathbin{\textcircled{Z}} H}((u,k),(i,j)) = ((w,\ell),(j',i'))$$

对于某些 u、$w \in S$、k、$\ell \in ([D]^2)^2$、i、j、i'、$j' \in [D]$，则存在 $v \in S$ 使得（u、v）$\in E_{k'_1,\ell'_1}(A)$，且（v、w）$\in E_{k'_2,\ell'_2}(A)$，其中 ROT_H（k、i）$=$（（k'_1、k'_2）i'），且 ROT_H（（ℓ'_2、ℓ'_1）j）$=$（ℓ、j'）。

证明。根据该主张的前提和之字形乘积的定义，我们有 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2[S]}(u,(k'_1,k'_2)) = (w,(\ell'_2,\ell'_1))$，对于 $\mathrm{ROT}_H(k,i) = ((k'_1,k'_2)\ i')$ 以及 $\mathrm{ROT}_H((\ell'_2,\ell'_1)\ j) = (\ell,j')$。

由于 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2[S]}$ 等于将 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2}$ 限制在集合 S 的元素上，因此我们有 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2}(u,(k'_1,k'_2)) = (w,(\ell'_2,\ell'_1))$。因此，根据图 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2}(u,(k'_1,k'_2))$ 的平方图的定义，$\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2}(u,(k'_1,k'_2)) = (w,(\ell'_2,\ell'_1))$ 意味着存在v，使得 $\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A|_E)}(u,k'_1) = (v,\ell'_1)$ 且 $\mathrm{ROT}_{\underline{G}(A|_E)}(v,k'_2) = (w,\ell'_2)$。

CLAIM 3.4. 若 $(u,v)\in E_{k'_1,\ell'_1}(A)$ 且 $(v,w)\in E_{k'_2,\ell'_2}(A)$，对于 $u,v,w\in U(A)$，$k'_1,k'_2,\ell'_1,\ell'_2\in([D]^2)^2$，并且存在 $u'\in U(A)$，使得 $(u,u')\in F(A)$，则存在$w'\in U(A)$，使得 $(w,w')\in F(A)$。此外，对于任意 $i,i',j,j'\in[D]$，存在$\tilde{u},\tilde{w}\in U(A)$、$k,\ell\in([D]^2)^2$，使得对于 $(u,\tilde{u})\in F_k(A)$ 和 $(w,\tilde{w})\in F_\ell(A)$，有 $(\tilde{u},\tilde{w})\in E_{(i,j),(j'i')}(A)$，其中 $\mathrm{ROT}_H(k,i)=((k'_1,k'_2)\ i')$ 且 $\mathrm{ROT}_H((\ell'_2,\ell'_1)\ j)=(\ell,j')$。

证明。我们只使用 $A\models\varphi_{\text{recursion}}$。由于 $\varphi_{\text{recursion}}$ 具有 $\forall x\forall z\psi(x,z)$ 的形式，其中某个公式为 $\psi(x,z)$，因此我们知道 $A\models\psi(u,w)$。由于 $(u,u')\in F(A)$，我们有$A\not\models\neg\exists yF(u,y)\wedge\neg\exists yF(w,y)$。由于 $A\models\exists y\big[E_{k'_1,\ell'_1}(u,y)\wedge E_{k'_2,\ell'_2}(w,z)\big]$

$$A\models\bigwedge_{\substack{i,j,i',j'\in[D],k,\ell\in([D]^2)^2\\ \mathrm{ROT}_H(k,i)=((k'_1,k'_2),i')\\ \mathrm{ROT}_H((\ell'_2,\ell'_1),j)=(\ell,j')}}\exists x'\exists z'\big[F_k(u,x')\wedge F_\ell(w,z')\wedge E_{(i,j),(j',i')}(x',z')\big]$$

由于 H是 D-正则的，对于每个 $k'_1,k'_2\in[D]^2$和 $i,i'\in[D]$，都存在 $k\in([D]^2)^2$，使得 $\mathrm{ROT}_H(k,i)=((k'_1,k'_2,i')$（ ℓ'_1,ℓ'_2,j,j' 也同理）。因此，上述合取非空。这进一步意味着，对于任意 $i,i',j,j'\in[D]$，都存在$\tilde{u},\tilde{w}\in U(A)$、$k,\ell\in([D]^2)^2$，如所述。特别地，存在 $w'\in U(A)$，使得 $(w,w')\in F(A)$。□

我们将论证，对于每个元素 $w\in S$，存在一个 $w'\in S'$，使得 $(w,w')\in F(A)$。为此，任取一个 $u'\in S'$。令 $u\in S$为满足 $(u,u')\in F(A)$的元素。结合引理 2.14、定理 2.11 和引理 2.5，可知$((\underline{G}(A|_E))^2[S])\mathsf{z}H$是连通的。因此，对于某些 k_1、k_2、ℓ_1、$\ell_2\in[D]^2$，在 $((\underline{G}(A|_E))^2[S])\mathsf{z}\ H$ 中存在一条路径$(u'_0,\ldots,u'_m)$，从 $u'_0=(u,(k_1,k_2))$ 到 $u'_m=(w,(\ell_1,\ell_2))$。根据命题 3.3，在 $\underline{G}(A|_E)$ 中存在一条从 $u_0=u$ 到 $u_m=w$ 的路径 $(u_0,v_0,u_1,v_1,\ldots u_{m-1},v_{m-1},u_m)$。沿着该路径归纳地应用命题 3.4，我们可以找到 w'，使得 $(w,w')\in F(A)$。

将此与 $A\models\varphi_{\text{tree}}$ 结合可知，映射 $f\colon\ S\times([D]^2)^2\to S'$ 定义为 $f(v,k)=u$ 当 $(v,u)\in F_k(A)$ 时，是良定义的。此外，根据命题 3.3 和 3.4，我们有：如果 $\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))^2[S]\,\mathsf{z}\ H}((u,k),(i,j))=((w,\ell),(j',i'))$ 成立，那么

$$\mathrm{ROT}_{(\underline{G}(A|_E))[S']}(f((u,k)),(i,j))=(f((w,\ell)),(j',i')).$$

这证明了 f 将$((\underline{G}(A|_E))^2[S])\mathsf{z}H$ 中的每条边单射到$\underline{G}(A|_E)[S']$中的一条边。然后，映射 f 连同相应的边映射，是从$((\underline{G}(A|_E))^2[S])\mathsf{z}\ H$ 到 $\underline{G}(A|_E)$的同构，因为二者都是 D^2-正则的。

此外，$\underline{G}(A|_E)[S']\cong((\underline{G}(A|_E))^2[S])\ \mathsf{z}\ H$蕴含 $\underline{G}(A|_E)[S']$ 是连通且 D^2-正则的。由于 $A\models\varphi_{\text{rotationMap}}$ 强制要求 $\underline{G}(A|_E)$是 D^2-正则的，因此没有顶点$v\in S'$ 会有不属于 S' 的邻点，所以 $\underline{G}(A|_E)[S']$ 是 $\underline{G}(A|_E)$的一个连通分量。□

LEMMA 3.5. 设 $A\in\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 是 $\varphi\mathsf{z}$ 的一个模型。那么 $G(A|_F)$ 的每个连通分量都包含 A 的一个根。特别地，对于 $\varphi\ \mathsf{z}$ 的每个模型 $A\in\mathcal{C}_{\sigma,d}$，图 $G(A|_F)$ 是连通的。

注意，对于模型 $A\in\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 的 $\varphi\ \mathsf{z}$，$G(A|_F)$ 的连通性意味着 A 是连通的，因为 $G(A|_F)$ 是 A 的盖夫曼图的一个子图，包含相同的顶点集合。因此，以下推论立即由引理 3.5 得出。

COROLLARY 3.6. *Any model $A\in\mathcal{C}_{\sigma,d}$ of $\varphi_{\mathbb{Z}}$ is connected.*

引理 3.5 的证明。假设 $G(A|_F)$ 有一个连通分量，其中不包含 A 的根，并令 G' 为 $G(A|_F)$ 的一个连通分量，其顶点集为 $V \subseteq U(A)$，使得对于每个 $v \in V$，都有 $A \not\models \varphi_{\text{root}}(v)$。对于接下来的断言，我们应当注意，$(A|_F)[V]$ 可以理解为一个有向图，其中每个顶点的入度均为 1，且相应的无向图 G' 是连通的。因此，$(A|_F)[V]$ 必须由若干棵不相交的有向树组成，这些树的根构成一个有向环。因此，G' 具有如下断言所给出的结构。

Claim 3.7. G' 包含一个环（$c_0, \ldots, c_{\ell-1}$），并且对于 G' 的每个顶点 v，G' 中恰好存在一条路径（$p_0, \ldots, p_m$），其中 $p_0 = v$、p_m 在该环上，而对于所有 $i \in [m]$，p_i 不在该环上。

证明。令 v_0 为 G' 中的任意一个顶点，并令 $S_0 = \{v_0\}$。现在我们将递归地定义 v_i 为 G' 中满足（v_i，v_{i-1}）$\in F(A)$ 的顶点。根据 G' 的选择（即没有根位于 G'中）以及 $A \models \varphi_{\text{tree}}$这一事实，这样的顶点总是存在。此外，由于 $A \models \varphi_{\text{tree}}$，这样的顶点是唯一的。我们还令 $S_i := S_{i-1} \cup \{v_i\}$。由于 $U(A)$ 是有限的，链 $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_i \subseteq \ldots$必然在某一点变为稳定。令 $i \in \mathbb{N}$ 为满足 $S_{i-1} = S_i$ 的最小指标，并令 $j < i$满足 $v_i = v_j$。那么（v_i，v_{i-1}，...，v_{j+1}，v_j）是 G'中的一个环，因为根据构造，（v_k，v_{k-1}）$\in F(A)$，这意味着 $\{v_k, v_{k-1}\}$是盖夫曼图$G(A|_F)$中的一条边。令 $C = \{c_0, \ldots, c_{\ell-1}\}$为该环的顶点。由于 G'是连通的，总能找到一条满足断言中所述性质的路径。因此，我们来论证这样的路径是唯一的。假设存在两条不同的此类路径（p_0，...，p_m）和（p'_0，...，$p'_{m'}$），并假设 $p_m = c_i$且$p'_{m'} = c_j$。令$k \leq \min\{m, m'\}$为满足 $p_k \neq p'_k$的最小指标。由于两条路径不同，并且 $p_0 = p'_0 = v$，我们也知道 $k \geq 1$，因此这样的指标必然存在。由于 $A \models \varphi_{\text{tree}}$，对于 G'的每个顶点 w，G'中至多存在一个顶点 w'，使得（w'，w）$\in F(A)$。由于$p_{m-1} \notin C$且（$c_{(i-1) \bmod \ell}$，p_m）$\in F(A)$，可推出（p_m，p_{m-1}）$\in F(A)$。归纳应用这一论证，我们得到（p_k，p_{k-1}）$\in F(A)$。对于路径（p'_0，...，$p'_{m'}$）同样适用，因此（p'_k，p'_{k-1}）$\in F(A)$。根据 k的选择，我们知道 $p_{k-1} = p'_{k-1}$ 且 $p_k \neq p'_k$，这与 $A \models \varphi_{\text{tree}}$矛盾。□

令 S_0 为具有 $c_0 \in S_0$ 的 $\underline{G}(A|_E)$ 的连通分量的顶点集。
注意，S_0 可能不包含在 G' 中。

现在我们递归地定义无限的集合序列 $S_i := \{w \in U(A) \mid (v, w) \in F(A)\ v \in S_{i-1}\}$ 对于每个 $i \in \mathbb{N}_{>0}$。令 $m_i := \max_{v \in S_i \cap V} \min_{j \in \{0,\ldots,\ell-1\}} \{\text{dist}_{G'}(c_j, v)\}$，并令 $v_i \in S_i \cap V$为 G' 中距 C 为 m_i 的一个顶点。注意，这里 m_i 定义良好，因为$c_{i \bmod \ell} \in S_i$。

Claim 3.8. $\underline{G}(A|_E)[S_i] = (\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}])^2 \textcircled{z} H$.

证明。我们通过归纳法证明更强的命题：$\underline{G}(A|_E)[S_i]$ 是 $\underline{G}(A|_E)$、$(\underline{G}(A|_E)[S_i])^2$ z $H = \underline{G}(A|_E)[S_{i+1}]$ 以及$\lambda(\underline{G}(A|_E)[S_i]) < 1$ 的一个连通分量，其中 $i \in \mathbb{N}$。

$\underline{G}(A|_E)[S_0]$根据 S_0的选择，是 $\underline{G}(A|_E)$ 的一个连通分量。令 ~

现在我们论证，$(\underline{G}(A|_E))^2[\tilde{S}]$ 是$(\underline{G}(A|_E))^2$的一个连通分量。反设结论不成立，那么要么$(\underline{G}(A|_E))^2$ 的某个连通分量同时包含来自 $\tilde{S}$ 和 $A \setminus \tilde{S}$ 的顶点，要么$(\underline{G}(A|_E))^2[\tilde{S}]$ 分裂成多个连通分量。设 S' 是第一种情形中的一个连通分量的顶点。于是 $|S'| > 1$，因此 S' 不可能包含任何根，因为根与任何不同于自身的元素之间都不存在 E-关系。因此，由引理 3.2 可知，$\underline{G}(A|_E)$在 S' 的子节点上有一个连通分量，其中同时包含来自 S_0 和 $U(A) \setminus S_0$ 的顶点，这

与$\underline{G}(A|_E)$的连通分量 S_0 相矛盾。现在设 S' 是第二种情形中的一个连通分量，并选取 S' 使其不包含根（这是可行的，因为至多只有一个根）。那么根据引理 3.2 S_0 与 $\underline{G}(A|_E)$的至少两个连通分量必有非空交集，这就产生了矛盾。

因此，由引理 2.14 $\lambda((\underline{G}(A|_E))^2[\tilde{S}]) < 1$。但由引理 3.2 $\underline{G}(A|_E)[S_0] =((\underline{G}(A|_E))^2[\tilde{S}])$ z H。于是，定理 2.11 和 $\lambda(H) < 1$ 确保 $\lambda(\underline{G}(A|_E)[S_0]) <1$。

对于 $i > 1$，根据归纳法，有 $\lambda(\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}]) < 1$；结合引理 2.9 和引理 2.5，可得 $(\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}])^2$ 是 $(\underline{G}(A|_E))^2$ 的连通分量[4]，且 $(\underline{G}(A|_E))^2[S_{i-1}] = (\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}])^2$。由于 $c_i \bmod \ell \in S_i$，根据引理 3.2，我们有 $\underline{G}(A|_E)[S_i]$ 是 $\underline{G}(A|_E)$ 的连通分量，且$\underline{G}(A|_E)[S_i] = (\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}])^2$ zH。此外，利用引理 2.9 和定理 2.11，可证明 $\lambda(\underline{G}(A|_E)[S_i]) < 1$。 □

CLAIM 3.9. 对于每个 $v \in S_i$，都存在 $w \in V$，使得 $(v, w) \in F(A)$。

证明。根据断言 3.8，我们有 $\underline{G}(A|_E)[S_{i+1}] = (\underline{G}(A|_E)[S_i])^2$ zH。这意味着，根据平方运算和之字形乘积的定义，我们知道 $|S_{i+1}| =D^4 \cdot |S_i|$。但此外，由于 $A \models \varphi_{\text{tree}}$，我们知道每个元素 $v \in S_i$ 至多会为 S_{i+1}贡献 D^4 个元素。这意味着，根据 S_{i+1}的构造，对于 S_i中的每个元素，都必定存在 $w \in V$，使得 $(v, w) \in F(A)$。 □

因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}_{>0}$，都存在 $w_i \in V$，使得 $(v_i, w_i) \in F(A)$，其中 v_i是上文选取的 G'中距 C为 m_i 的顶点。设 $(u_0, \dots, u_{m_i})$ 为 G'中从 $u_0 = v_i$ 到 $u_{m_i} \in C$ 的路径。注意，不可能出现 $w_i = u_1$。这是因为对于路径 $(u_0, ..., u_{m_i})$，对于所有 $j \in [m_i]$，都有 $(u_{j+1}, u_j) \in F(A)$。此外，由于 $v_i = u_0 \neq u_1$，假设 $w_i = u_1$ 将推出 (v_i, u_1)、$(u_2, u_1) \in F(A)$，这与 $A \models \varphi_{\text{tree}}$矛盾。于是 $(w_i, u_0, \dots, u_{m_i})$ 是 G'中从 w_i 到 C 的路径。由于根据构造有 $w_i \in S_{i+1}$，断言 3.7 蕴含 $m_{i+1} \geq m_i + 1$。因此，$m_i \geq i + m_0$ 可以归纳地成立。但这会导致矛盾，因为 $\ell + m_0 \leq m_\ell = m_0$，且环 $\ell > 0$ 的长度.....。图 3 给出了示意图。因此，$G(A|_F)$的每个连通分量都必须包含 A的一个根。此外，由于 $G(A|_F)$的每个连通分量都必须包含一个根，且 $A \models \exists^{\leq 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$，所以根的数量不能超过一个，$G(A|_F)$是连通的。 □

对于第 3 节中的公式 φ z，我们记 $\mathcal{P}$ z $:= \mathcal{P}_{\varphi}$z。

LEMMA 3.10. φz 的任意（有限）模型 $A \in \mathcal{C}_\sigma$，d 都具有如下结构。

- 要么是 $U(A)$，要么是 $|U(A)| = \sum_{m=0}^{n} D^{4m}$，其中某个 $n \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$。
- $G(A|_F)$ 是一棵 D^4 元完全有根树，其中根是唯一满足 $A \models \varphi_{\text{根}}(r)$ 的元素$r \in U(A)$。
- $\underline{G}(A|_E)[T_m] \cong G_m$，其中 G_m 按定义 2.12 中的方式定义，而 T_m 是树 $G(A|_F)$ 中与 r的距离为 m 的顶点集合，适用于任意 $m \in \{1, \dots, n\}$。

此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，都存在一个大小为 $\sum_{m=0}^{n} D^{4m}$ 的 φ z 模型。

证明。首先注意到，空结构 $A_\emptyset \in \mathcal{P}$z 是 $A_\emptyset \models \exists^{\leq 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$，因此 $A_\emptyset \models \varphi$ z 作为 φ z 是 $\exists^{\leq 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$ 与全称量化公式的合取。因此，可以得到 $U(A) = \emptyset$。现在假设 A 是 φ z 的一个模型，并且

[4]我们指出，$(\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}])^2$ 是一个连通分量这一说法，并不能直接由 $\underline{G}(A|_E)[S_{i-1}]$ 是 $\underline{G}(A|_E)$的一个连通分量这一事实推出，因为连通二分图的平方图不一定是连通的。

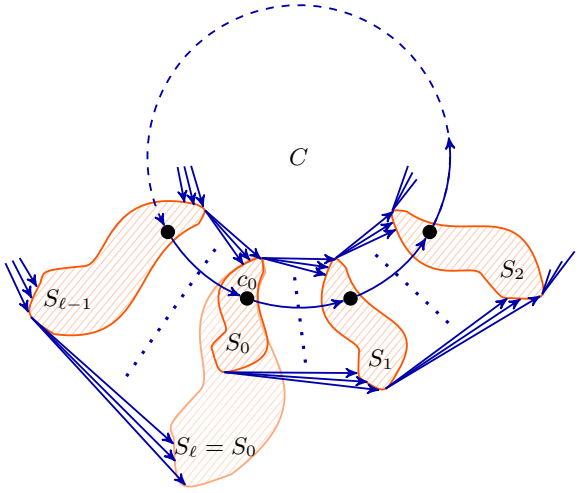


图 3：引理 3.5 证明的示意图。

$U(A) \neq \emptyset$。那么引理 3.5 表明 $G(A|_F)$ 是连通的。结合 $A \models \varphi_{\text{tree}}$，可证明 $G(A|_F)$ 是一棵有根树。令 n 为 $G(A|_F)$ 中任意顶点到根的最大距离，并令 T_m 为对 $m \leq n$ 而言，到根的距离为 m 的顶点。则 $\underline{G}(A|_E)[T_1] \cong G_1$，因为 $A \models \varphi_{\text{base}}$。现在假设在归纳证明中，对于某个固定的 $m \in \mathbb{N}_{>0}$，有 $\underline{G}(A|_E)[T_m] \cong G_m$。由于根据引理 2.9 和引理 2.5，$\lambda(G_m) < 1$，我们得到 $(\underline{G}(A|_E))^2[T_m]$ 是 $(\underline{G}(A|_E))^2$ 的一个连通分量。因此，根据引理 3.2，我们得到 $\underline{G}(A|_E)[T_{m+1}] \cong G_{m+1}$。由于 G_m 有 D^{4m} 个顶点，这也证明了 A 有 $\sum_{m=0}^{n} D^{4m}$ 个顶点。此外，对于 $n \in \mathbb{N}$，通过公式 φ_{Z} 的构造，显然存在一个大小为 $\sum_{m=0}^{n} D^{4m}$ 的 φ z 模型。 □

现在我们准备证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。我们将证明，对于 $\epsilon = D^2/12$，所述结论成立。令 A 为大小为 $\sum_{m=0}^{n} D^{4m}$ 的 φ_{Z}模型，且 $S \subseteq U(A)$ 满足 $|S| \leq (\sum_{m=0}^{n} D^{4m})/2$。令 T_m 为距树 $G(A|_F)$ 的根 m 的顶点，并令 $S_m := T_m \cap S$。

我们可以假设 $|S| > 1$，因为每个顶点的度至少为 ϵ。首先假设对于所有 $m \in [n]$，$|S_m| \leq D^{4m}/2$。那么，由于 G_m 是一个 $D^2/4$-扩展图（这可由定理 2.7 直接推出，因为根据命题 2.13，$\lambda(G_m) \leq 1/2$），并且 $\underline{G}(A|_E)[T_m] \cong G_m$，我们知道】【。

$$|\langle S, \overline{S} \rangle_{\underline{G}(A)}| \geq \sum_{m=1}^{n} \frac{D^2}{4} |S_m| \geq \frac{D^2}{12} \sum_{m=0}^{n} |S_m| = \frac{D^2}{12} |S|.$$

现在假设相反，并选择 m' 作为满足条件的最大索引，使得

$$|S_{m'}| > \frac{|T_{m'}|}{2} = \frac{D^{4m'}}{2}. \tag{3.1}$$

我们将使用以下断言。

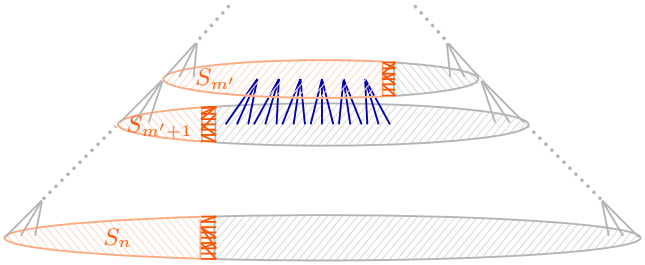


图 4：在情形 $m' < n$ 下，底层无向图中的 S 交叉边（橙色和蓝色）的示意图。

CLAIM 3.11. $\sum_{m=0}^{\tilde{m}-1} |T_m| \leq \frac{1}{2}|T_{\tilde{m}}|$ *for all* $\tilde{m} \leq n$.

证明。我们通过归纳论证：

$$\sum_{m=0}^{\tilde{m}-1} |T_m| = \sum_{m=0}^{\tilde{m}-2} |T_m| + |T_{\tilde{m}-1}| \leq \frac{1}{2}(3|T_{\tilde{m}-1}|) \leq \frac{1}{2}|T_{\tilde{m}}|.$$

□

命题 3.11 意味着 $\frac{3}{4} \cdot |T_n| \geq \frac{1}{2}|T_n| + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} |T_m| = \frac{1}{2}|A| \geq |S| \geq |S_n|$。在 $m' = n$ 的情形下，利用 G_n 是一个 $D^2/4$-扩展图，我们得到

$$|\langle S, \overline{S}\rangle_{\underline{G}(A)}| \geq \frac{D^2}{4}(|T_n| - |S_n|) \geq \frac{D^2}{16}|T_n| \geq \frac{D^2}{12}|S|.$$

现在假设 $m' < n$。由于 S 是所有 S_m 的不交并，我们知道集合 $\langle S, \overline{S}\rangle_{\underline{G}(A)}$ 包含不交的集合 $\langle S_m, T_m \setminus S_m\rangle_{\underline{G}(A)}$、$\langle T_{m'} \setminus S_{m'}, T_{m'}\rangle_{\underline{G}(A)}$ 和 $\langle S_{m'}, T_{m'+1} \setminus S_{m'+1}\rangle_{\underline{G}(A)}$，对所有 $m \in \{m', \dots, n\}$ 均如此。由于 $T_{m'}$ 中的每个顶点在 $T_{m'+1}$ 中都有 D^4 个邻点，而另一方面，$T_{m'+1}$ 中的每个顶点在 $T_{m'}$ 中都有一个邻点，我们知道 $|\langle S_{m'}, T_{m'+1} \setminus S_{m'+1}\rangle_{\underline{G}(A)}| = |\langle S_{m'}, T_{m'+1}\rangle_{\underline{G}(A)}| - |\langle S_{m'}, S_{m'+1}\rangle_{\underline{G}(A)}| \geq D^4|S_{m'}| - |S_{m'+1}| \geq D^4(|S_{m'}| - D^{4m'}/2)$。此外，由于对每个 m，G_m 都是一个 $D^2/4$-扩展图，因此我们得到

$$\begin{aligned}
|\langle S, \overline{S}\rangle_{\underline{G}(A)}| &\geq \sum_{m>m'} \frac{D^2}{4}|S_m| + \frac{D^2}{4}|T_{m'} \setminus S_{m'}| + D^4\Big(|S_{m'}| - \frac{D^{4m'}}{2}\Big) \\
&= \frac{D^2}{4}\sum_{m>m'} |S_m| + \Big(D^4 - \frac{D^2}{2}\Big)|S_{m'}| - \Big(D^4 - \frac{D^2}{2}\Big)\frac{|T_{m'}|}{2} + \frac{D^2}{8}|S_{m'}| + \frac{D^2}{8}|S_{m'}| \\
&\overset{\text{Equation 3.1}}{\geq} \frac{D^2}{4}\sum_{m>m'} |S_m| + \frac{D^2}{8}|S_{m'}| + \frac{D^2}{8}\Big(\frac{|T_{m'}|}{2}\Big) \\
&\overset{\text{Claim 3.11}}{\geq} \frac{D^2}{4}\sum_{m>m'} |S_m| + \frac{D^2}{8}|S_{m'}| + \frac{D^2}{8}\sum_{m<m'} |T_m| \\
&\overset{|T_m|\geq|S_m|}{\geq} \frac{D^2}{12}|S|.
\end{aligned}$$

□

通过选择 ϵ 这表明 φ_Z 是一类 ϵ-扩展图。 ○

4. 关于一个 Π_2-性质的不可测试性。 本节证明，在 Π_2 中的关系结构上存在一个不可测试的一阶性质。为此，我们首先证明，由第 3 节中的公式 P_φ z 定义的性质 φz 不可测试。随后我们证明，φz 等价于 Π_2中的一个句子。

4.1.不可测试性。回顾一下， r-类型是 r-球的同构类，并且限制在类$\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上时，只有有限多个 r-类型。令 $\tau_1,\ldots,\tau_t$ 为所有有界度 d的 r-类型的列表。我们令 $\rho_{A,r}$ 为 A的 r-类型分布，即

$$\rho_{A,r}(X) := \frac{\sum_{\tau\in X} |\{a \in U(A) \mid \mathcal{N}_r^A(a) \in \tau\}|}{|U(A)|}$$

对于任意 $X \subseteq \{\tau_1,\ldots,\tau_t\}$。对于两个 σ-结构 A和 B，我们将深度为 r 的采样距离定义为 $\delta_\odot^r(A,B) := \sup_{X\subseteq\{\tau_1,\ldots,\tau_t\}} |\rho_{A,\ r}(X) - \rho_{B,\ r}(X)|$。注意，$\delta_\odot^r(A,B)$ 就是 $\rho_{A,\ r}$,$\rho_{B,\ r}$ 之间的全变差距离，并且有#+#+#+#+

$$\delta_\odot^r(A,B) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} |\rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \rho_{B,r}(\{\tau_i\})|.$$

那么， A 和 B 的采样距离定义为

$$\delta_\odot(A,B) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r}\cdot\delta_\odot^r(A,B).$$

以下定理已针对简单图得到证明，并且很容易推广到 σ-结构。

Theorem 4.1([30])。对于每个 $\lambda > 0$ 存在一个正整数 n_0 ，使得对于每个 σ-结构$A \in \mathcal{C}_{\sigma,\ d}$ 存在一个 σ-结构$H \in \mathcal{C}_{\sigma,\ d}$ 使得 $|H| \le n_0$ 和$\delta_\odot(A,H) \le \lambda$。

我们使用以下可修复性质的定义。

Definition 4.2 ([1]). 令 $\epsilon \in (0,1]$。性质 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 在$\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上是 ϵ-可修复的[5] ，如果存在数 $r := r(\epsilon) \in \mathbb{N}$, $\lambda := \lambda(\epsilon) > 0$ 和 $n_0 := n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$，使得对于任意 σ-结构 $A \in \mathcal{P}$ 以及$B \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ ，若它们都具有 $n \ge n_0$ 个顶点，且$\sum_{i=1}^{t} |\rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \rho_{B,r}(\{\tau_i\})| < \lambda$，则 B 与 P 是 ϵ-接近的，其中 $\tau_1,\ldots,\tau_t$是所有有界度 d的 r-类型的列表。

如果性质 $\mathcal{P}$ 对每个 $\epsilon \in (0,1]$都是 ϵ-可修复的，那么它在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上是可修复的。关于可测试性质与可修复性质之间关系的以下定理已在 [1] 中证明。

Theorem 4.3（[1]）。对于每个性质 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$， $\mathcal{P}$ 是可测试的，当且仅当 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{C}_{\sigma,\ d}$ 上是可修复的。

我们回顾一下，$\mathcal{P}_{\mathsf{z}} := \mathcal{P}_{\varphi_{\mathsf{z}}}$，其中 φ_{z}是第 3 节中的公式。我们还令 σ、D 和 d 如第 3 节中的定义。

Theorem 4.4. $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上不可测试。

证明。我们证明 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$ 的不可修复性，并由定理 4.3 得出其不可测试性。令 $\epsilon := 1/(144D^2)$，并令 $r \in \mathbb{N}$、 $\lambda > 0$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$ 为任意值。我们设定

[5]在 [1], 中，可修复性这一概念称为局部性。

$\lambda' := \lambda/(t2^{r+1})$，其中 τ_1、...、 τ_t 是所有有界度为 d的 r-类型，并令 n_0' 为定理4.1中与 λ'对应的正整数。现在我们选取 $n \in \mathbb{N}$，使得对于某些 $k \in \mathbb{N}$、 $n \geq 4n_0$ 和 $n \geq 4(n_0'/\lambda)$，有 $n = \sum_{i=0}^{k} D^{4i}$。令 $A \in \mathcal{C}_{\sigma、d}$ 为在 n 个元素上的 φz 模型。根据定理 4.1，存在一个在 $m \leq n_0'$个元素上的结构 $H \in \mathcal{C}_{\sigma、d}$，使得 $\delta_{\odot}(A、H) \leq \lambda$。令 B 为这样一个结构：它由 $\lfloor n/m \rfloor$ 个 H 的副本以及模 m 个孤立元素组成（即未包含在任何元组中的元素）。注意，我们选取 B 使得 $|A| = |B|$。

