arXiv:2304.03851v1 [math.LO] 7 Apr 2023

良基性证明： Π^1_1-反射

Toshiyasu Arai 东京大学数理科学研究科 日本国东京都目黑区驹场 3-8-1，邮编 153-8914
tosarai@ms.u-tokyo.ac.jp

摘要

在 [4] 中证明了，序数 $\psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{S}^+ +1})$ 是集合论 KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 的证明论序数的上界。本文证明，对每个 n，KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 都能证明直到 $\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1))$ 的良基性。

1 引言

在 [4] 中证明了以下定理，其中 KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 扩展了 KPω，并加入了一条公理，断言“存在一个非空传递集 M，使得 $M \prec_{\Sigma_1} V$”。$\Omega = \omega_1^{CK}$ 和 ψ_Ω 是一个坍缩函数，使得 $\psi_\Omega(\alpha) < \Omega$。 $\mathbb{S}$ 是表示稳定序数的序数项，而 $\mathbb{S}^+$ 是定理中 $\mathbb{S}$ 以上的最小可容许序数。

定理 1.1 设 KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V) \vdash \theta^{L_\Omega}$ 对于一个 Σ_1句子 θ。那么我们可以找到一个 $n < \omega$，使得对于 $\alpha = \psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1))$， $L_\alpha \models \theta$。

OT 表示 [2] 中的一个可计算序数记号系统，用于对 KP$\ell^r + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 进行序数分析，或等价地，用于对 Σ^{1-}_2-CA $+ \Pi^1_1$-CA$_0$ 进行序数分析。 OT_N 是 OT 的一个限制，使得 $OT = \bigcup_{0<N<\omega} OT_N$，且 $\psi_\Omega(\varepsilon_{\Omega_{\mathbb{S}+N}+1})$表示 $OT_N \cap \Omega$的序型。令 $OT(\Pi^1_1) = OT_1$。本文旨在证明以下定理，由此可知定理 1.1 中的界是紧的。

定理 1.2 KPω+$(M \prec_{\Sigma_1} V)$ 对每个 n都证明了直至 $\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ +1))$ 的良基性。

序数 $\psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{S}^+ +1})$ 是 KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 的证明论序数。

定理 1.3 $\psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{S}^+ +1}) = |\text{KP}\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)|_{\Sigma^1_1}$.

为了证明可计算记号系统的良基性，我们使用 W. Buchholz [5] 引入的特殊类。

集合论 KP$\omega + (M \prec_{\Sigma_1} V)$ 通过添加个体常元 M 以及关于该常元 M 的公理来扩展 KPω： M 非空 $M \neq \emptyset$,

传递 $\forall x \in M \forall y \in x (y \in M)$，并且对于宇宙 V 是稳定的 $M \prec_{\Sigma_1} V$。$M \prec_{\Sigma_1} V$ 意味着，对于集合论语言中的每个 Σ_1-公式 φ， $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \wedge \{u_1, \ldots, u_n\} \subset M \to \varphi^M(u_1, \ldots, u_n)$。

由于公理 β 在理论 KPω +($M \prec_{\Sigma_1} V$) 中不成立，我们需要修改 [2]，中的证明（参见小节 3.1）。在 [1, 2] 中已有的命题和引理证明将不再赘述。

2 稳定序数的序数

本节简要回顾 [2] 中的序数记号系统。

对于序数 $\alpha \geq \beta$， $\alpha - \beta$ 表示满足 $\alpha = \beta + \gamma$ 的序数 γ。设 α 和 β 为序数。当 $\alpha + \beta$ 等于交换（自然）和 $\alpha \# \beta$，即当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = \alpha_0 + \omega^{\alpha_1}$ 且 $\omega^{\alpha_1 + 1} > \beta$ 时， $\alpha \dot{+} \beta$ 表示和 $\alpha + \beta$。

$\mathbb{S}$ 表示一个弱不可达基数，而 $\Lambda = \mathbb{S}^+$ 表示高于 $\mathbb{S}$ 的下一个正则基数。

定义 2.1 设 $\Lambda = \mathbb{S}^+$。 $\varphi_b(\xi)$ 表示定义在 Λ^+ 上的二元韦布伦函数，其中 $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$；而对于 ε 数 Λ， $\tilde{\varphi}_b(\xi) := \varphi_b(\Lambda \cdot \xi)$。

令 $\theta_b(\xi)$ 表示 $\varphi_0(\xi) = \tilde{\omega}^\xi$ [of $\tilde{\varphi}_0(\xi) = \Lambda^\xi$] 的第 b 次迭代，分别如此。

定义 2.2 令 $\xi < \varphi_\Lambda(0)$ 为一个非零序数，其标准形为：

$$\xi = \sum_{i \leq m} \tilde{\theta}_{b_i}(\xi_i) \cdot a_i =_{NF} \tilde{\theta}_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \tilde{\theta}_{b_0}(\xi_0) \cdot a_0 \tag{1}$$

其中 $\theta_{b_i}(\xi_i) > \xi_i, \theta_{b_m}(\xi_m) > \cdots > \theta_{b_0}(\xi_0)$，$b_i = \omega^{c_i} < \Lambda$，且 $0 < a_0, \ldots, a_m < \Lambda$。 $SC_\Lambda(\xi) = \bigcup_{i \leq m}(\{a_i\} \cup SC_\Lambda(\xi_i))$。

