arXiv:2304.03831v1 [math.OC] 7 Apr 2023

关于最优状态反馈与扰动响应控制器之间的关系

Runyu（Cathy）Zhang*、Yang Zheng、Weiyu Li*、Na Li***

*工程与应用科学学院, 哈佛大学 **电气与计算机工程系, 加利福尼亚大学圣迭戈分校

摘要： 本文研究了标准线性二次调节器（LQR）中状态反馈策略与扰动响应策略之间的关系。对于开环稳定系统，我们建立了最优状态反馈控制器 $u_t = K_\star x_t$ 与最优扰动响应控制器 $u_t = L_\star^{(H)}{}_{;\,1} w_{t-1} + \ldots + L_\star^{(H)}{}_{;\,H} w_{t-H}$ 之间的简单关系，其中 H 阶。此处x_t，w_t，u_t 分别表示系统的状态、扰动和控制动作。我们的结果表明，$L_\star^{(H)}{}_{,\,1}$ 是 $K_\star$ 的良好近似，并且近似误差 $\|K_\star - L_\star^{(H)}{}_{,\,1}\|$ 随 H 指数衰减。进一步地，当存在预稳定控制器 K_0 时，我们将这一结果推广到了开环不稳定系统的 LQR。

关键词： 线性二次调节器、状态反馈控制、扰动响应控制

1. 引言

线性二次调节器（LQR）是最基础、最有趣的最优控制问题之一（Anderson 和 Moore，2007）。其解析解和数值方法在相关文献中已经较为成熟。具体而言，离散时间域中的无限时域线性二次调节器表述如下:

$$\begin{aligned} \min_{\{u_t\}_{t=0}^{+\infty}} \quad & C := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{T-1} \left(x_t^\top Q x_t + u_t^\top R u_t + 2 u_t^\top S x_t \right) \\ \text{subject to} \quad & x_{t+1} = A x_t + B u_t + w_t, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x_t \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态，$u_t \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入，$w_t \sim \mathcal{N}(0,\ I)$ 是外部高斯过程噪声，$Q \succ 0$、$R \succ 0$ 和 $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是性能矩阵。在本文中，我们作出标准假设 that $\begin{bmatrix} Q & S^\top \\ S & R \end{bmatrix} \succ 0$.

众所周知，问题 (1) 的最优解是一个状态反馈控制器（或策略） $u_t = K_\star x_t$，最优增益 $K_\star \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可通过求解代数黎卡提方程计算得出（Anderson and Moore, 2007）。黎卡提方程的性质及其数值解已得到广泛研究（Kwakernaak and Sivan, 1969; Kleinman, 1968; Englar and Kalman, 1966）。这些结果大多基于模型，并且需要知道系统矩阵 A, B 以及权重矩阵Q，R，S。受强化学习中无模型策略优化取得成功的启发，许多近期研究（参见 Hu et al. (2022) 的综述及其中的参考文献）开始通过将 LQR 代价 $C(K)$ 视为策略参数化$K \in \mathbb{R}^{m\times n}$的函数，直接搜索最优策略。这种表述 $C(K)$ 更适用于无模型策略优化，但通常是非凸的。得益于优化景观中的梯度占优等特殊性质（Fazel et al., 2018），尽管存在非凸性，这些方法仍能为标准 LQR 问题找到最优控制器。然而，这些性质往往无法推广到其他线性最优控制问题，例如稀疏或结构化 LQR、部分可观测系统（Zheng et al., 2021; Hu et al., 2022），因此，要开发具有可证明收敛性和最优性保证的策略优化方法仍然颇具挑战。

为避免非凸性，还有许多其他方法可以对控制策略重新参数化，使代价函数在新参数下变为凸函数。对于一般的输出反馈情形，经典方法是 Youla 参数化（Youla et al., 1976）；近期的两种方法是系统级综合（SLS）（Wang et al., 2019）和输入—输出参数化（IOP）（Furieri et al., 2019）；另请参见 Zheng et al. (2022) 提出的两种新参数化方法。另一个具体思路是将控制策略参数化为过去扰动的函数 w_t，这称为扰动响应控制 （DRC）（Goulart et al., 2006; Agarwal et al., 2019a）。具体而言，对于开环稳定的对象，给定时域 $H \in \mathbb{N}$，我们可以采用如下形式的 DRC

$$u_t = L_1^{(H)} w_{t-1} + \ldots + L_H^{(H)} w_{t-H}, \tag{2}$$

其中 $L_k^{(H)} \in \mathbb{R}^{m\times n}, k = 1, \ldots, H$ 为策略参数，并将式 (1) 中的 LQR 代价视为关于$L^{(H)} := \{L_1^{(H)}, \ldots, L_H^{(H)}\}$的函数 $C(L^{(H)})$。不难看出，式 (1) 中闭环状态和输入的取值关于 $L^{(H)}$ 是仿射的，因此 LQR 代价 $C(L^{(H)})$关于 $L^{(H)}$ 是凸的。得益于这种凸性，基于扰动的策略

*本研究得到美国国家科学基金会人工智能研究所资助：2112085；美国海军研究办公室青年研究员计划资助：N00014-19-1-2217；NSFCNS 资助：2003111。联系方式：runyuzhang@fas.harvard.edu、zhengy@eng.ucsd.edu、weiyuli@g.harvard.edu、nali@seas.harvard.edu

参数化形式似乎更简单，也更适用于无模型和在线学习设置，而在线学习和控制领域确实日益重视这些设置；例如参见 Simchowitz 等（2020）；Li 等（2021）；Agarwal等（2019a,b）；Goulart 等（2006）。众所周知，DRC类型的控制器与其他凸参数化形式密切相关，例如上述 Youla、SLS 和 IOP。[1]

我们的贡献。本文研究了最优状态反馈策略 $K_\star$ 与式（2）中的最优 DRC 策略 $L_\star^{(H)}$之间的关系。对于开环稳定系统（即式（1）中的 A 稳定），随着时域 H 增加，最优性能 $C(L_\star^{(H)})$ 将得到改善，并收敛于最优 LQR 性能 $C(K_\star)$，这并不令人意外。Agarwal 等人（2019a）也进行了类似分析，但其在线学习设定略有不同。本文揭示了一种有趣且并非显而易见的关系： $L_\star^{(H)}$中的首个元素 $L_{\star\,1}^{(H)}$;是 $K_\star$ 的良好近似，且近似误差会随 H 增加而呈指数衰减（定理 2）。我们的结果指出了一种可能简单的方式，可将扰动反馈控制器转换为状态反馈控制器——我们无需利用传递函数 [2] , 来求得状态反馈控制器，只需提取 $L_{\star\,1}^{(H)}$;，它本身就是近乎最优的状态反馈控制增益。我们还通过考虑采用固定预稳定控制器 K_0 的 DRC，将这一结果推广到具有不稳定开环系统的 LQR 情形（推论 4）。