我们首先论证， B 事实上距离具有性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$ ϵ-远。首先，我们对 $U(B)$ 中的元素重新命名，使得 $U(A) = U(B)$，并且将 A 和 B 变为相同结构所需的边修改数 $\sum_{\tilde{R}\in\sigma} |R(A)\triangle R(B)|$ 达到最小。选取一个划分 $U(A) = U(B) = S \sqcup S'$，使得$(S \times S') \cap R(B) = \emptyset$，且对于任意 $R \in \sigma$，$S' \times S) \cap R(B) = \emptyset$ 在所有此类划分中达到最小。假设 $|S| \leq |S'|$。由于 $G(B)$ 的连通分量大小至多为 m，我们知道 $||S| - |S'|| \leq m$。这是因为否则我们可以通过取 $G(\mathcal{B})$ 的任意一个连通分量中的所有元素——该连通分量包含于 S' 中——并将这些元素从 S' 移到 S，从而得到一个满足 $||T| - |T'|| < ||S| - |S'||$的划分 $U(B) = T \sqcup T'$。由于 $|S| \leq |S'|$和 $m \leq n/4$，我们知道 $n/4 \leq |S| \leq n/2$。由于 $(S \times S') \cap \tilde{R}^{\mathcal{B}} = \emptyset$，我们知道 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 至少必须在所有对应于 $U(\mathcal{A})$ i. e.中一条 S和 S'相交边的元组上有所不同，即 $\langle S, S' \rangle_{U(\mathcal{A})}$ 中的一条边。因此

$$\sum_{\tilde{R}\in\sigma} |\tilde{R}(A)\triangle\tilde{R}(B)| \geq |\langle S, S'\rangle_{\underline{G}(A)}| \overset{\text{Def } 2.6}{\geq} |S| \cdot h(A) \overset{\text{Thm } 3.1}{\geq} \frac{n}{4} \cdot \frac{D^2}{12} = \frac{1}{48} D^2 n \geq \frac{1}{144D^2} dn.$$

因此， B 距离属于$\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$相差 ϵ之远。

然而，如下所示， A 和 B 的邻域分布相似，这证明$\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$不可修复。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{t} |\rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \rho_{B,r}(\{\tau_i\})| \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left| \rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \frac{n \bmod m}{n} \cdot \rho_{K_1,r}(\{\tau_i\}) - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot \frac{m}{n} \cdot \rho_{H,r}(\{\tau_i\}) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{t} \left| \rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \rho_{H,r}(\{\tau_i\}) \right| + \sum_{i=1}^{t} \left| \frac{n \bmod m}{n} \cdot \rho_{K_1,r}(\{\tau_i\}) \right| \\
&+ \sum_{i=1}^{t} \left| \rho_{H,r}(\{\tau_i\}) - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot \frac{m}{n} \cdot \rho_{H,r}(\{\tau_i\}) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{t} \left| \rho_{A,r}(\{\tau_i\}) - \rho_{H,r}(\{\tau_i\}) \right| + \frac{2m}{n} \\
&\leq t \cdot \sup_{X \subseteq B_r} |\rho_{A,r}(X) - \rho_{H,r}(X)| + \frac{2m}{n} \\
&\leq t \cdot 2^r \cdot \delta_{\odot}(A, H) + \frac{2m}{n} \\
&\leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.
\end{aligned}$$

最后一个不等式由 λ' 的选取和定理 4.1 得出。 □

4.2. 度正则结构上的每个一阶性质都属于 Π_2。我们从以下观察开始。

Observation 1。Hanf 句子 $\exists^{\geq m} x\, \varphi_\tau(x)$ 是以下内容的简写：

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \Big(\bigwedge_{1 \leq i,j \leq m, i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \varphi_\tau(x_i) \Big),$$

且 $\varphi_\tau(x_i)$ 可以用一个 $\exists^*\forall$-公式表示，其中存在量词确保所需的 r-邻域存在，并且其中的所有元组都按照 τ 的要求出现在关系中或不出现在关系中；而全称量词则用于表达 x_i 的 r-邻域中不存在其他元素。

注意，根据上述内容，任何 Hanf 句子都属于 Σ_2。现在我们证明以下引理。

Lemma 4.5. 设 $d \in \mathbb{N}$，且 φ 是一个一阶逻辑句子。若 φ 的每个模型都 i s d-正则，则 φ 与一个 Π_2 句子 d-等价。
这个引理也可以用以下句法表述来表达。令φ^d_{reg} 表示每个元素的度为 d的一阶句子。那么对于每个一阶句子 φ，句子 $\varphi \wedge \varphi^d_{\mathrm{reg}}$与 Π_2中的一个句子 d-等价。

证明。在开始之前，我们定义：若一个 r-类型 τ 满足如下条件，则称其为 d-正则：对于所有结构 A以及所有具有 r-类型 τ的元素 $a \in U(A)$，每个满足 $\mathsf{dist}(a,b) < r$的 $b \in U(A)$ 都有 $\mathsf{deg}_A(b) = d$。
我们先证明以下断言。

Claim 4.6. 设 $d \in \mathbb{N}$，令 φ 为一个一阶逻辑句子，并令 ψ 为一个满足 $\psi \equiv_d \varphi$的 Hanf 正规形式，其中 ψ 属于析取范式，其文字为 Hanf 句子或取反的 Hanf 句子。此外，假设 ψ中所有正 Hanf 句子里的邻域类型均为 d-正则。那么 φ 与 Π_2中的一个句子 d-等价。

证明。假设 ψ的形式为 $\exists^{\geq m} x\, \varphi_\tau(x)$，其中 τ是 d-正则的。如观察 1 中所述，我们可以假设 $\varphi_\tau(x)$ 是一个 $\exists^*\forall$-公式，它由一个 $\exists^*$-公式 $\varphi'_\tau(x)$ 与一个全称公式的合取构成；前者表示 x 具有一个类型为 τ 的“诱导子邻域”，后者表示邻域中不存在其他元素。现在有 $\psi \equiv_d \exists^{\geq m} x\, \varphi'_\tau(x)$。为证明这一点，设 $A \models \exists^{\geq m} x \varphi'_\tau(x)$且 $\deg(A) \leq d$。由于 τ是 d-正则的，因此 $A \models \exists^{\geq m} x \varphi_\tau(x)$。反之显然。
如果 ψ 的形式为 $\neg\exists^{\geq m} x\, \varphi_\tau(x)$，其中 $\varphi_\tau(x)$ 是一个 $\exists^*\forall$ 公式，那么 $\neg\exists^{\geq m} x\, \varphi_\tau(x)$ 等价于一个属于 Π_2 的公式。由于 Π_2 对析取和合取封闭，这就证明了该命题。 □

现在，证明由断言 4.6 得出，因为如果 φ 只有 d-正则模型，那么根据 Hanf 定理，存在一个满足该断言假设的公式 $\psi \equiv_d \varphi$。 □

存在不可测试的 Π_2-性质。借助引理 4.5 和定理 4.4，我们可以证明以下定理。

Theorem 4.7. 存在度数上界 $d \in \mathbb{N}$ 和签名 σ，使得在 $\mathcal{C}_{\sigma,\, d}$ 上存在一种由 Π_2 中的公式定义、但不可测试的性质。

证明。取 $d = 2D^2 + D^4 + 1$ 任意大的素数幂 D。然后利用 [33] 中的构造，我们可以找到一个 $(D^4, D, 1/4)$-图 H。根据定理 4.4，利用这个基扩展图 H 来构造公式 φ_{Z}，我们得到一个性质，该性质 ◯

在 $\mathcal{C}_\sigma$ 上不可测试，d。由于 φ_{Z} 的所有模型都是 d-正则的，这是由构造保证的，因此引理 4.5 告诉我们，φ_{Z} 与 d-等价于 Π_2中的一个公式。 □

5.归约为简单无向图。根据我们之前的论证，要证明简单图（即没有平行边且没有自环的无向图）中存在不可测试的 Π_2-性质，只需构造一个度正则图的不可测试的一阶图性质。为此，我们将前几节中的σ-结构性质$\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 的测试归约为对度数至多为3的简单图的性质 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 的测试。为了构造该归约，我们仔细地将前面示例中的边着色有向图（σ-结构）在第3节中转换为简单图。我们通过用一个常数大小的图构件表示每一种有向边类型来编码 σ-结构，同时保持度正则性。然后，我们将公式 φ_{Z} 转换为一个定义图性质 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$的公式 ψ_{graph}。这证明了以下结果。

THEOREM 5.1. 存在一种度数至多为 3 的简单图的一阶性质，可由 Π_2 中的一个公式定义，但它不可测试。

在本节的其余部分中，我们通过从结构性质到图性质的局部归约，以及定理4.7中不可测试的 Π_2-性质，证明上述定理。这一技术也将用于第 7节中的证明。我们指出，上述定理还有另一种证明，这种证明可能具有独立的意义。也就是说，我们可以证明，$\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ is 某个常数 $\xi > 0$ 的 ξ-扩展图类（引理5.7），由此得到存在一些可在一阶逻辑中定义的（简单无向）扩展图类（定理 5.6）。然后，我们利用这样一个结果：扩展图的任何性质都不可测试；该结果是[15]主要结果的推论。详细内容概述于附录 A 中。

5.1. 局部归约。我们首先介绍两个性质测试模型之间的以下局部归约概念。在下文中，当上下文明确时，我们将使用 $\mathcal{C}$ 同时表示一类结构及其对应的性质测试模型，该模型可以是图的有界度模型，也可以是关系结构的有界度模型。

DEFINITION 5.2（局部归约）。设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 是两个性质测试模型，$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$、$\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{C}'$ 是两个性质。若存在常数 c_1、$c_2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得对于每个 $X \in \mathcal{C}$，以下性质均成立，则称函数 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{P}'$ 的局部归约。

1. 若 $X \in \mathcal{P}$，则 $f(X) \in \mathcal{P}'$。2. 若 X 与 $\mathcal{P}$ 相距 ϵ，则 $f(X)$ 与 $\mathcal{P}'$ 相距 (ϵ/c_1)。3. 对于向 $f(X)$ 提出的每个查询，我们都可以自适应地[6] 计算出对 X 的 c_2 个查询，使得对 $f(X)$ 的查询的答案可以由对 X 的 c_2 个查询的答案计算得出。

以下引理已知。

LEMMA 5.3（ [18]中的定理 7.14）。设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 是两个性质测试模型，$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$、$\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{C}'$ 是两个性质，且 f 是从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{P}'$的局部归约。若 $\mathcal{P}'$ 可测试，则 $\mathcal{P}$也可测试。

[6]所谓自适应地计算查询，是指下一个查询的选择可能取决于上一个查询的答案。

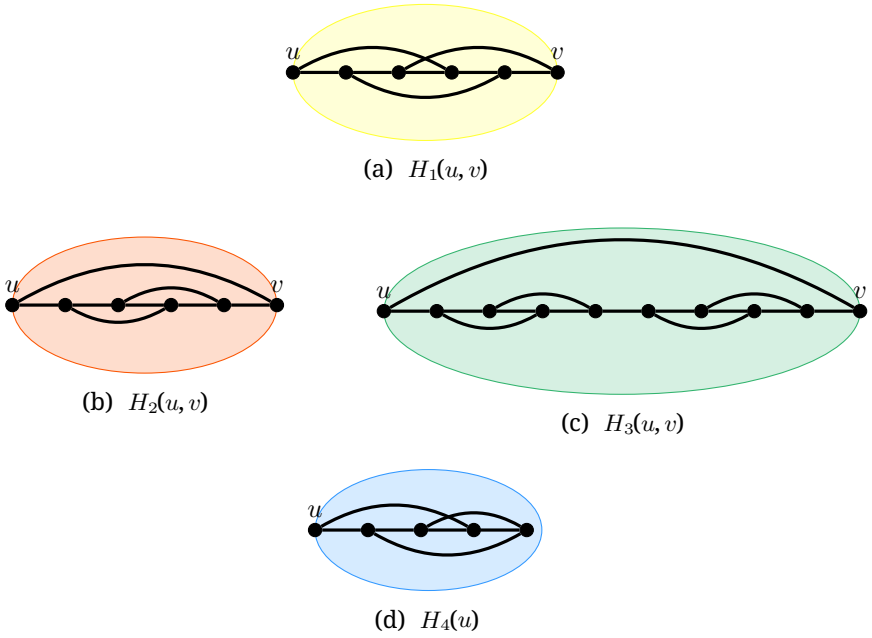


图 5：用于定义箭头构件的不同构建模块示意图。

5.2. 构造局部归约。现在，我们从性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$构造一个 3-正则图的性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$。我们将这个图性质定义为 $f(\mathcal{P}_{\mathsf{Z}})$，方法是定义一个映射 $f : \mathcal{C}_{\sigma,\ d} \to \mathcal{C}_3$。为定义 f，我们针对 σ 中的每种关系（即每种边颜色）引入一个不同的箭头图构件。映射 f 随后将某种关系中的每个元组（每条带颜色的有向边）替换为相应的箭头图构件。所有箭头构件的设计都确保归约后的图是 3-正则的。为实现 3-正则性，我们还将 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 中结构的每个元素替换为一个长度为 d 的环，使每个箭头图构件都能与圆环上的唯一一个顶点关联。我们进一步证明，这种替换操作定义了一个从 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 到 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$的局部归约 f。回顾一下，局部归约是一种保持距离、可通过查询在局部模拟的函数。由于根据引理 5.3，局部归约保持可测试性，我们利用从 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 到 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的局部归约，根据性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 的不可测试性，得出性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的不可测试性。现在我们将正式定义 f。

我们首先定义一些构件，它们将组合成不同的箭头图构件。令 $H_1(u,v)$ 表示顶点集为 $\{u = u_0, \ldots, v = u_5\}$、边集为 $\{\{u_i, u_{i+3}\} \mid i \in \{0,1,2\}\}$ 的图。接下来，令 $H_2(u,v)$ 表示顶点集为$\{u = u_0, \ldots, v = u_5\}$、边集为 $\{\{u_0, u_6\}, \{u_i, u_{i+2}\} \mid i \in \{1,2\}\}$ 的图。令 $H_3(u,v)$ 表示顶点集为 $\{u = u_0, \ldots, v = u_9\}$、边集为 $\{\{u_0, u_9\}, \{u_i, u_{i+2}\} \mid i \in \{1,2,5,6\}\}$ 的图。令 $H_4(u)$ 表示顶点集为 $\{u = u_0, \ldots, u_4\}$、边集为 $\{\{u_0, u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_4\}\}$ 的图。示意图见图 5。

令 ℓ 表示 σ 中关系（边颜色）的数量。现在我们引入定义局部归约所需的不同类型的箭头图构件。对于 $1 \le k \le \ell$，令 $H^k_{\rightarrow}(u_0, v_{2\ell})$ 表示由 $2\ell - 1$ 个顶点构成的图

互不相交的副本 $H_1(u_0,v_0)\dots,H_1(u_{k-1},v_{k-1})$ $H_1(u_{k+1},v_{k+1}),\dots,H_1(u_{2\ell-1},v_{2\ell-1})$，一个 $H_2(u_k,v_k)$ 的副本，一个 $H_3(u_{2\ell},v_{2\ell})$ 的副本，以及对于每个 $i\in[2\ell]$，将相应副本连接起来的附加边 $\{v_i,u_{i+1}\}$。注意， $H^k_{\rightarrow}(u_0,v_{2\ell})$ 有 $12\ell+10$ 个顶点，除 $u_0,v_{2\ell}$ 外，每个顶点的度数均为 3。我们称 $H^k_{\rightarrow}(u_0,v_{2\ell})$ 为一个 k-箭头。对于任意图 G 及其顶点 $u,v\in V(G)$，若存在一个 k-箭头从 u 指向 v，记作 $u\xrightarrow{k}v$，则称其成立；也就是说，存在 $12\ell+8$ 个顶点 $w_1,\dots,w_{12\ell+8}\in V(G)$ 以及一个同构 $g\colon H^k_{\rightarrow}(u_0,v_{2\ell})\to\mathcal{N}^G_1(w_1,\dots,w_{12\ell+8})$，使得 $g(u_0)=u$ 且 $g(v_{2\ell})=v$。注意，要求存在具有这些性质的同构，可确保包含在 k-箭头中的任何顶点都不会有不属于该 k-箭头的邻点，端点 u 和 v 除外。对于任意顶点集合 $w_1,\dots,w_{12\ell+10}$，令 $E^k_{\rightarrow}(w_1,\dots,w_{12\ell+10})$ 为一个边集合，使得存在图同构 $f\colon H^k_{\rightarrow}(u_0,v_{2\ell})\to\big(\{w_1,\dots,w_{12\ell+10}\},E^k_{\rightarrow}(w_1,\dots,w_{12\ell+10})\big)$，且满足 $f(u_0)=w_1$ 和 $f(v_{2\ell})=w_{12\ell+10}$。

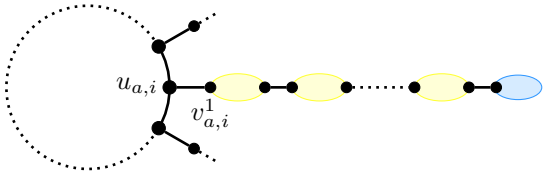
现在我们定义第二个箭头构件。对于 $1\le k\le\ell$，令 $H^k_{\circlearrowleft}(u_0)$ 为由 $\ell-1$ 个顶点互不相交的副本 $H_1(u_0,v_0)\dots,H_1(u_{k-1},v_{k-1})$，$H_1(u_{k+1},v_{k+1}),\dots,H_1(u_{\ell-1},v_{\ell-1})$、一个副本 $H_2(u_k,v_k)$、一个副本 $H_4(u_\ell)$ 以及对每个 $i\in[\ell-1]$ 的边 $\{v_i,u_{i+1}\}$ 所构成的图。注意，$H^k_{\circlearrowleft}(u_0)$ 有 $6\ell+5$ 个顶点，且除 u_0 外的每个顶点的度均为 3。我们称 $H^k_{\circlearrowleft}$ 为 k-环。对于任意图 G 和顶点 $u\in V(G)$，如果存在顶点 $6\ell+4$、...、$w_{6\ell+4}\in V(G)$ 以及同构 $g\colon H^k_{\circlearrowleft}(u_0)\to\mathcal{N}^G_1(w_1,\dots,w_{6\ell+4})$，使得 $g(u_0)=u$，则称在 u 处有一个 k-环，记作 $u\xrightarrow{k}u$。对于任意集合 w_1、...、$w_{6\ell+5}$ 个顶点，令 $E^k_{\circlearrowleft}(w_1\dots,w_{6\ell+5})$ 为一个边集合，使得存在同构 $f\colon H^k_{\circlearrowleft}(u_0)\to\big(\{w_1,\dots,w_{6\ell+5}\},E^k_{\circlearrowleft}(w_1,\dots,w_{6\ell+5})\big)$，且 $f(u_0)=w_1$。

最后，令 $H_\perp(u_0)$ 为由 ℓ 个顶点不相交的副本 $H_1(u_0,v_0),\dots,H_1(u_{\ell-1},v_{\ell-1})$、一个副本 $H_4(u_\ell)$ 以及对于每个 $i\in[\ell-1]\{v_i,u_{i+1}\}$ 的额外边组成的图。注意， $H_\perp(u_0)$有 $6\ell+5$ 个顶点，且除 u_0之外的每个顶点的度均为3。我们称 $H_\perp$ 为一个非箭头。对于任意图 G 和顶点 $u\in V(G)$，如果存在 $6\ell+4$个顶点 $w_1,\dots,w_{6\ell+4}\in V(G)$ 以及一个同构 $g\colon H_\perp\to\mathcal{N}^G_1(w_1,\dots,w_{6\ell+4})$，使得 $g(u_0)=u$，则称在 u处存在一个非箭头，记作 $u\not\to$。对于任意集合$w_1,\dots,w_{6\ell+5}$个顶点，令 $E_\perp(w_1\dots,w_{6\ell+5})$ 为一组边，使得存在一个同构 $f\colon H_\perp(u_0)\to\big(\{w_1,\dots,w_{6\ell+5}\},E^k_{\circlearrowleft}(w_1,\dots,w_{6\ell+5})\big)$，且 $f(u_0)=w_1$。

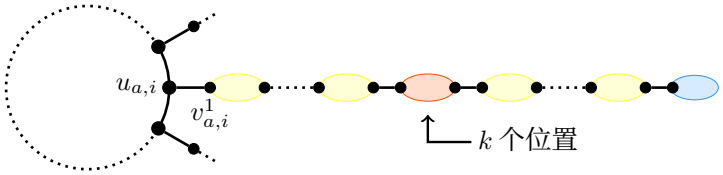
现在我们定义函数 $f\colon\mathcal{C}_{\sigma,d}\to\mathcal{C}_3$，其定义为 $f(A)\colon=G_A$，其中 G_A 是顶点集为 $V(G_A)\colon=\{u_{a,i},v^k_{a,i}\mid 1\le i\le d,a\in U(A)\ 1\le k\le 6\ell+5\}$、边集为 $E(G_A)$ 的图，定义如下。

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\{u_{a,i},v^1_{a,i}\}\mid a\in U(A),1\le i\le d\Big\}\\
\cup&\Big\{\{u_{a,d},u_{a,1}\},\{u_{a,i},u_{a,i+1}\}\mid a\in U(A),1\le i\le d-1\Big\}\\
\cup&\bigcup_{\substack{\mathrm{ans}(a,i)=\mathrm{ans}(b,j)=(k,a,b)\\a\neq b}}E^k_{\rightarrow}\Big(v^1_{a,i},\dots,v^{6\ell+5}_{a,i},v^{6\ell+5}_{b,j},\dots,v^1_{b,j}\Big)\\
\cup&\bigcup_{\mathrm{ans}(a,i)=(k,a,a)}E^k_{\circlearrowleft}\Big(v^1_{a,i},\dots,v^{6\ell+5}_{a,i}\Big)\\
\cup&\bigcup_{\mathrm{ans}(a,i)=\perp}E_{\perp}\Big(v^1_{a,i},\dots,v^{6\ell+5}_{a,i}\Big),
\end{aligned}
$$

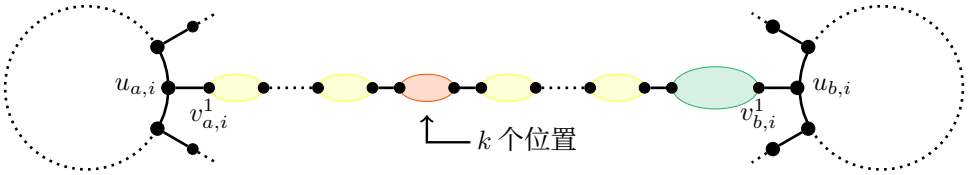
其中 $\mathrm{ans}(a,i)=(k,a,b)$ 表示 a 的第 i 个元组为 (a,b)，且属于第 k 个关系。因此， G_A 的定义方式使得每个元素 $a\in U(A)$ 都有表示。



(a) 情形 ans$(a,i) = \perp$



(b) 情形ans$(a,i) = (k,a,a)$



(c) 情形 ans$(a,i) =$ ans$(b,j) = (k,a,b)$

图 6: G_A中不同类型的箭头。这里，不同颜色的椭圆分别表示 $H_1(u,v)$ $H_2(u,v)$ $H_3(u,v)$ 或 $H_4(u)$ 的一个副本（详情请参见图 5）。

通过一个诱导环（u_a，1，.....，u_a，d，u_a，1），并且如果（a，b）是 A 中 σ 的第 k 个关系中的一个元组，那么对于某些 $1 \le i$、$j \le d$，u_a、$_i \xrightarrow{k} u_b$、$_j$ 属于 G_A，且对于每个满足对每个 k，ans（a，i） $= \perp$ 的 i，u_a、$_i$ 都有一个非箭头。注意，根据构造，对于每个 $A \in \mathcal{C}_\sigma$、$_d$，G_A 都是 3 正则的。图 6 展示了一个例子。下文中，我们将 G_A 中形如 u_a、$_i$ 的顶点称为元素顶点，而将形如 v^j_a、$_i$ 的顶点称为关系顶点。根据构造以及 $d = 2D^2 + D^4 + 1 < 3D^4 + 1 = |\sigma| = \ell$（对于某个较大的素数幂 D；定义见第 3 节）这一事实，很容易观察到以下内容。

对于每个 $u \in V(G_A)$，u 是元素顶点，当且仅当 u 包含在长度为 d 的环中。此外，两个顶点 u、$v \in V(G_A)$ 对应于a的同一元素，属于 A（即存在 i、$j \in \{1,\dots,d\}$，使得 $u = u_{a,i}$ 和 $v = u_{a,j}$）当且仅当存在一个长度为 d 的环，同时包含 u 和 v。

请注意，我们不需要要求长度为 d 的环是导出的，因为我们得到的结构不允许存在长度为 d 的环，除非是与元素对应的环。

现在我们定义性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}} := \{f(A) \mid A \in \mathcal{P}_{\text{Z}}\} \subseteq \mathcal{C}_3$。

LEMMA 5.4. 映射 f 是从 $\mathcal{P}_{\text{Z}}$ 到 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的局部归约。

证明。首先注意，对于任意 $A \in \mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$，我们有 $f(A) \in \mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 根据定义。

现在令 $c_1 = 2d^2(1+6\ell+5)$。我们通过逆否证明，证明若 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 与 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 相距至少 ϵ，则 $f(A)$ 与 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 相距至少 ϵ/c_1。因此，假设 $f(A) =:$ 对于某些 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$，$G_A$ 并非与 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 相距至少 ϵ/c_1。那么存在一个大小至多为 $\epsilon d|V(G_A)|/c_1$ 的集合 $E \subseteq \{e \subseteq V(G_A) \mid |e| = 2\}$，以及一个图 $G \in \mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$，使得 G 是通过修改 E 中的元组从 G_A 得到的。根据 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 的定义，存在一个结构 $A_G \in \mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$，使得 $f(A_G) = G$。首先注意到 $|U(A_G)| = |U(A)|$，因为 $d(1+6\ell+5)|U(A)| = |V(G_A)| = |V(G)| = d(1+6\ell+5)|U(A_G)|$。因此，必定存在一组需要修改的元组，使得 A 与 A_G 同构。首先注意，R 不可能包含一个元组 (a,b)，其中对每个 $e \in E$ 都有 $\{u_{a,i}, v^k_{a,i}, u_{b,i}, v^k_{b,i} \mid 1 \le i \le d, 1 \le k \le \ell\} \cap e = \emptyset$。这是因为，如果（$a,b$）是 A的第 k 个关系中的一个元组，那么对于某些 i, $j \in \{1,\dots,d\}$，$u_{a,i} \xrightarrow{k} u_{b,j}$ 在 G_A中。但由于对于每个 $e \in E$都有 $\{u_{a,i}, v^k_{a,i}, u_{b,i}, v^k_{b,i} \mid 1 \le i \le d, 1 \le k \le \ell\} \cap e = \emptyset$，我们有 $u_{a,i} \xrightarrow{k} u_{b,j}$在 G中。此外，（u_a,**1**, . . . , $u_{a,d}$, u_a,**1**）和（u_b,**1**, . . . ,$u_{b,d}$,u_b,**1**）是 G中长度为 d的圈。因此，根据 **1**，存在与（u_a,**1**, . . . , $u_{a,d}$, u_a,**1**）和（u_b,**1**, . . . , $u_{b,d}$, u_b,**1**）相对应的元素 a, b，使得（a,b）是 A_G的第 k 个关系中的一个元组，从而（a,b）不可能属于 R。假设（a,b）是 A_G中的一个元组时，同样的论证也成立。由于对于每个 $e \in E$，至多存在 $2d$ 个元组（a,b）满足 $\{u_{a,i}, v^k_{a,i}, u_{b,i}, v^k_{b,i} \mid 1 \le i \le d, 1 \le k \le \ell\} \cap e \neq \emptyset$，我们得到：

$$|R| \le 2d\epsilon d|V(G_A)|/c_1 = 2d^2(1+6\ell+5)\epsilon d|U(A)|/c_1 = \epsilon d|U(A)|.$$

因此，A 并非与属于 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 相差超过 ϵ.