$\theta_{b_0}(\xi_0)$ 称为 ξ 的尾部，记作 $\theta_{b_0}(\xi_0) = tl(\xi)$，而 $\theta_{b_m}(\xi_m)$ 称为 ξ 的头部，记作 $\theta_{b_m}(\xi_m) = hd(\xi)$。

1. ζ 是 ξ 的一个片段，当且仅当存在一个 $n (0 \leq n \leq m+1)$，使得 $\zeta =_{NF} \sum_{i \geq n} \theta_{b_i}(\xi_i) \cdot a_i = \theta_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \theta_{b_n}(\xi_n) \cdot a_n$ 对于(1)中的 ξ。

2. 设 $\zeta =_{NF} \tilde{\theta}_b(\xi)$，其中 $\tilde{\theta}_b(\xi) > \xi$ 和 $b = \omega^{b_0}$，且 c 为序数。序数 $\theta_{-c}(\zeta)$ 递归定义如下。若 $b \geq c$，则 $\theta_{-c}(\zeta) = \theta_{b-c}(\xi)$。设 $c > b$。若 $\xi > 0$，则对于(1)中 ξ 的头项 $hd(\xi) = \theta_{b_m}(\xi_m)$，有 $\theta_{-c}(\zeta) = \theta_{-(c-b)}(\theta_{b_m}(\xi_m))$。若 $\xi = 0$，则令 $\theta_{-c}(\zeta) = 0$。

定义 2.3 1. 若函数 f：$\Lambda \to \varphi_\Lambda(0)$ 的支撑集 supp(f) $=\{c < \Lambda : f(c) \neq 0\} \subset \Lambda$ 有限，则称其为有限函数，当且仅当 $\forall i > 0 (a_i = 1)$ 且 $a_0 = 1$ 当 $b_0 > 1$ 属于 $f(c) =_{NF} \theta_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \theta_{b_0}(\xi_0) \cdot a_0$ 对任意 $c \in$ supp(f)。

它被识别为有限函数 $f \restriction$ supp(f)。当 $c \notin$ supp(f) 时，令 $f(c) := 0$。 $SC_\Lambda(f) := \bigcup\{\{c\} \cup SC_\Lambda(f(c))\}$：$c \in$ supp(f)}。 $f, g, h, \ldots$ 遍历有限函数。

对于一个序数 c， f_c 和 f^c 是 f 在定义域 $\mathrm{supp}(f_c)=\{d\in\mathrm{supp}(f):\ d<c\}$ 和 $\mathrm{supp}(f^c)=\{d\in\mathrm{supp}(f):\ d\geq c\}$ 上的限制。 g_c*f^c 表示拼接函数，使得 $\mathrm{supp}(g_c*f^c)=\mathrm{supp}(g_c)\cup\mathrm{supp}(f^c)$，$(g_c*f^c)(a)=g(a)$ 对于 $a<c$，且 $(g_c*f^c)(a)=f(a)$ 对于 $a\geq c$。

2. 设 f 为有限函数， c、ξ 为序数。关系 $f<^c\xi$ 通过对有限集 $\{d\in\mathrm{supp}(f)$ 的基数进行归纳定义如下：若 $f^c=\emptyset$，则 $f<^c\xi$成立。对于 $f^c\neq\emptyset$，当且仅当存在 ξ 的一个片段 μ，使得 $f(c)<\mu$ 且对于$d=\min\{c+d\in\mathrm{supp}(f):\ f<^{c+d}\tilde{\theta}_{-d}(tl(\mu))$，此时 $f<^c\xi$ 成立。

命题 2.4 $f<^c\xi\leq\zeta\Rightarrow f<^c\zeta$。

在下面的定义 2.5 中， $\varphi\alpha\beta=\varphi_\alpha(\beta)$ 表示 $\Lambda^+=\mathbb{S}^{++}$上的二元 Veblen 函数， $\theta_b(\xi)$ 表示定义 2.1 中针对 $\Lambda=\mathbb{S}^+$定义的函数。对于 $\alpha<\mathbb{S}$， α^+ 表示高于 α的下一个正则基数。

对于 $a<\varepsilon_{\Lambda+1}$、 $c<\Lambda$ 和 $\xi<\Gamma_{\Lambda+1}$，按如下方式对序数 a 进行递归，同时定义类 $\mathcal{H}_a(X)\subset\Gamma_{\Lambda+1}$、 $Mh^a_c(\xi)\subset(\mathbb{S}+1)$ 以及序数 $\psi^f_\kappa(a)\leq\kappa$。

定义 2.5 令 $\Lambda=\mathbb{S}^+$。令 $a<\varepsilon_{\Lambda+1}$ 和 $X\subset\Gamma_{\Lambda+1}$。

1.（ $\mathcal{H}_a(X)$ 的归纳定义。）

（a） $\{0,\Omega_1$、$\mathbb{S}$、$\mathbb{S}^+\}\cup X\subset\mathcal{H}_a(X)$。（b）若 x、$y\in\mathcal{H}_a(X)$，则 $x+y\in\mathcal{H}_a(X)$，且 $\varphi xy\in\mathcal{H}_a(X)$。（c）设 $\alpha\in\mathcal{H}_a(X)\cap\mathbb{S}$。则 $\alpha^+\in\mathcal{H}_a(X)$。（d）设 $\alpha=\psi^f_\pi(b)$，其中 $\{\pi,b\}\subset\mathcal{H}_a(X)$、 $b<a$，以及一个有限函数 f 使得 $SC_\Lambda(f)\subset\mathcal{H}_a(X)\cap\mathcal{H}_b(\alpha)$。则 $\alpha\in\mathcal{H}_a(X)$。