我们的结果证明基于两个直觉：i) 由最优状态反馈 $K_\star$ 诱导的最优无限时域扰动响应 $L_\star^{(\infty)}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} L_\star^{(\infty)}$; $_k\, z^{-k}$ 与 $L_\star^{(\infty)}$, $_1 = K_\star$ 完全等价（见式 (14)）；ii) 随着时域 $H \to +\infty$ 增大，最优 $L_{\star\,1}^{(H)}$; 应收敛至 $L_\star^{(\infty)}$; $_1 = K_\star$。尤其是，证明 (ii) 在技术上更为复杂：我们首先推导出 $L_\star^{(H)}$ 满足的线性方程组（引理 5），然后证明 $L_\star^{(\infty)}$ 是该线性方程组的近似解（引理 7 和推论 8）。

相关工作。一些先前的研究建立了状态表示与其他凸参数化之间的某种关系，例如（Goulart 等，2006；Nett 等，1984）。与本文最相似的设定是 Goulart等（2006）的工作，其中作者建立了仿射状态反馈控制器与仿射扰动反馈控制器之间的等价关系。然而，Goulart 等（2006）仅考虑了有限时域问题和动态状态反馈控制器，这与我们在无限时域下的设定不同。Goulart 等（2006）中建立的关系与我们的结果非常不同，证明中涉及的技术也有所不同。

[1] 例如，感兴趣的读者可以在这篇短文中找到一些明确的联系：https://zhengy09.github.io/course/notes/L3.pdf。[2] 也就是说，当控制器 u 采用 DRC 形式 (2) 时，求解从状态 x 到控制 u 的传递函数。

2. 预备知识与问题设定

在本文中，我们考虑如（1）所定义的无限时域、时不变离散时间LQR 问题。贯穿本文，我们使用 $\|\cdot\|$ 来表示矩阵ℓ_2 范数，并使用 $\lambda_{\min}(X)$ 表示对称矩阵 X 的最小特征值。

2.1 状态反馈控制器

当被控对象 $(A,\ B)$ 可稳定时，问题 (1) 的最优解是一个线性状态反馈控制器 $u_t = K_\star x_t$ with(c.f. Anderson andMoore (2007))

$$K_\star = -(R + B^\top P B)^{-1}(B^\top P A + S), \tag{3}$$

其中，后续代价矩阵 P 满足代数黎卡提方程

$$P = A^\top P A - (A^\top P B + S^\top)(R + B^\top P B)^{-1}(B^\top P A + S) + Q.$$

因此，一种自然的思路是使用单个反馈矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 来参数化策略，即 $u_t = K x_t$，我们称之为状态反馈表示。正如引言中所述，这种状态反馈控制器易于实现，但有一个缺点：LQR 代价 $C(K)$ 关于 K变成非凸。

2.2 扰动响应控制器

求解 LQR 问题 (1) 的另一种方法是从扰动响应的角度出发，将该问题转化为凸优化问题。

开环稳定系统。对于开环渐近稳定系统，即 A 的谱半径小于 1，我们可以考虑如下形式的扰动响应控制器（DRC）（Agarwal 等，2019a；Simchowitz 等，2020）：

$$u_t = L_1^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_H^{(H)} w_{t-H},$$

其中 $w_s = 0$ 适用于 $s < 0$。我们可以将 LQR 代价视为 DRC 矩阵的函数 $C(L^{(H)})$

$$L^{(H)} := \{L_1^{(H)}, \ldots, L_H^{(H)}\}.$$

然后，我们求解以下优化问题，以获得最优的 DRC 控制器:

$$\begin{aligned} \min_{L^{(H)}} \ & C(L^{(H)}) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1} x_t^\top Q x_t + u_t^\top R u_t + 2u_t^\top S x_t \\ \text{subject to } & x_{t+1} = A x_t + B u_t + w_t, \\ & u_t = L_1^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_H^{(H)} w_{t-H}. \end{aligned} \tag{4}$$

不难看出，(4) 是关于$L^{(H)}$ 的凸问题，因为闭环状态 x_t 和输入 u_t 都关于 $L^{(H)}$呈仿射形式。

本文旨在建立由 (3) 得到的最优状态反馈策略 $K_\star$与由 (4) 得到的最优 DRC 策略 $L_\star^{(H)}$之间的关系。首先，随着时域 H 的增加，最优性能 $C(L_\star^{(H)})$ 会提升并收敛至最优 LQR 性能 $C(K_\star)$，这并不令人意外。Agarwal 等人（2019a）在略有不同的在线学习设定中也进行了类似分析。为使论述完整，我们在附录 B 中针对 LQR 问题给出自己的分析，说明随着 H 增加，$C(L_\star^{(H)})$ 如何逼近 $C(K_\star)$。除了 $L_\star^{(H)}$与 $K_\star$之间的这种关系之外，

我们还将建立一种有趣且不明显的关系，它直接将 $L_\star^{(H)}$中的第一个元素 $L_{\star\,1}^{(H)}$;与 $K_\star$联系起来，并将在定理 2 中阐述。

开环不稳定系统。上述开环稳定性假设对于 DRC 类型的控制器而言很常见，例如（Agarwal 等，2019b；Simchowitz 等，2020）。通过向 DRC 添加一个固定的预稳定状态反馈增益 K_0，如下所示，我们的结果可以很容易地扩展到不稳定情形。对于不稳定系统，我们不再考虑式（2）中的 DRC，而是考虑带有固定预稳定状态反馈控制增益 K_0 的以下修正 DRC:

$$u_t = K_0 x_t + L_1^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_H^{(H)} w_{t-H}. \tag{5}$$

注意，式（5）中的 K_0 是一个预先固定的矩阵，在优化 $C(L^{(H)})$ 时不会发生变化。鉴于 K_0 能够稳定系统，即 $A+BK_0$ 是稳定矩阵，我们可以通过定义一个辅助变量来重新表述方程（1）

$$\bar{u}_t := u_t - K_0 x_t,$$

于是，LQR 问题可以重新表述为:

$$\begin{aligned} \min_{L^{(H)}} C(L^{(H)}) &:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1} x_t^\top \bar{Q} x_t + \bar{u}_t^\top R \bar{u}_t + 2\bar{u}_t^\top \bar{S} x_t \\ \text{s.t.}\ \ x_{t+1} &= \bar{A} x_t + B\bar{u}_t + w_t, \\ \bar{u}_t &= L_1^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_H^{(H)} w_{t-H}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A} &:= A + BK_0, \quad \bar{S} := RK + S \\ \bar{Q} &:= Q + K_0^\top S + S^\top K_0 + K_0^\top R K_0. \end{aligned} \tag{7}$$

¯注意，$A = A + BK_0$ 现在是一个稳定矩阵。还可以证明，$\lambda_{\min}(R - \bar{S}\bar{Q}^{-1}\bar{S}^\top) > 0$；参见附录中的引理 14。此外，不难验证，最优 $\bar{u}_t$ 应满足 $\bar{u}_t = K_\star x_t$，其中

$$\bar{K}_\star = K_\star - K_0.$$

因此，通过考虑具有预稳定化 K_0的 DRC，我们可以将具有不稳定_A 的 LQR 问题 (1) 转换为具有稳定 A的 LQR 问题 (6)。

3. 主要结果

本节将介绍我们关于 LQR 状态反馈策略与扰动响应策略之间关系的主要结果。

为了刻画稳定程度，我们引入以下指数稳定性的定义。

定义 *1.* ($(\tau,\ e^{-\rho})$-稳定性)。对于 $\tau \geq 1,\ \rho > 0$，若矩阵 A 是 $(\tau,\ e^{-\rho})$-稳定的，则称其为 $(\tau,\ e^{-\rho})$-稳定矩阵，当且仅当 $\|A^k\| \leq \tau e^{-\rho k}$.