设 $c_2 := d+1$。设 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 和 $G_A := f(A)$。首先需要注意，我们可以为 G_A 的顶点选取一种排序，使得每个顶点的位置仅取决于 A 中元素的数量。因此，我们可以假设，对于 A 的任意元素 a，都能判断对于任意顶点 $v \in V(G_A)$，v 是否具有 $u_{a,i}$ 的形式，以及 v 是否具有 $v^k_{a,i}$ 的形式。现在我们说明如何确定 G_A 中任意邻居查询的答案。首先注意，对于任意 $a \in U(A)$ 和 $i \in \{1,\dots,d\}$，顶点$u_{a,i}$ 在 G_A 中与 $v^1_{a,i}$ 以及环 (u_a,**1**, . . . ,$u_{a,d}$, u_a,**1**) 上与其相邻的两个顶点相邻。因此，在 G_A 中对 $u_{a,i}$ 进行的任何邻居查询，都可以在不查询 A 的情况下回答。设 $v \in \{v^k_{a,i} \mid 1 \le k \le \ell\}$ 对某个 $a \in U(A)$ 和某个$1 \le i \le d$成立。接着，我们可以通过查询 (a,i) 确定 v 的所有邻点；此外，如果 $\mathsf{ans}(a,i) \neq \perp$ 且 $\mathsf{ans}(a,i) = (k,a,b)$，那么我们需要对每个 $1 \le j \le d$ 查询 (b,j)，以找出哪些 j 满足 $\mathsf{ans}(b,j) = (k,a,b)$。因此，我们可以通过对 A 进行 c_2 次查询来确定对 G_A 的任意查询的答案。这证明 f 是从 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 到 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 的局部归约。 □

5.3.图的性质可在一阶逻辑中定义。在本节中，我们找到了一个一阶逻辑句子 ψ_{graph}，它定义图的性质 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$。我们通过定义一个公式来表达对于两个顶点 u、v，$u \xrightarrow{k} v$；定义一个公式来表达对于顶点 u，$u \xrightarrow{k} u$；以及定义一个公式来表达对于顶点 u，$u \not\to$，并将形如 $R(u,v)$ $R(v,v)$和 $\neg R(u,v)$ 的公式替换为关于 $R \in \sigma$ 的相应新公式来完成这一点。我们还限制了量词的作用域。在前一个小节中，我们已经定义了 $\ell := |\sigma|$。我们进一步以任意方式重命名 σ 中的关系，因此在本节中可以假设 $\sigma = \{R_1, \dots, R_\ell\}$。

现在，我们使用下文定义的一阶公式，将公式 φ_{Z} 翻译成无向图语言中的公式 ψ_{graph}。令 $\alpha(x)$ 表示“φ是一个元素顶点”的公式，并令

公式 x (β,x) 表示“ y和 x 代表 y 中的同一个元素”，这很容易根据事实 1 构造出来。我们进一步令 $\mathcal{A}$(γ) 表示“x是任意 x -箭头、 k-环或非箭头的内部顶点”的公式。这里，箭头的“内部顶点”指该箭头上除两个端点以外的任意顶点。对任意 k，令 $k \in \{1,\ldots,\ell\}$ ($\delta^k_{\rightarrow}$,x) 表示“ y”；类似地，对任意 $x \xrightarrow{k} y$，令 $k \in \{1,\ldots,\ell\}$($\delta^k_{\circlearrowright}$) 表示“$x$”。给定 $x \xrightarrow{k} x$z，公式 $k \in \{1,\ldots,\ell\}$按如下方式构造。在 φ z 中，将每个表达式 ψ_{graph} (φ , R_k) 替换为 x(x, $\delta^k_{\circlearrowright}$)，并将每个表达式 x(x, R_k) 替换为 x(y, $\delta^k_{\rightarrow}$)（对于 x）。此外，我们按以下方式对所有量词进行限制。将每个形式为 y($x \neq y$,$\exists x\, \chi,\ldots,x$) 的表达式替换为 x_1(x_m($\exists x$) α(x, $\wedge\, \chi,\ldots,x$))，并将每个形式为 x_1(x_m,$\forall x\, \chi,\ldots,x$) 的表达式替换为 x_1(x_m($\forall x$) α(x, $\rightarrow \exists y \beta$) x(y, $\wedge\, \chi,\ldots,y$))。将所得公式称为 x_1。然后，我们令 x_m 为公式 ψ 与公式 ψ_{graph} (ψ ($\forall x\Big($) $\neg\alpha(x)$) $\rightarrow \gamma$(x($\wedge$) α(x) $\rightarrow \exists y \gamma$($y$, $\wedge\, E$)) x 的合取。

LEMMA 5.5. 对任意 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 以下命题成立。$A \models \varphi$z 当且仅当 f(A) $\models \psi_{\text{graph}}$。此外，如果 $G \in \mathcal{C}_3$ 是 ψ_{graph} 的一个模型，那么对于某个 $A \in \mathcal{A}_{\sigma,d}$，有$G \cong f$($A$)。

证明。首先假设 $A \models \varphi$z。先注意，根据 G_A 的构造：$=f$(A) 和 ψ，可得 $A \models \psi$ z 当且仅当 $G_A \models \psi$。请注意，对于这一陈述，重要的是对于所有 $k \in \{1,\ldots,\ell\}$， k-箭头和 k-环构成的集合是两两不同构的图的集合。在 G_A的构造中，每个顶点要么是元素顶点 $u_{a,i}$ ，此时它与关系顶点$v^1_{a,i}$相邻；要么是某个 k-箭头、k-环或非箭头的内部顶点。因此我们得到$G_A \models \forall x\Big((\neg\alpha(x) \rightarrow \gamma(x)) \wedge (\alpha(x) \rightarrow \exists y \gamma(y) \wedge E(x,y))\Big)$，由此完成第一个陈述的证明。

为了证明引理 5.5 的第二个陈述，假设某个图 $G \in \mathcal{C}_3$ 是 ψ_{graph} 的模型。那么 $G \models \forall x\Big((\neg\alpha(x) \rightarrow \gamma(x)) \wedge(\alpha(x) \rightarrow\exists y \gamma(y) \wedge E(x,y))\Big)$。因此， G 由一组元素顶点构成，这些元素顶点按照 ψ ，通过 k-箭头、 k-环或非箭头相连。因此，我们可以反向执行局部归约，得到 A_G ，它是φ z 对应的模型；根据以下构造， f(A_G) $\cong G$。对于任意极大顶点集 $X \subseteq V$(G)，若对每一对 $u, v \in X$都有 β(u,v) 成立，我们引入一个元素 a_X。对于 $X, Y \subseteq V$(G)，若存在 $u \in X$ 和 $v \in Y$ 使得 $u \xrightarrow{k} v$ 属于 G，我们就在关系 R_k(A_G) 中添加一个元组 (a_X, a_Y)。通过与上述类似的论证，我们得到，根据 ψ 的构造， A_G 是φz 的模型。此外，对于 A_G 的每个元素的邻点，取某种排序，使得 f(A_G)$\cong G$ （此排序必须与元素顶点环上 k-箭头的顺序一致）。

□

定理 5.1 的证明。由引理 5.5 可知， ψ_{graph}在类 $\mathcal{C}_3$上定义了性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$。由于我们构造局部归约$f$ 时特意使得对于每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ ， f($\mathcal{A}$) 都是 3-正则的，因此由引理 4.5 可知， $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 可以由类 $\mathcal{C}_3$上的一阶逻辑句子定义。结合引理 5.3 和引理 5.4，即得定理 5.1。 □

我们想在此指出，虽然我们利用局部归约 f 得到了 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的不可测试性，但无法据此断定 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是一个扩展子类。不过，我们将在下一节证明这一点。

5.4. 图的性质是一个扩展子类。在本小节中，我们证明 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 是一个扩展子图族，并由此证明以下定理。

THEOREM 5.6. 存在一个普适常数 $\xi > 0$ ，以及一个（无限）类的ξ-扩展图，其最大度不超过 3，且该类可用无向图上的一阶逻辑定义。

$\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 的扩展性对于本文中的不可测试性结果并非必要。不过，我们认为定理 5.6 本身也很有意义，因为它让我们对一阶逻辑的表达能力有了新的认识。此外，对于无向图的扩展性质，其不可测试性可由 [15] 的主要结果推出。相关细节见附录 A。

LEMMA 5.7. ψ_{graph} 的模型是一个 ξ-扩展图族，其中$\xi > 0$为某个常数。

对于$A \in \mathcal{C}_\sigma$，我们将 G_A中的顶点分为以下两类：$= f$（A）形式为 u_a、$_i$ 且满足 $1 \le i \le d$、 $a \in U$（A）的顶点称为原始顶点（因为它们对应于 A中的一个原始元素）；形式为 v_a^k、$_i$ 且满足 $1 \le i \le d$、 $a \in U$（A）和 $1 \le k \le 6\ell + 5$ 的顶点称为辅助顶点，其中 ℓ 是 σ中的关系数（即边颜色数）。这里， f 是上一节定义的局部归约。注意， ℓ 是度数上界 d的函数。现在考虑 $A \in \mathcal{P}$z。证明 G_A 是扩展图的策略，是根据某个大小至多为$V(G_A)$ 2 的集合 $S \subseteq V(G_A)$中原始顶点与辅助顶点的数量关系，分别讨论不同情形。删除所有辅助顶点（或删除所有原始顶点）后， G_A 的连通分量大小均为常数，因此，如果 S 中辅助顶点的数量相对于原始顶点的数量较少（或分别地，原始顶点的数量相对于辅助顶点的数量较少），那么我们就能得到S 的良好连通性。另一方面，如果原始顶点与辅助顶点的数量较为接近，我们可以利用 G_A 的扩展性，证明 S 与G_A的其余部分良好连通。下面给出详细证明。

引理 5.7 的证明。令 $A \in \mathcal{P}$z且 $G_A := f(A)$。令 $S \subset V(G_A)$ 使得 $|S| \le \frac{|V(G_A)|}{2}$。令 $V_{\mathrm{original}} \sqcup V_{\mathrm{auxiliary}} = V(G_A)$为将 $V(G_A)$ 划分为原始顶点和辅助顶点的划分。令 $S_{\mathrm{original}} := V_{\mathrm{original}} \cap S$ 且 $S_{\mathrm{auxiliary}} := V_{\mathrm{auxiliary}} \cap S$。

首先注意，根据上述定义， A 中的每个元素对应于 d中的顶点，而 A 中的每条有向彩色边对应于 $V_{\mathrm{auxiliary}}$ 中的常数个 $c :=d(6\ell + 5)$顶点（注意， ℓ 仅取决于 d）。

假设$|S_{\mathrm{original}}| > \frac{2}{c} \cdot |S|$。那么 $S_{\mathrm{auxiliary}}$ 中有 $|S| - |S_{\mathrm{original}}| < \frac{c-2}{2} \cdot |S_{\mathrm{original}}|$ 个顶点。因此，至多有 $\frac{c-2}{2c} \cdot |S_{\mathrm{original}}|$ 条箭头完全由来自 S 的顶点组成。由于每条与 S_{original} 中某个顶点关联且至少包含一个不属于 S 的顶点的箭头，都对 $\langle S$ 贡献至少 1 条不同的边， $V(G) \setminus S\rangle_G$ 我们得到

$$\begin{aligned} |\langle S, V(G) \setminus S\rangle_G| &\ge \frac{1}{2} \cdot |S_{\mathrm{original}}| - \frac{c-2}{2c} \cdot |S_{\mathrm{original}}| \\ &= \frac{1}{c} \cdot |S_{\mathrm{original}}| \ge \frac{2}{c^2} \cdot |S|. \end{aligned}$$

假设 $\frac{1}{2dc} \cdot |S| < |S_{\mathrm{original}}| \le \frac{2}{c} \cdot |S|$。令 ϵ 为定理 3.1 的证明中定义的对象。我们按如下方式定义两个集合 S^{full}、 $S^{\mathrm{part}} \subseteq U(A)$。

$$S^{\mathrm{full}} := \big\{a \in U(A) : \{u_{a,i} : 1 \le i \le d\} \subseteq S\big\} \text{ and}$$

$$S^{\text{part}} := \big\{a \in U(A) : \{u_{a,i} : 1 \le i \le d\} \cap S \neq \emptyset\big\} \setminus S^{\text{full}}$$

其中（$u_{a,1}$，…，$u_{a,d}$，$u_{a,1}$）是上一节中局部归约 f 的构造里表示 a 的环。

首先假设$|S^{\text{part}}| \le \frac{\epsilon}{(2+c)d^2} \cdot |S_{\text{original}}|$。注意，如果 $a \in S^{\text{full}}$ 和$a' \notin S^{\text{full}} \cup S^{\text{part}}$，那么 G 中至少存在一条唯一的边，它对 $|\langle S、V(G) \setminus S\rangle_G|$作出贡献。由于存在 $d \cdot |S^{\text{part}}|$ 条带颜色的边（元组），其中包含来自 S^{part}的一个元素，因此我们得到

$$|\langle S, V(G) \setminus S\rangle_G| \ge |\langle S^{\text{full}}, U(A) \setminus S^{\text{full}}\rangle_{\underline{G}(A)}| - d \cdot |S^{\text{part}}|.$$

由于 A 是 d-正则图，每条边都被 c 个顶点替代，每个元素都被 d 个顶点替代，我们知道 $|V(G)| = (d + \frac{dc}{2})|A|$。因此

$$|S_{\text{original}}| \le \frac{2}{c} \cdot |S| \le \frac{1}{c} \cdot |V(G)| = \frac{(2+c)d}{2c} \cdot |A|.$$

此外，根据定义，$|S^{\text{full}}| \le \frac{|S_{\text{original}}|}{d}$，因此我们得到

$$|U(A) \setminus S^{\text{full}}| \ge \left(\frac{2c}{(2+c)d} - \frac{1}{d}\right) \cdot |S_{\text{original}}| = \frac{c-2}{(2+c)d} \cdot |S_{\text{original}}|.$$

于是由定理 3.1 可直接得到

$$\begin{aligned}
|\langle S, V(G) \setminus S\rangle_G| &\ge |\langle S^{\text{full}}, U(A) \setminus S^{\text{full}}\rangle_{U(\mathcal{A})}| - d \cdot S^{\text{part}} \\
&\ge \epsilon \cdot \min\{|S_{\text{original}}|, |A \setminus S_{\text{original}}|\} - d \cdot S^{\text{part}} \\
&\ge \left(\frac{\epsilon(c-2)}{(2+c)d} - \frac{\epsilon}{(2+c)d}\right) \cdot |S_{\text{original}}| \\
&\ge \frac{\epsilon(c-3)}{2(2+c)d^2c} \cdot |S|.
\end{aligned}$$

另一方面，如果$|S^{\text{part}}| \ge \frac{\epsilon}{(2+c)d^2} \cdot |S_{\text{original}}|$，那么 $|\langle S, V(G)\setminus S\rangle_G| \ge \frac{\epsilon}{2\,2+c()\,d^3c} \cdot |S|$。这是因为每个 $a \in S^{\text{part}}$ 至少贡献一条唯一的边给 $\langle S, V(G)\setminus S\rangle_G$，也就是说，是环 $(u_{a,1}, \ldots, u_{a,k}, u_{a,1})$ 的其中一条边。

现在假设$|S_{\text{original}}| \le \frac{1}{2dc} \cdot |S|$。因此，$S_{\text{auxiliary}}$中有 $|S| - |S_{\text{original}}| \ge \frac{2dc-1}{2dc} \cdot |S|$。其中至少有 $\frac{2dc-1}{2dc} \cdot |S| - c|S_{\text{original}}| \ge \frac{2dc-1-c}{2dc} \cdot |S|$ 个顶点位于$S_{\text{auxiliary}}$ 中，且在图 $G[S]$中不与 S_{original} 中的任何元素连通。由于 $G[S]$ 的任何连通分量若在 S_{original} 中没有顶点，至多包含 c 个顶点，因此我们得到

$$\langle S, V(G) \setminus S\rangle_G \ge \frac{2dc - c - 1}{2dc^2} \cdot |S|.$$

通过集合 $\xi = \min\{\frac{2}{c^2}, \frac{\epsilon}{2}\frac{(c-3)}{(2+c)d^2c}, \frac{\epsilon}{2\,2+c()d^3c}, \frac{2dc-c-1}{2dc^2}\} > 0$ 我们证明了所声称的结论。 □

6. 关于所有 Σ_2-性质的可测试性。令 $\sigma = \{R_1, \ldots, R_m\}$ 为任意关系签名，$\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 为度有界为 d 的 σ-结构集合。我们证明如下结论。

THEOREM 6.1. 在有界度模型中，由 Σ_2 里的 σ句子定义的每个一阶性质都是可测试的。

我们将图在稠密模型中的不可区分性概念推广到有界度模型。

DEFINITION 6.2. 两个性质 $\mathcal{P},\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 称为不可区分的，如果对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，都存在 $N = N(\epsilon)$，使得对于每个结构 $A \in \mathcal{P}$ 满足 $|U(A)| > N$，都存在一个具有相同论域的结构 $A \in \mathcal{Q}$，其与 A 的距离不超过 ϵ；˜并且对于每个满足 $|U(B)| > N$ 的 $B \in \mathcal{Q}$，都存在一个具有相同论域的结构 $B \in \mathcal{P}$，其与 B 的距离不超过 ϵ。

以下引理由定义直接推出，并且类似于 [4], ，不过我们使用了有界度图的规范测试器（[11, 22]）。

LEMMA 6.3. 如果 $\mathcal{P},\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 是不可区分的性质，那么 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上可测试，当且仅当 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 上可测试。

证明。我们证明，如果 $\mathcal{P}$ 可测试，那么 $\mathcal{Q}$ 也可测试。反向结论可由相同的论证得到。设 $\epsilon > 0$。由于 $\mathcal{P}$ 可测试，因此存在一个针对 $\mathcal{P}$ 的 $\frac{\epsilon}{2}$-测试器，其成功概率至少为 2 3。此外，我们可以假设该测试器（称为规范测试器）的行为如下（见 [11, 22]）：它首先均匀采样常数个元素，然后围绕所有采样元素探索 r-球的并集，其中半径为某个常数 $r > 0$，并根据所探索子结构的一个同构副本作出确定性的接受或拒绝决定。令 $C = C(\frac{\epsilon}{2}, d)$ 表示该测试器在输入结构上进行的查询次数。通过重复运行该测试器并采取多数票，我们可以得到一个具有 $c_1 \cdot C$ 次查询、且成功概率至少为 5 6 的测试器 T，其中 $c_1 > 0$ 为某个整数。

设 N 为一个数，满足：如果一个含有 $n > N$ 个元素的结构 B 满足 $\mathcal{Q}$，那么存在一个与其论域相同的 $B \in \mathcal{P}$，使得对于某个足够大的常数 $c_2 > 0$，$\mathrm{dist}(B, B) \leq \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{c_2 C \cdot d^{C+2}}\} dn$。现在我们给出一个用于 $\mathcal{Q}$ 的 ϵ-测试器。如果输入结构 B 的大小至多为 N，我们可以查询整个输入，以判断它是否满足 $\mathcal{Q}$。如果其大小大于 N，则使用前面提到的、针对 $\mathcal{P}$ 的 $\frac{\epsilon}{2}$-测试器，其成功概率至少为 5 6。如果 B 满足 $\mathcal{Q}$，那么存在一个 $\tilde{B} \in \mathcal{P}$，它与 B 至多在 $1/(c_2 C \cdot d^{C+2}) dn$ 处不同。由于该算法至多抽样 $c_1 \cdot C$ 个元素，并查询所有这些抽样元素周围的 r-球，对于 $r < C$，算法以至少 $1 - \frac{1}{6}$ 的概率不会查询到 B 与 B 不同的任何˜部分，因此其输出正确的概率至少为 $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$。如果 B 与满足 $\mathcal{Q}$ 的结构相距至少 ϵ，那么它与满足 $\mathcal{P}$ 的结构相距至少 $\frac{\epsilon}{2}$，并且算法以至少 $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ 的概率拒绝 B。因此，$\mathcal{Q}$ 也是可测试的。 □

定理 6.1 证明的总体思路。设 $\varphi \in \Sigma_2$。我们证明，由 φ 定义的性质可以写成若干性质的并集，其中每个性质都由一阶逻辑 Σ_2 中的另一个公式 φ' 定义，并且由存在量化变量导出的结构是一个固定结构 M（见断言 6.6）。对 φ' 进一步简化后，我们得到一阶逻辑 Σ_2 中的一个公式 φ''，它表达的是：该结构必须以 M 为诱导子结构，并且每个大小固定为 ℓ 的元素集合都必须导出来自某个结构集合 $\mathfrak{H}$ 的结构；此外，根据 $\mathfrak{H}$ 中的结构，可能还会与 M 中的元素存在某些联系（见断言 6.7）。接着，我们定义一阶逻辑 Π_1 中的一个公式 ψ，使得由 ψ 定义的性质与由 φ'' 定义的性质不可区分：也就是说，我们可以通过修改不超过一小部分元组，将任何满足 ψ 的结构变为满足 φ'' 的结构，反之亦然（见断言 6.10）。其直观解释是：对于每个满足 φ'' 的结构，都可以通过移除结构 M 使其满足 ψ；另一方面，对于每个满足 ψ 的结构，我们都可以植入结构 M，使其满足 φ''。由于存在量化变量和全称量化变量之间如何相互作用事先并不明确

因此，我们必须非常谨慎地定义 ψ。这里需要注意的是，由于度数上界的限制，在 $\mathfrak{H}$ 中迫使其与 M 发生相互作用的结构，其出现次数有限（见命题 6.8）。因此，在 ψ 的模型中不能允许出现此类结构，因为其出现次数在这里无法以任何方式加以限制。由于一阶逻辑 Π_1 中的公式定义的性质都是可测试的，结合 ψ 与 φ'' 的不可区分性可知，由 φ'' 定义的性质也是可测试的。此外，由于可测试的性质在并集 [18], 下封闭，我们得出结论：由一阶逻辑 Σ_2 中的公式定义的任何性质都是可测试的。

我们不会直接给出性质 $\mathcal{P}_\varphi$ 的测试器，而是将 φ 分解为更简单的情形。不过，所用的 φ 的每一步简化都是可计算的，下面的证明为每个 $\epsilon \in \in (0,1)$ 和每个 $\varphi \in \Sigma_2$ 构造了一个用于 $\mathcal{P}_\varphi$ 的 ϵ-测试器。

为完整证明定理 6.1，我们使用以下定义。

Definition 6.4. 设 A 是一个 σ-结构，带有 $U(A) = \{a_1, \dots, a_t\}$。令 $\overline{z} = (z_1, \dots, z_t)$ 为一个变量元组。然后我们如下定义 $\iota^A(\overline{z})$。

$$\iota^A(\overline{z}) := \bigwedge_{R\in\sigma} \Bigg(\bigwedge_{\left(a_{i_1},\dots,a_{i_{\mathrm{ar}(R)}}\right)\in R(A)} R\left(z_{i_1},\dots,z_{i_{\mathrm{ar}(R)}}\right) \wedge \bigwedge_{\left(a_{i_1},\dots,a_{i_{\mathrm{ar}(R)}}\right)\in U(A)^{\mathrm{ar}(R)}\setminus R(A)} \neg R\left(z_{i_1},\dots,z_{i_{\mathrm{ar}(R)}}\right) \Bigg) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j\in[t]\\ i\neq j}} (\neg z_i = z_j).$$

注意，对于每个 σ-结构 A' 和 $\overline{a}' = (a'_1, \dots, a'_t) \in U(A')^t$，我们都有 $A' \models \iota^A(\overline{a}')$ 当且仅当 $a_i \mapsto a'_i$, $i \in \{1, \dots, t\}$ 是从 A 到 $A'[\{a'_1, \dots, a'_t\}]$ 的同构。特别地，如果 $A' \models \iota^A(\overline{a}')$，那么 $\{a'_1, \dots, a'_t\}$ 在 A' 中诱导出一个与 A 同构的子结构。

定理 6.1 的证明。设 φ 是 Σ_2 中的任意句子。因此，我们可以假设 φ 具有 $\varphi = \exists \overline{x} \forall \overline{y}\, \chi(\overline{x}, \overline{y})$ 的形式，其中 $\overline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ 是一个 $k \in \mathbb{N}$ 变量元组，$\overline{y} = (y_1, \dots, y_\ell)$ 是一个 $\ell \in \mathbb{N}$ 变量元组，而 $\chi(\overline{x}, \overline{y})$ 是一个无量词公式。我们还可以进一步假设 $\chi(\overline{x}, \overline{y})$ 处于析取范式，并且

$$\varphi = \exists \overline{x} \forall \overline{y} \bigvee_{i\in I} \Big(\alpha^i(\overline{x}) \wedge \beta^i(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^i(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^i(\overline{x}, \overline{y}) \Big), \tag{6.1}$$

其中，$\alpha^i(\overline{x})$ 仅是包含来自 $\overline{x}$ 的变量的文字的合取，$\beta^i(\overline{y})$ 是仅包含 $\overline{y}$ 中变量的文字的合取，$\mathrm{neg}^i(\overline{x}, \overline{y})$ 是包含来自 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 的变量的否定原子公式的合取，而 $\mathrm{pos}^i(\overline{x}, \overline{y})$ 是包含来自 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 的变量的原子公式的合取。现在请注意，如果表达式“$x_j = y_{j'}$”出现在合取子句中，那么我们可以将该子句中 $y_{j'}$ 的每次出现替换为 x_j，从而得到一个等价的公式。

现在，我们将（6.1）中给出的公式 φ 写成对 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 中所有可能结构的析取，这些结构可能由存在量化变量强制确定。由于实现这些存在量化变量的元素将具有某种特定结构，因此以这种方式分解公式是很自然的。

设 $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 是 φ 的一组模型，使得 φ 的每个模型 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 都包含某个 $M \in \mathfrak{M}$ 的同构副本作为诱导子结构，并且 $\mathfrak{M}$ 是具有此性质的极小集合。

Claim 6.5. 每个 $M \in \mathfrak{M}$ 至多有 k 个元素。

证明。假设存在 $M \in \mathfrak{M}$ 满足 $|M| > k$。由于 $\mathfrak{M}$ 中的每个结构都是 φ的模型，因此必定存在一个元组$\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in U(M)^k$，使得 $M \models \forall \overline{y} \bigvee_{i \in I} \Big(\alpha^i(\overline{a}) \wedge \beta^i(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^i(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^i(\overline{a}, \overline{y})\Big)$。这意味着，对于每个元组$\overline{b} \in U(M)^\ell$，都有 $M \models \bigvee_{i \in I} \Big(\alpha^i(\overline{a}) \wedge \beta^i(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^i(\overline{a}, \overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^i(\overline{a}, \overline{b})\Big)$。此外，由于 $\{a_1, \ldots, a_k\}^\ell \subseteq U(M)^\ell$，我们有 $M[\{a_1, \ldots, a_k\}] \models \forall \overline{y} \bigvee_{i \in I} \Big(\alpha^i(\overline{a}) \wedge \beta^i(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^i(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^i(\overline{a}, \overline{y})\Big)$。这意味着 $M[\{a_1, \ldots, a_k\}] \models \varphi$。因此，$\mathfrak{M}$ 包含 $M[\{a_1, \ldots, a_k\}]$的一个诱导子结构 M'。由于每个包含 M作为诱导子结构的 φ 模型也必须包含 M' 作为诱导子结构，$\mathfrak{M} \setminus \{M\}$是一个严格小于 $\mathfrak{M}$ 且具有所有所需性质的集合。这与 $\mathfrak{M}$的极小性矛盾。 □

因此 $\mathfrak{M}$ 是有限的。对于 $M \in \mathfrak{M}$，令 $J_M := \{j \in I \mid M \models \alpha^j(\overline{m}),\ \text{其中某个 } \overline{m} \in U(M)^\ell\} \subseteq I$。

Claim 6.6. 我们有 $\varphi \equiv_d \bigvee_{M \in \mathfrak{M}} \Big(\exists \overline{x} \forall \overline{y} \Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x}, \overline{y})\Big)\Big]\Big)$。

证明。设$A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$是 φ的一个模型。那么存在一个元组 $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in U(A)^k$，使得 $A \models \forall y \chi(\overline{a}, \overline{y})$。由于 $\{a_1, \ldots, a_k\}^\ell \subseteq U(A)^\ell$，这意味着$A[\{a_1, \ldots, a_k\}] \models \forall y \chi(\overline{a}, \overline{y})$，因此 $A[\{a_1, \ldots, a_k\}] \models \varphi$。此外，我们可以假设所选的 $\overline{a}$满足：对于任意元组 $\overline{a}' = (a'_1, \ldots, a'_k) \in \{a_1, \ldots, a_k\}^k$，若满足 $\{a'_1, \ldots, a'_k\} \subsetneq \{a_1, \ldots, a_k\}$，则有 $A \not\models \forall \overline{y} \chi(\overline{a}', \overline{y})$。（原因是，如果某个元组 $\overline{a}'$ 不满足这一条件，那么我们只需将 $\overline{a}$ 替换为 $\overline{a}'$，依此类推，直到满足该性质。）因此，$A[\{a_1, \ldots, a_k\}]$ 在 $\mathfrak{M}$中不能有真导出的子结构，由此可得存在 $M \in \mathfrak{M}$ 使得$M \cong A[\{a_1, \ldots, a_k\}]$。根据 J_M的选取，我们得到 $A \models \forall \overline{y} \Big[\iota^M(\overline{a}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{y})\Big)\Big]$，因此

$$A \models \bigvee_{M \in \mathfrak{M}} \Big(\exists \overline{x} \forall \overline{y} \Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x}, \overline{y})\Big)\Big]\Big).$$

为证明另一个方向，现在令结构 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 成为公式$\bigvee_{M \in \mathfrak{M}} \Big(\exists \overline{x} \forall \overline{y} \Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x}, \overline{y})\Big)\Big]\Big)$的一个模型。因此，存在 $M \in \mathfrak{M}$ 和 $\overline{a} \in U(A)^k$，使得 $A \models \forall \overline{y} \Big[\iota^M(\overline{a}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{y})\Big)\Big]$。根据 J_M 的选取，这意味着 $A \models \forall \overline{y} \bigvee_{j \in J_M} \Big(\alpha^j(\overline{a}) \wedge \beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{y})\Big)$，从而得到 $A \models \varphi$。 □

由于有限个可测试性质的并集也是可测试的（例如参见 [18]），只需证明性质 $\mathcal{P}_\varphi$ 是可测试的，其中 φ 具有以下形式

$$\varphi = \exists \overline{x} \forall \overline{y} \chi(\overline{x}, \overline{y}), \quad \text{where } \chi(\overline{x}, \overline{y}) = \Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{j \in J_M} \Big(\beta^j(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x}, \overline{y})\Big)\Big], \tag{6.2}$$

对于某些 $M \in \mathfrak{M}$。在下文中，我们将要求：对于 χ 的大析取中的每个合取子句，全称量化变量都诱导出一个特定的子结构。

对于 $j \in J_M$ 令$\mathfrak{H}_j \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 为一个极大集合，其中的结构两两不同构，使得 $H \models \beta^j(b)$ 对某个 $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in U(H)$ 成立，且 $\{b_1, \ldots, b_\ell\} = U(H)$。

Claim 6.7. 我们有

$$\varphi \equiv_d \exists\overline{x}\forall\overline{y}\Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{\substack{H\in\mathfrak{H}_j,\\ j\in J_M}} \Big(\iota^H(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x},\overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x},\overline{y})\Big)\Big].$$

证明。令$A \in \mathcal{C}_\sigma$、d 和$\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in U(A)^k$。首先假设 $A \models \forall\overline{y}\chi(\overline{a},\overline{y})$。因此，对于任意元组 $\overline{b} \in U(A)^\ell$，存在一个索引 $j \in J_M$，使得 $A \models \beta^j(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})$。那么，$A \models \beta^j(\overline{b})$意味着，对于某个 $H \in \mathfrak{H}_j$，$A[\{b_1, \ldots, b_\ell\}] \cong H$。因此，$A \models \iota^H(\overline{b})$ 且 $A \models \Big[\iota^M(\overline{a}) \wedge \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j,\ j\in J_M} \Big(\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})\Big)\Big]$。

对于另一个方向，我们令 $A \models \forall\overline{y}\Big[\iota^M(\overline{a}) \wedge \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j,\ j\in J_M} \Big(\iota^H(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{y})\Big)\Big]$。于是，对于每个元组 $\overline{b} \in U(A)^\ell$，都存在一个指标 $j \in J_M$和 $H \in \mathfrak{H}_j$，使得 $H \models \iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})$。因此$A[\{b_1, \ldots, b_\ell\}] \cong H$，并且我们知道 $A \models \beta^j(\overline{b})$。因此 $A \models \beta^j(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},b)$，且由于这对任意 $b \in U(A)^\ell$ 都成立，我们得到 $A \models \varphi$。 □

因此，只需假设

$$\varphi = \exists\overline{x}\forall\overline{y}\chi(\overline{x},\overline{y}), \tag{6.3}$$
$$\text{where } \chi(\overline{x},\overline{y}) := \Big[\iota^M(\overline{x}) \wedge \bigvee_{\substack{H\in\mathfrak{H}_j,\\ j\in J_M}} \Big(\iota^H(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{x},\overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{x},\overline{y})\Big)\Big]$$

对于某个 $M \in \mathfrak{M}$。

接下来，我们将定义一个全称量化公式 ψ，并证明 $\mathcal{P}_\varphi$ 与性质 $\mathcal{P}_\psi$不可区分。为此，我们需要下面两个命题。直观地说，命题 6.8 表明，有界度图的模型 φ 中，存在变量与全称变量之间的“交互”并不多——关系中同时包含这两类变量的元组只有常数个。注意，对于一个结构 A 以及元组$\overline{a} \in U(A)^k$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in U(A)^\ell$，条件 $A \models \iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})$ 可能会迫使 $\overline{b}$ 中的一个元素与 $\overline{a}$ 中的一个元素出现在同一个元组（该元组属于 A的某个关系），即使 $\mathrm{pos}^j(\overline{x},\overline{y})$ 只包含形如 $x_i = y_i$的文字。（例如，对于某个元组 $\overline{b}' \in \{b_1, \ldots, b_\ell\}^\ell$，可能每个子句 $\iota^{H'}(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^{j'}(\overline{x},\overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^{j'}(\overline{x},\overline{y})$，只要满足 $A \models \iota^{H'}(\overline{b}') \wedge \mathrm{pos}^{j'}(\overline{a},\overline{b}') \wedge \mathrm{neg}^{j'}(\overline{a},\overline{b}')$，就会迫使某个元组同时包含 $\overline{b}'$ 中的一个元素和 $\overline{a}$中的一个元素。）现在，我们将定义一个集合 J，用来挑出那些不会迫使某个元组同时包含来自 $\overline{a}$ 和 $\overline{b}$的元素的子句。注意，我们仍允许 $\overline{b}$ 中的元素属于 $\overline{a}$中的元素。命题 6.8 将证明，对于每个$A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$, $\overline{a} \in U(A)^k$，只要满足 $A \models \forall\overline{y}\chi(\overline{a},\overline{y})$，就只有常数个元组$\overline{b} \in U(A)^\ell$ 仅满足那些会迫使某个元组同时包含来自 $\overline{a}$ 和 $\overline{b}$的元素的子句。