2.（$Mh^a_c(\xi)$ 和 $Mh^a_c(f)$ 的定义）
对于 $c<\Lambda$ 和序数 $a<\varepsilon_{\Lambda+1}$, $\xi<\Gamma_{\Lambda+1}$，定义类 $Mh^a_c(\xi)$。令 π 为正则序数 $\leq\mathbb{S}$。于是，对序数 $\pi\leq\mathbb{S}$ 作主归纳，并对 $c<\Lambda$ 作辅助归纳，我们定义 $\pi\in Mh^a_c(\xi)$ 当且仅当 $\{a,c,\xi\}\subset\mathcal{H}_a(\pi)$，且

$$\forall f<^c\xi\forall g\,(SC_\Lambda(f,g)\subset\mathcal{H}_a(\pi)\,\&\,\pi\in Mh^a_0(g_c)\Rightarrow\pi\in M(Mh^a_0(g_c*f^c))) \tag{2}$$

其中 f,g 遍历有限函数，且

$$\begin{aligned}Mh^a_c(f)&:=\bigcap\{Mh^a_d(f(d)):d\in\mathrm{supp}(f^c)\}\\&=\bigcap\{Mh^a_d(f(d)):c\leq d\in\mathrm{supp}(f)\}.\end{aligned}$$

特别地， $Mh^a_0(g_c)=\bigcap\{Mh^a_d(g(d)):\ d\in\mathrm{supp}(g_c)\}=\bigcap\{Mh^a_d(g(d)):c>d\in\mathrm{supp}(g)\}$。当 $f=\emptyset$ 或 $f^c=\emptyset$ 时，令 $Mh^a_c(\emptyset):=\Lambda$。

3.（$\psi_\pi^f(a)$ 的定义）设 $a < \varepsilon_{\Lambda+1}$ 是一个序数，π 是一个正则序数，f 是一个有限函数。然后令

$$\psi_\pi^f(a) := \min(\{\pi\} \cup \{\kappa \in Mh_0^a(f) \cap \pi : \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \pi \subset \kappa, \{\pi, a\} \cup SC_\Lambda(f) \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\})$$
对于空函数 $\emptyset$, $\psi_\pi(a) := \psi_\pi^\emptyset(a)$。 (3)

4. 对于类 $A \subset (\mathbb{S}+1)$，令 $\alpha \in M_c^a(A)$ 当且仅当 $\alpha \in A$ 且

$$\forall g[\alpha \in Mh_0^a(g_c) \,\&\, SC_\Lambda(g_c) \subset \mathcal{H}_a(\alpha) \Rightarrow \alpha \in M\,(Mh_0^a(g_c) \cap A)] \quad (4)$$

假设存在 M. Rathjen 引入的敏锐基数 [6]，我们在 [3] 中证明：若 $\{a, c, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{S})$，且 $c < \mathbb{S}^+$、a、$\xi < \varepsilon_{\mathbb{S}^+ +1}$ 和 $\mathrm{supp}(f)$ 满足 $= \{c\}$，则 $\psi_\mathbb{S}^f(a) < \mathbb{S}$。此外，若 $\pi \in Mh_0^b(f)$、$SC_\Lambda(g) \cup \{\pi, b\} \subset \mathcal{H}_b(\pi)$，且 g 是由有限函数 f 和序数 d、c 按如下方式定义的有限函数，则 $\psi_\pi^g(b) < \pi$。$d < c \in \mathrm{supp}($
$\tilde{}\quad f \quad d\ c\ \cap \quad f\ =\ d\ c\ \cap)$ with $(\,,\,)\,\mathrm{supp}(\,)\,(\,,\,)\,\mathrm{supp}(g) = \emptyset$, $g_d = f_d$, $g(d) < f(d) + \theta_{c-d}(f(c)) \cdot \omega$，且 $g <^c f(c)$。此外，[3] 中还证明了以下引理 2.6。

引理 2.6 假设 $\mathbb{S} \geq \pi \in Mh_d^a(\xi) \cap Mh_c^a(\xi_0)$、$\xi_0 \neq 0$、$d < c$，以及 $\{a, c, d\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)$。此外，设 $\theta_{c-d}(\xi_0) \geq \xi_1 \in \mathcal{H}_a(\pi)$，且当 $\xi \neq 0$ 时，$tl(\xi) > \xi_1$。那么 $\pi \in Mh_d^a(\xi + \xi_1) \cap M_d^a(Mh_d^a(\xi + \xi_1))$。

2.1 序数记号中的标准形

定义 2.7 有限函数 f 的不可约性通过对有限集 $\mathrm{supp}(f)$ 的基数 n 进行归纳来定义。若 $n \leq 1$，则 f 定义为不可约。令 $n \geq 2$ 和 $c < c + d$ 为 $\mathrm{supp}(f)$ 中最大的两个元素，并令 g 为一个有限函数，使得 $\mathrm{supp}(g) = \mathrm{supp}(f_c) \cup \{c\}$，$g_c = f_c$ 且 $\tilde{}\quad\quad\quad