注意，对于任意开环渐近稳定系统，都存在某些 $\tau \geq 1$, $\rho > 0$，使得 A 和 $A - BK_\star$ 都是 $(\tau,\ e^{-\rho})$-稳定的，即

$$\|A^k\| \leq \tau e^{-\rho k},\ \ \|(A - BK_\star)^k\| \leq \tau e^{-\rho k}. \tag{8}$$

我们将在主要结果中稍后使用 $\tau,\ \rho$。

3.1 开环稳定系统

本文的主要结果确立了代数黎卡提方程 (3) 得出的最优控制增益 $K_\star$ 与由 (4) 得出的最优 $L_\star^{(H)}$之间的简单关系。具体而言，我们可以证明 $L_{\star\,1}^{(H)}$；是 $K_\star$的良好近似，如下文定理所述。

定理 *2.*（主要结果）。对于开环渐近稳定系统，设 $K_\star$ 为（3）中的最优反馈增益，且 $L_\star^{(H)}$为（4）的最优解。则有

$$\|K_\star - L_{\star;1}^{(H)}\| \leq \frac{2\tau^3(\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\| + \|B\|\|K_\star\|\|S\|)}{\lambda_{\min}(R - SQ^{-1}S^\top)(1 - e^{-2\rho})^{5/2}} e^{-H\rho},$$

其中，$L_{\star\,1}^{(H)}$；表示 $L_\star^{(H)}$ 中的第一个元素。这里，$\tau,\ \rho$ 在（8）中给出。

定理 2 表明，只要 H 足够大，$L_{\star\,1}^{(H)}$；就是 $K_\star$ 的良好近似，并且近似误差相对于 H呈指数衰减。应用一定的扰动分析论证（Tu 和 Recht（2019）中的引理 B.1 以及 Krauth 等（2019）中的引理 C.3）表明，当 H 足够大时，系统也是闭环稳定的，并且使用状态反馈增益 $L_{\star\,1}^{(H)}$；可实现近最优的 LQR 代价。因此，我们不必实现扰动反馈，而是可以将其实现为

$$u_t = L_{\star;1}^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_{\star;H}^{(H)} w_{t-H}$$

（实现扰动反馈较为困难，因为它需要计算和存储历史扰动 w_{t-k}），我们可以直接设计一个增益为 $L_\star^{(H)}$；1的状态反馈，这样更易于实现，同时仍能保证近最优性能。然而，我们还想指出，定理 2 在很大程度上依赖于问题是无约束的这一事实。未来一个有趣的研究方向是探究，在受约束或分布式 LQ 控制场景下，类似的关系是否仍然成立。

注 *3*。（**关于稳定性假设的讨论**）。我们想强调，定理 2 仅在开环稳定性假设下成立，即 A 的谱半径小于 1。具体而言，在证明中，如果 A 不稳定，则一个主要引理（引理 5）将不成立（更多讨论请参见该引理之后的注 6）。事实上，在没有稳定性假设的情况下，对于不够大的 H，可以证明不存在能够使系统稳定的 H 阶 DRC（参见附录中的引理 12）。定理 2 还表明，近似误差取决于稳定性因子 $\tau,\ \rho$；系统越稳定，近似误差就越小。

3.2 向不稳定系统的扩展

如第 2 节末尾所述，通过考虑带有预稳定 K_0的 DRC，我们可以将具有不稳定 A 的 LQR 问题 (1) 转换为具有稳定 A 的 LQR 问题¯(6):

$$u_t = K_0 x_t + L_1^{(H)} w_{t-1} + \cdots + L_H^{(H)} w_{t-H}.$$

因此，我们可以轻松地将定理 2 扩展到不稳定系统，如下所示，

推论 *4*。（不稳定情形的扩展）。设 $K_\star$ 为（3）中的¯最优反馈增益，且 $K_\star := K_\star - K_0$，如果 $\|A + BK_0\|$ 和 $\|A + BK_\star\|$ 均为 $(\tau,\ e^{-\rho})$ -稳定，则（6）中的最优解 $L_\star^{(H)}$满足

$$\|\bar{K}_\star - L_{\star;1}^{(H)}\| \leq \frac{2\tau^3(\|B\|^2\|\bar{K}_\star\|\|\bar{Q}\| + \|B\|\|\bar{K}_\star\|\|\bar{S}\|)}{\lambda_{\min}(R - \bar{S}\bar{Q}^{-1}\bar{S}^\top)(1 - e^{-2\rho})^{5/2}} e^{-H\rho},$$

¯其中 $S,\ Q$ 的定义与式（7）中相同。

4. 证明概要

本节将通过深入研究问题（4），介绍定理 2 主要结果的证明思路。首先，我们引入 Zhang 等人（2022）的一项结果，该结果表明，问题（4）的解可以明确表示为一个线性方程组的解（引理 5）。接下来，我们证明由最优控制增益 $K_\star$ 所诱导的扰动响应是该线性方程组的近似解（引理 7）。结合这两个引理即可得到定理 2 的最终结果。

4.1 问题 (4) 的显式解

不难看出，问题 (4) 是关于变量 $L_1^{(H)}$、.....、$L_H^{(H)}$ 的无约束二次优化问题。因此，最优解应由一个线性方程组给出。事实上，Zhang 等人（2022）已确定了这些方程，现将其正式表述为以下引理。

引理 *5.*（Zhang 等人（2022））对于开环渐近稳定系统，问题 (4) 的最优 $L^{(H)}$ 满足一组线性方程

$$M^{(H)}L^{(H)} + J^{(H)} = 0, \tag{9}$$

其中 $M^{(H)} \in \mathbb{R}^{Hn_u \times Hn_u}$ 和 $J^{(H)} \in \mathbb{R}^{Hn_u \times n_x}$ 为

$$M^{(H)} := \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1H} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2H} \\ \vdots & \vdots & & \\ M_{H1} & M_{H2} & \cdots & M_{HH} \end{bmatrix} J^{(H)} := \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_H \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中子矩阵 $M_{km} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$、$J_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ 定义如下：

$$M_{km} := \begin{cases} B^\top GB + R, & k = m \\ B^\top GA^{k-m}B + SA^{k-m-1}B, & k > m \\ B^\top (A^{m-k})^\top GB + B^\top (A^{m-k-1})^\top S^\top, & k < m \end{cases},$$

$$J_k := B^\top GA^k + SA^{k-1}. \tag{11}$$

此处将 $G \in R^{n_x \times n_x}$ 定义为：

$$G := \sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^\top QA^t. \tag{12}$$