令 $j \in J_M$、$H \in \mathfrak{H}_j$和 $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_\ell) \in U(H)^\ell$使得 $H \models \iota^H(\overline{h})$。我们定义集合 $P_{j,H} := \{h_i \mid i \in \{1, \ldots, \ell\}, \mathrm{pos}^j(\overline{x},\overline{y})$ 不包含 $y_i = x_{i'}$对于任意 $i' \in \{1, \ldots, k\}\}$. 现在令 $J \subseteq J_M \times \mathcal{C}_{\sigma,d}$为由满足以下条件的有序对 (j, H)构成的集合：$H \in \mathfrak{H}_j$使得不交并 $M \sqcup H[P_{j,H}] \models \varphi$。现在，$J$精确地刻画了可由结构 A 和元组 $\overline{a} \in U(A)^k$ 以及 $\overline{b} \in U(A)^\ell$满足的子句，其中 A 不包含同时含有来自 $\overline{a}$ 和 $\overline{b}$的元素的任何元组。

CLAIM 6.8.令$A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$和$\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in U(A)^k$。如果 $A \models \forall \overline{y}\, \chi(\overline{a}, \overline{y})$，那么至多有 $k \cdot d$个元组 $\overline{b} \in U(A)^\ell$满足 $A \not\models \bigvee_{(j,H)\in J}(\iota^H(b) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{b}))$。

证明。由于 $A \models \forall \overline{y}\, \chi(\overline{a}, \overline{y})$，根据等式（6.3），有 $A \models \forall \overline{y} \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j,\ j\in J_M} \Big(\iota^H(\overline{y}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{y}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{y})\Big)$。现在令 $B := \{\overline{b} \in U(A)^\ell \mid A \not\models \bigvee_{(j,H)\in J}(\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{b}))\} \subseteq U(A)^\ell$。然后，每个 $\overline{b} \in B$ 至少使 $\sum_{i=1}^k \deg_A(a_i)$ 增加 1。由于 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 蕴含 $\sum_{i=1}^k \deg_A(a_i) \leq k \cdot d$，我们得到 $|B| \leq k \cdot d$。 □

CLAIM 6.9. 设 ψ 是形如 $\psi = \forall \overline{z} \chi(\overline{z})$ 的公式，其中 $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_t)$ 是变量元组，$\chi(\overline{z})$ 是无量词公式。令 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$，满足 $|U(A)| > d \cdot \mathrm{ar}(\sigma) \cdot t$，并令 $b \in A$ 为任意元素。令 $A \models \psi$，并令 A' 由 A 得到，方法是"隔离" b，即对每个$R \in \sigma$，从 $R(A)$ 中删除包含 b 的所有元组。于是 $A' \models \psi$。

证明。首先注意，对于任意元组 $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_t)$，$A' \models \chi(\overline{a}) \in (A \setminus \{b\})^t$，因为集合 $\{a_1, \ldots, a_t\}$ 上的元组没有被删除。令 $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_t) \in U(A)^t$为一个包含 b 的元组。选取 $b' \in U(A)$，使得对于每个 $j \in \{1, \ldots, t\}$，$\mathrm{dist}_A(a_j, b') > 1$。这样的元素存在，因为 $|U(A)| > d \cdot \mathrm{ar}(R) \cdot t$。令$\overline{a}' = (a'_1, \ldots, a'_t)$ 为从 $\overline{a}$ 得到的元组，其中将 b 的任意出现替换为 b'。因此，$a_j \mapsto a'_j$ 定义了从 $A'[\{a_1, \ldots, a_t\}]$ 到 $A[\{a'_1, \ldots, a'_t\}]$ 的同构，因为 b 是 $A'[\{a_1, \ldots, a_t\}]$ 中的孤立元素，而 b' 是 $A[\{a'_1, \ldots, a'_t\}]$中的孤立元素。由于 $A \models \chi(\overline{a}')$，可推出 $A' \models \chi(\overline{a})$。 □

令 $J' \subseteq J$ 为所有满足 $\mathrm{pos}^j(\overline{x}, \overline{y})$ 是空合取的对 (j, H) 所成的集合。J' 包含我们希望使用 $\iota^H(\overline{y})$ 来定义公式 ψ 的 (j, H)。

CLAIM 6.10. 性质 $\mathcal{P}_\varphi$（其中 φ 如(6.3) 所示）与性质 $\mathcal{P}_\psi$ 不可区分，其中 $\psi := \forall \overline{y} \bigvee_{(j,H)\in J'} \iota^H(\overline{y})$。

证明。令 $\epsilon > 0$ 和 $N(\epsilon) = N := k \cdot \ell^2 \cdot d \cdot \mathrm{ar}(R) \cdot \epsilon$ 以及 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 为任意结构，满足$|U(A)| > N$。

首先假设 $A \models \varphi$。策略是通过删除所有包含 b 的元组，隔离任何包含在元组 $\overline{b} \in U(A)^\ell$ 中且满足 $A \not\models \bigvee_{(j,H)\in J'} \iota^H(\overline{b})$的元素 b。这将得到一个与 A ϵ-接近且为 ψ 的模型的结构。

令 $\overline{a} \in U(A)^k$为一个元组，使得 $A \models \forall \overline{y} \chi(\overline{a}, \overline{y})$。令 $B \subseteq U(A)^\ell$为满足 $A \not\models \bigvee_{(j,H)\in J}(\iota^H(b) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a}, \overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a}, \overline{b}))$ 的元组集合 $\overline{b} \in U(A)^\ell$。那么$|B| \leq k \cdot d$ 由命题 6.8 可知。因此，通过从 A 中删除所有包含 C 中某个元素的元组，得到结构 A'：
$= \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b \in A \mid$存在 $(b_1, \ldots, b_\ell) \in$
B $b \in \{b_1, \ldots, b_\ell\}\}$ ϵ A $A \models \forall \overline{y} \chi\ \overline{a}\ \overline{y}$ $A \models$，使其与
$\forall \overline{y} \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j} \iota^H\ \overline{y}$ 6 9 $A' \models \forall \overline{y} \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j} \iota^H\ \overline{y}$
相距很近。由于 (,) 蕴含 , ( )，由命题 可知 , ( )。根据定义，对于任意元组 $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell)$ $\in (U(A) \setminus C)^\ell$，$J'$有 $A \models \iota^H(\overline{b})$，其中某个 $(j, H) \in J'$ 满足该条件。此外，$A[\{b_1, \ldots, b_\ell\}] = A'[\{b_1, \ldots, b_\ell\}]$，因此$A' \models \bigvee_{(j,H)\in J'} \iota^H(\overline{b})$。令 $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in U(A)^\ell$ 为任意一个包含来自 C 的元素的元组，并令 $c_1, \ldots, c_t \in C$ 为这些元素。选取 t 个元素 $c'_1, \ldots, c'_t \in U(A) \setminus C$，使得 $\mathrm{dist}_A(a_i, c'_{i'}) > 1$、$\mathrm{dist}_A(c'_{i'}, b_i) > 1$，且 $\mathrm{dist}_A(c'_i, c'_{i'}) > 1$，其中 i, i' 取适当值。这是可行的，因为 $|U(A)| > (k + 2\ell) \cdot d \cdot \mathrm{ar}(R)$，这保证了存在 $k + 2\ell$ 个两两距离为 1 的元素。令 $\overline{b}' = (b'_1, \ldots, b'_\ell)$ 为将 c_i 替换为 c'_i 后从 $\overline{b}$ 得到的向量。由于 $\overline{b}' \in U(A)^\ell$，必定存在 j', $H' \in \mathfrak{H}_j$，使得 $A \models \iota^{H'}(\overline{b}') \wedge \mathrm{pos}^{j'}(\overline{a}, \overline{b}') \wedge \mathrm{neg}^{j'}(\overline{a}, \overline{b}')$。根据 $c'_1, \ldots, c'_t$ 的选取，我们有

$\mathrm{pos}^{j'}(\overline{x},\overline{y})$ 必须是空合取，因此 $(j',H') \in J'$。此外，$b_i \mapsto b'_i$ 定义了 $A[\{b'_1,\dots,b'_\ell\}]$ 与 $A'[\{b_1,\dots,b_\ell\}]$ 之间的同构，这意味着 $A' \models \bigvee_{(j,H)\in J'} \iota^H(\overline{b})$ 对所有 $\overline{b} \in U(A)$ 均成立，因此 $A' \models \psi$。

现在证明另一个方向。设 $A \models \psi$ with $|U(A)| > N$。这里的思路是在 A 中的某处植入结构 M。虽然这所需的边修改少于 ϵ 的比例，但所得结构将是 φ 的一个模型。

任取 $|U(M)|$ 个元素组成的集合 $B \subseteq A$。令 A' 为从 A 中删除所有与包含在 B 中的任一元素关联的边后得到的结构。令 A'' 为从 A' 中添加所有满足以下条件的元组后得到的结构：由 B 导出的结构与 M 同构。这至多需要 $2\ell \cdot d \cdot \mathrm{ar}(R) < \epsilon \cdot d \cdot |U(A)|$ 次边修改。令 $\overline{a} \in B^k$ 满足 $A \models \iota^M(\overline{a})$。根据命题 6.9，我们得到 $A' \models \psi$。因此，任取一个元组 $\overline{b} = (b_1,\dots,b_\ell) \in (U(A) \setminus B)^\ell$。由于根据构造，所有 b_i' 到 $\overline{a}$ 的距离至少为二，因此有 $A'' \models \bigvee_{(j,H)\in J'} (\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b}))$。根据 M 的选取，我们还知道，对于所有 $\overline{b} \in B^\ell$，$A'' \models \bigvee_{H\in\mathfrak{H}_j,\ j\in J_M} \left(\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})\right)$。因此，取一个同时包含来自 B 以及来自 $U(A) \setminus B$ 的元素的元组 $\overline{b} = (b_1,\dots,b_\ell)$。现在取一个元组 $\overline{b}' = (b'_1,\dots,b'_\ell) \in (U(A) \setminus B)^\ell$，使其在所有包含来自 $U(A) \setminus B$ 中元素的位置上都与 $\overline{b}$ 相等。如前所述，存在 $(j,H) \in J'$，使得 $A'' \models (\iota^H(\overline{b}') \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b}'))$。因此，$A''[\{b'_1,\dots,b'_\ell\}]$ 与 H 同构；此外，由于 $(j,H) \in J'$，集合 $P_{j,H}$（在 J 的定义中使用）就是 H 的整个论域。由于 $J' \subseteq J$，这意味着根据 J 的定义，我们得到 $A''[\{a_1,\dots,a_k,b'_1\dots b'_\ell\}] \cong A''[\{a_1,\dots,a_k\}] \sqcup A''[\{b'_1\dots b'_\ell\}] \cong M \sqcup H[P_{j,H}] \models \varphi$。由于 $\overline{b} \in \{a_1,\dots,a_k,b'_1\dots b'_\ell\}^\ell$，这意味着

$$A''[\{a_1,\dots,a_k,b'_1\dots b'_\ell\}] \models \bigvee_{\substack{H\in\mathfrak{H}_j,\\ j\in J_M}} \left(\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})\right)$$

. Then $A'' \models \bigvee_{\substack{H\in\mathfrak{H}_j,\\ j\in J_M}} \left(\iota^H(\overline{b}) \wedge \mathrm{pos}^j(\overline{a},\overline{b}) \wedge \mathrm{neg}^j(\overline{a},\overline{b})\right)$ and hence $A'' \models \varphi$. □

由于 $\psi \in \Pi_1$ 我们有 $\mathcal{P}_\psi$ 是可测试的，因此根据断言 6.10，$\mathcal{P}_\varphi$ 是可测试的。 □

7. GSF-局部性不足以实现邻近无关测试。本节中，我们将证明性质 $\mathcal{P}_{\mathrm{graph}}$ 可以由 [22] 中引入的一种广义禁子图概念定义（引理 7.14）。在这里，只有当子图与图的其余部分以预先指定的方式连通时，该子图才是禁子图；也就是说，对于禁子图中的某个顶点，我们可以规定它不能有不属于该子图的邻点。结合我们的结果，我们证明，并非所有由广义禁子图定义的性质都能在有界度模型中进行测试（定理 7.5）。这对 Goldreich 和 Ron 在 [22] 中提出的一个问题（问题 1）给出了否定答案：少量出现的广义禁子图能否通过少量边修改消除，还是说无论采用何种消除方式，都必然引发一连串必要的边修改？下文将介绍 [22] 中所需的概念与结果。

7.1. 广义子图自由性。下文将给出广义子图自由性、GSF-局部性质以及非传播性概念的正式定义，这些概念均在 [22] 中引入。

Definition 7.1（广义子图自由性（GSF））。标记图是指每个顶点都标记为“完全标记”“半完全标记”或“部分标记”的图。一个嵌入

从标记图 F到图 G的映射是单射 $f\colon V(F) \to V(G)$，且对每个 $v \in V(F)$，以下三个条件均成立。

1. 如果 v 被标记为“完全标记”，那么 $N_1^G(f(v)) = f(N_1^F(v))$。 2. 如果 v 被标记为“半完全标记”，那么 $N_1^G(f(v)) \cap f(V(F)) = f(N_1^F(v))$。 3. 如果 v 被标记为“部分标记”，那么 $N_1^G(f(v)) \supseteq f(N_1^F(v))$。

如果不存在从 F 到 G的嵌入，则称图 G 为 F-无。对于标记图集合 $\mathcal{F}$，如果对于每个 $F \in \mathcal{F}$，图 G 都是 F-无，则称图 G 为 $\mathcal{F}$-无。

基于上述广义子图自由性的定义，我们可以定义 GSF -局部性质。

Definition 7.2（GSF-局部性质）。设 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 为图性质，其中 $\mathcal{P}_n = \{G \in \mathcal{P} \mid |V(G)| = n\}$ 和 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是标记图集合序列。若存在整数 s，使得对于每个 n 以下条件成立，则称 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{F}$-局部。

1. $\mathcal{F}_n$ 是一个标记图集合，其中每个图的大小至多为 s。
2. $\mathcal{P}_n$ 等于由无 $\mathcal{F}_n$的 n-顶点图组成的集合。

$\mathcal{P}$ 被称为GSF-局部，如果存在一个由标记图集合组成的序列 $\overline{\mathcal{F}}$ =$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\mathcal{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$-局部。

下面的标记图集合序列的非传播条件概念，是为研究常数查询POT而引入的。

Definition 7.3(非传播). 令 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为标记图集合序列。

- 对于图 G，子集 $B \subset V(G)$ 覆盖 $\mathcal{F}_n$，当且仅当对于每个标记图$F \in \mathcal{F}_n$ 以及 F 到 G 的每个嵌入， F 中至少有一个顶点映射到 B 中的一个顶点。
- 若存在一个（单调不减）函数 $\tau : (0, 1] \to (0, 1]$，使得以下两个条件成立，则称序列 $\overline{\mathcal{F}}$ 为非传播序列。1. 对每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\beta > 0$，使得 $\tau(\beta) < \epsilon$。2. 对每个图 G 以及每个 $B \subset V(G)$，若 B 在G中覆盖 $\mathcal{F}_n$，则要么 G 与 $\mathcal{F}_n$-自由相差 $\tau(|B|/n)$，要么不存在 $\mathcal{F}_n$-自由的 n-顶点图。若存在一个非传播序列$\overline{\mathcal{F}}$，使得 $\mathcal{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$-局部的，则称 GSF-局部性质 $\mathcal{P}$ 为非传播的。

在上述定义中，集合 B 可以被视为涉及修复不满足具有 $\overline{\mathcal{F}}$-局部性质 $\mathcal{P}$ 的图 G 所需修改的集合，而第二个条件则表示我们不需要对 G 进行“远超出” B 的修改。特别是，这意味着我们可以修复 G，而不会触发全局性的“连锁反应”。Goldreich 和 Ron 给出了有界度图模型中邻近无关可测试性质的如下刻画。

Theorem 7.4（ [22]中的定理 5.5）。图性质 $\mathcal{P}$ 具有常数查询的邻近无关测试器，当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 GSF-局部且非传播的。

以下开放问题由 [22]提出。

Open Question 1 （所有 GSF-局部性质都是非传播的吗？）对于每个 GSF-局部性质 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$，是否都存在一个序列 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使其非传播且 $\mathcal{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$-局部的?

现在我们可以陈述回答问题 1 的定理。本节的其余部分

专门用于证明定理 7.5。

THEOREM 7.5. 存在一个度数至多为 3 的图的 GSF-局部性质，在有界度图模型中是不可测试的。因此，并非所有 GSF-局部性质都是非传播的。

7.2. 不同局部性概念之间的关系。本节通过规定邻域类型出现次数的上下界来定义性质。这些界由邻域概况给出，我们将在下文对其进行形式化定义。我们利用这些性质，在引理 7.7 中给出有界度结构的一阶性质的一个自然刻画；该刻画是 Hanf 定理（定理 2.1）的直接推论。我们利用这一刻画建立一阶可定义性与 GSF-局部性之间的联系。这一联系是证明主定理的关键要素。

注意，对于固定的 r、$d \in \mathbb{N}$ 和 σ，在 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 中的结构里，r-类型只有有限多个。对于任意签名 σ 以及 d、$r \in \mathbb{N}$，我们令 $n_{d,r,\sigma} \in \mathbb{N}$ 表示度数至多为 d 的 σ-结构中不同 r-类型的数量。假设对于所有 d、$r \in \mathbb{N}$，度数至多为 d 的 σ-结构的 r-邻域类型均已排序，我们令 $\tau^i_{d,r,\sigma}$ 表示第 i 个这样的邻域类型，其中 $i \in \{1, \dots, n_{d,r,\sigma}\}$。对于每个 σ-结构 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$，我们将其与 r-直方图向量 $\overline{v}_{d,r,\sigma}(A)$ 关联，其定义为

$$(\overline{v}_{d,r,\sigma}(A))_i := |\{a \in U(A) \mid \mathcal{N}^A_r(a) \in \tau^i_{d,r,\sigma}\}|.$$

我们令

$$\mathfrak{I} := \{[k,l] \mid k \le l \in \mathbb{N}\} \cup \{[k,\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

是所有具有自然下界或上界的闭区间或半闭区间的集合。

DEFINITION 7.6. 令 σ 为一个签名，且 d、$r \in \mathbb{N}$。

1. 一个 r-邻域轮廓的度为 d，是一个函数 $\rho\colon \{1, \dots, n_{d,r,\sigma}\} \to \mathfrak{I}$。2. 对于结构 $A \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$，我们称 A 遵循 ρ，记作 $A \sim \rho$，如果

$$(\overline{v}_{d,r,\sigma}(A))_i \in \rho(i) \text{ for all } i \in \{1, \dots, n_{d,r,\sigma}\}.$$

令 $\mathcal{P}_\rho$ 为满足 ρ 的结构集合 A，即 $\mathcal{P}_\rho = \{A \in \mathcal{C}_{\sigma,d} \mid A \sim \rho\}$。

3.我们称性质 $\mathcal{P}$ 由有限个邻域概况的并定义，如果存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{P} = \bigcup_{1 \le i \le k} \mathcal{P}_{\rho_i}$，其中 ρ_i 是一个 r_i-邻域轮廓，并且对于每个 $i \in \{1, \dots, k\}$都有 $r_i \in \mathbb{N}$。

我们令 $n_{d,r} := n_{d,r,\sigma_{\text{graph}}}$ 表示度至多为 d 的有向图中 r-类型的总数。我们固定这些类型的一种排序，并令 $\tau^i_{d,r} := \tau^i_{d,r,\sigma_{\text{graph}}}$ 表示任意 $i \in \{1, \dots, n_{d,r}\}$ 的有界度 d 的第 i 个 r-类型。此外，对于图 G，令 $\overline{v}_{d,r}(G)$ 表示 G 的 r-直方图向量。注意，若 G 是无向图，则对于任意边关系不对称的类型 $\tau^i_{d,r}$，有 $(\overline{v}_{d,r}(G))_i = 0$；因此，对于图的任何 r-邻域轮廓 ρ，对于任意不对称类型 $\tau^i_{d,r}$，都有 $\rho(i) = [0,0]$。为方便起见，对于无向图，我们将忽略不对称类型。

我们来看下面这个例子，其中我们为一个一阶性质找到了基于邻域轮廓的表示。

EXAMPLE 2。考虑以下一阶句子。

$$\varphi := \forall x \forall y \neg E(x,y) \vee \forall x \exists y_1 \exists y_2 \Big(y_1 \neq y_2 \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2)$$



图 7：有界度 2 的 1-类型，中心以绿色标出。

$$\wedge \forall z(z \neq y_1 \wedge z \neq y_2) \rightarrow \neg E(x,z)\Big).$$

由句子 φ 定义的性质 P_φ 包含所有无边图以及所有由环组成的不相交并的图。

度数上界为 2 时，所有 1-类型都列于图 7 中。令 $\rho_1 \colon \{1,\dots,4\} \to \mathfrak{I}$ 为由 $\rho_1(1) = [0,\infty)$ 和 $\rho_1(i) = [0,0]$ 定义的邻域轮廓，其中 $i \in \{2,3,4\}$。此外，令 $\rho_2 \colon \{1,\dots,4\} \to \mathfrak{I}$ 为对 $i \in \{3,4\}$ 和 $j \in \{1,2\}$，分别由 $\rho_2(i) = [0,\infty)$ $\rho_2(j) = [0,0]$ 定义的邻域轮廓。容易看出，性质 P_φ 和 $P_{\rho_1} \cup P_{\rho_2}$ 相等。

事实上，用邻域概况表示一阶性质通常是可行的。现在我们给出一个引理，说明有界度一阶性质等价于由邻域概况定义的性质的有限并。这里出现的技术性问题源于 Hanf 范式并不要求所有 Hanf 句子的局部性半径相同。

LEMMA 7.7. 对于每个非空性质 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_{\sigma,\,d}$, $\mathcal{P}$，它在$\mathcal{C}_{\sigma,\,d}$ 上是一阶可定义的，当且仅当 $\mathcal{P}$ 可表示为由邻域概况定义的性质的有限并。

证明。对于第一个方向，假设 φ 是一阶句子。那么根据 Hanf 定理（定理 2.1），存在一个 Hanf 范式句子 ψ，使得 $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_\psi$。

我们首先将 ψ 转换为一个 Hanf 范式句子，使其中出现的每个 Hanf 句子都具有相同的局部性半径。令 $r \in \mathbb{N}$ 为 ψ中出现的最大局部性半径，并令 $\varphi^{\geq m}_\tau$:
$= \exists^{\geq m} x \varphi_\tau(x)$为一个 Hanf 句子，其中 τ 是某个 $r' \leq r$的 r'-型。令 τ_1，…，τ_k为所有有界度 d的 r-型组成的列表，其中，对于每个 $1 \leq i \leq k$，若$(\mathcal{N}^B_{r'}(b)\ b) \in \tau$，则$(B,\ b) \in \tau_i$。令 Π为将 m 划分为 k 个部分的所有划分构成的集合。令

$$\tilde{\varphi}^{\geq m}_\tau := \bigvee_{(m_1,\dots,m_k)\in\Pi} \bigwedge_{i=1}^{k} \exists^{\geq m_i} x \varphi_{\tau_i}(x).$$

CLAIM 7.8. $\varphi^{\geq m}_\tau$与 d等价于 $\tilde{\varphi}^{\geq m}_\tau$。

证明。假设 $A \in \mathcal{C}_d$满足 $\varphi^{\geq m}_\tau$，并假设 a_1、……、a_m是 m个互不相同的元素，且对每个 $1 \leq j \leq m$都有（$\mathcal{N}^A_{r'}$（a_j） a_j） $\in \tau$。令 $\tilde{\tau}_j$为使得（$\mathcal{N}^A_r$（a_j） a_j） $\in \tilde{\tau}_j$ 成立的 r-类型。根据 τ_1、……、τ_k的选取，可得存在指标i_1、……、i_m使得 $\tilde{\tau}_j = \tau_{i_j}$。对于 $i \in \{1,\dots,k\}$，令 $m_i = |\{j \in \{1,\dots,m\} \mid i_j = i\}|$。因此 $A \models \bigwedge_{i=1}^k \exists^{\geq m_i} x \varphi_{\tau_i}$（$x$），并且由于另外还有（$m_1$、……、$m_k$） $\in \Pi$，这意味着$A \models \tilde{\varphi}^{\geq m}_\tau$。

另一方面，令 $A \in \mathcal{C}_d$ 满足 $\tilde{\varphi}^{\geq m}_\tau$，并令$(m_1,\dots,m_k) \in \Pi$ 为 m 的一个划分，使得 $A \models \bigwedge_{i=1}^k \exists^{\geq m_i} x \varphi_{\tau_i}(x)$。对于每个 $1 \leq i \leq k$，令 $a^i_1,\dots,a^i_{m_i}$

为 m_i 个互不相同的元素，使得对每个 $1 \le j \le m_i$，$(\mathcal{N}_r^A(a_j^i)\ a_j^i) \in \tau_i$。由 $\tau_1, \dots,$ τ_k 的选取可知，对每一对 $1 \le i \le k, 1 \le j \le m_i$，$(\mathcal{N}_{r'}^A(a_j^i)\ a_j^i) \in \tau$。但由于 $m_1 + \cdots + m_k = m$，这意味着 $A \models \varphi_\tau^{\ge m}$。这证明了 $\varphi_\tau^{\ge m}$ 和 $\tilde{\varphi}_\tau^{\ge m}$ 是 d-等价的。□

令 ψ' 为如下公式：将每个满足以下条件的 Hanf句子 $\varphi_\tau^{\ge m}$ 替换为 $\tilde{\varphi}_\tau^{\ge m}$：$\tau$ 对某个 $r' < r$ 而言是一个 r'-型。通过使用断言 7.8 的简单归纳论证，我们得到 ψ 与 ψ' 在 d 意义下等价，因此 $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_\psi = \mathcal{P}_{\psi'}$。此外，由于对于每个 $\varphi_\tau^{\ge m}$，$\tilde{\varphi}_\tau^{\ge m}$ 都是 Hanf 句子的布尔组合，而布尔组合的布尔组合本身也是布尔组合，因此 ψ' 处于 Hanf 范式。此外，ψ' 中出现的每个 Hanf句子的局部性半径都为 r，这是由构造决定的。

由于任何布尔组合都可以转换为析取范式，我们可以假设 ψ' 是形如 ξ 的句子的析取式。

$$\xi = \bigwedge_{j=1}^{k} \exists^{\ge m_j} x \varphi_{\tau_j}(x) \wedge \bigwedge_{j=k+1}^{\ell} \neg \exists^{\ge m_j+1} x \varphi_{\tau_j}(x),$$

其中 $\ell \in \mathbb{N}_{\ge 1}$、$1 \le k \le \ell$、$m_i \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ 和 τ_i 对每个 $1 \le i \le \ell$都是一个 r-类型。我们还可以假设，析取 ψ' 中的每个句子都可由某个 $A \in \mathcal{C}_d$满足，因为任何没有有界度 d 模型的句子都可以从 ψ' 中移除。

令 $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_t$ 为我们按固定顺序排列的所有有界度 d 的 r-类型。令 $k_i := \max(\{m_j \mid 1 \le j \le k, \tau_j = \tilde{\tau}_i\} \cup \{0\})$，并对每个 $i \in \{1, \dots, t\}$，令 $\ell_i := \min(\{m_j \mid k+1 \le j \le \ell, \tau_j = \tilde{\tau}_i\} \cup \{\infty\})$。由于 ξ 至少有一个有界度模型，因此对每个 $i \in \{1, \dots, t\}$ 都有 $k_i \le \ell_i$。令 $\rho\colon \{1, \dots, t\} \to \mathfrak{I}$ 为由 $\rho(i) := [k_i, \ell_i]$ if $\ell_i < \infty$ and $\rho(i) := [k_i, \ell_i)$ otherwise 定义的邻域轮廓。于是，根据构造，我们得到 $\mathcal{P}_\rho = \mathcal{P}_\xi$。由于 ψ' 是若干公式的析取，而每个公式定义的性质都可以由某个邻域轮廓定义，因此我们得到，$\mathcal{P}_{\psi'}$ 必须是由某个邻域轮廓定义的性质的有限并。

另一方面，对于每个度为 d 的 r-邻域轮廓 ρ，τ_1，....., τ_t，按照固定顺序列出所有有界度为 d 的 r-类型以及公式

$$\varphi_\rho := \bigwedge_{\substack{i \in \{1,\dots,t\},\\ \rho(i) = [k_i, \ell_i]}} \left(\exists^{\ge k_i} x \varphi_{\tau_i}(x) \wedge \neg \exists^{\ge \ell_i + 1} x \varphi_{\tau_i}(x) \right) \wedge \bigwedge_{\substack{i \in \{1,\dots,t\},\\ \rho(i) = [k_i, \infty)}} \exists^{\ge k_i} x \varphi_{\tau_i}(x)$$

显然有 $\mathcal{P}_\rho = \mathcal{P}_{\varphi_\rho}$。因此，每个由邻域概况定义的有限并性质，都可以由公式 φ_ρ（有限并中所有 ρ 的公式）的析取来定义。□

7.2.1. 将一阶性质与GSF-局部性质联系起来。现在我们证明，源自某种特别简单形式的邻域概况并集的一阶性质是 GSF-局部的。

$$\mathfrak{I}_0 := \{[0, k] \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, \infty)\} \subset \mathfrak{I}.$$

我们将任何以 $\mathfrak{I}_0$ 为陪域的邻域轮廓 ρ 称为 0-剖面，因为所有较低的界 ds 类型的出现次数为 0。

Observation 2。令 ρ 为一个 0-剖面。若两个结构 $A, A' \in \mathcal{C}_{\sigma,d}$ 满足 $(\overline{v}_{d,r,\sigma}(A))_i \le (\overline{v}_{d,r,\sigma}(A'))_i$ 对于每个 $i \in \{1, \dots, n_{d,r,\sigma}\}$ 和 $A' \sim \rho$都成立，则 $A \sim \rho$。

特别是，某种 r类型的存在性无法通过 0-剖面来表达。

THEOREM 7.9. 每个由 0-剖面定义的无向图性质的有限并都是 GSF-局部。

证明。我们分两部分证明这一点（命题 7.10 和命题 7.11）。首先，我们论证每个由某个 0-剖面 $\rho\colon \{1,\dots,n_{d,r}\} \to \mathfrak{I}_0$ 定义的性质 $\mathcal{P}_\rho$ 都是 GSF-局部的。为此，值得注意的是，我们可以用一个禁用的广义子图来表示一个禁用的 r-类型 τ。对于 $(B,b) \in \tau$，所有不含邻域类型 τ 的顶点的图所构成的集合，就是所有不含 B 的图的集合，其中 $V(B)$ 中所有距离 b 小于 r 的顶点都标记为“完全标记”，而 $V(B)$ 中所有距离 b 为 r 的顶点都标记为“半完全标记”。由于形如 $\rho\colon \{1,\dots,n_{d,r,\sigma}\} \to \mathfrak{I}_0$ 的剖面可以表示某个邻域类型 τ 对某个固定的 $k \in \mathbb{N}$ 至多出现 k 次，因此我们需要禁用所有类型 τ 出现 $k+1$ 次的标记图。我们将在下面的命题中对此进行形式化。