2. $Mh_b^a(f) \prec Mh_b^a(g)$ 成立当且仅当

$$\forall \pi \in Mh_b^a(g) \forall b_0 \leq b \left(SC_\Lambda(f) \subset \mathcal{H}_a(\pi) \,\&\, \pi \in Mh_{b_0}^a(f_b) \Rightarrow \pi \in M(Mh_{b_0}^a(f)) \right).$$

引理 2.9 设 f, g 为不可约有限函数， b 为一个序数，且满足 $f^b \neq g^b$。若 $f <_{lx}^b g$，则对于每个序数 a， $Mh_b^a(f) \prec Mh_b^a(g)$ 成立。

命题 2.10 设 f, g 为不可约有限函数，并假设 $\psi_\pi^f(b) <\pi$ 且 $\psi_\kappa^g(a) < \kappa$。

那么， $\psi_\pi^f(b) < \psi_\kappa^g(a)$ 当且仅当下列情形之一成立：

1. $\pi \leq \psi_\kappa^g(a)$。2. $b < a$, $\psi_\pi^f(b) < \kappa$ 且 $SC_\Lambda(f) \cup \{\pi, b\} \subset \mathcal{H}_a(\psi_\kappa^g(a))$。3. $b > a$ 且 $SC_\Lambda(g) \cup \{\kappa, a\} \not\subset \mathcal{H}_b(\psi_\pi^f(b))$。4. $b = a$, $\kappa < \pi$ 且 $\kappa \notin \mathcal{H}_b(\psi_\pi^f(b))$。5. $b = a$, $\pi = \kappa$, $SC_\Lambda(f) \subset \mathcal{H}_a(\psi_\kappa^g(a))$， 且 $f <_{lx}^0 g$。6. $b = a$, $\pi = \kappa$, $SC_\Lambda(g) \not\subset \mathcal{H}_b(\psi_\pi^f(b))$。

定义2.11 1. $a(\xi)$ 表示一个递归定义的序数： $a(0) = 0$, 且 当 $\xi =_{NF} \sum_{i \leq m} \theta_{b_i}(\xi_i) \cdot a_i$时， $a(\xi) = \sum_{i \leq m} \theta_{b_i}(\omega \cdot a(\xi_i))$（见 (1)）。

2. 对于不可约函数 f，我们按如下方式为其关联序数 $o(f) < \Gamma_{\mathbb{S}^+ + 1}$。对于空函数 $f = \emptyset$， 令 $o(\emptyset) = 0$。令 $\mathrm{supp}(f) = \{0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n\}$， 对于 $i > 0$， 令 $f(c_i) = \xi_i < \Gamma_{\mathbb{S}^+ + 1}$， 且 $\xi_0 = 0$。定义序数 $\zeta_i = o(f;\, c_i)$ 如下： $\zeta_n = \omega \cdot a(\xi_n)$， 且 $\zeta_i = \omega \cdot a(\xi_i) + \theta_{c_{i+1} - c_i}(\zeta_{i+1} + 1)$。最后令 $o(f) = \zeta_0 = o(f;\, c_0)$。

3. 设 $SC_\Lambda(f) < \mu < \Lambda$ 是一个 ε 数。那么， $o_\mu(f)$ 由 $o(f)$ 得到：将 $f(c)$ 中 θ 的基数 Λ 替换为 μ。这意味着将 Λ 替换为 μ，并将 $\tilde{\theta}_1(\xi) = \Lambda^\xi$ 替换为 μ^ξ。

引理 2.12 设 f 是由不可约函数 g 和序数 c、d 按如下方式定义的不可约有限函数。 $f_c = g_c$、 $c < d \in \mathrm{supp}(g)$， 其中 $(c,\ d) \cap \mathrm{supp}(g) = (c,\ d) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$、 $f(c) < g(c) + \tilde{\theta}_{d-c}(g(d)) \cdot \omega$， 且 $f <^d g(d)$。那么 $o(f) < o(g)$ 成立。

此外， 当 $SC_\Lambda(f,\ g) < \mu < \Lambda$、 $o_\mu(f) < o_\mu(g)$ 成立时，

引理 2.13 对于不可约有限函数 f 和 g， 假设 $f <_{lx}^0 g$。那么$o(f) < o(g)$ 成立。

Moreover when $SC_\Lambda(f, g) < \mu < \Lambda$, $o_\mu(f) < o_\mu(g)$ *holds.*

根据命题 2.10， 定义了一个记号系统 $OT(\Pi_1^1) = OT_1$。

定义 2.14 $OT(\Pi^1_1)$ 在 $\mathbb{S} > \alpha \mapsto \alpha^+$ 下封闭。在 $OT(\Pi^1_1)$ 中构造序数项 $\psi^f_\pi(a)$ 时，有两种情况：一种是由 $\{\pi, a\} \subset OT(\Pi^1_1)$ 构造，另一种是由满足 $SC_\Lambda(f) \subset OT(\Pi^1_1)$ 和 $\Lambda = \mathbb{S}^+$ 的不可约函数 f 构造。 $E_{\mathbb{S}}(\alpha)$ 表示 α 的子项集合$< \mathbb{S}$ 。