注 *6*。请注意，引理 5 要求 A 具有指数稳定性；否则，式（12）中的矩阵 G 没有定义。由于式（4）相对于 $L^{(H)}$是一个二次问题，因此可以预期，引理 5 的证明（见 Zhang 等人（2022））可通过纯粹的线性代数运算获得，即显式写出 $C(L^{(H)})$。在此过程中，有一步使用了泰勒级数：

$$(I - z^{-1}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}A^k,$$

这只有在 A 具有指数稳定性时才成立。

4.2 与最优状态反馈控制增益的关系

我们首先考虑由最优状态反馈增益 $K_\star$ 诱导的以下扰动响应控制器，我们将其记为 $L_\star^{(\infty)}(z)$。也就是说，当控制器为 $u(t) = K_\star x(t)$ 时，$L_\star^{(\infty)}(z)$ 是从扰动信号 ω 到控制量 u 的传递函数。可以直接得到 $L_\star^{(\infty)}(z)$ 的表达式，

$$\begin{aligned} L_\star^{(\infty)}(z) &= z^{-1}K_\star(I - z^{-1}(A + BK_\star))^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} L_{\star;k}^{(\infty)} z^{-k}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$L_{\star;k}^{(\infty)} := K_\star(A + BK_\star)^{k-1}, k \geq 1. \tag{14}$$

请注意，使用传递函数 $L_\star^{(\infty)}(z)$ 实现扰动响应控制器，等价于使用控制增益 $K_\star$实现状态反馈控制器。为研究 $L_{\star\,1}^{(H)}$; 与 $K_\star$之间的关系，自然应首先研究 $L_\star^{(H)}$与 $L_\star^{(\infty)}$之间的关系。我们通过证明 $L_\star^{(\infty)}$满足由 $L_\star^{(H)}$满足的方程（9）的一个“无限维”版本来建立这种关系：L

emma。*7* The matrices $L_{\star;k}^{(\infty)}$ defined in (14) satisfy

$$\sum_{m=1}^{+\infty} M_{km}L_{\star;m}^{(\infty)} + J_k = 0, \ \forall\ k \geq 1, \tag{15}$$

其中，M_{km}，J_k 在（11）中定义。

引理 7 是证明定理 2 的关键。为使结构清晰，我们将引理 7 的证明放在附录 A 中。需要强调的是，引理 7 的证明在技术上颇为复杂，而且本身也可能具有独立的研究价值。

这里我们对该引理给出直观解释。关键的见解是，$L_\star^{(\infty)}$应满足方程（9）的“无限维”版本（即 $H \to +\infty$），而这正是（15）。由于 $u_t = K_\star x_t$ 在所有控制策略中是全局最优的，因此可以预期，其诱导的扰动响应$L_\star^{(\infty)}$能够针对 $H \to +\infty$求解优化问题（4）。因此，直观而言，如果令时域H 趋于无穷大，则（9）的解 $L_\star^{(H)}$将收敛到最优的 $L_\star^{(\infty)}$。这就是我们预期 $L_\star^{(\infty)}$满足（15）的原因；（15）是（9）的“无限维”版本。详细证明见附录 A。

引理 7 立即得出以下推论。

推论*8.* 定义 $L_{\star\,1}^{(\infty)}{}_{;:H}$ 作为

$$L_{\star;1:H}^{(\infty)} = \left[L_{\star;1}^{(\infty)} \ldots; L_{\star;H}^{(\infty)}\right], \tag{16}$$

那么我们有

$$M^{(H)}L_{\star;1:H}^{(\infty)} + J^{(H)} = \mathcal{E},$$

其中对于所有 $1 \leq k \leq H$，

$$[\mathcal{E}]_k = \sum_{m=H+1}^{+\infty} B^\top (A^\top)^{m-k-1}(A^\top GB + S^\top)K_\star(A + BK_\star)^{m-1}.$$

证明。由引理 7，我们知道，

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{+\infty} M_{km}L_{\star;m}^{(\infty)} + J_k = 0, \\ \Longrightarrow \quad &\sum_{m=1}^{H} M_{km}L_{\star;m}^{(\infty)} + J_k = -\sum_{m=H+1}^{+\infty} M_{km}L_{\star;m}^{(\infty)} = [\mathcal{E}]_k, \end{aligned}$$

从而完成证明。

4.3 定理 2 的证明

证明。 [定理 2] 由引理 5 和推论 8 可得

$$M^{(H)}L_\star^{(H)} + J^{(H)} = 0, \quad M^{(H)}L_{\star;1:H}^{(\infty)} + J^{(H)} = \mathcal{E}.$$

将这两个方程相减可得

$$M^{(H)}(L_\star^{(H)} - L_{\star;1:H}^{(\infty)}) = -\mathcal{E}.$$

然后，不难看出，

$$\begin{aligned}
&(L_\star^{(H)} - L_{\star;1:H}^{(\infty)})^\top (L_\star^{(H)} - L_{\star;1:H}^{(\infty)}) = \mathcal{E}^\top (M^{(H)})^{-2}\mathcal{E} \\
&\preceq \frac{1}{\lambda_{\min}(M^{(H)})^2}\sum_{k=1}^{H}[\mathcal{E}]_k^\top [\mathcal{E}]_k \\
&\preceq \frac{1}{\lambda_{\min}(R-SQ^{-1}S^\top)^2}\sum_{k=1}^{H}\|[\mathcal{E}]_k\|^2 I,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式使用了结果：

$\lambda_{\min}$ $\geq (M^{(H)})$ ( )，该结果 $\lambda_{\min}$ $R-SQ^{-1}S^\top$ 见 Zhang 等人（2022）（引理9）。

我们可以对 $[\mathcal{E}]_k$ 的范数给出上界

$$\begin{aligned}
\|[\mathcal{E}]_k\| &\leq \sum_{m=H+1}^{+\infty} \|B\|^2\|K_\star\|\|GA^{m-k}\|\|(A+BK_\star)^{m-1}\| \\
&\quad + \|B\|\|K_\star\|\|S\|\|A^{m-k-1}\|\|(A+BK_\star)^{m-1}\| \\
&\leq \frac{\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\|\tau^3}{1-e^{-2\rho}}\sum_{m=H+1}^{+\infty} e^{-(2m-k-1)\rho} \\
&\quad + \tau^2\|B\|\|K_\star\|\|S\|\sum_{m=H+1}^{+\infty} e^{-(2m-k-2)\rho} \\
&= \frac{\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\|\tau^3}{(1-e^{-2\rho})^2}e^{-(2H-k+1)\rho} \\
&\quad + \frac{\|B\|\|K_\star\|\|S\|\tau^2}{1-e^{-2\rho}}e^{-(2H-k)\rho},
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式使用了（附录 D）中的结果

$$\|GA^m\| \leq \frac{\tau^2\|Q\|e^{-\rho m}}{1-e^{-2\rho}}.$$

Thus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{H}\|[\mathcal{E}]_k\|^2 &\leq 2\left(\frac{\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\|\tau^3}{(1-e^{-2\rho})^2}\right)^2\sum_{k=1}^{H}e^{-2(2H-k+1)\rho} \\
&\quad + 2\left(\frac{\|B\|\|K_\star\|\|S\|\tau^2}{1-e^{-2\rho}}\right)^2\sum_{k=1}^{H}e^{-2(2H-k)\rho} \\
&\leq 2\left(\frac{\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\|\tau^3}{(1-e^{-2\rho})^2}\right)^2\frac{1}{1-e^{-4\rho}}e^{-2(H+1)\rho} \\
&\quad + 2\left(\frac{\|B\|\|K_\star\|\|S\|\tau^2}{(1-e^{-2\rho})^{3/2}}\right)^2 e^{-2H\rho} \\
&\leq 2\left(\frac{\tau^3(\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\| + \|B\|\|K_\star\|\|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^{5/2}}\right)^2 e^{-2H\rho}.
\end{aligned}$$