CLAIM 7.10. 对于每个 r-邻域轮廓 $\rho\colon \{1,\dots,n_{d,r}\} \to \mathfrak{I}_0$，存在一个有限集合 $\mathcal{F}$，由标记图构成，使得 $\mathcal{P}_\rho$ 恰好是 $\mathcal{F}$-无图的性质。

证明。假设 τ 是一种 r 类型且 $k \in \mathbb{N}_{>0}$。那么，如果标记图 F 是 τ 的 k 实现，则称其具有以下性质。

1. 在 F 中存在 k 个互异顶点 v_1、...、v_k，使得对于每个 $i = 1$、...、k，$(\mathcal{N}_r^F(v_i)\ v_i) \in \tau$。 2. F 中的每个顶点 v 到至少一个顶点 v_i 的距离小于或等于 r。 3. F 中与至少一个 v_i 的距离小于 r 的每个顶点 v 都标记为“完全标记”。 4. F 中与每个 v_i 的距离大于或等于 r 的每个顶点 v 都标记为“半完全标记”。

我们用 $S^k(\tau)$ 表示 τ 的所有 k-实现所构成的集合。

现在我们可以将禁用子图的集合 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F} := \bigcup_{k\in\mathbb{N},1\le i\le n_{d,r,\sigma}:\rho(i)=[0,k]} S^{k+1}(\tau^i_{d,r}).$$

令 $\mathcal{P}$ 表示所有 $\mathcal{F}$-自由图所具有的性质。我们首先证明，性质 $\mathcal{P}$ 包含于 $\mathcal{P}_\rho$。为导出矛盾，假设 $G \in \mathcal{C}_d$ 是 $\mathcal{F}$-自由的，但不包含于 $\mathcal{P}_\rho$。由于 G 不包含于 $\mathcal{P}_\rho$，必存在一个指标 $i \in \{1,\dots,n_{d,r}\}$，使得 $(\overline{\nu}_{d,r}(G))_i \notin \rho(i)$。由于 $\rho(i) \in \mathfrak{I}_0$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\rho(i) = [0,k]$，因而 $(\overline{\nu}_{d,r}(G))_i > k$。因此，必存在 $k+1$ 个顶点 v_1、.....、v_{k+1}，属于 G，使得 $(\mathcal{N}_r^G(v_i)\ v_i) \in \tau^i_{d,r}$。我们将标记图 F 定义为由 G 中 v_1、.....、v_{k+1} 的 r-邻域导出的子图，即 $G[\cup_{1\le i\le k+1} N_r^G(v_i)]$,; 其中，与 v_i 中至少一个顶点的距离小于 k 的每个顶点均标记为 “ 完全标记 ”，其余每个顶点均标记为 “ 半完全标记 ”。那么，根据定义， F 是 $\tau^i_{d,r}$ 的一个 $(k+1)$-实现，因此 $F \in \mathcal{F}$。现在我们论证 F 可以嵌入 G。由于 F 是 G 的一个诱导子图，恒等映射给出了一个自然嵌入 $f\colon F \to G$。设 v 是 F 中任意一个标记为“完全标记”的顶点。根据 F 的构造，存在 $i \in \{1,\dots,k+1\}$，使得$f(v)$ 在 G 中与 v_i 的距离小于 r。但于是 $N_1^G(f(v))$ 是 $N_r^G(v_i)$ 的子集。由于不带标记的 F 是由 $\cup_{1\le i\le k+1} N_r^G(v_i)$ 在 G 中导出的子图，这意味着 $f(N_1^F(v)) = N_1^G(f(v))$。此外，假设 v 是F 中一个标记为“半完全标记”的顶点。那么， $f(N_1^F(v)) = N_1^G(f(v)) \cap f(V(F))$ 成立，因为不带标记的 F 是 G 的一个诱导子图。根据定义 7.1，这证明 G 不是 F-自由的。这与我们的假设矛盾： G 是 $\mathcal{F}$-自由的，且 $F \in \mathcal{F}$。

同样地，我们可以证明 $\mathcal{P}_\rho \subseteq \mathcal{P}$： 假设 $G \in \mathcal{C}_d$ 属于 $\mathcal{P}_\rho$ 但不是 $\mathcal{F}$-自由，并证明将任意 $\mathcal{F}$ 的图嵌入 G 会产生一定数量的顶点

与包含于 $\mathcal{P}_\rho$ 中相矛盾的某种类型的.....

接下来，我们证明，通过排除有限多个标记图定义的类对于有限并是封闭的。

Claim 7.11. 设 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$ 是两个有限的标记图集合。对于 $i \in \{1,2\}$，令 $\mathcal{P}_i$ 表示 $\mathcal{F}_i$-自由图的性质。则存在一个广义子图集合 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ 表示 $\mathcal{F}$-自由图的性质。

证明。我们称标记图 F 是标记图 F_1、F_2 的一个（不一定不相交的）并集，如果

1. 对于每个 $i \in \{1,2\}$，存在一个将 F_i 嵌入图 F（去除其标记）的嵌入 f_i，如定义 7.1 所述。2. 对于 F 中的每个顶点 v，存在 $i \in \{1,2\}$ 以及 F_i 中的一个顶点 w，使得 $f_i(w) = v$。3. 如果存在 $i \in \{1,2\}$ 以及 F_i 中的一个“完全标记”顶点 w，使得 $f_i(w) = v$，则 F 中的每个顶点 v 都标记为“完全标记”。4. 如果存在 $i \in \{1,2\}$ 以及 F_i 中的一个“半完全标记”顶点 w，使得对于每个 $i \in \{1,2\}$ 和每个“完全标记”顶点 u，$f_i(w) = v$ 且 $f_i(u) \neq v$，则 F 中的每个顶点 v 都标记为“半完全标记”。5. 如果对于每个 $i \in \{1,2\}$ 和每个“完全标记”或“半完全标记”顶点 u，$f_i(u) \neq v$，则 F 中的每个顶点 v 都标记为“部分标记”。

我们将 $S(F_1, F_2)$ 定义为 F_1, F_2 的所有可能（不一定互不相交）并集的集合。现在我们可以将集合 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F} := \bigcup_{F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2} S(F_1, F_2).$$

设 $\mathcal{P}$ 为所有 $\mathcal{F}$-自由图的性质。现在我们证明 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$。反设 G 是 $\mathcal{F}$-自由的，但 G 既不在 $\mathcal{P}_1$ 中，也不在 $\mathcal{P}_2$中。那么对于每个$i \in \{1,2\}$，存在一个图 $F_i \in \mathcal{F}_i$，使得 G 不是 F_i-自由的。容易看出，存在一个由 F_1 和 F_2 组成的并集 $F_\cup$，使得 G 不是 $F_\cup$-自由的，这与G 是 $\mathcal{F}$-自由的相矛盾。

反过来，为了证明 $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}$，如果 G 对某个 $i \in \{1,2\}$ 是 $\mathcal{F}_i$ 自由的，那么根据 $\mathcal{F}$ 的构造，G 必须是 $\mathcal{F}$ 自由的。

结合上述两个断言即可证明定理 7.9。

进一步讨论一阶逻辑与GSF-局部性之间的关系。首先让我们再次强调，既不能说每个一阶逻辑可定义性质都是GSF-局部的，也不能说每个 GSF-局部性质都是一阶可定义的。

Example 3。包含三角形的有界度图这一性质是一阶可定义的，但不是 GSF-局部的。

事实上，某些邻域类型的顶点数固定这一事实可以用一阶逻辑来表达，而一般而言，无法通过禁止广义子图来表达这一事实。如果一个公式具有 0-剖面（因而不要求任何类型的存在），那么该公式定义的性质是 GSF-局部的，如定理 7.9 所示。

Example 4。所有顶点数为偶数的有界度图构成的类是 GSF-局部的，但不是一阶可定义的。

值得指出的是，定理 7.9 与引理 7.7 结合起来证明了，每个由 0-轮廓可定义的性质的有限并，既是一阶可定义的，也是 GSF-局部的。

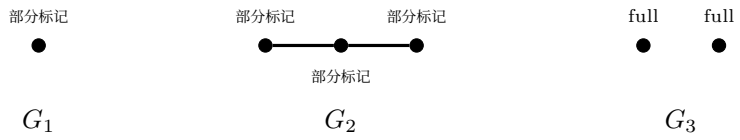


图 8：示例 5 的标记图。

因此，自然会问：一阶可定义性质与 GSF-局部性质的交集，是否恰好是由 0-轮廓可定义的性质的有限并所构成的集合。然而，事实并非如此。下面的例子表明，有些性质既是一阶可定义的，也是 GSF-局部的，却无法用 0-轮廓表示。

EXAMPLE 5。我们令 $d \geq 2$，并令 $B_1 := (\{v\}, \{\})$、$B_2 = (\{v, w\}, \{\{v, w\}\})$ 为两个图。我们进一步令 τ_1、τ_2 为度为 d 的 1-型，使得 $(B_1, v) \in \tau_1$ 且 $(B_2, v) \in \tau_2$。考虑由以下一阶逻辑公式定义的性质 $\mathcal{P}$

$$\varphi := \neg\exists x(x = x) \vee \exists^{=1} x\big(\varphi_{\tau_1}(x) \wedge \forall y(x \neq y \to \varphi_{\tau_2}(y))\big).$$

$\mathcal{P}$ 除了空图之外，还包含任意数量的互不相交的边与一个孤立顶点的并集。为了定义一列禁子图，我们令 G_1、G_2、G_3 为图 8 中的标记图。令 $\mathcal{F}_{\text{even}} := \{G_1\}$、$\mathcal{F}_{\text{odd}} := \{G_2, G_3\}$，并令 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{\text{even}}$ 当且仅当 i 为偶数，而 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{\text{odd}}$ 当且仅当 i 为奇数。注意，任何顶点数大于 1 且顶点数为奇数的 $\mathcal{F}_{\text{odd}}$-自由图，都必须包含一个邻域类型为 τ_1 的顶点；而 $\mathcal{F}_{\text{even}}$-自由图的集合仅包含空图。因此，$\mathcal{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$-局部的。现在反设，对于 0-剖面 ρ_i，有 $\mathcal{P} = \bigcup_{1\leq i\leq k} \mathcal{P}_{\rho_i}$。令 G_m 为由 m 条互不相交的边和一个孤立顶点组成的图，令 H_m 为由 m 条互不相交的边组成的图。由于 $G_m \in \mathcal{P}$，存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $G_m \sim \rho_i$。根据 G_m 和 H_m 的选取，对于每个 $j \in \{1, \ldots, n_{d,r}\}$，我们有 $0 \leq (\overline{v}_{d,r}(H_m))_j \leq (\overline{v}_{d,r}(G_m))_j \in \rho_i(j)$。此外，由于 $\rho_i(j) \in \mathfrak{I}_0$，这意味着 $(\overline{v}_{d,r}(H_m))_j \in \rho_i(j)$。但这样一来，$H_m \sim \rho_i$，而这与 $H_m \notin \mathcal{P}$ 矛盾。因此，$\mathcal{P}$ 不能表示为有限个 0-剖面的并集。

图 9 示意性地概述了本文讨论的所有性质类别及其相互关系。

7.3. 证明 GSF-局部的不可测试性质的存在性。 在本节中，我们证明定理 7.5。我们将证明性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 可表示为 0-轮廓的并集，其中 0-轮廓来自第 4 节。随后我们将证明，从 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 到 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的局部归约（见第 5.2 节）保持了通过 0-轮廓进行表达的性质，因此根据定理 7。9 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是 GSF-局部的。

设 σ 为签名，$d \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 为第 3 节中有界度 d σ-结构的性质。

7.3.1. 通过邻域轮廓刻画关系结构性质。我们在本节中的目标是证明，关系结构的性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 可以表示为由半径为 2 的 0-轮廓定义的性质的有限并集。

对于$\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$中的所有 σ-结构（不包括 $A_\emptyset$），关键在于允许它们恰好包含一个根元素。因此，描述 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 的邻域轮廓

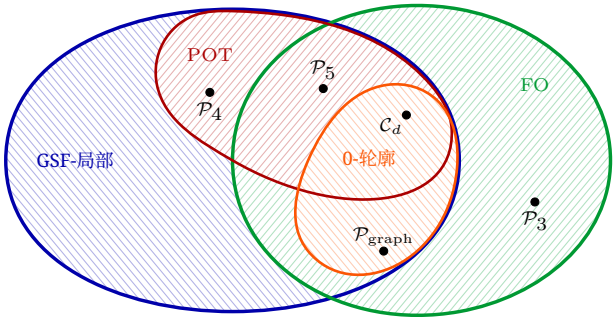


图 9：性质类别概览，其中 $\mathcal{P}_i$ 指的是示例 i 中的性质，$\mathcal{C}_d$ 指的是所有有界度图的性质，d 而 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是第 5.2 节中定义的性质。

必须限制根元素的 2-型出现次数。但由于在 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}} \setminus \{A_\emptyset\}$ 中，不同结构中的根元素可能具有不同的 2-型，我们根据根元素的 2-型将 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}} \setminus \{A_\emptyset\}$ 划分为 $\mathcal{P}_1$、……、$\mathcal{P}_m$ 等部分。注意，部分的数量 m 是常数，因为总共至多有 $n_{d,2,\sigma}$ 2 个 2-型。对于这些部分中的每一部分，我们随后定义一个邻域轮廓 ρ_k，使得$\mathcal{P}_k \cup \{A_\emptyset\} = \mathcal{P}_{\rho_k}$。这里需要指出的是，在 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$ 中，除一个结构外，所有结构的根实际上都具有相同的 2-型。因此，该划分仅包含两部分，其中一部分只包含一个结构。现在，我们正式定义这些部分及其对应的邻域轮廓。

不失一般性，假设度为 d 的 2-型 $\tau^1_{d,2,\sigma}, \dots, \tau^{n_d,2,d\ 2\ \sigma^\sigma}_{,,}$ 按如下方式排序：对于 $(B,b) \in \tau^k_{d,2,\sigma}$，当且仅当存在某个 $m \le n_{d,2,\sigma}$ 使得 $B \models \varphi_{\text{root}}(b)$ 时，$k \in \{1,\dots,m\}$。对于 $k \in \{1,\dots,m\}$，令

$$\mathcal{P}_k := \{A \in \mathcal{P}_{\mathsf{Z}} \setminus \{A_\emptyset\} \mid \text{there is } a \in U(A) \text{ such that } (\mathcal{N}_2^A(a), a) \in \tau^k_{d,2,\sigma}\}.$$

由于根据引理 3.5，每个 $A \in \mathcal{P}_{\mathsf{Z}} \setminus \{A_\emptyset\}$ 必须恰好包含一个根，因此我们得到

$$\mathcal{P}_{\mathsf{Z}} = \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_k \cup \{A_\emptyset\}$$

且该并集是不相交的。此外，对于 $k \in \{1,\dots,m\}$，令 $I_k \subseteq \{1,\dots,n_{d,2,\sigma}\}$ 为满足以下条件的索引集合：存在结构 $A \in \mathcal{P}_k$ 和 $a \in U(A)$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a)\ a) \in \tau^j_{d,2,\sigma}$。对于每个 $k \in \{1,\dots,m\}$，我们将 2-邻域轮廓 ρ_k：$\{1,\dots,n_{d,2,\sigma}\} \to \mathfrak{I}_0$ 定义如下：

$$\rho_k(i) := \begin{cases} [0,1] & \text{if } i = k, \\ [0,\infty) & \text{if } i \in I_k \setminus \{k\}, \\ [0,0] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

要证明这些半径为 2 的 0-轮廓定义了性质 $\mathcal{P}_{\mathsf{Z}}$，关键观察是，对于 $\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 中某个结构的每个元素 a，一阶逻辑公式 φ_{Z} 只涉及与 a 距离至多为 2 的元素（即 φ_{Z} 是 2-局部的）。因此，

结构的 2-直方图向量已经能够捕捉该结构是否满足 φ z。我们现在将正式证明这一点。

LEMMA 7.12. 成立：$\mathcal{P}_{\mathsf{z}} = \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$。

证明。我们首先证明 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}} \subseteq \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$。首先注意到显然 $A_\emptyset \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$。现在假设 $A \in \mathcal{P}_{\mathsf{z}} \setminus \{A_\emptyset\}$。这意味着存在 $k \in \{1,\dots,m\}$使得 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$。根据构造，对于每个 $a \in A$，存在 $i \in I_k$ 使得 $(\mathcal{N}_2^A(a),\ a) \in \tau^i_{d,2,\sigma_\circ}$。此外，由于 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$ 且 $U(A) \neq \emptyset$，根据引理 3.5，我们有 $A \models \exists^{=1} x \varphi_{\text{root}}(x)$，并且至多存在一个 $a \in U(A)$ 使得 $(\mathcal{N}_2^A(a),\ a) \in \tau^k_{d,2,\sigma_\circ}$。因此 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$。

为了证明 $\bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \subseteq \mathcal{P}_{\mathsf{z}}$，我们证明 $\bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$ 中的每个结构都必须满足 φ z。我们将证明每个 $A \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$ 都满足 $\varphi_{\text{recursion}}$，并将 A 满足 $\varphi_{\text{tree}} \wedge \varphi_{\text{rotationMap}} \wedge \varphi_{\text{base}}$ 的证明参见附录B中的断言B.1、断言 B.2和断言B.3。注意，根据引理 3.10，$A_\emptyset \models \varphi_{\mathsf{z}}$，因此在下文中我们排除$A_\emptyset$。

CLAIM 7.13. 每个结构 $A \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$ 都满足 $\varphi_{\text{recursion}}$。

证明。令 $A \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$。那么存在一个 $k \in \{1,\dots,m\}$ 使得 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$。根据定义，$\varphi_{\text{recursion}} := \forall x \forall z \big(\varphi(x,z) \vee \psi(x,z)\big)$（见第 3 节），其中

$$\varphi(x,z) := \neg\exists y F(x,y) \wedge \neg\exists y F(z,y) \text{ and}$$

$$\psi(x,z) := \bigwedge_{\substack{k'_1,k'_2\in[D]^2\\ \ell'_1,\ell'_2\in[D]^2}} \Big(\exists y\big[E_{k'_1,\ell'_1}(x,y) \wedge E_{k'_2,\ell'_2}(y,z)\big] \to \bigwedge_{\substack{i,j,i',j'\in[D],k,\ell\in([D]^2)^2\\ \text{ROT}_H(k,i)=((k'_1,k'_2),i')\\ \text{ROT}_H((\ell'_2,\ell'_1),j)=(\ell,j')}} \exists x'\exists z'\big[F_k(x,x') \wedge F_\ell(z,z') \wedge E_{(i,j),(j',i')}(x',z')\big]\Big).$$

设 $a,c \in U(A)$。首先假设存在 $b \in U(A)$，使得 $(a,b) \in F(A)$。因此$A \not\models \varphi(a,c)$。由于 $\varphi_{\text{recursion}} := \forall x\forall z\big(\varphi(x,z) \vee \psi(x,z)\big)$，我们旨在证明 $A \models \psi(a,c)$。根据 ρ_k 的构造，存在一个 $i \in I_k$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a),\ a) \in \tau^i_{d,2,\sigma_\circ}$。因此存在一个结构 $\tilde{A} \models \varphi_{\mathsf{z}}$ 和 $\tilde{a} \in U(\tilde{A})$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a),\ a) \cong (\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a}),\ \tilde{a})$。令 f 为从 $(\mathcal{N}_2^A(a),\ a)$ 到 $(\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a}),\ \tilde{a})$ 的一个同构。由于 $b \in N_2^A(a)$，我们得到 $f(b)$ 有定义。由于 f是一个将 a 映射到 $\tilde{a}$上的同构，我们有：$(a,b) \in F(A)$ 蕴含 $(\tilde{a}, f(b)) \in F(A)$。因此，对于每个 $\tilde{c} \in U(A)$，都有 $A \not\models \varphi(\tilde{a},\tilde{c})$。但由于 $A \models \varphi_{\text{recursion}}$，且 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$，这表明对于每个 $\tilde{c} \in U(A)$，都有 $A \models \psi(\tilde{a},\tilde{c})$。

令 $k'_1,k'_2 \in [D]^2$ 和 $\ell'_1,\ell'_2 \in [D]^2$ 为指标，使得存在 $b' \in U(A)$，其中 $(a,b') \in E_{k'_1,\ell'_1}(A)$ 且 $(b',c) \in E_{k'_2,\ell'_2}(A)$。由于 $b',c \in N_2^A(a)$，根据假设可得 $f(b')$ 和 $f(c)$ 有定义。此外，$(a,b') \in E_{k'_1,\ell'_1}(A)$ 且 $(b',c) \in E_{k'_2,\ell'_2}(A)$，这意味着 $(\tilde{a},f(b')) \in E_{k'_1,\ell'_1}(A)$ 且 $(f(b'),f(c)) \in E_{k'_2,\ell'_2}(A)$，因为 f 是一个将 a 映射到 $\tilde{a}$ 上的同构。我们在上一段中证明了：$A \models \psi(\tilde{a},f(c))$。因此可以得出结论，对于所有满足 $\text{ROT}_H(k,i) = ((k'_1,k'_2),i')$ 且 $\text{ROT}_H((\ell'_2,\ell'_1),j) = (\ell,j')$ 的指标 $i,j,i',j' \in [D], k,\ell \in ([D]^2)^2$，存在元素 $\tilde{a}',\tilde{c}' \in U(A)$，使得 $(\tilde{a},\tilde{a}') \in F_k(A)$，$(f(c),\tilde{c}') \in F_\ell(A)$，

且 $(\tilde{a}', \tilde{c}') \in E_{(i,j),\ (j',i')}(\tilde{A})$。由于 $\tilde{a}', \tilde{c}' \in N_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})$，我们可得 $a' := f^{-1}(\tilde{a}')$ 和 $c' := f^{-1}(\tilde{c}')$ 有定义。此外，我们还可得 $(a, a') \in F_k(A)$、$(c, c') \in F_\ell(A)$ 且 $(a', c') \in E_{(i,j),\ (j',i')}(A)$。这证明了 $A \models \psi(a, c)$。

在存在 $b \in U(A)$ 且 $(c, b) \in F(A)$ 的情形下，通过考虑存在 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$ 和 $\tilde{c} \in U(A)$ 使得 $\tilde{\ }(\mathcal{N}_2^A(a)\ c) \cong (\mathcal{N}_2^A(\tilde{c})\ \tilde{c})$（由 ρ_k 的构造可知），我们可以类似地证明 $A \models \psi(a, c)$。最后，如果不存在 $b \in U(A)$ 使得 $(a, b) \in F(A)$ 或 $(c, b) \in F(A)$，那么 $A \models \varphi(a, c)$。由于这涵盖了每种情形，我们得到 $A \models \varphi_{\text{recursion}}$。□

假设 $A \in \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\rho_k}$。正如断言B.1、B.2、B.3和7.13中所证明的，这意味着 $A \models \varphi_{\text{tree}}$、$A \models \varphi_{\text{rotationMap}}$、$A \models \varphi_{\text{base}}$ 并且 $A \models \varphi_{\text{recursion}}$。由于 φ_{z} 是这些公式的合取，我们得到 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$，因而 $A \in \mathcal{P}_{\mathsf{z}}$。□

7.3.2.图性质是GSF-局部的。令 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 为第 5.2 节中定义的图性质，并令 $f : \mathcal{C}_{\sigma,\ d} \to \mathcal{C}_3$ 为从 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$到$\mathcal{P}_{\text{graph}}$的局部归约。现在我们利用这一局部归约以及通过 0-轮廓对 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$ 的可表达性，来证明 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是 GSF-局部的。

LEMMA 7.14. 图性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是GSF-局部。

证明。为此，我们将证明 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 等于由 0-剖面定义的有限并集，然后使用定理 7.9 证明 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是 GSF- 局部的。我们以与关系结构情形非常相似的方式定义 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的 0-剖面，然后使用引理7.12中所示的由0-剖面给出的$\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$ 的描述。为此，令 $\ell' := 24\ell + 18 + d$，并假设 ℓ'-类型 $\tau_{d,\ell'}^1$、$\tau_{d,\ell'}^2$、……、$\tau_{d,\ell'}^{n_d}$ 按如下方式排序：对于每个 $k \in \{1, \dots, m\}$，$(\mathcal{N}^f(B)\ \ell'(u_b, 1)\ u_b, 1) \in \tau_{d,\ell'}^k$，并且 $(B, b) \in \tau_{d,2,\sigma}^k$，其中 m 是 $\mathcal{P}_{\mathsf{z}}$在第 7.3.1小节中定义的划分的部分数。$\hat{}$ 对于 $k \in \{1, \dots, m\}$，令 I_k 为满足存在 $A \in \mathcal{P}_k$且存在$v \in V(f(A))$ 的指标集合，其中 $(\mathcal{N}^f(A)\ell'(v)\ v) \in \tau_{d,\ell'}^i$。令 $\hat{}\rho_k$: $\{1, \dots, n_{d,\ell'}\} \to \mathfrak{I}_0$ 定义为

$$\hat{\rho}_k(i) := \begin{cases} [0,1] & \text{if } i = k, \\ [0,\infty) & \text{if } i \in \hat{I}_k \setminus \{k\}, \\ [0,0] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

CLAIM 7.15. 成立的是 $\mathcal{P}_{\text{graph}} = \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$。

证明。首先我们证明 $\mathcal{P}_{\text{graph}} \subseteq \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$。假设 $G \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 并令 $A \in \mathcal{P}_{\mathsf{z}}$ 为一个结构，使得 $G = f(A)$。如果 $A = A_\emptyset$ 则显然有 $G \in \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$。因此 $\hat{}$ 假设 $A \neq A_\emptyset$。然后对于某个 $k \in \{1, \dots, m\}$，有 $A \in \mathcal{P}_k$。根据 I_k 的构造，我们知道，对于每个 $v \in V(G)$，都有 $(\mathcal{N}_{\ell'}^G(v)\ v) \in \tau_{d,2,\sigma}^i$，对于某个 $i \in \hat{}I_k$。此外，由于 $A \in \mathcal{P}_k$，至多存在一个 $a \in U(A)$ 满足 $(\mathcal{N}_2^A(a)\ a) \in \tau_{d,2,\sigma}^k$。这直接意味着至多存在一个顶点 $v \in V(G)$ 满足$(\mathcal{N}_{\ell'}^G(v)\ v) \in \tau_{d,\ell'}^k$，从而 $G \in \mathcal{P}_{\hat{\rho}}$。

现在我们证明 $\bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k} \subseteq \mathcal{P}_{\text{graph}}$。设 $G \in \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$，$k \in \{1, \dots, m\}$，$G \in \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$。并令 G 为一个满足 的指标。进一步假设 不是空图，因为 $f(A_\emptyset) \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是空图。

由于对于每个使得 $\hat{\rho}(i) \neq [0,0]$ 的 i，都存在一个图 $G' \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 和 $v \in V(G')$，使得 $(\mathcal{N}_{\ell'}^{G'}(v'), v') \in \tau_{d,\ell'}^{i}$，因此我们得到，$G$ 中每个顶点的 ℓ'-邻域都出现在某个图 $G' \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 中。根据 ℓ' 的选择，我们得到，每个顶点 $v \in V(G)$ 要么包含在一个长度为 d 的环中，且是某个 k-箭头、k-环或非箭头的端点，v 要么是一个 k-箭头、k-环或非箭头的内部顶点。因此，我们通过将任意长度为 d 的环 C 替换为一个元素 a_C，并在存在 C 上的顶点 u 和 C' 上的顶点 v 使得 $u \xrightarrow{k} v$ 属于 G 时，将元组 $(a_C, a_{C'})$ 添加到关系 $R_k(A)$，从而得到一个满足 $f(A) \cong G$ 的 σ-结构 A。令 g 为从 $f(A)$ 到 G 的一个同构。

现在我们论证

$$A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$$

。首先假设存在两个元素 $a, b \in U(A)$，满足 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \in \tau_{d,2,\sigma}^{k}$ 和 $(\mathcal{N}_2^A(b), b) \in \tau_{d,2,\sigma}^{k}$。根据定义，我们得到 $(\mathcal{N}^{f(A)}_{\ell'}(u_a,1), u_a,1) \in \tau_{d,\ell'}^{k}$ 和 $(\mathcal{N}^{f(A)}_{\ell'}(u_b,1), u_b,1) \in \tau_{d,\ell'}^{k}$。由于 g 是一个同构，g 在 $N_{\ell'}^{f(A)}(u_a,1)$ 上的限制必定是从 $\mathcal{N}^{f(A)}_{\ell'}(u_a,1)$ 到 $\mathcal{N}_{\ell'}^{G}(g(u_a,1))$ 的同构，因此 $(\mathcal{N}_{\ell'}^{G}(g(u_a,1)), g(u_a,1)) \cong (\mathcal{N}^{f(A)}_{\ell'}(u_a,1), u_a,1) \in \tau_{d,\ell'}^{k}$。但是，对于 $g(u_b,1)$ 的 ℓ'-球，同样的结论也成立，因此这与假设 $G \in \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$ 相矛盾，因为 $\hat{\rho}_k(k) = [0,1]$。进一步假设存在一个 $a \in U(A)$，使得对于某个 $i \notin I_k$，有 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \in \tau_{d,2,\sigma}^{i}$。由于 $G \in \mathcal{P}_{\hat{\rho}_k}$，我们得到 $(\mathcal{N}_{\ell'}^{G}(g(u_a,1)), g(u_a,1)) \in \tau_{d,\ell'}^{j}$，其中某个 $j \in \hat{I}_k$。但是，根据 $\hat{\rho}_k$ 的构造，必定存在 $G' \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$，以及一个顶点 $v \in V(G')$，使得 $(\mathcal{N}_{\ell'}^{G'}(v), v) \in \tau_{d,\ell'}^{j}$。此外，由于 $\ell' > d$，顶点 v 必须包含在长度为 d 的环中。根据 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 的构造，存在一个结构 $A' \in \mathcal{P}_{\mathbf{z}}$，使得 $f(A') = G'$。由于 v 包含在长度为 d 的环中，v 必须是对应于某个元素 $a' \in U(A')$ 的元素顶点。由于我们选择 ℓ' 的方式使得 $f(\mathcal{N}_2^{A'}(a')) \subseteq \mathcal{N}_{\ell'}^{G'}(v)$，根据 i 和 j 的选取，我们得到 $(\mathcal{N}_2^{A'}(a'), a') \in \tau_{d,2,\sigma}^{i}$。因此 $A' \notin \mathcal{P}_{\rho_k}$。但这与引理 7.12 矛盾。

因此我们证明了 $A \in P_{\rho_k}$。由引理 7.12 $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{z}}$ 以及构造可知，$G \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$。□

由于根据断言 7.15，我们可以将 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 表示为由 0-剖面分别定义的性质的有限并，定理 7.9 蕴含 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 是 GSF-局部性质。□