1. 设 $\xi, a, c \in OT(\Pi^1_1)$, $\xi > 0$, $c < \mathbb{S}^+$ 和 $\{\xi, a, c\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha)$。则 $\alpha = \psi^f_{\mathbb{S}}(a) \in OT(\Pi^1_1)$ 且 $\alpha^+ \in OT(\Pi^1_1)$，其中 $\mathrm{supp}(f) = \{c\}$ 且 $f(c) = \xi$，当且仅当 $\max(SC_{\mathbb{S}^+}(f)) \leq \max(SC_{\mathbb{S}^+}(a))$。设 $f = m(\alpha)$。

2. 设 $\{a, d, \pi\} \subset OT(\Pi^1_1)$, $f = m(\pi)$, $d < c \in \mathrm{supp}(f)$, 且 $(d, c) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$。设 g 是一个不可约函数，使得 $SC_\Lambda(g) = \bigcup\{\{c, g(c)\}$:
$\tilde{c} \in \quad g\} \subset OT\ \Pi^1_1 \quad g_d = f_d \quad d\ c \cap \quad g = \emptyset\ g\ d < f\ d + \mathrm{supp}(\,)(\,),,(\,,)$
$\mathrm{supp}(\,)(\,)(\,)\theta_{c-d}(f(c)) \cdot \omega$, 且 $g <^c f(c)$。此外，若 $\max(SC_\Lambda(f)) < \mu < \Lambda$，其中 μ 是一个 ε 数，则 $\max(SC_\Lambda(g)) < \mu$。

那么，若 $\{\pi, a\} \cup SC_\Lambda(f, g) \subset \mathcal{H}_a(\alpha)$，则 $\alpha = \psi^g_\pi(a) \in OT(\Pi^1_1)$ 且 $\alpha^+ \in OT(\Pi^1_1)$；另见命题3.23。

$$SC_\Lambda(g) \subset M_\alpha \tag{5}$$

M_α 定义如下。

定义2.15 对于序数项 $\psi^f_\sigma(a) \in \Psi_{\mathbb{S}} \subset OT(\Pi^1_1)$，定义 $m(\psi^f_\sigma(a)) := f$ and $\mathrm{p}_0(\psi^f_\sigma(a)) = \mathrm{p}_0(\sigma)$ if $\sigma < \mathbb{S}$，以及 $\mathrm{p}_0(\psi^f_{\mathbb{S}}(a)) = a$。

定义2.16 $M_\rho := \mathcal{H}_b(\rho)$，适用于 $b = \mathrm{p}_0(\rho)$ 和 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。

定义2.17 对于 $\gamma \prec \mathbb{S}$，定义 ε 数 $\mathbb{S} < \mu = \Lambda(\gamma) < \mathbb{S}^+$。设 $\gamma = \psi^f_\sigma(\alpha) \preceq \psi^g_{\mathbb{S}}(b)$，且 $b = \mathrm{p}_0(\gamma)$。那么， $\Lambda(\gamma)$ 表示满足 $\max(SC_{\mathbb{S}^+}(b)) < \mu$ 的最小 ε 数 $\mathbb{S} < \mu < \mathbb{S}^+$。

由定义 2.14 可知，$\max(SC_{\mathbb{S}^+}(f)) < \Lambda(\gamma)$。

$OT(\Pi^1_1)$ 在 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 下对 $\alpha \in M_\rho$封闭。具体而言，若 $\{\alpha, \rho\} \subset OT(\Pi^1_1)$，且 $\alpha \in M_\rho$和 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$，则 $\alpha[\rho/\mathbb{S}] \in OT(\Pi^1_1)$。

定义 2.18 设 $\alpha \in M_\rho$ 且 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。我们递归地定义一个序数 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 如下。 $\alpha[\rho/\mathbb{S}] := \alpha$，当 $\alpha < \mathbb{S}$时。在下文中，假设 $\alpha \geq \mathbb{S}$。

$\mathbb{S}[\rho/\mathbb{S}] := \rho$。 $\mathbb{K}[\rho/\mathbb{S}] \equiv (\mathbb{S}^+)[\rho/\mathbb{S}] := \rho^+$。 $(\psi_{\mathbb{K}}(a))\ [\rho/\mathbb{S}] = (\psi_{\mathbb{S}^+}(a))\ [\rho/\mathbb{S}] = \psi_{\rho^+}(a[\rho/\mathbb{S}])$。该映射与 $+$ 和 φ可交换。

引理 2.19 对于 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$, $\{\alpha[\rho/\mathbb{S}] : \alpha \in M_\rho\}$ 是 M_ρ 的传递塌缩，其含义是 $\beta < \alpha \Leftrightarrow \beta[\rho/\mathbb{S}] < \alpha[\rho/\mathbb{S}]$, $\beta \in \mathcal{H}_\alpha(\gamma) \Leftrightarrow \beta[\rho/\mathbb{S}] \in \mathcal{H}_{\alpha[\rho/\mathbb{S}]}(\gamma[\rho/\mathbb{S}])$ 对于 $\gamma > \mathbb{S}$，且 $OT(\Pi^1_1) \cap \alpha[\rho/\mathbb{S}] = \{\beta[\rho/\mathbb{S}] : \beta \in M_\rho \cap \alpha\}$ 对于 $\alpha, \beta, \gamma \in M_\rho$。