最后，我们有

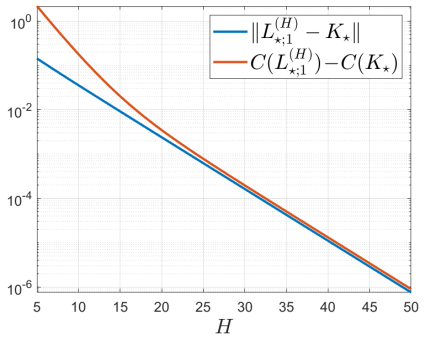


图 1. 近似误差 $\|L_\star^{(H)}{}_{;1} - K_\star\|$ 和性能差异$C(L_{\star}^{(H)}{}_{1};) - C(K_\star)$ 随着 H 增大而指数衰减

$$\begin{aligned}
&(L_{\star;1}^{(H)} - K_\star)^\top (L_{\star;1}^{(H)} - K_\star) = (L_{\star;1}^{(H)} - L_{\star;1}^{(\infty)})^\top (L_{\star;1}^{(H)} - L_{\star;1}^{(\infty)}) \\
&\preceq (L_\star^{(H)} - L_{\star;1:H}^{(\infty)})^\top (L_\star^{(H)} - L_{\star;1:H}^{(\infty)}) \\
&\preceq \frac{2}{\lambda_{\min}(R-SQ^{-1}S^\top)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{\tau^3(\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\| + \|B\|\|K_\star\|\|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^{5/2}}\right)^2 e^{-2H\rho} I.
\end{aligned}$$

Tl是 ea d 到

$$\|L_{\star;1}^{(H)} - K_\star\| \leq \frac{2\tau^3(\|B\|^2\|K_\star\|\|Q\| + \|B\|\|K_\star\|\|S\|)}{\lambda_{\min}(R-SQ^{-1}S^\top)(1-e^{-2\rho})^{5/2}}e^{-H\rho},$$

至此，证明完成。

5. 数值示例

我们考虑以下随机生成的系统矩阵集合 A, B, Q, R, S:

$$A = \begin{bmatrix} -0.584 & 0.351 & 0.398 \\ -0.366 & -0.739 & 0.401 \\ 0.512 & 0.187 & -0.761 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1659 \\ 1.7690 \\ -0.1603 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 9.549 & -2.660 & 6.993 \\ -2.660 & 2.702 & -1.599 \\ 6.993 & -1.599 & 8.282 \end{bmatrix}, \; R = 2.593, \; S = \begin{bmatrix} 0.043 \\ 0.206 \\ -1.964 \end{bmatrix}.$$

给定系统矩阵后，我们直接调用 MATLAB System Control Toolbox 中的内置函数 dlqr 来求解最优状态反馈增益 $K_\star$。最优 DRC $L_\star^{(H)}$ 使用式 (9) 求解。图 1 绘出了近似误差$\|L_\star^{(H)}{}_{;1} - K_\star\|$ 以及代价差异 $C(L_{\star}^{(H)}{}_{1};) - C(K_\star)$ 随着 H 增大而呈指数衰减的情况，这印证了定理 2 中的理论结论。

6. 结论

本文建立了最优状态反馈增益 $K_\star$ 与最优扰动响应控制器 $u_t = L_\star^{(H)}{}_{;1}\, w_{t-1} + \ldots + L_\star^{(H)}{}_{;H} w_{t-H}$之间的简单关系。结果表明，$L_{\star}^{(H)}{}_{1};$ 很好地近似了 $K_\star$，且近似误差随 H 呈指数衰减，这指出了一种可能更简单的将扰动反馈控制器转换为状态反馈控制器的方法。

参考文献

Agarwal, N.、Bullins, B.、Hazan, E.、Kakade, S. 和 Singh, K.（2019a）。带有对抗性扰动的在线控制。

在国际机器学习会议，111–119。PMLR。Agarwal, N., Hazan, E., 和 Singh, K.（2019b）。在线控制的对数遗憾。神经信息处理系统进展，32。Anderson, B.D. 和 Moore, J.B.（2007）。最优控制：线性二次方法。Courier Corporation。Englar, T. 和 Kalman, R.（1966）。自动综合程序/program c 的用户手册。技术报告。Fazel, M., Ge, R., Kakade, S., 和 Mesbahi, M.（2018）。线性二次调节器的策略梯度方法的全局收敛性。发表于国际机器学习会议，1467–1476。PMLR。Furieri, L., Zheng, Y., Papachristodoulou, A., 和 Kam- garpour, M.（2019）。稳定控制器的输入–输出参数化：介于 Youla 与系统级综合之间。*IEEE* 控制系统快报，3(4)，1014–1019。Goulart, P.J., Kerrigan, E.C., 和 Maciejowski, J.M.（2006）。带约束鲁棒控制的状态反馈策略优化。《*Automatica*》，42(4)，523–533。Hu, B., Zhang, K., Li, N., Mesbahi, M., Fazel, M., 和 Ba¸sar, T.（2022）。迈向学习控制策略的策略优化理论基础。*arXiv* 预印本 *arXiv:2210.04810*。Kleinman, D.Z.（1968）。关于黎卡提方程计算的一种迭代技术。*IEEE* 自动控制汇刊，13，114–115。Krauth, K., Tu, S., 和 Recht, B.（2019）。线性二次调节器近似策略迭代的有限时间分析。神经信息处理系统进展，32。Kwakernaak, H. 和 Sivan, R.（1969）。线性最优控制系统，第1072卷。Wiley-interscience。Li, Y., Das, S., Shamma, J., 和 Li, N.（2021）。具有遗憾保证的受约束线性二次调节器安全自适应学习控制。*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.00411*。Nett, C., Jacobson, C., 和 Balas, M.（1984）。状态空间表示与双互质分式表示之间的联系。*IEEE* 自动控制汇刊，29(9)，831–832。Simchowitz, M., Singh, K., 和 Hazan, E.（2020）。非随机控制的非正规学习。发表于学习理论会议，3320–3436。PMLR。Tu, S. 和 Recht, B.（2019）。线性二次调节器中基于模型与无模型方法之间的差距：渐近视角。发表于学习理论会议，3036–3083。PMLR。Wang, Y.S., Matni, N., 和 Doyle, J.C.（2019）。控制器综合的系统级方法。*IEEE* 自动控制汇刊，64(10)，4079–4093。Youla, D., Jabr, H., 和 Bongiorno, J.（1976）。最优控制器的现代 Wiener–Hopf 设计——第二部分：多变量情形。*IEEE* 自动控制汇刊，21(3)，319–338。Zhang, R., Li, W., 和 Li, N.（2022）。关于具有空间指数衰减结构的网络 LQR 最优控制（补充材料）。doi:10.48550/ARXIV.2209. 14376。URL https://arxiv.org/abs/2209.14376。Zheng, Y., Furieri, L., Kamgarpour, M., 和 Li, N.（2022）。系统级、输入–输出及新的参数化方法……