7.3.3. 将所有内容结合起来。现在我们证明定理 7.5。

定理 7.5 的证明。结合定理 4.4、引理 5.3 和引理 5.4，我们得到图性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 不可测试。引理 7.14 表明，$\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 也是 GSF-局部性质。因此，存在一个不可测试的有界度图的 GSF-局部性质。此外，由于具有 POT 蕴含可测试，这就证明了存在一个不具有 POT 的 GSF-局部性质。由定理 7.4 可知，这意味着并非所有 GSF-局部性质都是非传播的。□

7.4. 度数至多为 1 和 2 的图的 GSF-局部性质是非传播的。在本节中，我们证明，定理 7.5 中那个具有传播性的 GSF-局部性质的例子所涉及的度数 3 是最优的，换言之，所有度数至多为 1 和 2 的图的 GSF-局部性质都是非传播的。我们注意到，Ito 等人 [27] 在其论文的附录中声称，度数至多为 2 的每个 GSF-局部序列都是非传播的。然而，他们的证明存在一个微妙的问题，因为他们只考虑了连通禁用广义子图（在 [27] 中称为禁用构型）。接下来，我们将解决这个问题。事实上，从连通禁用广义子图推广到任意禁用广义子图并非易事，需要一份复杂的证明，我们将在本节中给出。

我们首先注意到，即使对于度数 1 的有界度图，也并非每个序列

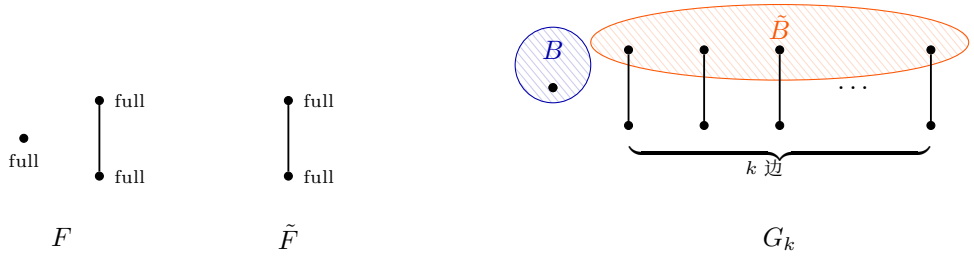


图 10：例 6 中的标记图 F 和 F 以及图 G_k 。

标记图 $\overline{\mathcal{F}}$ 的非传播性如下例所示。 [22] 中给出了一个类似的例子。

Example 6。令 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_1$ 为 $\overline{\mathcal{F}}$-自由图的性质，其中 F 是图 10 所示的标记图，$\mathcal{F}_n = \{F\}$ 且 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$。令 G_k 为由 k 条边和一个孤立顶点组成的图。于是，包含 G_k 的那个孤立顶点的集合 B 覆盖了 F 的所有嵌入（见图 10）。但是，要使其成为 G_k F-自由图，唯一的方法是移除 G_k的全部 k 条边。因此， G_k 与成为F-自由图相差 $1/2$，这意味着 $\mathcal{P}$ 对于 $\overline{\mathcal{F}}$是传播的。

然而，性质 $\mathcal{P}$ 是非传播的，正如我们在定理 7.16 的证明中所示。事实上，考虑标记图的另一序列 $\overline{\mathcal{F}}$ =$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ~ ~ 其中，当 n为偶数时 $\mathcal{F}_n = \{F\}$，当 n为奇数时 $\mathcal{F}_n = \{F, F\}$。显然，在 G_{2k+1}中，覆盖 $\mathcal{F}_{2k+1}$ 的任意集合 B 都必须包含每条边的一个端点。因此，所需的修改次数至多为 $|B|$，这表明 $\mathcal{P}$ 是非传播的。

事实上，如例 6 所示，在序列 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中加入某些冗余的标记图，以控制覆盖 $\mathcal{F}_n$ 的集合的行为，这种做法对于度数 1 和度数 2 两种情形都普遍适用，也将作为我们证明下述定理的策略。更确切地说，对于有界度 2 的图的性质 $\mathcal{P}$、满足 $\mathcal{P}$ 为 $\overline{\mathcal{F}}$-局部的标记图序列 $\overline{\mathcal{F}}$，以及对 $\overline{\mathcal{F}}$ 中任意图的大小的上界 k，我们按以下方式向 $\overline{\mathcal{F}}$ 中加入禁用广义子图。若 $\mathcal{P}$ 中不存在一个以 n 个顶点为基础的图，其中包含一组彼此不同的小连通分量（即顶点数至多为 k 的连通分量），且其中每个连通分量的出现频率至少为 k，则向 $\mathcal{F}_n$ 中加入一个广义子图，恰好禁用这组连通分量的组合。此外，若 $\mathcal{P}$ 中不存在一个以 n 个顶点为基础的图，其中包含一组彼此不同的小连通分量（每个的出现频率至少为 k ）以及一个大连通分量（即顶点数至少为 $k+1$ 的连通分量），则向 $\mathcal{F}_n$ 中加入一个广义子图，恰好禁用这组连通分量的组合。现在，对于一个不属于 $\mathcal{P}$ 的图 G ，以及一个覆盖 G 中所有禁用广义子图的集合 B ，我们考察 G 中不含来自 B 的顶点的部分里出现了哪些类型的连通分量。若 G 足够大且 B 足够小，我们可以观察到，某些类型的连通分量必定以很高的出现频率出现，或者 G 中未被 B 覆盖的部分必定存在一个大连通分量。按照前文所述加入冗余子图后，这就意味着 $\mathcal{P}$ 中必定存在一个图 G' ，它在 G 中未被 B 覆盖的部分的一个大子集上，与 G 具有相同的结构。因此，我们可以修改 G ，得到一个满足性质 $\mathcal{P}$ 的图（通过将 G 改为 G'），而不会使其偏离 B 太多。至多为 2 的有界度这一限制在此论证中至关重要，因为它使我们能够对大型连通分量进行必要的控制。

THEOREM 7.16. 任意 GSF-局部性质 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_d$ 对于 $d \leq 2$ 是非传播的。

证明。我们只考虑 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_2$ 这一情形。我们可以将任意性质 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_1$ 视为 $\mathcal{C}_2$ 中的一个性质，方法是禁止任何顶点的度为 2；也就是说，在定义 $\mathcal{P}$ 的任意序列中，将一条长度为 2 的路径加入每个禁用标记图集合，其中两个度数 1 的顶点均标记为“部分标记”，度数 2 的顶点标记为“完全标记”，并在下述论证中调整常数，以考虑度数为 1 而非 2 的情况。

设 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 和 $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列标记图，使得 $\mathcal{P}$是$\overline{\mathcal{F}}$-局部的。根据定义，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得出现在 $\overline{\mathcal{F}}$ 中的每个标记图至多包含 k 个顶点。

对于两个集合 $I \subseteq [k] := \{0, \dots, k-1\}, J \subseteq \{3, \dots, k\}$，使得 $I \cup J \neq \emptyset$，令 $F_{I,J}$ 为标记图，它是不交并，由对每个 $i \in I$ 都有 k 条长度为 i 的路径，以及对每个 $j \in J$ 都有 k 个长度为 j 的环组成，其中每个顶点都标记为“完全标记”。请注意，长度为 i 的路径包含 $i+1$ 个顶点，而长度为 j 的环包含j 个顶点。注意，$F_{I,J}$-自由的图不能同时包含对每个 $i \in I$ 都有的 k 个长度为 i 的连通分量（它们是路径），以及对每个 $j \in J$ 都有的 k 个长度为 j 的连通分量（它们是环）。我们将长度为 $k+1$ 的路径称为 F 大型$_{\emptyset,\emptyset}$，其中两个度数为 1 的顶点都标记为“部分标记”，而其他每个顶点都标记为“完全标记”。我们进一步将 $F_{I,J}$ 与 F 大型$_{\emptyset,\emptyset}$ 的不交并称为 F 大型$_{I,J}$。

对于 $I \subseteq [k]$、$J \subseteq \{3, \dots, k\}$，其中 $I \cup J \neq \emptyset$。请注意，不包含 $,$-free的图不能同时包含 k 个长度为 i 的路径连通分量（对于每个 $i \in I$），以及 k 个长度为 j 的环连通分量（对于每个 $j \in J$）和一个至少包含 $k+1$ 个顶点的连通分量。

我们通过集合 $\overline{\mathcal{F}}' = (\overline{\mathcal{F}}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 得到一个序列

$$\mathcal{F}'_n := \mathcal{F}_n \cup \Big\{ F \in \{F^{\text{large}}_{\emptyset,\emptyset}, F_{I,J}, F^{\text{large}}_{I,J} : I \subseteq [k], J \subseteq \{3, \dots, k\}, \\ I \cup J \neq \emptyset\} : \text{ every } G \in \mathcal{P}_n \text{ is } F\text{-free} \Big\}.$$

首先注意，根据构造 $\mathcal{P}$ 必须是 $\overline{\mathcal{F}}'$-局部的。

我们使用以下记号。对于图 $G \in \mathcal{C}_2$、$i \in [k]$ 和 $j \in \{3, \dots, k\}$，我们令

- $p_i(G)$ 表示 G 中长度为i的路径的连通分量数量。
- $c_j(G)$ 表示 G 中长度为 j 的圈所对应的连通分量数量。
- $c_{\text{large}}(G)$ 是 G 中含有超过 k个顶点的连通分量数。

我们选择如下（单调非递减）函数 $\tau(\epsilon) := \min(1, 8k^3\epsilon)$，其中 $\epsilon \in (0, 1]$。设 G 是一个有 n 个顶点的图，它不是 $\mathcal{F}'_n$-自由的，并且 $\mathcal{P}_n$ 非空。设 $B \subseteq V(G)$是覆盖 $\mathcal{F}'_n$的任意集合。要证明 $\mathcal{F}'$ 是非传播的，只需证明 G 与 $\mathcal{P}$是 $\tau(|B|/n)$-接近的。根据 τ 的选择，这意味着我们必须说明，可以通过至多修改 $16k^3|B|$条边，使 G 具有性质 $\mathcal{P}_n$。因此，在本证明的其余部分，我们说明 G 与 $\mathcal{P}$是 $\tau(|B|/n)$-接近的。

假设 $n < 8k^3$，可得 $\tau(|B|/n) = 1$（因为 G 不是 $\mathcal{F}'_n$-自由的，我们知道 $|B| \geq 1$），这意味着 G 与 $\mathcal{P}$是 $\tau(|B|/n)$-接近的，因为在这种情况下，我们可以修改 G 的所有边，从而可以将 G 变成 $\mathcal{P}_n$中的任意图。因此，现在我们假设 $n \geq 8k^3$。

现在考虑 $|B| \geq \frac{n}{8k}$ 的情形。在这种情形下，$\tau(|B|/n) = 1$，且 G 是 $\tau(|B|/n)$-

再次接近 $\mathcal{P}$，因为我们可以修改 G 的所有边，从而将 G 变成 $\mathcal{P}_n$ 中的任意图。因此，从现在起我们只考虑 $|B| \leq \frac{n}{8k}$ 的情形。

令 S 为这样一个顶点集合：其中每个顶点的 k邻域都不包含来自 B的任何顶点。令 $I \subseteq [k]$、 $J \subseteq \{3, \ldots, k\}$ 为满足以下条件的指标集合：当且仅当 $p_i(G[S]) \geq k$ 时，$i \in I$；当且仅当 $c_j(G[S]) \geq k$时， $j \in J$。注意， $I \cup J$ 可能为空。

情形 1：假设$F_I^{\text{large}}{}_{,J} \notin \mathcal{F}'_n$。

首先注意，按照 S的定义，任何大小至多为 k 且包含 S中某个顶点的连通分量，都不能包含 B 中的顶点。因此， G 中大小至多为 k 的每个连通分量，要么完全包含于 S 中，要么与 S不相交。由于大小至多为 k 的连通分量至多有 $2k$ 种同构类型，我们知道，$G[S]$ 中至多有 $2k^2$ 个 X 连通分量，使得与 X同构的其他连通分量至多有 $k-1$ 个。在其他连通分量中，至多有 $G[S]$ 个与 X同构。换言之， G 中至多有 $2k^2$ 个连通分量 X 不包含来自 B 的任何元素，并且，若 X 是长度为 i 的路径，则 $i \notin I$；若 X 是长度为 j 的环，则 $j \notin J$。现在，我们通过对 G进行如下边修改，得到 G'。对于每个长度为j 且 $j \notin J$的环，我们删除一条边（根据前面的论证，至多删除 $2k^2 + |B|$ 条边）。然后，对于 $i \notin I$，我们添加边，将所有长度为 i 的路径（包括上一步得到的路径）连接成一个长环 C （至多添加 $2k^2 + |B|$ 条边）。如果 C的长度小于或等于 k，那么必定存在 $i \in I$ 或 $j \in J$，使得 $p_i(G) > k$ 或$c_j(G) > k$；此时，我们将相应的一个连通分量加入 C，并重复这一过程，直到 C 的长度至少为 $k+1$ （至多进行 $2k$ 次修改）。由于总共进行了至多 $4k^2 + 2|B| + 2k \leq 16k^2|B|$ 次边修改， G 与 G'是 $\tau(|B|/n)$-近的。下面的断言通过证明 $G' \in \mathcal{P}_n$，完成情形 1 的证明。

Claim 7.17. 令 $I \subseteq [k]$、 $J \subseteq \{3, \ldots, k\}$ 和 a_i、$b_j \geq k$ 满足 $i \in I$、 $j \in J$，为任意一组选取的整数，使得

$$\sum_{i \in I} i \cdot a_i + \sum_{j \in J} j \cdot b_j \leq n - (k+1). \tag{7.1}$$

若 $F_I^{\text{large}}{}_{,J} \notin \mathcal{F}'_n$，则任何满足 $p_i(H) = a_i$、 $c_j(H) = b_j$ （其中 $i \in I$、 $j \in J$）且还有一个为环的额外连通分量的图 $H \in \mathcal{P}_n$ 都是 $\mathcal{F}'_n$-自由的。

证明。假设存在一幅如陈述中所给的图 $H \in \mathcal{P}_n$，它不是 $\mathcal{F}'_n$-自由的，并令 C 为 H 中长度大于 k的环。那么存在$F \in \mathcal{F}'_n$，使得存在一个嵌入 $f\colon V(F) \to V(H)$。由于 $F_I^{\text{large}}{}_{,J} \notin \mathcal{F}'_n$，根据构造，存在一幅图 $H' \in \mathcal{P}_n$，满足 $p_i(H') \geq k$, $c_j(H') \geq k$，其中 $i \in I$, $j \in J$，且 $cc^{\text{large}}(H') \geq 1$。令 C' 为 H' 中大小大于k的一个连通分量。为了将 F 嵌入 H'，对于 X 的每个大小至多为 k、且包含来自 $f(V(F))$ 的顶点的连通分量，我们选取 H'中一个与 X同构的唯一连通分量 X'。注意，由于 $|f(V(F))| \leq k$且$p_i(H') \geq k$, $c_j(H') \geq k$，我们可以在 H' 中唯一地选取该连通分量。对于 H 中每个大小至多为 k、且包含来自$f(V(F))$ 的顶点的连通分量 X，现在定义 f_X为从 X到 X'的一个同构。此外，我们选取一个单射图同态 $f^{\text{large}}\colon f(V(F)) \cap C \to C'$。同样，这是可行的，因为 $|f(V(F))| \leq k$。现在令 $f'(v) := f_X(f(v))$，若 $f(v)$ 位于连通分量 X中；若 $f(v)$ 位于 C中，则令 $f'(v) := f^{\text{large}}(f(v))$。注意， f'是单射的，因为

构造。此外，由于选取 f_X 为同构、选取f^{large}为同态，我们得到 f'是将 F嵌入 H' 的一个嵌入。为说明这一点，我们注意到，对于任何标记为‘完全标记’的顶点 $v \in V(F)$，若$f'(v)$ 位于一个至多有 k个顶点的连通分量 X中，则由 f_X为同构可得条件 $N_1^{H'}(f'(v)) = f'(N_1^F(v))$。另一方面，若$f'(v)$ 位于 C' 中且 v标记为‘完全标记’，则可知 v在 F中有两个邻点 w_1, w_2，并且$f(w_1)$，$f(w_2)$ 是 $f(v)$ 的邻点（因为 $f(v)$ 必须位于 C上），这意味着$f'(w_1)$ 和 $f'(w_2)$ 是 $f'(v)$ 的邻点（因为 f大是一个同态）。由于 f'是将 F 嵌入 H' 的一个嵌入，这与 $H' \in \mathcal{P}_n$ 矛盾，因此 H 是$\mathcal{F}_n'$-自由的。所以，正如所声称的， H 必定是$\mathcal{F}_n'$-自由的。 □

情形 2：假设$F_{I,J}^{\text{large}} \in \mathcal{F}_n'$。在此情形，我们的策略是将 G 中包含来自 B 的顶点的连通分量修改为长度为 i 的路径和环，分别适用于 $i \in I$ 或 $i \in J$。

由于每个顶点的 k邻域至多包含 $2k+1$ 个顶点，$|B| \leq \frac{n}{8k}$意味着 $|S| \geq n/2$。此外，由于 $F_{I,J}^{\text{large}} \in \mathcal{F}_n'$ 中没有顶点可以包含在大小大于 k 的连通分量中，否则将存在一个 $F_{I,J}^{\text{large}}$到 G 的嵌入，而该嵌入未被 B覆盖。因此， $G[S]$ 是不交并，由长度至多为 $k-1$ 的路径和长度至多为 k的环组成。由于 $|S| \geq 4k^3$且 $G[S]$ 至多包含 $2k$ 种不同的连通分量同构类型，并且每个连通分量至多包含 k 个顶点，我们得出 $G[S]$ 的连通分量中至少有 $2k \geq k+1$ 个两两同构。因此$I \cup J \neq \emptyset$。此外，$F_{I,J}$ 已定义且不在 $\mathcal{F}_n'$ 中，因为 B 覆盖了 $\mathcal{F}_n'$。

下一个断言是证明我们可以将 G 修改为具有性质 $\mathcal{P}$，且无需修改 $G[S]$ 中超过常数条边的关键。

Claim 7.18. 如果对于 $I \subseteq [k], J \subseteq \{3, \dots, k\}$ 满足 $I \cup J \neq \emptyset$，我们有 $F_{I,J} \in \mathcal{F}_n'$ 且 $F_{I,J} \notin \mathcal{F}_n'$ 那么对于任意选取的整数 $a_i, b_j \geq k$，满足 $i \in I, j \in J$，使得

$$\sum_{i \in I} i \cdot a_i + \sum_{j \in J} j \cdot b_j \leq n - k^3 \tag{7.2}$$

存在一个不含 $\mathcal{F}_n'$的图 $H \in \mathcal{P}_n$，使得 $p_i(H) \geq a_i$ 且 $c_j(H) \geq b_j$。

证明。我们将 $a_i = 0$ 设为 $i \in [k] \setminus I$并将 $b_j = 0$ 设为 $j \in \{3, \dots, k\} \setminus J$。由于 $F_{I,J}^{\text{large}} \in \mathcal{F}_n'$ 和 $F_{I,J} \notin \mathcal{F}_n'$ 根据$\mathcal{F}$ 的构造， $\mathcal{P}_n$ 中必定存在一个图，其连通分量至少包含 k 条长度为 i 的路径（对于每个 $i \in I$）、 k 个长度为 j 的环（对于每个 $j \in J$），且不存在包含超过 k 个顶点的连通分量。在 $\mathcal{P}_n$ 中所有具有这些性质的图中，选取 H，使得

$$(*) := \sum_{\substack{i \in [k] \\ p_i(H) < a_i}} a_i - p_i(H) + \sum_{\substack{j \in \{3, \dots, k\} \\ c_j(H) < b_j}} c_j(H) - b_j$$

是极小的。在情形 $(*) > 0$ 时，存在 $i \in [k+1]$，使得要么 $p_i(H) < a_i$，要么 $c_i(H) < b_i$。结合公式 7.2，我们得到必定存在 $j \in [k+1]$，使得要么 $p_j(H) - a_j > k$，要么 $c_j(H) - b_j > k$。我们令 H' 表示由 H 得到的图：分别将 i 个长度为 j 的路径连通分量或 i 个长度为 j 的环连通分量替换掉，并添加 j 条互不相交的路径，其长度为

长度为 i 或 j 的不相交环，长度分别为 i。根据 i、j 的选择，我们得到，

$$(*) > \sum_{\substack{i\in[k]\\ p_i(H')<a_i}} a_i - p_i(H') + \sum_{\substack{j\in\{3,\dots,k\}\\ c_j(H')<b_j}} c_j(H') - b_j.$$

此外，H' 必须是 $\mathcal{F}'_n$-自由的，下面我们将对此进行论证。假设情况并非如此，存在 $F \in \mathcal{F}'_n$ 以及一个嵌入 $f\colon V(F) \to V(H')$。我们按如下方式从 f得到一个映射 $f'\colon V(F) \to V(H)$。对于H' 中每个已被改变的连通分量 X，我们选取 H' 中一个唯一的连通分量 X'，它与 X同构，且不包含 $f(V(F))$的像中的任何顶点。之所以可行，是因为假设 X 被改变意味着 $|X|-1 \in I$ 或 $|X| \in J$ 成立，因此 H' 中至少有 k 个与 X 同构且未被改变的连通分量。此外，由于 $|f(V(F))| \leq k$，我们可以唯一地选取 X'。现在，对于每个已被改变的连通分量 X，令f_X 为从 X 到 X' 的一个同构；对于每个未被改变的连通分量 X，令 f_X 为恒等映射。对于 $v \in X$，我们定义 $f'(v) := f_X(v)$。根据构造，f' 显然是从 F 到 H 的一个嵌入。由于 $H \in \mathcal{P}_n$，这就导出了矛盾。因此，H' 的存在与假设$(*) > 0$ 矛盾，这意味着 H 具有所声称的性质。

□

首先注意到，$n \geq 8k^3$ 使我们能够针对每个 $i \in I$ 和 $j \in J$ 选择 a_i 和 b_j，使得 $k \leq a_i \leq p_i(G[S])$、$k \leq b_j \leq c_j(G[S])$以及 $\sum_{i\in I} i\cdot a_i + \sum_{j\in J} j\cdot b_j \leq n-k^3$成立。在所有此类选择中，我们选取 a_i 和 b_j，使 $\sum_{i\in I} i\cdot a_i + \sum_{j\in J} j\cdot b_j$最大。令 M 为一个顶点集合，其中包含 G的所有连通分量，但不包括对于每个 $i \in I$、$j \in J$从 $G[S]$ 中取出的 a_i 条路径和 b_j 个环。于是 $|M| \leq 2k|B| + |B| + 4k^3$，因为 M 由 $N_k^G(B)$（至多 $2k|B| + |B|$ 个顶点）、连通分量中所有顶点组成；该连通分量要么是长度为 i 的路径（当 $i \notin I$ 时），要么是长度为 j 的环（当 $j \notin J$ 时）（因为此类路径和环至多有 $2k^2$ 个（如情形 1 中所论证），且每个至多包含 k 个顶点）；或者在 $a_i \neq p_i(G)$或$b_j \neq c_j(G)$的情况下，对于某些 $i \in I$、$j \in J$，M 至多由 k^3+k 个顶点组成，因为我们选取a_i、b_j 以使 $\sum_{i\in I} i\cdot a_i + \sum_{j\in J} j\cdot b_j$最大。

现在我们使用命题 7.18，得到一个无 $\mathcal{F}'_n$ 图 $H \in \mathcal{P}_n$，使得 $p_i(H) \geq a_i$且 $c_j(H) \geq b_j$。因此，只需修改 $G[M]$，我们就能将 G 修改为一个与 H 同构的图 G'。由于我们可以通过不超过 $4k|B| + 2|B| + 8k^3 \leq 16k^3|B|$ 次修改将 $G[M]$ 修改为任意图，因此我们证明了 G 与具有 $\mathcal{P}$这一性质的图 $\tau(|B|/n)$-近。 □

8. 邻域性质测试。本节中我们只考虑简单图，即没有自环和平行边的无向图；对于任意 $d \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}_d$ 为度有界于 d的简单图类。我们将简单图视为签名 $\sigma_{\text{graph}} := \{E\}$上的结构，其中 E 编码一个二元、对称且反自反的关系。这使得我们能够将第2节中的概念迁移到图上。

令 $r \geq 1$，并令 τ 为一种 r 类型；令 $\varphi_\tau(x)$ 为一个一阶逻辑公式，表示 x 具有 r 类型 τ。如果 $G \models \forall x \varphi_\tau(x)$，我们称图 G 是 τ-邻域正则的。如果 $G \models \neg\exists x \varphi_\tau(x)$，我们称图 G 是 τ-邻域自由的。令 $\tau_1, \dots, \tau_t$ 为 $\mathcal{C}_d$ 中所有 r 类型的列表。如果 $F \subseteq \{\tau_1, \dots, \tau_t\}$，我们称 G 是 F-自由的，即对于所有 $\tau \in F$，G 都是 τ-邻域自由的。

注意到，对于任意邻域类型 τ，τ-邻域自由性和 τ-邻域正则性都可以由 Π_2 中的公式定义。因此，下面的引理表明，存在属于 Π_2 但不属于 Σ_2 的邻域性质。

LEMMA 8.1. 存在 1-类型 τ、τ'，使得 τ-邻域自由性和 τ'-邻域正则性都不能由 Σ_2 中的公式定义。

请注意，上述引理意味着，我们不能直接调用定理 6.1 中用于测试 Σ_2 性质的测试器来测试这两种性质。

引理 8.1 的证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 C_n 为顶点集为 $[n]:=\{0, 1, \dots, n-1\}$的环图。令 P_{n-1} 为顶点集为 $[n-1]$的路径图。我们先证明以下断言。

CLAIM 8.2. 令$\varphi = \exists\overline{x}\forall\overline{y}\chi(\overline{x},\overline{y})$，其中 $\overline{x} = (x_1, .., x_k)$、$\overline{y} = (y_1, .., y_\ell)$是变量元组，且 $\chi(\overline{x},\overline{y})$是无量词公式。若 $C_n \models \varphi$，则对任意 $n > k$，都有 $P_{n-1} \models \varphi$。

证明。反设对某个 $n > k$，有 $C_n \models \varphi$，而 $P_{n-1} \not\models \varphi$。由于 $C_n \models \varphi$，在 C_n 中存在 k 个顶点 v_1、...、v_k，使得$C_n \models \forall\overline{y}\chi((v_1, \dots, v_k)\ \overline{y})$。由于 $n > k$，存在至少一个顶点 $i \in [n]$ 不在 v_1、...、v_k之中。令 $v'_j := (v_j + n - 1 - i) \bmod n$为 P_{n-1}的一个顶点。由于$P_{n-1} \not\models \varphi$和 $v'_j \in [n-1]$，我们有 $P_{n-1} \not\models \forall\overline{y}\chi((v'_1 \dots, v'_k)\ \overline{y})$。因此，在 P_{n-1} 中必定存在顶点 w'_1、...、w'_ℓ，使得 $P_{n-1} \not\models \chi((v'_1, \dots, v'_k), (w'_1, \dots, w'_\ell))$。现在令 $w_j := (w'_j + i + 1) \bmod n$。那么 $v_j \mapsto v'_j$ 和 $w_j \mapsto w'_j$ 定义了从 $C_n[\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell\}]$ 到 $P_{n-1}[\{v'_1, \dots, v'_k, w'_1, \dots, w'_\ell\}]$ 的一个同构。因此，$C_n \not\models \chi((v_1, \dots, v_k), (w_1, \dots, w_\ell))$，这与 $C_n \models \varphi$矛盾。

□

现在令 τ 为表示中心顶点 x 恰好有一个邻点的1-邻域类型。令 τ' 为表示中心顶点有两个不相邻的顶点的1-邻域类型。由于 C_n是 τ-邻域自由且 τ'- 邻域正则，而 P_{n-1} 两者都不是，因此引理的陈述由断言 8.2 得出。

□

现在我们在本节中陈述主要的算法结果。第一个结果表明，如果 τ 是一个度小于图类的度数上界的 r类型，那么 τ-邻域自由性是可测试的。

THEOREM 8.3.令 τ 为一种 r类型，其中 $r \geq 1$。如果 $\tau \subseteq \mathcal{C}_{d'}$ 和 $d' < d$，那么τ-邻域自由性在类 $\mathcal{C}_d$ 上是一致可测试的，且具有常数运行时间。

第二个结果表明，如果 τ 是一个 1-型，那么 τ-邻域无关性是可测试的。

THEOREM 8.4.对于每个 1-型 τ、τ-邻域自由性都是一致可测试的 e 在类 $\mathcal{C}_d$ 上以恒定时间。

第三个结果表明，对于由仅在中心顶点处相交的团构成的每个 1-型 τ，τ-邻域正则性都是可测试的。

THEOREM 8.5. 设 τ 是一种 1-型，使得在 B 中，具有 1-型 τ 的顶点 a 意味着，对于每个以 a 为中心的 1-球 B，$B \setminus \{a\}$ 都是互不相交的团的并集。那么，在常数时间内，τ-邻域正则性在 $\mathcal{C}_d$ 上是一致可测试的。

根据前面的讨论，上述定理意味着，在$\Pi_2 \setminus \Sigma_2$ 中存在可测试的公式。

8.1. 定理 8.3、8.4和 8.5 的证明。考虑以下算法$\text{ESTIMATEFREQUENCIES}_{r,s}$：给定对图 $G \in \mathcal{C}_d$的访问权限，它均匀且独立地抽取一个包含 S 个 s顶点的集合 G，然后探索它们的 r-球；随后返回该样本的 r-类型的长度为 t 的分布向量 $\bar{v}$，即 $\bar{v}_i = |\{v \in S \mid \mathcal{N}_r^G(v) \in \tau_i\}|/s$。

LEMMA 8.6（ [31]中的引理5.1）。设 $\lambda \in (0,1]$, $r \in \mathbb{N}$，并设 $G \in \mathcal{C}_d$ 为一个具有 n 个顶点的图。设 $s \geq (t^2/\lambda^2)\ln(t+40)$。则由 $\textsc{EstimateFrequencies}_{r,s}(G)$ 返回的向量 $\bar{v}$ 满足 $\sum_{i=1}^{t} |\rho_{G,r}(\{\tau_i\})$，其发生的概率至少为 $19/20$。

如果 $\rho_{G,\ r}(\tau_i)$ 为 0，则 $\Pr[v_i = 0] = 1$。

下面的引理提供了一个框架，将用于定理 8.3、8. 和 8.5。 4

LEMMA 8.7.设 $\mathcal{F}$ 为一个最大度有界的 r-类型有限集合，并设 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_d$ 为所有 $\mathcal{F}$-自由图组成的集合。设 $M \subseteq \mathbb{N}$ 为一个可判定集合，使得 $G \in \mathcal{P}$ 蕴含 $|V(G)| \notin M$。设 f_M: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为一个函数，使得 M 可在 f_M时间内判定。假设对于每个 $\epsilon \in (0,1]$，存在 $\lambda := \lambda(\epsilon) \in (0,1]$ 以及$n_0 := n_0(r,\epsilon) \in \mathbb{N}$，使得任意一个 $G \in \mathcal{C}_d$ 图，如果它有 $n \geq n_0$, $n \notin M$ 个顶点且与 $\mathcal{P}$相差 ϵ，则包含多于 λn 个满足 $\mathcal{N}_r^G(v) \in \tau \in \mathcal{F}$的元素 v。那么 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{C}_d$ 上一致可测试，时间为 $\mathcal{O}(f_M)$。