命题 2.20 设 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。

1. $\mathcal{H}_\gamma(M_\rho) \subset M_\rho$ 当且仅当 $\gamma \leq \mathrm{p}_0(\rho)$。
2. $M_\rho \cap \mathbb{S} = \rho$ 和 $\rho \notin M_\rho$。
3. 若 $\sigma < \rho$ 且 $\mathrm{p}_0(\sigma) \leq \mathrm{p}_0(\rho)$，则 $M_\sigma \subset M_\rho$。

3 带有最大特定集合的良基性证明

在本节中，我们在集合论 KPω +($M \prec_{\Sigma_1} V$) 中进行论证，证明记号系统 $OT(\Pi^1_1)$ 在每个 $\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1))$ 处都是良基的。我们将 M 记作 $L_\mathbb{S}$，即 $L_\mathbb{S} \prec_{\Sigma_1} L$。证明基于 distinguished 类，这是 Buchholz [5] 首次引入的。

3.1 特定集合

$X, Y, \ldots$ 遍历 $OT(\Pi^1_1)$ 的子集。我们如下定义用于$\alpha \in OT(\Pi^1_1)$ 和 $X \subset OT(\Pi^1_1)$ 的集合 $\mathcal{C}^\alpha(X) \subset OT(\Pi^1_1)$。

定义 3.1 设 $\alpha, \beta \in OT(\Pi^1_1)$ 和 $X \subset OT(\Pi^1_1)$。

$\mathcal{C}^\alpha(X)$ 表示在 $+, \sigma \mapsto \sigma^+, (\beta, \gamma) \mapsto \varphi\beta\gamma$ 以及 $(\sigma, \beta, f) \mapsto \psi^f_\sigma(\beta)$ 下，$\{0, \Omega, \mathbb{S}, \mathbb{S}^+\} \cup (X \cap \alpha)$ 的闭包，其中 $\sigma > \alpha$ 属于 $OT(\Pi^1_1)$。

最后一条规定，若 $\{\sigma, \beta\} \cup SC_\Lambda(f) \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$ 且$\sigma > \alpha$，则 $\psi^f_\sigma(\beta) \in \mathcal{C}^\alpha(X)$。

命题 3.2 假设 $\forall\gamma \in X[\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(X)]$ 对于一个集合 $X \subset OT(\Pi^1_1)$。

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathcal{C}^\beta(X) \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$. 2.
$\alpha < \beta < \alpha^+ \Rightarrow \mathcal{C}^\beta(X) = \mathcal{C}^\alpha(X)$.

定义 3.3 1. $Prg[X, Y] :\Leftrightarrow \forall\alpha \in X(X \cap \alpha \subset Y \to \alpha \in Y)$。

2. 对于一个可定义的类 $\mathcal{X}$， $TI[\mathcal{X}]$ 表示如下模式：$TI[\mathcal{X}]$：
$\Leftrightarrow Prg[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \to \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$对任意可定义的类 $\mathcal{Y}$均成立。3. 对于 $X \subset OT(\Pi^1_1)$， $W(X)$表示 X的良基部分。

4. $Wo[X] :\Leftrightarrow X \subset W(X)$。

5. $\alpha \in W_\Sigma(X)$表示一个 Σ_1公式，断言 $\alpha \in X$ 且“存在一个嵌入 f: $X \cap (\alpha + 1) \to ON$”，即 $\exists f \in {}^\omega ON \forall\beta, \ \gamma \in X \cap (\alpha + 1)(\beta < \gamma \to f(\beta) < f(\gamma))$，其中 ON是所有序数构成的类， $\beta < \gamma$属于 $OT(\Pi^1_1)$，且 $f(\beta) < f(\gamma)$ 属于 ON。6. $Wo_\Sigma[X]$ 表示一个 Σ_1 公式，断言 “ 存在一个嵌入 f: $X \to ON$”，即 $\exists f \in {}^\omega ON \forall\beta, \ \gamma \in X(\beta < \gamma \to f(\beta) < f(\gamma))$。

注意，对于 $\alpha \in OT(\Pi^1_1)$， $W(X) \cap \alpha = W(X \cap \alpha)$。此外，KP$\omega \vdash \alpha \in W_\Sigma(X) \Rightarrow \alpha \in W(X)$，且 KP$\ell \vdash \alpha \in W(X) \Rightarrow \alpha \in W_\Sigma(X)$。

定义 3.4 对于 $X \subset OT(\Pi^1_1)$ 和 $\alpha \in OT(\Pi^1_1)$，

1. $D[X] :\Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \leq X \to W(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+ = X \cap \alpha^+)$.
如果 X，则称集合 X 为特定集合。

2. $D_\Sigma[X]$是由以下内容定义的 Σ 公式

$$D_\Sigma[X] :\Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \leq X \to W(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+ \subset X \cap \alpha^+ \subset W_\Sigma(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+) \tag{6}$$

3. $\mathcal{W} := \bigcup\{X : D_\Sigma[X]\}$。

由 $\mathrm{KP}\omega \vdash \alpha \in W_\Sigma(X) \Rightarrow \alpha \in W(X)$ 可知，对于任意 X， $D_\Sigma[X] \Rightarrow D[X]$ 。