稳定控制器及其数值计算。《*Automatica*》，140，110211。Zheng,Y.、Tang, Y.和 Li, N.（2021）。线性二次高斯（lqg）控制优化景观的分析。*arXiv* 预印本 *arXiv:2102.04393*。

附录 A. 引理 7 的证明

证明。 将 $L_{\star\,k}^{(\infty)}$ 的定义;， M_{km} 和 J_k代入(15)的左端，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{+\infty} M_{km} L_{\star;m}^{(\infty)} + J_k \\
&= B^\top G A^k + S A^{k-1} + \sum_{m=1}^{k-1} B^\top G A^{k-m} B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \\
&+ \sum_{m=1}^{k-1} S A^{k-m-1} B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \\
&+ \sum_{m=k}^{+\infty} B^\top (A^\top)^{m-k} G B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \\
&+ \sum_{m=k+1}^{\infty} B^\top (A^\top)^{m-k-1} S^\top K_\star (A+BK_\star)^{m-1} + RK(A+BK_\star)^{k-1}.
\end{aligned}$$

根据 K, P 的关系，我们有

$$\begin{aligned}
RK_\star(A+BK_\star)^{k-1} &= -(R+B^\top P B) K_\star (A+BK_\star)^{k-1} \\
&\quad + B^\top P B K_\star (A+BK_\star)^{k-1} \\
&\overset{(3)}{=} (B^\top P A + S)(A+BK_\star)^{k-1} + B^\top P B K_\star (A+BK_\star)^{k-1} \\
&= B^\top P (A+BK_\star)^k + S(A+BK_\star)^{k-1},
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{+\infty} M_{km} L_m^{(\infty)} + J_k \\
&= B^\top \left(G A^k + \sum_{m=1}^{k-1} G A^{k-m} B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \right) \\
&\quad + S \left(A^{k-1} + \sum_{m=1}^{k-1} A^{k-m-1} B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \right) \\
&\quad + B^\top \left(\sum_{m=k}^{+\infty} (A^\top)^{m-k} G B K_\star (A+BK_\star)^{m-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=k+1}^{\infty} (A^\top)^{m-k-1} S^\top K_\star (A+BK_\star)^{m-1} + P(A+BK_\star)^k \right) \\
&\quad - S(A+BK_\star)^{k-1}.
\end{aligned}$$

由于

$$
\begin{aligned}
&GA^k + \sum_{m=1}^{k-1} GA^{k-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1} \\
&= GA^k + GA^{k-1}BK_\star + \sum_{m=2}^{k-1} GA^{k-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1} \\
&= GA^{k-1}(A+BK_\star) + \sum_{m=2}^{k-1} GA^{k-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1} \\
&= G\left(A^{k-1} + \sum_{m=1}^{k-2} A^{k-1-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1}\right)(A+BK_\star) \\
&= G\Bigg(A^{k-1} + A^{k-2}BK_\star \\
&\qquad + \sum_{m=2}^{k-2} A^{k-1-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1}\Bigg)(A+BK_\star) \\
&= G\left(A^{k-2} + \sum_{m=1}^{k-3} A^{k-1-m}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1}\right)(A+BK_\star)^2 \\
&= \cdots \\
&= GA(A+BK_\star)^{k-1},
\end{aligned}
$$

同理

$$
S\left(A^{k-1} + \sum_{m=1}^{k-1} A^{k-m-1}BK_\star(A+BK_\star)^{m-1}\right) = S(A+BK_\star)^{k-1}
$$

我们可以进一步简化该表达式，使其成为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{+\infty} M_{km}L_{\star;m}^{(\infty)} + J_k \\
&= B^\top\Big[GA + \sum_{m=0}^{+\infty}(A^\top)^m[GBK_\star + S^\top K_\star(A+BK_\star)](A+BK_\star)^m \\
&\qquad - P(A+BK_\star)\Big](A+BK_\star)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Let

$$
X := -\sum_{m=0}^{+\infty}(A^\top)^m[GBK_\star + S^\top K_\star(A+BK_\star)](A+BK_\star)^m,
$$

只需证明 $X = GA - P(A+BK_\star)$即可。根据 X 的定义，我们知道 X 满足以下线性矩阵方程

$$
A^\top X(A+BK_\star) - GBK_\star - S^\top K_\star(A+BK_\star) = X.
$$

根据Sylvester方程的唯一性（见引理 16），我们知道 X 是上述线性矩阵方程的唯一解。因此，只需证明

$$
\begin{aligned}
&A^\top(GA - P(A+BK_\star))(A+BK_\star) - GBK_\star - S^\top K_\star(A+BK_\star) \\
&= (GA - P(A+BK_\star)) \\
&\iff \quad A^\top GA(A+BK_\star) - A^\top P(A+BK_\star)^2 \\
&\qquad = G(A+BK_\star) - P(A+BK_\star) + S^\top K_\star(A+BK_\star) \\
&\impliedby \quad A^\top GA - A^\top P(A+BK_\star) = G - P + S^\top K_\star.
\end{aligned}
$$

根据 $G = \sum_{k=0}^{+\infty}(A^\top)^k Q A^k$ 的定义，我们有以下结论。

$$
A^\top GA + Q = G,
$$

因此，只需证明

$$
\begin{aligned}
&- A^\top P(A+BK_\star) = Q - P + S^\top K_\star \\
\iff\ & P = A^\top PA + (A^\top PB + S^\top)K_\star + Q \\
\iff\ & P = A^\top PA \\
&\quad - (A^\top PB + S^\top)(R + B^\top PB)^{-1}(B^\top PA + S) + Q.
\end{aligned}
$$

最后一个方程正是关于最优剩余代价矩阵的离散时间代数 Riccati 方程，从而完成了证明。

附录 B. 性能差异

在本节中，我们将从性能差异的角度，深入探讨 DRC与状态反馈控制之间的关系。我们证明，对于任意稳定的状态反馈控制器 K，都存在一个 H阶DRC，使其代价 $C(K)$得到近似，其中近似误差随 H 呈指数衰减（引理9）。作为推论，最优DRC与最优 LQR代价 $C(L_\star^{(H)}) - C(K_\star)$ 之间的性能差异也随 H 呈指数衰减。对于任意稳定的 K，我们可以将其对应的等效 DRC 定义为:

$$
L_K^{(\infty)}(z) = z^{-1}K(I - z^{-1}(A+BK))^{-1} = \sum_{h=1}^{+\infty} L_{K;h}^{(\infty)} z^{-h},
$$
$$
\text{where } L_{K;h}^{(\infty)} := K(A+BK)^{h-1}, \quad h \geq 1.
$$