证明。考虑以下概率算法 T，它可以直接访问图 $G \in \mathcal{C}_d$，并以顶点数 n 作为输入。令 $s = (t^2/\lambda^2)\ln(t+40)$。

1. 如果 $n \in M$，则拒绝。2. 如果 $n < n_0$：使用预计算表准确判断 $G \in \mathcal{P}$。3. 否则运行$\textsc{EstimateFrequencies}_{r,s}(G)$以获得 $\bar{v}$，这满足 那

$$\sum_{i=1}^{t} |\rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \bar{v}_i| \leq \lambda$$

概率至少为 $19/20$。

4. 如果 $\sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \bar{v}_i > 0$，则拒绝 G。否则接受。

T 的查询复杂度显然是常数，因为 s 是常数，并且对于 $\mathcal{C}_d$ 中的图，任何 r-邻域中的顶点数都由 $d^{r+1}+1$ 限制。第一步的运行时间为 $f_M(n)$，其他步骤的运行时间则为常数。

为了证明 T 是一个 ϵ-测试器，首先假设 $G \in \mathcal{P}$。然后对于所有顶点 v，$n \notin M$ 和$\mathcal{N}_r^G \in \tau \notin \mathcal{F}$。因此，$\sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \bar{v}_i = 0$，并且 T 接受 G。现在考虑 G 与 $\mathcal{P}$相差 ϵ。如果 $n \in M$，那么 G 在第一步中被拒绝。因此令$n \notin M$，并假设 $\sum_{i=1}^{t} |\rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \bar{v}_i| \leq \lambda$，其发生的概率至少为$19/20 \geq 2/3$。然后

$$\begin{aligned}\sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \bar{v}_i &= \sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \big(\rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \bar{v}_i\big) \\ &> \lambda - \Big|\sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \big(\rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \bar{v}_i\big)\Big| \geq \lambda - \sum_{\tau_i \in \mathcal{F}} \big|\rho_{G,r}(\{\tau_i\}) - \bar{v}_i\big| \geq 0,\end{aligned}$$

其中第一个不等式由以下假设得出：在与 $\mathcal{P}$ 相距 ϵ 的图中，类型属于 F 的顶点多于 λn 个。因此 T 拒绝 G。 □

为说明引理 8.7 中集合 M 的用法，令 $\mathcal{P}$ 表示具有 K_4 邻域正则性的性质。令 G_m 为由 m 个互不相交的 K_4 副本和一个孤立顶点组成的图。首先注意到，G_m 包含 $4m+1$ 个顶点。K_4-正则意味着每个顶点的度数都是 3。但由于每个图中度为奇数的顶点数都是偶数，因此无法通过边修改使 G_m 成为 K_4 邻域正则的图。因此，G_m 与 $\mathcal{P}$ 相差 ϵ。但是，对于 $m \to \infty$，

在 G_m 中抽样到孤立顶点的概率趋于 0，这意味着测试器以高概率接受 G_m。我们将在定理 8.5 中证明，如果设定 $M = \mathbb{N} \setminus \{4m \mid m \in \mathbb{N}\}$，那么 $\mathcal{P}$ 是可测试的。

LEMMA 8.8. 对于 $r \geq 1$，令 τ 为一种 r-类型。令 B 为一个半径为 r、常数为 a 且类型为 τ的球。令 $\tilde{d} < d$、$d \neq 0$ 为整数，并假设 $\mathcal{N}_{r-1}^{B}(a)$ 包含一个顶点 b，其度数为 $\deg_B(b) = \tilde{d}$，且对于 $\mathcal{N}_{r-1}^{B}(a)$ 中的所有顶点 v，均有 $\deg_B(v) \neq \tilde{d}+1$。令 $\epsilon \in (0,1]$ 固定，$n_0 = 2d^2/\epsilon$ 且 $\lambda = \epsilon d/(14(1+d^{2r+1}))$。那么，任何一个有 $n \geq n_0$ 个顶点且距离成为 τ-邻域自由至少 ϵ 次修改的图 $G \in \mathcal{C}_d$，都包含超过 λn 个 r-类型 τ 的顶点。

证明。我们采用逆否证明。假设 $G \in \mathcal{C}_d$ 是一个有 $n \geq n_0$ 个顶点的图，其中 r-类型 τ 的顶点 v 不超过 λn 个。

Case $\tilde{d} > 1$. 在这种情形下，禁止类型 τ 必须是一个孤立顶点。由于每个度为0的顶点都必须属于禁止类型，我们为每一对度为0 的顶点添加一条边。如果只剩下一个度为0的顶点 v，我们就从 v 向任意其他度为 $< d$的顶点添加一条边。如果不存在这样的顶点，那么必定有一个顶点 u 包含在两条边中，于是我们将一条边 $\{u,w\}$ 替换为 $\{v,w\}$。这样我们得到 G'，它与 G相差 $2\lambda n \leq \epsilon dn$ 。

Case $\tilde{d} = 1$. 情形 $d \geq 1$。我们选取一个集合 $\{v_1,\dots,v_k\}$，其中包含 $k \leq \lambda n$ 个度为 d的顶点，使得对于每个顶点 v，对于 r-类型 τ，都存在一个索引 $1 \leq i \leq k$，使得 $v_i \in N_{r-1}^{G}(v)$。我们将区分以下两种情形。

首先假设度为 $2r$ 个，这些顶点两两距离大于 $2r$，且距离 $\{v_1,\dots,v_k\}$ 大于 $2r$。那么，度为 $\tilde{d}$ 的顶点总数少于 $2\lambda n(1+d^{2r+1})$。我们区分两种情形。首先，考虑情形 $d = 1$。在这种情形下，我们在度数为 1 的顶点对之间添加边。如果还剩下两个相邻的度数为 1 的顶点，我们就删除它们之间的边。如果只剩下一个度数为 1 的顶点 v，那么另有一个奇度顶点。删除一条边 $\{u,w\}$ 并添加 $\{v,w\}$ 后，我们得到 $\deg_G(v)$、$\deg w \geq 1$。由此得到 G'，它与 G 的距离为 $2\lambda n(1+d^{2r+1}) \leq \epsilon dn$，且 不含度为 d 的顶点，因此必定是 τ-自由的。

现在考虑第二种情形：在此情形下，我们令 G' 为由 G 经过以下修改得到的图。对于每个度为 d 的顶点 v，我们选取边 $\{v,v_1\}$、$\{v,v_2\}$、$\{w,w'\}$和 $\{u,u'\}$，使得 v、w和 u 的两两距离至少为 3。我们删除边 $\{v,v_1\}$、$\{v,v_2\}$、$\{w,w'\}$和 $\{u,u'\}$，并插入边 $\{v_1,w\}$、$\{v_2,u\}$和 $\{w',u'\}$，从而降低 v的度，同时保持中所有其他顶点的度不变。所得图中不存在度为 d的顶点。注意，如果在迭代期间的任何时刻都不存在这样的边，则该图至多包含$2d^3 \leq \epsilon dn$ 条边；我们将它们全部删除，从而得到一个不存在度为$\tilde{d}$的顶点的图。总之，我们进行的边修改不超过 $7 \cdot 2\lambda n(1+d^{2r+1}) \leq \epsilon dn$，这意味着 G' 与 G的距离为 ϵ。此外，G' 是 τ-邻域自由的，因为一个类型为 τ 的邻域将意味着存在一个度为 d的顶点。

现在假设至少有 λn 个度为 d 的顶点，它们之间的两两距离大于 $2r$，且与 $\{v_1,\dots,v_k\}$ 的距离大于 $2r$。令 $\{v_1',\dots,v_k'\}$ 为一组度为 d 的顶点，使得对所有 $1 \leq i, j \leq k$，$\mathrm{dist}_G(v_i, v_j') > 2r$，并且对所有 $1 \leq i < j \leq k$，$\mathrm{dist}(v_i', v_j') > 2r$。令 G' 为通过插入边 $\{v_i, v_i'\}$ 从 G 得到的图。首先注意，这至多需要 $\lambda n \leq \epsilon dn$ 次边修改，因此 G 与 G' 的距离不超过 ϵ。进一步假设 v' 是 G' 中一个具有 r-类型 τ 的顶点。根据集合 $\{v_1,\dots,v_k\}$ 的选取，我们改变了 G 中每个类型为 τ 的顶点的同构类型。因此 $\mathcal{N}_r^{G'}(v') \neq \mathcal{N}_r^{G}(v')$。因此 $\mathcal{N}_r^{G'}(v')$

包含一条插入的边 (v_i, v_i')。我们将首先证明，$\mathrm{dist}_{G'}(v', v_i) < r$ 或 $\mathrm{dist}_{G'}(v', v_i') < r$。假设情况并非如此。那么存在一条路径 $P = (v_i = w_{-r}, w_{-r+1}, \ldots, w_{-1}, w_0 = v', w_1, \ldots, w_{r-1}, w_r = v_i')$，使得 $w_j \neq v_i$，并且对所有 $-r < j < r$ 都有 $w_j \neq v_i'$。令 $-r \leq j < r$ 为满足 $w_j \in \{v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_k'\}$ 的最大指标。那么路径 $(w_j, \ldots, w_r = v_i')$ 是 G 中一条长度为 $\leq 2r$ 的路径，这与 $v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_k'$ 的选取矛盾。由于 $\deg_{G'}(v_i) = \deg_{G'}(v_i') = \tilde{d} + 1$，这意味着 $\mathcal{N}_{r-1}^{G}(v')$ 包含一个度为 $\tilde{d} + 1$ 的顶点，这与 v' 具有 r-类型 τ 矛盾。因此 G' 是 τ-邻域自由的。 □

LEMMA 8.9. 对于 $r \geq 1$，令 τ 为一种 r-类型。令 B 为一个类型为 τ、半径为常数 a 的 r-球。假设对所有顶点 $v \in N_{r-1}^{B}(a)$，$\deg_B(v) = d$。令 $\epsilon \in (0, 1]$）固定，并令 $\lambda = \epsilon$。那么，每个含有 $n \geq 1$ 个顶点、与满足τ邻域自由性质的图相距至少 ϵ 的图 $G \in \mathcal{C}_d$，都包含超过 λn 个 r-类型 τ 的顶点。

证明。若 $d = 0$，则引理成立。因此，我们可以假设 B 不只是一个孤立顶点。我们采用逆否证明。假设 $G \in \mathcal{C}_d$ 是一个含有 $n \geq 1$ 个顶点的图，其中至多有 λn 个顶点 v 属于 r-类型 τ。令 G' 为从 G 得到的图，方法是隔离所有属于 r-类型 τ 的顶点 v。首先注意，由于我们至多进行了 $d\lambda n \leq \epsilon dn$ 次边修改，G' 与 G 相距不超过 ϵ。现在假设 v' 是一个属于 r-类型 τ 的顶点。由于我们隔离了所有具有 r-类型 τ 的顶点，我们知道 $\mathcal{N}_r^{G'}(v') \neq \mathcal{N}_r^{G}(v')$。因此，$N_r^G(v')$ 中必有一个顶点 v，使得 v 属于 τ 类型；否则，v' 的 r- 球就无法见证任何边修改。这意味着在 G 中存在一条长度为 $k \leq r$ 的路径 $(v' = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v)$。现在取满足 $\mathrm{dist}_{G'}(v', v_i) < \infty$ 的最大下标 i。首先注意，由于 $v = v_k$ 在 G' 中是孤立的，我们得到 $i < k$，因此 $\mathrm{dist}_{G'}(v', v_i) < r$。根据构造，$\mathrm{dist}_{G'}(v', v_{i+1}) = \infty$，且 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$，所以 $\deg_{\mathcal{N}_r^{G'}(v')}(v_i) = \deg_{G'}(v_i) < \deg_G(v_i) \leq d$。由于 $\mathcal{N}_r^{G'}(v') \in \tau$，这与我们先前关于 $\mathcal{N}_{r-1}^{B}a$ 中所有顶点的度均为 d 的假设矛盾。因此，图 G' 不可能包含一个属于 r-类型 τ 的顶点 v'，故其为 τ-邻域自由图。

□

根据引理 8.9 和引理 8.8，针对 $r = 1$ 的下一个引理即可得出，因为 0-球只有一个顶点。

LEMMA 8.10. 设 τ 是一个 1-型。设 $\epsilon \in (0, 1]$ 固定，$n_0 = 2d^2/\epsilon$ 且 $\lambda = \epsilon d/(14(1 + d^3))$。那么，任何一个有 $n \geq n_0$ 个顶点、且与成为 τ-邻域自由图相差 ϵ 的图 $G \in \mathcal{C}_d$，都包含超过 λn 个具有 1-型 τ 的顶点。

定理 8.3 的证明。结合 $\mathcal{F} = \{\tau\}$ 和 $M = \emptyset$ 的引理 8.7 与引理 8.8，可证明定理 8.3 的所有情形，除了 $d = 1$ 的情形。在 $d = 1$ 的情形下，我们~有 $d = 0$。在这种情形下，我们令 $M := \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \mod 2\}$，于是对于 $\epsilon \in (0, 1]$ 且 $\lambda = \epsilon$），任何一个有 $n \equiv 0$ 个顶点（模 2）、且与成为 τ-邻域自由图相差 ϵ 的图 $G \in \mathcal{C}_d$，都包含超过 λn 个具有 r-型 τ 的顶点。这是因为，假设具有 r-型 τ 的顶点数不超过 λn，我们就可以在任意一对度为 0 的顶点之间添加一条边，从而得到一个与 G 相差 $\lambda n \leq \epsilon dn$ 的图 G'。 □

定理 8.4 可由引理 8.7 和引理 8.10 推得；在引理 8.7 中，我们根据 τ 的度是否有 d 上界，使用 $\mathcal{F} = \{\tau\}$ 或 $\mathcal{F} = \emptyset$。

定理 8.5 的证明。设 τ 是一种 1-型，使得对于定理陈述中的所有 $(B, a) \in \tau$，$B \setminus \{a\}$ 都是互不相交的团的并集。我们将 $\mathcal{P}$ 定义为具有 τ-邻域正则性质，并令 $\mathcal{K}^G$ 为 G 中极大团的集合。定义函数 $\mathrm{maxcl}^G \colon V(G) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，其中 $\mathrm{maxcl}^G(v, i) := |\{K \in$

$\mathcal{K}^G \mid |K| = i, v \in K\}|$ 是包含 v的极大 i团的数量。

CLAIM 8.11.若 $G \in \mathcal{P}$ 则 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) \cdot n \equiv 0$ 模 i.

证明。首先注意到 $G \in \mathcal{P}$意味着 $\mathcal{N}_1^G(v) \in \tau$对所有 $v \in V(G)$。然后$\mathrm{maxcl}^B(a,i) = \mathrm{maxcl}^G(v,i)$ 对所有 $v \in V(G)$ 并且

$$\mathrm{maxcl}^B(a,i) \cdot n = \sum_{v \in V} \mathrm{maxcl}^G(v,i) = |\{K \in \mathcal{K}^G \mid |K| = i\}| \cdot i \equiv 0 \bmod i.$$

□

令 $M := \{n \in \mathbb{N} \mid$ 存在 $1 \le i \le d$ 使得$\mathrm{maxcl}^B(a,i) \cdot n \not\equiv 0$ 模 $i\}$。注意，判定 $n \in M$ 只需要标准算术运算。

CLAIM 8.12.对于 $\epsilon \in (0,1]$ 令 $\lambda = \epsilon/(20d^6)$和 $n_0 = 20d^8$。则任何图$G \in \mathcal{C}_d$ 具有 $n \ge n_0$, $n \notin M$ 个顶点，且与 $\mathcal{P}$ 相差 ϵ，都包含超过 λn 个顶点 v 不属于 1-型 τ。

证明。我们通过逆否证明进行。设 $G \in \mathcal{C}_d$ 是一个具有 $n \ge n_0$ 个顶点的图，并假设 G 包含 $\le \lambda n$ 个不属于 1-型 τ 的顶点。现在我们将描述一个算法过程，该过程执行 $< \epsilon dn$ 次边修改，并将 G 转换为图 $G^{(4)} \in \mathcal{P}$，从而证明该结论。

Let $\tilde{E}^{(1)} := \{e \in E(G) \mid$ 存在互不相同的 $K, K' \in \mathcal{K}^G, |K \cap K'| > 1, e \subseteq K\}$。令 $G^{(1)}$ 为图 $G^{(1)} = (V(G), E^{(1)})$，其中 $E^{(1)} = E \setminus \tilde{E}^{(1)}$。首先注意到$G^{(1)}$ 没有互不相同的极大团 K, K' 满足 $|K \cap K'| > 1$。此外

$$|\tilde{E}^{(1)}| \le \binom{d}{2} \cdot |\{K \in \mathcal{K}^G \mid \text{exists } K' \in \mathcal{K}^G, |K \cap K'| > 1\}| \le \frac{d^3 \lambda n}{2},$$

其中，第二个不等式成立，是因为每个 $K \in \mathcal{K}^G$ 只要存在 $K' \in \mathcal{K}^G$满足 $|K \cap K'| > 1$ 和 $K \ne K'$，就必须包含 λn 个顶点 v 中的一个，而这些顶点不是1-型 τ，并且有 $\le d\lambda n$ 个极大团包含这样的顶点。此外，移除 $\tilde{E}^{(1)}$ 中的边对不超过 $d^4\lambda n$ 个顶点产生影响，因为 $\tilde{E}^{(1)}$的一条边中包含的顶点不超过 $d^3\lambda n$ 个，它们各自的 1-邻域包含 d 个顶点，而任何1-邻域受到影响的顶点，都必须与 $\tilde{E}^{(1)}$中的一条边所包含的顶点之一距离为 1。因此， $G^{(1)}$ 包含 $\le (d^4+1)\lambda n < 2d^4\lambda n$ 个顶点 v，这些顶点不是 1-型 τ。

注意，对于 $G^{(1)}$ 所有顶点 v 图 $\mathcal{N}_1^{G^{(1)}}(v) \setminus \{v\}$ 是不交并的团，但可能存在 $K \in \mathcal{K}^{G^{(1)}}$ 使得$\mathrm{maxcl}^B(a, |K|) = 0$。我们定义边集 $\tilde{E}^{(2)} := \{e \in E^{(1)} \mid$ 存在 $K \in \mathcal{K}^{G^{(1)}}$、$e \subseteq K$，使得$\mathrm{maxcl}^B(a, |K|) = 0\}$，并令$G^{(2)}$ 为图 $G^{(2)} = (V(G), E^{(2)})$，其中 $E^{(2)} = E^{(1)} \setminus \tilde{E}^{(2)}$。此外

$$|\tilde{E}^{(2)}| \le d \cdot |\{v \mid \text{exists } K \in \mathcal{K}^{G^{(1)}}, v \in K, \mathrm{maxcl}^B(a, |K|) = 0\}| \le d \cdot 2d^4\lambda n,$$

其中，第一个不等式成立是因为 $G^{(1)}$ 中的每个团大小为 $\le d$，第二个不等式成立是因为对于每个 $v \in \{v \mid$，存在 $K \in \mathcal{K}^{G^{(1)}}$、$v \in K$，$\mathrm{maxcl}^B(a, |K|) = 0\}$。

注意，对于所有 $K \in \mathcal{K}^{G^{(2)}}$，$\mathrm{maxcl}^B(a, |K|) \ne 0$；但可能存在 $v \in V(G)$ 和 $i \le d$，使得 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) \ne \mathrm{maxcl}^{G^{(2)}}(v,i)$。此外，注意到，由于 $n \ge n_0$，在 $G^{(2)}$ 中至少有 $2d$ 4-球与任意 1-型为 τ 的顶点 v 的 4-球完全不相交。 $G^{(3)}$ 也具有这一性质。令 $G^{(3)} = (V(G), E^{(3)})$ 为通过以下操作从 $G^{(2)}$ 得到的图。对于每一对 v, v'，若存在 $i \le d$ 使得 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) > \mathrm{maxcl}^{G^{(2)}}(v,i)$ 且 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) < \mathrm{maxcl}^{G^{(2)}}(v',i)$，则令 w 为一个类型为 τ、与 v 和

v'。令 $K' = \{v'_1, \ldots, v'_{i-1}, v'\} \in \mathcal{K}^{G^{(2)}}$ 和 $K = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, w\} \in \mathcal{K}^{G^{(2)}}$。删除边 $\{\{v', v'_j\}, \{w, v_j\} \mid j \in [i-1]\}$ $\{\{v, v_j\}, \{w, v'_j\} \mid j \in [i-1]\}$，并添加边。注意，顶点 $v_1 \ldots v_{i-1}\ v'_1 \ldots v'_{i-1}\ w$ 仍包含在与之前相同数量的团中，而 v 多包含在一个 i-团中，v' 则少包含在一个团中。

注意，在 $G^{(3)}$ 中，对于所有顶点 v，要么 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) \geq \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i)$，要么对于每个 v，$\mathrm{maxcl}^B(a,i) \leq \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i)$。令 $G^{(4)}$ 为通过以下操作从 $G^{(3)}$ 得到的图。对于每个满足存在顶点 v 使得 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) < \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i)$ 的 i，我们选取 i 个不一定互不相同的顶点 $v_1, \ldots, v_i$，使其具有以下性质。如果顶点 v 在 $v_1, \ldots, v_i$ 中出现 k 次，那么 $\mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i) - \cdot \mathrm{maxcl}^B(a,i) \geq k$。注意，由于根据假设 $\sum_{v \in V(G^{(3)})} \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i) \equiv 0$ 模 i，且 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) \cdot n \equiv 0$ 模 i，因此这些选择是可行的，故有 $\sum_{v \in E^{(3)}} (\mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i) - \mathrm{maxcl}^B(a,i)) \equiv 0$ 模 i。令 $K_1, \ldots, K_i \in \mathcal{K}^{G^{(3)}}$ 为互不相同的团，使得对每个$1 \leq j \leq i$，$v_j \in K_j$。令 $K = \{w_1, \ldots, w_i\} \in \mathcal{K}^{G^{(3)}}$，使任意一对 v_j, w_k 之间的距离至少为 4。删除边集合 $\{\{w_j, w_k\}, \{v_j, v\} \mid v \in K_j, j, k \in [i]\}$，并添加边集合 $\{\{w_j, v\} \mid v \in K_j, j \in [i]\}$。注意，这会使 i-团的数量减少 1，而 $v_1, \ldots, v_i$ 所属的团数量保持不变。类似地，对于每个满足存在顶点 v 使得 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) > \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i)$ 的 i，我们选取 i 个不一定互不相同的顶点 $v_1, \ldots, v_i$，使其具有以下性质。如果 v 在 $v_1, \ldots, v_i$ 中出现 k 次，那么 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) - \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(v,i) \leq k$。令 $w_1, \ldots, w_i$ 为满足 $\mathrm{maxcl}^B(a,i) = \mathrm{maxcl}^{G^{(3)}}(w_j,i)$ 的顶点，使得 $w_1, \ldots, w_i$ 与每个 $v_j, 1 \leq j \leq i$ 之间的距离至少为 4，且 $w_1, \ldots, w_i$ 两两之间的距离至少为 4。令 $K_j \in \mathcal{K}^{G^{(3)}}$，使得对于$j \in \{1, \ldots, i\}$，$w_j \in K_j$。删除边集合 $\{\{w_j, w\} \mid w \in K_j, 1 \leq j \leq i\}$，并添加边集合 $\{\{v_j, w\}\{w_j, w_k\} \mid w \in K_j, j, k \in \{1, \ldots, i\}\}$。注意，这会使 $v_1, \ldots, v_i$ 所属的 i-团数量增加 1，同时 $w_1, \ldots, w_i$ 所属的 i-团数量保持不变。

根据构造 $G^{(4)} \in \mathcal{P}$。边修改的总数为 $|E^{(1)}| + |E^{(2)}|$，再加上将 $G^{(2)}$ 变换为 $G^{(4)}$所需的修改次数。首先注意，

$$\sum_{i=3}^{d} \sum_{v \in V(G)} |\mathrm{maxcl}^B(a,i) - \mathrm{maxcl}^{G^{(2)}}(v,i)| \leq 2d \cdot 2d^4 \lambda n$$

因为在上述求和中，$G^{(2)}$ 中每个属于 1-型 τ 的 $2d^4\lambda n$ 个顶点 v 最多贡献 $2d$。由于我们通过贪心方式将 $G^{(2)}$ 变换为 $G^{(4)}$，也就是说，每一步都将数值 $\sum_{i=3}^{d} \sum_{v \in V(G)} |\mathrm{maxcl}^B(a,i) - \mathrm{maxcl}^{G^{(2)}}(v,i)|$ 至少减少 1，而每次这样的减少最多需要 $4d^2$ 次边修改，因此所需的边修改总数小于

$$|E^{(1)}| + |E^{(2)}| + 4d^2 \cdot 2d \cdot 2d^4 \lambda n \leq 20 d^7 \lambda n = \epsilon d n$$

次边修改。 □

设 $\mathcal{F} := \{\tau' \mid \tau \text{ 是一个 1-型 } \tau \neq \tau'\}$。注意，$|\mathcal{F}| \leq t < \infty$，等号成立当且仅当 $B \notin \mathcal{C}_d$。那么，将断言 8.12 与引理 8.7 结合起来，其中 M 和 $\mathcal{F}$ 如上所定义，即可证明该定理。 □

9. 结论。我们研究了图和关系结构的性质测试有界度模型中由一阶逻辑定义的性质的可测试性，其中性质可测试意味着它能以常数查询复杂度进行测试。我们证明了 Σ_2 中的所有性质均可测试（定理 6.1），并通过展示 Π_2 中一个不可测试的（关系结构的）性质作为补充（定理 4.7）。我们还利用困难性归约，展示了 Π_2 中一个不可测试的无向 3-正则图性质（定理 5.1）。在有界度模型中，一阶逻辑可定义的性质是否能通过次线性数量的查询（例如 $\sqrt{n}$）进行测试，这个问题仍未解决。

类似的结果（关于 Σ_2 和 Π_2 性质之间的分离）已在稠密图模型中于 [4], 获得，尽管所采用的方法截然不同。事实上，有界度模型中的一阶逻辑不可测试性多少有些出人意料：测试算法通过对顶点进行采样，然后探索它们的局部邻域；众所周知，一阶逻辑只能表达“局部”性质。在有界度的图和结构上，Hanf强范式体现了这一点 [24], 该范式围绕不同局部邻域同构类型的缺失与存在而构建。然而，我们的否定性结果表明，一阶逻辑的局部性并不足以保证可测试性。这也回答了来自 [1]的一个开放问题。

我们通过将有界度扩展图的之字形构造编码到关系结构上的一阶逻辑中（定理 4.4），获得了我们的不可测试性质，随后又将其扩展到无向图（定理 5.1）。我们相信，这本身就具有独立的意义。我们指出，也可以使用 [33] 替换积图的迭代构造，而非之字形构造，以获得类似的例子。

随后，我们利用这个不可测试的图性质，回答了 Goldreich 和 Ron 十多年前提出的一个关于有界度模型中邻近参数无关测试器的问题 [22]。这种测试器尤其简单：它会执行若干次基本测试，次数可以依赖于邻近参数，而基本测试本身则不受该参数影响。在 [22], 中，已将该模型下可测试的性质刻画为同时满足 GSF-局部和非传播的性质。粗略地说，GSF-局部意味着图类排除某个广义子图族（即对这些子图与图其余部分如何相互作用施加约束的子图），而非传播意味着：如果通过抽样顶点不太可能检测到某个被禁止的广义子图，那么相应的图在边修改意义上实际上接近于满足该性质。换言之，不会发生“连锁反应”：修复一条边后又产生新的不合意构形，而这些构形又需要修复，等等。Goldreich 和 Ron 曾提出“非传播”是否必不可少这一问题。我们证明了答案是肯定的。我们的证明基于将一阶可定义性质与 GSF-局部性质联系起来，借助的是一种我们称为邻域轮廓的概念，它刻画了一阶可定义性。最后，我们采用了 Hanf 范式所启发的方法，证明了某些关于邻域同构类型的一阶性质是可测试的，其中包括 1-邻域无性，以及在度满足一个温和假设时的 r-邻域无性（定理 8.3、定理 8.4 和定理 8.5）。特别地，这些定理意味着，由 $\Pi_2 \setminus \Sigma_2$ 中的公式定义的性质存在可测试的例子。由于子图无关性和子图包含都是可测试的，Hanf 范式提示我们，下一步可以研究（否定的）Hanf 句子，即邻域性质的可测试性。虽然 Hanf 句子显然是可测试的，我们提出一个开放问题：每个否定的 Hanf 句子是否都可测试。

需要指出，并非所有 Σ_2-性质都是 GSF-局部的。事实上，子图包含可以用 Σ_1 表达，但它并非 GSF-局部性质。还需注意，第 8 节中针对邻域性质的测试器具有单侧误差，即对于满足该性质的图，测试器总是接受。最后请注意，与子图无关性和诱导子图无关性不同，τ-邻域正则性和 τ-邻域无性既不是单调的，也不是遗传的；单调性质在边删除下封闭，而遗传性质在顶点删除下封闭。如前所述，Ito 等人 [27] 最近刻画了有界度（有向和无向）图模型中具有单侧误差、可通过常数次查询测试的单调图性质和遗传图性质。要完整刻画有界度图模型中具有单侧误差的可测试性质，重要的是超越单调图性质和遗传图性质。

附录 A. 第5.4节中推迟的证明：定理 5.1 的另一种证明。现在，我们利用 [15] 中的一个结果，以及引理 5.7（即 ψ_{graph} 的模型构成一个扩展子图族），给出定理 5.1 的另一种证明。首先，我们引入“超有限图”的定义。

DEFINITION A.1. 设 $\varepsilon \in (0,1]$ 且 $k \geq 1$。若图 G 的最大度有上界 d，并且可以从 G中删除至多 $\varepsilon d|V|$ 条边，使得所得图的每个连通分量至多包含 k 个顶点，则称图 G 是 (ε, k)-超有限的。对于函数 $\rho : (0,1] \to \mathbb{N}^+$，若图 G 对每个 $\varepsilon > 0$都是 $(\varepsilon, \rho(\varepsilon))$-超有限的，则称其为 ρ-超有限的。若图的集合（或性质） Π 中的每个图都是 ρ-超有限的，则称该集合（或性质） Π 是 ρ-超有限的。若图的集合（或性质） Π 对于某个函数 ρ是 ρ-超有限的，则称该集合（或性质） Π 是超有限的。

现在回顾一下，图性质是一个在图同构下保持不变的图集合。性质 P 的子性质是 P 中的一个图子集，并且在图同构下也保持不变。

LEMMA A.2（ [15]中的推论1.1）。设 C_d 为最大度有界的图类 d。设 $P \subseteq C_d$ 为不包含无限超有限子性质的性质，且 $P' \subseteq C_d$为任意性质，使得 $P \cap P'$为无限集合。那么 $P \cap P'$ 不可测试。

现在我们准备好给出定理 5.1 的另一个证明。

（另一种）定理 5.1 的证明。我们证明性质 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 不包含无限超有限子性质。如果这是真的，那么应用引理 A.2，并取 $P = \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 和 $P' = C_d$，可得 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 不可测试。由此便完成了定理 5.1 的证明。

反设 $\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 包含一个无限超有限子性质。也就是说，存在一个无限子集 $Q \subseteq \mathcal{P}_{\text{graph}}$ 和一个函数 $\rho : (0,1] \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，Q 都是 $(\varepsilon, \rho(\varepsilon))$-超有限的。也就是说，对于任意图 $G = (V, E) \in Q$，以及任意 $\varepsilon > 0$，我们都可以从 G 中删除 $\varepsilon d|V|$ 条边，使所得图的每个连通分量至多有 $\rho(\varepsilon)$ 个顶点。现在，取任意小的常数 ε，使得 $\rho(\varepsilon) \ll |V|$ 且 $\varepsilon \leq \frac{\xi}{100d}$，其中$\xi$ 是引理 5.7 中的常数。令 V_1, $V_2, \ldots$ 为 V的一个顶点划分，使得 $|V_i| \leq \rho(\varepsilon)$，且跨越不同部分的边数至多为 $\varepsilon d|V|$。令 S为一个顶点子集，它是前 j个部分 $V_1, \cdots, V_j$的并集，并满足 $|\cup_{i \leq j-1} V_i| < \frac{|V|}{3}$ 和 $|\cup_{i \leq j} V_i| \geq \frac{|V|}{3}$。注意，这样的集合总是存在，因为

$|V_i| \le \rho(\varepsilon) \ll |V|$，并且还有 $|S| = |\cup_{i\le j} V_i| < \frac{|V|}{2}$。一方面，$|\langle S, \bar{S}\rangle|$ 不超过跨越不同部分的边数，因此至多为 $\varepsilon d|V|$。另一方面，由于 $G \in \mathcal{P}_{\text{graph}}$，$G$ 是一个 ξ-扩展图，其中 ξ 是引理 5.7 中的某个常数。因此，$|\langle S, \bar{S}\rangle| \ge \xi\frac{|V|}{3} > \varepsilon d|V|$，这与我们对 ε 的设定矛盾。因此，$\mathcal{P}_{\text{graph}}$ 不包含无限超有限子性质。定理的证明至此完成。

□

附录 B. 第 7.3.1 节中的延后证明。

CLAIM B.1. 每个结构 $A \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$ 都满足 φ_{tree}。

证明。令 $A \in \bigcup_{1\le k\le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$。那么存在 $k \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$.