设 $\alpha \in X$，其中 Σ 是特定集合 X。那么 $W(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+ = X \cap \alpha^+$。因此，$X$ 是良序。尽管 $\bigcup\{X : D[X]\}$ 可能是真类，但结果表明 $\mathcal{W}$ 是一个集合。

命题 3.5 设 $X \in L_\mathbb{S}$。

1. $\alpha \in W(X) \Leftrightarrow L_\mathbb{S} \models \alpha \in W(X)$。2. $\alpha \in W_\Sigma(X) \Leftrightarrow L_\mathbb{S} \models \alpha \in W_\Sigma(X)$。3. $D_\Sigma[X] \Leftrightarrow L_\mathbb{S} \models D_\Sigma[X]$。4. $D_\Sigma[X] \leftrightarrow D[X]$。
5. $\mathcal{W} = \bigcup\{X \in L_\mathbb{S} : D[X]\}$ 和 $\exists X(X = \mathcal{W})$。

证明。3.5.1. 由于 $\alpha \in W(X)$ 是一个 Π_1-公式，只需在假设 $L_\mathbb{S} \models \alpha \in W(X)$ 的情况下证明 $\alpha \in W(X)$。由$L_\mathbb{S} \models \mathrm{KP}\ell$，我们得到 $L_\mathbb{S} \models(\alpha \in W(X) \leftrightarrow \alpha \in W_\Sigma(X))$。因此 $\alpha \in W_\Sigma($ $X)$ 且 $\alpha \in W(X)$。
3.5.2. 假设 $\alpha \in W_\Sigma(X)$。由于 $\alpha \in W_\Sigma(X)$ 是一个 Σ_1-公式，由 $L_\mathbb{S} \prec_{\Sigma_1} L$ 可得$L_\mathbb{S} \models \alpha \in W_\Sigma(X)$。反方向可由 Σ_1-公式的持久性推出。

3.5.3 可由命题 3.5.1 和 3.5.2 推出。
3.5.4. 由 $W_\Sigma(\mathcal{C}^\alpha(X)) \subset W(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 可知 $D_\Sigma[X] \to D[X]$。假设 $D[X]$,$\alpha \leq X$ 和 $\beta \in X \cap \alpha^+$。那么由 $D[X]$，有 $\beta \in W(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+$。由 $L_\mathbb{S} \models \beta \in W($ $\mathcal{C}^\alpha(X)) \to \beta \in W_\Sigma(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 以及命题 3.5.1 和 3.5.2，可得 $\beta \in W_\Sigma(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+$。
3.5.5. 由命题 3.5.4，我们得到 $\bigcup\{X \in L_\mathbb{S} : D[X]\} \subset \mathcal{W}$。令 $\alpha \in \mathcal{W}$。这意味着一个 Σ_1-公式 $\exists X(\alpha \in X \wedge D_\Sigma[X])$ 成立。由 $L_\mathbb{S} \prec_{\Sigma_1} L$，我们得到 $L_\mathbb{S} \models \exists X(\alpha \in X \wedge D_\Sigma[X])$。由命题 3.5.3 和命题 3.5.4，我们得到 $\alpha \in \bigcup\{X \in L_\mathbb{S} : L_\mathbb{S} \models D_\Sigma[X]\} = \bigcup\{X \in L_\mathbb{S} : D_\Sigma[X]\} = \bigcup\{X \in L_\mathbb{S} : D[X]\}$。$\Delta_0$-分离给出 $\exists X(X = \mathcal{W})$。□

命题 3.6 设 $X \in L_\mathbb{S}$ 是一个特定集合。则 $\alpha \in X \Rightarrow \forall\beta[\alpha \in \mathcal{C}^\beta(X)]$。

命题 3.7 对任意特定集合 X 和 Y，若它们属于 $L_\mathbb{S}$，则 $X \cap \alpha = Y \cap \alpha \Rightarrow$ $\forall\beta < \alpha^+\{\mathcal{C}^\beta(X) \cap \beta^+ = \mathcal{C}^\beta(Y) \cap \beta^+\}$ 成立

命题 3.8 对于 $L_\mathbb{S}$ 中的特定集合 X 和 Y， $\alpha \leq X \,\&\, \alpha \leq Y \Rightarrow X \cap \alpha^+ = Y \cap \alpha^+$。

命题 3.9 $\mathcal{W}$ 是极大显著集，即 $D[\mathcal{W}]$ 和 $\exists X(X=\mathcal{W})$。

证明。首先，我们证明 $\forall\gamma\in\mathcal{W}(\gamma\in\mathcal{C}^{\gamma}(\mathcal{W}))$。令 $\gamma\in\mathcal{W}$，并根据命题3.5.5，取一个特定集合 $X\in L_{\mathbb{S}}$，使得 $\gamma\in X$。于是，由 $X\subset\mathcal{W}$ 可得 $\gamma\in\mathcal{C}^{\gamma}(X)\subset\mathcal{C}^{\gamma}(\mathcal{W})$。