我们进一步定义

$$
L_{K;1:H}^{(\infty)} := [L_{K;1}^{(\infty)}; \ldots; L_{K;H}^{(\infty)}].
$$

我们有， $L_{K\,1}^{(\infty)}{}_{;:H}$ 定义的 DRC 与 $C(K)$ 的代价相近，具体表述如下引理：引理*9.* 对于任意满足 $(A+BK)$ 为 $(\tau, e^{-\rho})$-稳定的 K，由 $L_{K\,1}^{(\infty)}{}_{;:H}$ 定义的 H 阶 DRC 满足

$$
\begin{aligned}
&C(L_{K;1:H}^{(\infty)}) - C(K) \leq \\
&n_x^2 e^{-2\rho H}\left(\|R\| + \frac{4\tau^4(\|B\|\|K\|^2 + \|K\|)(\|B\|\|Q\| + \|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^3}\right)
\end{aligned}
$$

在证明引理9之前，我们先引用 Zhang 等人（2022）中的一个辅助引理，该引理在整个证明过程中都很有用。

引理*10.*（Zhang 等人（2022），附录 B）。

$$
C(L^{(H)}) = \operatorname{trace}\left(G + 2L^{(H)\top}J^{(H)} + L^{(H)\top}M^{(H)}L^{(H)}\right).
$$

令 $H \to +\infty$，我们有，对于任意满足 $\sum_k^{+\infty}\|L_k^{(\infty)}\|^2 < +\infty$的 $L^{(\infty)}$：

$$
C(L^{(\infty)}) = \operatorname{trace}\left(G + 2\sum_{k=1}^{+\infty} L_k^{(\infty)\top}J_k + \sum_{k=1,m=1}^{+\infty} L_k^{(\infty)\top}M_{km}L_m^{(\infty)}\right).
$$

现在我们可以证明引理9:

证明。 [引理 9]

$$
\begin{aligned}
&C(L^{(\infty)}_{K;1:H}) - C(K) = C(L^{(\infty)}_{K;1:H}) - C(L^{(\infty)}_{K}) \\
&= \operatorname{trace}\left(2\sum_{h=H+1}^{+\infty} {L^{(\infty)}_{K,h}}^\top J_h \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{h=H+1}^{+\infty}\sum_{m=H+1}^{+\infty} {L^{(\infty)}_{K;h}}^\top M_{hm} L^{(\infty)}_{K;m}\right) \\
&\le n_x^2\left(2\sum_{h=H+1}^{+\infty} \|L^{(\infty)}_{K;h}\|\|J_h\| \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{h=H+1}^{+\infty}\sum_{m=H+1}^{+\infty} \|L^{(\infty)}_{K;h}\|\|M_{hm}\|\|L^{(\infty)}_{K;m}\|\right) \\
&\le n_x^2\left(2\sum_{h=H+1}^{+\infty} \|L^{(\infty)}_{K;h}\|\|J_h\| \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{h=H+1}^{+\infty}\left(\sum_{m=H+1}^{+\infty}\|M_{hm}\|\right)\|L^{(\infty)}_{K;h}\|^2\right)
\end{aligned}
$$

由于 $L^{(\infty)}_{K;h} = K(A+BK)^{h-1}$, $J_h = B^\top G A^h + S A^{h-1}$, 由引理 13 可知

$$
\begin{aligned}
&\|L^{(\infty)}_{K;h}\|\|J_h\| \le \|K\|\left(\frac{\tau e^{-\rho}\|B\|\|Q\|}{1-e^{-2\rho}} + \|S\|\right)\tau^2 e^{-2\rho(k-1)}, \\
&\implies \sum_{h=H+1}^{\infty}\|L^{(\infty)}_{K;h}\|\|J_h\| \\
&\le \tau^2\|K\|\left(\frac{\tau e^{-\rho}\|B\|\|Q\|}{1-e^{-2\rho}} + \|S\|\right)\sum_{h=H}^{+\infty} e^{-2\rho h} \\
&= \frac{\tau^2}{1-e^{-2\rho}}\|K\|\left(\frac{\tau e^{-\rho}\|B\|\|Q\|}{1-e^{-2\rho}} + \|S\|\right)e^{-2\rho H}
\end{aligned}
$$

进一步

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=H+1}^{+\infty}\|M_{km}\| \\
&\le \|R\| + \|B^\top G B\| + 2\sum_{m=1}^{+\infty}\|B\|^2\|GA^m\| + 2\sum_{m=0}^{\infty}\|B\|\|S\|\|A^m\| \\
&\overset{\text{(Lemma 13)}}{\le} \|R\| + \frac{\tau^2\|B\|^2\|Q\|}{1-e^{-2\rho}}\left(1+2\sum_{m=1}^{+\infty}e^{-\rho m}\right) + \frac{2\tau\|B\|\|S\|}{1-e^{-\rho}} \\
&\le \|R\| + \frac{4\tau^2(\|B\|^2\|Q\| + \|B\|\|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^2}.
\end{aligned}
$$

此外,

$$
\sum_{h=H+1}^{+\infty}\|L^{(\infty)}_{K;h}\|^2 \le \sum_{h=H+1}^{+\infty}\|K\|^2\tau^2 e^{-2\rho(h-1)} = \frac{\tau^2\|K\|^2}{1-e^{-2\rho}}e^{-2\rho H}.
$$

将这些界限结合起来，我们得到:

$$
\begin{aligned}
&C(L^{(H)}) - C(K) \le n_x^2 e^{-2\rho H}\left(2\frac{\tau e^{-\rho}\|B\|\|Q\|}{1-e^{-2\rho}} + \|S\|\right. \\
&\left. + \left(\|R\| + \frac{4\tau^2(\|B\|^2\|Q\| + \|B\|\|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^2}\frac{\tau^2\|K\|^2}{1-e^{-2\rho}}\right)\right) \\
&\le n_x^2 e^{-2\rho H}\left(\|R\| + \frac{4\tau^4(\|B\|\|K\|^2 + \|K\|)(\|B\|\|Q\| + \|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^3}\right).
\end{aligned}
$$

推论*11*。

$$
\begin{aligned}
&C(L^{(H)}_\star) - C(K_\star) \le \\
&n_x^2 e^{-2\rho H}\left(\|R\| + \frac{4\tau^4(\|B\|\|K_\star\|^2 + \|K_\star\|)(\|B\|\|Q\| + \|S\|)}{(1-e^{-2\rho})^3}\right).
\end{aligned}
$$

证明。由 $L^{(H)}_\star$的最优性，我们有$C(L^{(H)}_\star) - C(K_\star) = C(L^{(H)}_\star) - C(L^{(\infty)}_\star) \le C(L^{(\infty)}_{\star\,1:H}) - C(L^{(\infty)}_\star)$,其中 $L^{(\infty)}_{\star\,1:H} = [L^{(\infty)}_{\star\,1}; \ldots; L^{(\infty)}_{\star\,H}]$。直接应用引理 9 即可完成证明。