根据定义，$\varphi_{\text{tree}} := \exists^{\le 1} x \varphi_{\text{root}}(x) \wedge \varphi \wedge \forall x(\psi(x) \vee \chi(x))$，其中

$$\varphi := \forall x\Big(\big(\varphi_{\text{root}}(x) \wedge R(x,x)\big) \vee \big(\exists^{=1} y F(y,x) \wedge \neg\exists y R(x,y) \wedge \neg\exists y R(y,x)\big)\Big),$$

$$\psi(x) := \neg\exists y F(x,y) \wedge \bigwedge_{k\in([D]^2)^2} L_k(x,x) \wedge \forall y\Big(y \ne x \to \bigwedge_{k\in([D]^2)^2} \neg L_k(x,y) \wedge \bigwedge_{k\in([D]^2)^2} \neg L_k(y,x)\Big)$$

and

$$\chi(x) := \neg\exists y \bigvee_{k\in([D]^2)^2} \big(L_k(x,y) \vee L_k(y,x)\big) \wedge \bigwedge_{k\in([D]^2)^2} \exists y_k\Big(x \ne y_k \wedge F_k(x,y_k) \wedge \big(\bigwedge_{k'\in([D]^2)^2, k'\ne k} \neg F_{k'}(x,y_k)\big) \wedge \forall y(y \ne y_k \to \neg F_k(x,y))\Big).$$

因此，只需证明 $A \models \exists^{\le 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$、$A \models \varphi$ 和 $A \models \forall x(\psi(x) \vee \chi(x))$。

为证明 $A \models \exists^{\le 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$，注意到根据 ρ_k 的构造，我们有 $A \not\models \varphi_{\text{root}}(a)$，对于任意满足 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \notin \tau^k_{d,2,\sigma}$ 的 $a \in U(A)$。由于 ρ_k 将邻域类型为 $\tau^k_{d,2,\sigma}$ 的元素出现次数限制为至多一次，这证明至多存在一个满足 $A \models \varphi_{\text{tree}}(a)$ 的 $a \in U(A)$，因而 $A \models \exists^{\le 1} x \varphi_{\text{root}}(x)$。

为证明 $A \models \varphi$，令 $a \in U(A)$ 为任意元素。由于 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$，存在一个 $i \in I_k$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \in \tau^i_{d,2,\sigma}$。但根据定义，存在 $\tilde{A} \models \varphi$ 和 $\tilde{a} \in U(\tilde{A})$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \cong (\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a}), \tilde{a})$。设 f 是从 $(\mathcal{N}_2^A(a), a)$ 到 $(\mathcal{N}_2^A(\tilde{a}), \tilde{a})$ 的同构。首先考虑 $A \models \varphi_{\text{root}}(a) := \forall y \neg F(y,a)$ 的情形。假设存在 $\tilde{b} \in U(\tilde{A})$，使得 $(\tilde{b}, \tilde{a}) \in F(\tilde{A})$。由于 $\tilde{b} \in N_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})$，必定存在一个元素 $b \in N_2^A(a)$，使得 $f(b) = \tilde{b}$。由于 f 是将 a 映射到 $\tilde{a}$ 的同构，这就意味着 $(b,a) \in F(A)$，与 $A \models \varphi_{\text{root}}(a)$ 矛盾。因此 $A \models \varphi_{\text{root}}(\tilde{a})$。由于 $\tilde{A} \models \varphi'_{\text{tree}}$，所以 $A \models \varphi$，这意味着 $(\tilde{a}, \tilde{a}) \in R(A)$。但由于 f 是将 a 映射到 $\tilde{a}$ 上的同构，这意味着 $(a,a) \in R(A)$。现在考虑 $A \not\models \varphi_{\text{root}}(a)$ 的情形。于是存在 $b \in U(A)$，使得 $(b,a) \in F(A)$。由于 f 是同构，这意味着 $(f(b), \tilde{a}) \in F(\tilde{A})$。因此 $\tilde{A} \models \exists^{=1} y F(y,\tilde{a}) \wedge \neg\exists y R(\tilde{a}, y) \wedge \neg\exists y R(y,\tilde{a})$，因为 $A \models \varphi$。现在假设存在 $b' \ne b$，使得 $(b', a) \in F(A)$。于是 $f(b) \ne f(b')$ 且 $(f(b), \tilde{a})$、$(f(b'), \tilde{a}) \in F(\tilde{A})$。由于这与 $\tilde{A} \models \exists^{=1} y F(y,\tilde{a})$ 矛盾，因此有 $A \not\models \exists^{=1} y F(y,a)$。此外，假设存在 $b' \in U(A)$，使得 $(a, b') \in R(A)$ 或 $(b', a) \in R(A)$ 成立。那么 $(\tilde{a}, f(b')) \in R(A')$ 或 $(f(b'), \tilde{a}) \in R(A)$ 必有其一，这与 $A \models \neg\exists R(\tilde{a}, y) \wedge \neg\exists y R(y,\tilde{a})$ 相矛盾。因此 $A \models \neg\exists y R(a,y) \wedge \neg\exists y R(y,a)$，由此完成了 $A \models \varphi$ 的证明。

我们通过针对每个元素 $a \in U(A)$ 考虑两种情形 $A \models \neg\exists y F(a,y)$ 和 $A \models \exists y F(a,y)$，来证明 $A \models \forall x(\psi(x) \vee \chi(x))$。为此，令 $a \in U(A)$ 为任意元素。根据 ρ_k 的构造，存在 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$ 和 $\tilde{a} \in U(A)$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \cong (\mathcal{N}_2^A(\tilde{a}), \tilde{a})$。令 f 为从 $(\mathcal{N}_2^A(a), a)$ 到 $(\mathcal{N}_2^A(\tilde{a}), \tilde{a})$ 的同构。首先考虑 $A \models \neg\exists y F\ a\ y$ 和 $b \in U\ A$ 和 $\tilde{a}\ b\ \in(,)$ 的情形。$F\ \tilde{A}$ $a\ f^{-1}\ \tilde{b}\ \in F\ A$ $\tilde{A} \models \neg\exists y F\ \tilde{a}\ y$ 如果存在 $(\,)$，使得 $(,)(\,)$，那么 $(,(\,))(\,)$，这与我们的假设矛盾。因此，$(,)$，这意味着 $A \not\models \chi(\tilde{a})$。但由于 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$，所以 $A \models \forall x(\psi(x) \vee \chi(x))$ 成立，这意味着 $\tilde{A} \models \psi(\tilde{a})$。因此，对于每个 $k \in ([D]^2)^2$，都有 $(\tilde{a},\tilde{a}) \in L_k(\tilde{A})$。由于 f 是同构，且 $f(a) = \tilde{a}$，因此对于每个 $k \in ([D]^2)^2,,$ 都有 $(a,a) \in L_k(A)$，从而 $A \models \bigwedge_{k\in([D]^2)_2} L_k(a,a)$。此外，假设存在 $b \in U(A)$、$b \neq a$ 和 $k \in ([D]^2)^2$，使得 $(a,b) \in L_k(A)$ 或 $(b,a) \in L_k(A)$ 成立。由于 f 是同构，这意味着 $(\tilde{a}, f(b)) \in L_k(A)$ 或 $(f(b)\ \tilde{a}) \in L_k(\tilde{A})$，这与 $\tilde{A} \models \chi(\tilde{a})$ 矛盾。因此 $A \models \forall y\Big(y \neq a \to \bigwedge_{k\in([D]^2)_2} \neg L_k(a,y) \wedge \bigwedge_{k\in([D]^2)_2} \neg L_k(y,a)\Big)$，从而证明了 $A \models \psi(a)$。

现在考虑存在一个元素 $b \in U(A)$，使得 $(a,b) \in F(A)$ 的情形。由于这意味着 $(\tilde{a}, f(b)) \in F(A)$，因此得到 $A \not\models \psi(\tilde{a})$，进而得到 $A \models \chi(\tilde{a})$。现在假设存在 $b \in U(A)$ 和 $k \in ([D]^2)^2$，使得 $(a,b) \in L_k(A)$ 或 $(b,a) \in L_k(A)$。但这样一来，要么 $(\tilde{a}, f(b)) \in L_k(A)$，要么 $(f(b)\ \tilde{a}) \in L_k(A)$，这与 $\tilde{A} \models \chi(\tilde{a})$ 矛盾。因此 $A \models \neg\exists y \bigvee_{k\in([D]^2)_2} \big(L_k(a,y) \vee L_k(y,a)\big)$。对于每个 $k \in ([D]^2)^2,,$ 令 $\tilde{b}_k \in U(\tilde{A})$ 为满足 $\tilde{A} \models \tilde{a} \neq \tilde{b}_k \wedge F_k(\tilde{a} \wedge, \tilde{b}_k) (\bigwedge_{k'\in([D]^2)_2, k'\neq k} \neg F_{k'}(\tilde{a},\tilde{b}_k)) \wedge \forall y(y \neq b_k \to \neg F_k(\tilde{a},y))$ 的一个元素。由于 f 是同构，这意味着对于每个 $k' \in ([D]^2)^2$，$k' \neq k$，$a \neq b_k := f^{-1}(\tilde{b}_k)$、$(a,b_k) \in F_k(A)$ 且 $(a,b_k) \notin F_{k'}(A)$。此外，假设存在 $b \in U(A)$、$b \neq b_k$，使得 $(a,b) \in F_k(A)$。由于 f 是同构，这意味着 $f(b) \neq f(b_k) = b_k$ 且 $(\tilde{a},b) \in F_k(A)$，这与 $A \models \forall y(y \neq b_k \to \neg F_k(\tilde{a},y))$ 矛盾。因此 $A \models \forall y(y \neq b_k \to \neg F_k(a,y))$，由此得出 $A \models \chi(a)$。这证明了在两种情形下，$A \models \psi(a) \vee \chi(a)$，因此 $A \models \forall x(\psi(x) \vee \chi(x))$。

□

Claim B.2. 每个结构 $A \in \bigcup_{1\leq k\leq m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$ 都满足 $\varphi_{\text{rotationMap}}$。

证明。设 $A \in \bigcup_{1\leq k\leq m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$。那么存在一个 $k \in \{1,\dots,m\}$，使得 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$。

根据定义，$\varphi_{\text{rotationMap}} = \varphi \wedge \psi$，其中

$$\varphi := \forall x \forall y \Big(\bigwedge_{i,j\in[D]^2} (E_{i,j}(x,y) \to E_{j,i}(y,x)) \Big) \text{ and}$$

$$\psi := \forall x \Big(\bigwedge_{i\in[D]^2} \Big(\bigvee_{j\in[D]^2} \big(\exists^{=1} y E_{i,j}(x,y) \wedge \bigwedge_{\substack{j'\in[D]^2 \\ j'\neq j}} \neg\exists y E_{i,j'}(x,y)\big)\Big)\Big).$$

因此，只需证明 $A \models \varphi$ 和 $A \models \psi$。

为证明 $A \models \varphi$，反设存在 $a,b \in U(A)$，使得对于某一对 $i,j \in [D]^2$，有 $(a,b) \in E_{i,j}(A)$，但 $(b,a) \notin E_{j,i}(A)$。根据 $\mathcal{P}_{\rho_k}$ 的构造，存在一个结构 $A \models \varphi_{\mathsf{z}}$ 和 $\tilde{a} \in U(A)$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a), a) \cong (\mathcal{N}_2^A(\tilde{a}), \tilde{a})$。设 f 是从 $(\mathcal{N}_2^A(a), a)$ 到 $(\mathcal{N}_2^A(\tilde{a}), \tilde{a})$ 的一个同构。注意，$f(b)$ 有定义，因为 b 位于 a 的二邻域中。此外，由于 f 是一个同构，$(a,b) \in E_{i,j}(A)$ 意味着 $(\tilde{a}, f(b)) \in E_{i,j}(A)$，而 $(b,a) \notin E_{j,i}(A)$ 意味着 $(f(b)\ \tilde{a}) \notin E_{j,i}(A)$。因此 $A \not\models \varphi$，这与 $A \models \varphi_{\text{rotationMap}}$ 矛盾。

为证明 $A \models \psi$，反设存在一个 $a \in U(A)$和$i \in [D]^2$，使得对于每个 $j \in [D]^2$，$A \not\models \exists^{=1} y E_{i,j}(a,y) \wedge \bigwedge_{j' \in [D]^2} \neg\exists y E_{i,j'}(a,y)$。$j' \neq j$我们知道，存在一个结构 $\tilde{A} \models \varphi_{\mathsf{Z}}$ 和 $\tilde{a} \in U(\tilde{A})$，使得$(\mathcal{N}_2^A(a)\ a) \cong (\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})\ \tilde{a})$。设 f是从$(\mathcal{N}_2^A(a)\ a)$到$(\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})\ \tilde{a})$的一个同构。由于 $\tilde{A} \models \psi$，必定存在 $j \in [D]^2$，使得$\tilde{A} \models \exists^{=1} y E_{i,j}(\tilde{a},y) \wedge \bigwedge_{j' \in [D]^2} \neg\exists y E_{i,j'}(\tilde{a},y)$。因此$j' \neq j$必定存在 $\tilde{b} \in U(\tilde{A})$，使得$(\tilde{a},\tilde{b}) \in E_{i,j}(\tilde{A})$，这意味着$(a, f^{-1}(\tilde{b})) \in E_{i,j}(A)$。由于我们假设$A \not\models \exists^{=1} y E_{i,j}(a,y) \wedge \bigwedge_{j' \in [D]^2} \neg\exists y E_{i,j'}(a,y)$，因此$j' \neq j$必定存在以下情形之一：存在 $b \neq f^{-1}(\tilde{b})$，使得$(a,b) \in E_{i,j}(A)$；或者存在 $j' \in [D]^2$, $j' \neq j$和 $b' \in U(A)$，使得$(a,b') \in E_{i,j'}(A)$。在第一种情形下，$(\tilde{a}, f(b)) \in E_{i,j}(A)$，因为$f$ 是一个同构。但这样一来，$\tilde{A} \not\models \exists^{=1} y E_{i,j}(\tilde{a},y)$，这就矛盾了。在第二种情形下，我们得到$(\tilde{a}, f(b')) \in E_{i,j'}(A)$。但这样一来，$A \not\models \bigwedge_{j' \in [D]^2} \neg\exists y E_{i,j'}(\tilde{a},y)$，$j' \neq j$

这与假设矛盾。因此 $A \models \varphi \wedge \psi$。 □

CLAIM B.3. 每个结构 $A \in \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$ 都满足 φ_{base}。

证明。设 $A \in \bigcup_{1 \le k \le m} \mathcal{P}_{\rho_k} \setminus \{A_\emptyset\}$。那么存在一个 $k \in \{1,\dots,m\}$ 使得 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$。

根据定义，$\varphi_{\text{base}} := \forall x \big(\varphi_{\text{root}}(x) \to (\varphi(x) \wedge \psi(x))\big)$，其中

$$\varphi(x) := \bigwedge_{i,j \in [D]^2} \Big(E_{i,j}(x,x) \wedge \forall y \Big(x \neq y \to \big(\neg E_{i,j}(x,y) \wedge \neg E_{i,j}(y,x)\big)\Big)\Big) \text{ and}$$

$$\psi(x) := \bigwedge_{\substack{\mathrm{ROT}_{H^2}(k,i) = (k',i') \\ k,k' \in ([D]^2)^2 \\ i,i' \in [D]^2}} \exists y \exists y' \big(F_k(x,y) \wedge F_{k'}(x,y') \wedge E_{i,i'}(y,y')\big).$$

因此，只需证明对于每个 $a \in U(A)$，只要 $A \models \varphi_{\text{root}}(a)$，就有 $A \models \varphi(a)$ 和 $A \models \psi(a)$。因此，假设 $a \in U(A)$ 是满足 $A \models \varphi_{\text{root}}(a)$ 的任意元素。由于 $A \in \mathcal{P}_{\rho_k}$存在一个 $i \in I_k$，使得$(\mathcal{N}_2^A(a)\ a) \in \tau^i_{d,2,\sigma}$。根据定义，存在一个结构 $\tilde{A} \models \varphi_{\mathsf{Z}}$ 和 $\tilde{a} \in U(\tilde{A})$，使得 $(\mathcal{N}_2^A(a)\ a) \cong (\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})\ \tilde{a})$。令 f 为从 $(\mathcal{N}_2^A(a)\ a)$到$(\mathcal{N}_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})\ \tilde{a})$的同构。假设存在一个元素 $b \in U(A)$，使得$(b,\tilde{a}) \in F(A)$。由于 f是同构，并且$\tilde{b} \in N_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})$，我们得到 $(f^{-1}(\tilde{b})\ a) \in F(A)$，这与 $A \models \varphi_{\text{root}}(a)$ 矛盾，因为 $\varphi_{\text{root}}(x) := \forall y \neg F(y,x)$。因此，不存在元素 $b \in U(A)$使得$(b,\tilde{a}) \in F(A)$，这意味着 $A \models \varphi_{\text{root}}(\tilde{a})$。但是由于$A \models \varphi_{\mathsf{Z}}$，我们有 $A \models \varphi_{\text{base}}$ 并且，因此 $A \models \varphi(\tilde{a})$ 和 $A \models \psi(\tilde{a})$。

要证明 $A \models \varphi(a)$，首先注意到，对于任意 i、$j \in [D]^2$，$(a,a) \in E_{i,j}(A)$，因为$\tilde{A} \models \varphi(\tilde{a})$ 意味着对于任意 i、$j \in [D]^2$，$(\tilde{a},\tilde{a}) \in E_{i,j}(\tilde{A})$，并且 f 是一个将 a 映到 $\tilde{a}$的同构。假设存在一个元素 $b \in U(A)$、$b \neq a$ 以及索引 i、$j \in [D]^2$，使得要么 $(a,b) \in E_{i,j}(A)$，要么 $(b,a) \in E_{i,j}(A)$。由于 $b \in N_2^A(a)$且f是一个同构，我们得到 $f(b) \neq f(a) = \tilde{a}$，并且要么$(\tilde{a}, f(b)) \in E_{i,j}(A)$，要么$(f(b)\ \tilde{a}) \in E_{i,j}(A)$。但这与 $A \models \varphi(\tilde{a})$ 矛盾，因此 $A \models \varphi(a)$。

现在证明 $A \models \psi(a)$。令 $k,k' \in ([D]^2)^2$ 以及 $i,i' \in [D]^2$，使得 $\mathrm{ROT}_{H^2}(k,i) = (k',i')$。由于 $A \models \psi(\tilde{a})$，必定存在元素 $b,b' \in U(A)$，使得 $(\tilde{a},\tilde{b}) \in F_k(\tilde{A})$、$(\tilde{a},\tilde{b}') \in F_{k'}(\tilde{A})$以及 $(\tilde{b},\tilde{b}') \in E_{i,i'}(\tilde{A})$。但由于 $\tilde{b}$, $\tilde{b}' \in N_2^{\tilde{A}}(\tilde{a})$，我们得到 $f^{-1}(\tilde{b})$ 和 $f^{-1}(\tilde{b}')$ 都有定义，并且由于 f 是同构，我们得到

$(a, f^{-1}(\tilde{b})) \in F_k(A)$，$(a, f^{-1}(\tilde{b}')) \in F_{k'}(A)$以及$(f^{-1}(\tilde{b}), f^{-1}(\tilde{b}')) \in E_i$，$_{i'}(A)$。因此 $A \models \exists y \exists y' \big(F_k(a, y) \wedge F_{k'}(a, y') \wedge E_i$，$_{i'}(y, y')$对于任意 $k, k' \in ([D]^2)^2$和 $i, i' \in [D]^2$，满足 $\mathrm{ROT}_{H^2}(k, i) = (k', i')$，这意味着 $A \models \psi(a)$。

致谢。我们感谢 Sebastian Ordyniak 富有启发性的讨论。第二作者感谢 Micha l Pilipczuk 和 PierreSimon在 2018 年布拉格稀疏性博士课程期间进行的富有启发性的讨论。

参考文献

[1] I. Adler and F. Harwath, *Property testing for bounded degree databases*, 载于第35届理论计算机科学前沿研讨会（STACS 2018），2018年2月28日至3月3日，法国卡昂，2018年，第6:1–6:14页。[2] I. Adler, N. Köhler, and P. Peng, *GSF-locality is not sufficient for proximity-obliviousstesting*, 载于第36届计算复杂性会议（CCC 2021），2021年7月20日至23日，加拿大安大略省多伦多（线上会议），V. Kabanets 编，第200卷 LIPIcs，Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2021年，第34:1–34:27页，https://doi.org/ 10.4230/LIPIcs.CCC.2021.34，https://doi.org/10.4230/LIPIcs.CCC.2021.34。[3] I. Adler, N. Köhler, and P. Peng, *On testability of first-order properties in bounded-degree graphs*, 载于2021年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA 2021），线上会议，2021年1月10日至13日，D. Marx 编，SIAM，2021年，第1578–1597页，https://doi.org/10.1137/1.9781611976465.96，https://doi.org/10.1137/1. 9781611976465.96。[4] N. Alon, E. Fischer, M. Krivelevich, and M. Szegedy, *Efficient testing of large graphs*, Combinatorica，20（2000），第451–476页。初步版本发表于 FOCS'99。[5] N. Alon, E. Fischer, I. Newman, and A. Shapira, *A combinatorial characterization of thetestable graph properties: it's all about regularity*, SIAM 计算杂志，39（2009），第143–167页。[6] N. Alon and V. D. Milman, *λ1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, 组合理论杂志 B 辑，38（1985），第73–88页。[7] I. Benjamini, O. Schramm, and A. Shapira, *Every minor-closed property of sparse graphs is testable* 223 2010 2200 2218，数学进展，（），第–页。[8] M. Blum, M. Luby, and R. Rubinfeld, *Self-testing/correcting with applications to numerical problems* 47 1993 549 595，计算机与系统科学杂志，（），第–页。[9] B. Bollig and D. Kuske, *An optimal construction of hanf sentences*, 应用逻辑杂志，10（2012），第179–186页，https://doi.org/10.1016/j.jal.2012.01.002，http://dx.doi.org/10.1016/j.jal.2012.01.002。[10] H. Chen and Y. Yoshida, *Testability of homomorphism inadmissibility: Property testingmeets database theory*, 载于第38届 ACM SIGMOD-SIGACT-SIGAI 数据库系统原理研讨会论文集，2019年，第365–382页。[11] A. Czumaj, P. Peng, and C. Sohler, *Relating two property testing models for bounded degreedirected graphs*, 载于第48届 ACM SIGACT 理论计算年会论文集（STOC 2016），美国马萨诸塞州剑桥，2016年6月18日至21日，2016年，第1033–1045页。[12] R. Diestel, *Graph Theory, 4th Edition*, 数学研究生教材第173卷，Springer，2012年。[13] J. Dodziuk, *Difference equations isoperimetric inequality and transience of certain random walks* 284 1984 787 794，《美国数学会汇刊》，（），第–页。[14] H. Ebbinghaus and J. Flum, *Finite model theory*, 数学逻辑展望丛书，Springer，1995年。[15] H. Fichtenberger, P. Peng, and C. Sohler, *Every testable (infinite) property of bounded-degree graphs contains an infinite hyperfinite subproperty*, 载于第三十届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，工业与应用数学学会，2019年，第714–726页。[16] S. Forster, D. Nanongkai, T. Saranurak, L. Yang, and S. Yingchareonthawornchai, *Computing and testing small connectivity in near-linear time and queries via fast local cut algorithms* 2020，SODA，（）。[17] H. Gaifman, *On local and non-local properties*, 1982年。[18] O. Goldreich, *Introduction to property testing*, 剑桥大学出版社，2017年。[19] O. Goldreich, S. Goldwasser, and D. Ron, *Property testing and its connection to learning and approximation* 45 1998 653 750，ACM 杂志（JACM），（），第–页。[20] O. Goldreich and T. Kaufman, *Proximity oblivious testing and the role of invariances*, 载于

《复杂性与密码学研究：随机性与计算交互关系杂论》，Springer，2011年，第173–190页。
[21] O. Goldreich and D. Ron, *Property testing in bounded degree graphs*, Algorithmica, 32（2002），第302–343页，https://doi.org/10.1007/s00453-001-0078-7，http://dx.doi.org/10.1007/s00453-001-0078-7。[22] O. Goldreich and D. Ron, *On proximity-oblivious testing*, SIAM 计算杂志，40（2011），第534–566页。[23] O. Goldreich and I. Shinkar, *Two-sided error proximity oblivious testing*, 随机结构与算法，48（2016），第341–383页。
[24] W. Hanf, *The Theory of Models*, North Holland，1965年，章节：初等逻辑研究中的模型论方法，第132–145页。[25] A. Hassidim, J. A. Kelner, H. N. Nguyen, and K. Onak, *Local graph partitions for approx-imation and testing*, 载于2009年第50届 IEEE 计算机科学基础年会，IEEE，2009年，第22–31页。[26] S. Hoory, N. Linial, and A. Wigderson, *Expander graphs and their applications*, 《美国数学会通报》，43（2006），第439–561页。
[27] H. Ito, A. Khoury, and I. Newman, *On the characterization of* 1*-sided error strongly-testable graph properties for bounded-degree graphs*, 即将发表于《计算复杂性杂志》。arXiv:1909.09984,（2019）。[28] K.-i. Kawarabayashi and Y. Yoshida, *Testing subdivision-freeness: property testing meetsstructural graph theory*, 载于第45届 ACM 理论计算年会论文集，ACM，2013年，第437–446页。[29] A. Kumar, C. Seshadhri, and A. Stolman, *Random walks and forbidden minors ii: a poly (d ε-1)-query tester for minor-closed properties of bounded degree graphs*, 载于第51届 ACM SIGACT 理论计算年会论文集，2019年，第559–567页。[30] L. Lovász, *Large Networks and Graph Limits*, 美国数学会出版物第60卷，美国数学会，2012年。[31] I. Newman and C. Sohler, *Every property of hyperfinite graphs is testable*, SIAM 计算杂志，42（2013），第1095–1112页。
[32] L. S. R. Fagin and M. Vardi, *On monadic np vs. monadic co-np*, 信息与计算，120（1995），第78–92页。[33] O. Reingold, S. Vadhan, and A. Wigderson, *Entropy waves the zig-zag graph product and new constant-degree expanders and extractors* 2000, 157 《数学年刊》，第–187页。[34] R. Rubinfeld and M. Sudan, *Robust characterizations of polynomials with applications to program testing* 25 1996 252 271 , SIAM 计算杂志，（），第–页。[35] Y. Yoshida and H. Ito, *Property testing on k-vertex-connectivity of graphs*, Algorithmica，62（2012），第701–712页。

符号表。

$\mathbb{N}$ 包含 0 的自然数集合$\mathbb{N}_{>0}$ 所有正自然数的集合$[n]$ 集合 $\{0,\dots,n-1\}$⊔ 不交并△ 对称差$\tau_r(x)$ x的固定半径 r 邻域，按同构计$\mathcal{O}(\cdot)$ $o(\cdot)$ 渐近上界 z 之字形乘积$h(G)$ G 的扩张比$\langle S,T\rangle_G$ 在 G中横跨 S和 T的边σ 签名$\sigma_{\mathbf{graph}}$ 含有一个二元关系符号的签名 $E\deg_G(v)$ G中顶点 v 的度$_A\mathrm{dist}_v(w)$ A中顶点 v 与 w 之间的距离$A\mathrm{dist}(\mathcal{P})$ 结构 A 与性质 $\mathcal{P}$之间的距离$_G$ ROT G的旋转映射$M_{u,v}$ 图 G的归一化邻接矩阵 M 的第 (u,v) 个元素$A[S]$ A 由 S导出的子结构$N_r^A(a)$ 结构 A中 a 的 r-邻域R关系 R的元数$\mathcal{C}_d$ 有界度图类 $d\mathcal{C}_{\sigma,d}$ 有界度 σ-结构类 $d\mathcal{P}_\varphi$ 由公式定义的性质 $\varphi\Sigma_i$, Π_i, Δ_i 具有 $i-1$ 次量词交替的前缀类⊨ 是.....的模型≡ 一阶公式等价$\equiv_d$ 有界度结构上的一阶公式等价 $d\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ 逻辑否定、合取、析取、蕴含和双向蕴含∃, $\forall$ 存在量词和全称量词 $\mathrm{ans}_{\mathcal{A}}(q)$ 查询的答案 q 结构 $\mathcal{A}^{E_{i,j},F_k,R,L_k}$ 用于 i、$j\in[D]^2$ 和 $k\in([D]^2)$ 的二元关系符号$^2\underline{G}(A)$ 模型 A 的底层图φzφz 第 3 节中定义的公式，其底层图是扩展图$\mathfrak{M}$ 在 Σ_2中的某个句子的模型集合$\mathfrak{H}$ 在 $\mathcal{C}_\sigma$中两两不同构结构的极大集合$_d\mathrm{pos}^i(\overline{x},\overline{y})$, $\mathrm{neg}^i(\overline{x},\overline{y})$ 分别为包含元组 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$中所有变量的原子公式合取式（及其否定式）^{G} $\mathrm{maxcl}_{v,i}$ 包含 v的极大 i-团的数量$\mathcal{K}^G$ G中的极大团集合$\rho_{A,r}$ r的类型分布 $A\delta^r_{\odot}(A,B)$ 两个 σ-结构 A 与 B之间深度为 r 的采样距离HNF Hanf 范式 POT 邻近无关测试器 GSF 广义子图自由性