Appendix C. STABILITY OF DRC

引理 *12*。 定义 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^n, e_1 \in \mathbb{R}^n$ 如下:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

对于 $H \le n$，形式为 (2) 的任何 DRC 都不稳定，具体而言，对于 $t \ge H$，我们有

$$
\mathbb{E}x_{t+1}x_{t+1}^\top \succeq \left(e_1^\top A^H {A^H}^\top e_1\right)\sum_{k=H}^{t} A^{k-H} e_1 e_1^\top {A^{k-H}}^\top,
$$

其范数随 t 指数级增长。

证明。

$$
\begin{aligned}
&x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t \\
&= Ax_t + B(L^{(H)}_1 w_{t-1} + \ldots + L^{(H)}_H w_{t-H}) + w_t \\
&= A^2 x_{t-1} + w_t + (A + BL^{(H)}_1)w_{t-1} + \ldots \\
&\quad + (ABL^{(H)}_{H-1} + BL^{(H)}_H)w_{t-H} + ABL^{(H)}_H w_{t-H-1} \\
&= \cdots \\
&= w_t + C_1 w_{t-1} + \ldots + C_{H-1}w_{t-H+1} + \sum_{k=H}^{t-1} A^{k-H}C_H w_{t-k},
\end{aligned}
$$

其中 C_k 是由下式定义的矩阵

$$
C_k = A^k + \sum_{t=1}^{k} A^{k-t}BL^{(H)}_t,\ 1 \le k \le H.
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}x_{t+1}x_{t+1}^\top &\succeq \sum_{k=H}^{t-1} A^{k-H}C_H\left(\mathbb{E}w_{t-k}w_{t-k}^\top\right)C_H^\top {A^{k-H}}^\top \\
&= \sum_{k=H}^{t-1} A^{k-H}C_H C_H^\top {A^{k-H}}^\top.
\end{aligned}
$$

此外，由于 $H \le n$，不难根据 A, B, e_1 的定义验证得出

$$
e_1^\top A^{H-k}B = 0,\ 1 \le k \le H.
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
&e_1^\top C_H C_H^\top e_1 = e_1^\top A^H {A^H}^\top e_1 \\
\implies\ &C_H^\top C_H \succeq \left(e_1^\top A^H {A^H}^\top e_1\right)e_1 e_1^\top.
\end{aligned}
$$

将此代入上述方程可得

$$
\mathbb{E}x_{t+1}x_{t+1}^\top \succeq \left(e_1^\top A^H {A^H}^\top e_1\right)\sum_{k=H}^{t} A^{k-H} e_1 e_1^\top {A^{k-H}}^\top,
$$

从而完成证明。

附录 D. 辅助内容

引理 *13*。 对于任意 $m \geq 0$，(12) 中定义的 G 满足

$$\|GA^m\| \leq \frac{\tau^2 \|Q\| e^{-\rho m}}{1 - e^{-2\rho}}.$$

证明。 根据 G 的定义，我们有

$$\|GA^m\| = \|\sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^\top Q A^{t+m}\| \leq \sum_{t=0}^{\infty} \|Q\| \|A^t\| \|A^{t+m}\|$$
$$\leq \|Q\| \sum_{t=0}^{\infty} \tau^2 e^{-\rho(2t+m)} = \frac{\tau^2 \|Q\| e^{-\rho m}}{1 - e^{-2\rho}},$$

由此完成证明。

Lemma 14. $\lambda_{\min}(R - \overline{S}\overline{Q}^{-1}\overline{S}^\top) > 0.$

证明。 不难验证

$$\begin{bmatrix} \overline{Q} & \overline{S}^\top \\ \overline{S} & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & K_0^\top \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S^\top \\ S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_0 & I \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} \overline{Q} & \overline{S}^\top \\ \overline{S} & R \end{bmatrix} \right) \succ 0.$$

由引理 15 可得 $\lambda_{\min}(R - SQ^{-1}S^\top) > 0$。 引理 *15*。 $\lambda_{\min}(R - SQ^{-1}S^\top) \geq \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} Q & S^\top \\ S & R \end{bmatrix} \right)$.

证明。 令 $\lambda := \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} Q & S^\top \\ S & R \end{bmatrix} \right)$，则有

$$\begin{bmatrix} Q & S^\top \\ S & R - \lambda I \end{bmatrix} \succeq 0 \implies (R - \lambda I) - SQ^{-1}S^\top \succeq 0$$
$$\implies R - SQ^{-1}S^\top \succeq \lambda I,$$

从而完成证明。

引理 *16*。 离散时间 Sylvester 方程

$$A^\top X B + C = X, \quad A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{D.1}$$

当且仅当 A 的任意特征值 λ_i 和 B 的任意特征值 μ_j 均满足 $\lambda_i \mu_j \neq 1$ 时，才得到唯一解 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$。

证明。 我们将 A 的所有特征值记为 λ_i，将 B 的所有特征值记为 μ_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）。我们首先证明，若存在 $\lambda_i \mu_j = 1$，则 (D.1) 的解要么不唯一，要么无解。由于 (D.1) 是关于 X 的线性方程，只需证明 恒一

$$A^\top X B = X \tag{D.2}$$

有非零解。设 $v_i, u_j \in \mathbb{R}^n$ 为非零向量，使得

$$A^\top v_i = \lambda_i v_i, \quad B^\top u_j = \mu_j u_j,$$

然后令 $X = v_i u_j^\top$，我们有大小规律。

$$A^\top X B = A^\top v_i u_j^\top B = \lambda_i \mu_j v_i u_j^\top = v_i u_j^\top = X,$$

这表明 (D.2) 有一个非零解。

接下来，我们证明，如果 $\lambda_i \mu_j \neq 1$，那么 (D.1)得到一个唯一解。只需证明 (D.2) 只有零解。从现在起，我们假设矩阵 X 满足 $A^\top X B = X$。记

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$
$$q(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$$
$$\overline{q}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda \lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}.$$

根据哈密顿-凯莱定理，我们知道

$$q(B) = 0,$$

thus

$$0 = X q(B) = \sum_{k=0}^{n} b_k X B^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} b_k (A^\top)^{n-k} X B^n \qquad \left((A^\top)^{n-k} X B^{n-k} = X\right)$$
$$= \overline{q}(A) X B^n.$$

由于 $\lambda_i \mu_j \neq 1$，我们有 $q(\lambda_i) \neq 0$，$\forall 1 \leq i \leq n$。因此，存在多项式 $f(\lambda)$ $g(\lambda)$，使得

$$f(\lambda) p(\lambda) + g(\lambda) \overline{q}(\lambda) = 1.$$

Thus

$$f(A)p(A) + g(A)\overline{q}(A) = I \Longrightarrow g(A)\overline{q}(A) = I$$
$$(p(A) = 0 \text{ from Hamilton-Cayley theorem}).$$

因此，我们有

$$0 = g(A)\overline{q}(A) X B^n = X B^n.$$

此外，我们有

$$X = (A^\top)^n X B^n = 0,$$

至此，证明完毕。