令 $\alpha\leq\mathcal{W}$。取一个特定集合 $X\in L_{\mathbb{S}}$，使得 $\alpha\leq X$。我们断言 $\mathcal{W}\cap\alpha^{+}=X\cap\alpha^{+}$。令 $Y\in L_{\mathbb{S}}$ 为一个特定集合，且$\beta\in Y\cap\alpha^{+}$。根据命题 3.8，得 $\beta\in Y\cap\beta^{+}=X\cap\beta^{+}$。由此断言可得 $W(\mathcal{C}^{\alpha}(\mathcal{W}))\cap\alpha^{+}=W(\mathcal{C}^{\alpha}(X))\cap\alpha^{+}=X\cap\alpha^{+}=\mathcal{W}\cap\alpha^{+}$。因此，$D[\mathcal{W}]$。□

由 $\mathcal{W}\cap\alpha^{+}=X\cap\alpha^{+}$，对于一个 Σ-特定集合 X，可知 $\mathcal{W}\cap\alpha^{+}=X\cap\alpha^{+}\subset W_{\Sigma}(\mathcal{C}^{\alpha}(X))\cap\alpha^{+}=W_{\Sigma}(\mathcal{C}^{\alpha}(\mathcal{W}))\cap\alpha^{+}$。因此，$D_{\Sigma}[\mathcal{W}]$。

3.2 集合 $\mathcal{C}^{\alpha}(\mathcal{W}_{\mathbb{S}})$和 $\mathcal{G}$

定义 3.10 $\mathcal{G}(Y):=\{\alpha\in OT(\Pi_1^1):\ \alpha\in\mathcal{C}^{\alpha}(Y)\ \&\ \mathcal{C}^{\alpha}(Y)\cap\alpha\subset Y\}$。

引理 3.11 对于 $D[X]$, $X\subset\mathcal{G}(X)$。

引理 3.12 假设对于 $Y\in L_{\mathbb{S}}$，有 $D[Y]$ 和 $\alpha\in\mathcal{G}(Y)$。令 $X=W(\mathcal{C}^{\alpha}(Y))\cap\alpha^{+}\in L_{\mathbb{S}}$。假设满足以下条件 (7)。那么 $\alpha\in X$ 和$D[X]$。

$$\forall\beta<\mathbb{S}\left(Y\cap\alpha^{+}<\beta\,\&\,\beta^{+}<\alpha^{+}\rightarrow W(\mathcal{C}^{\beta}(Y))\cap\beta^{+}\subset Y\right)\tag{7}$$

命题 3.13 令 $D[X]$。

1. 令 $\{\alpha,\beta\}\subset X$ 满足 $\alpha+\beta=\alpha\#\beta$ 和 $\alpha>0$。那么 $\gamma=\alpha+\beta\in X$。
2. 如果 $\{\alpha,\beta\}\subset X$，那么 $\varphi_{\alpha}(\beta)\in X$。

命题 3.14 1. $0\in\mathcal{W}$。

2. 令 $\sigma=0$ 或 $\sigma=\psi_{\mathbb{S}}^{f}(a)$ 或 $\sigma=\psi_{\pi}^{f}(a)$。假设 $\sigma\in\mathcal{W}$。那么$\sigma^{+}\in\mathcal{W}$。

证明。由引理 3.12 可知，每种情况如下。
3.14.1. 我们看到 $0\in Y=W(\mathcal{C}^{0}(\emptyset))\cap\Omega\in L_{\mathbb{S}}$，其中 $\Omega=0^{+}$ 且 $D[Y]$。
3.14.2. 令 $\sigma\in Y\in L_{\mathbb{S}}$满足 $D[Y]$。我们看到 $\sigma^{+}\in X=W(\mathcal{C}^{\sigma^{+}}(Y))\cap\sigma^{++}\in L_{\mathbb{S}}$且 $D[X]$。□

引理 3.15 设 $D[Y]$ 且 $\{0,\Omega\}\subset Y\in L_{\mathbb{S}}$，并且对于 $\eta\in OT(\Pi_1^1)\cap(\mathbb{S}+1)$

$$\eta\in\mathcal{G}(Y)\tag{8}$$

and

$$\forall\gamma\prec\eta(\gamma\in\mathcal{G}(Y)\Rightarrow\gamma\in Y)\tag{9}$$

令 $X=W(\mathcal{C}^{\eta}(Y))\cap\eta^{+}$。则 $\eta\in X\in L_{\mathbb{S}}$和 $D[X]$。

3.3 马洛宇宙

在本小节中，我们考虑 $[1]$ 中所述集合 $P \in L_{\mathbb{S}}$ 内的极大 distinguished 类 $\mathcal{W}^P$。令 ad 表示一个 Π_3^- 句子，使得传递集 z 可容许，当且仅当 $(z;\in) \models ad$。令 $lmtad :\Leftrightarrow \forall x \exists y (x \in y \wedge ad^y)$。注意，$lmtad$ 是一个 Π_2^- 句子。

定义 3.16 1. 宇宙是指 $L_{\mathbb{S}}$，或是满足 $\omega \in Q$ 的传递集 $Q \in L_{\mathbb{S}}$。宇宙记作 P、Q, ...

2. 对于宇宙 P 和集合论句子 φ，$P \models \varphi :\Leftrightarrow (P;\in) \models \varphi$。

3. 若宇宙 P 满足 $lmtad^P$，则称其为极限宇宙，即 P 是可容许集的极限。极限宇宙的类记作 $Lmtad$。

引理 3.17 $W(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 以及 $D[X]$ 对极限宇宙 P 都是绝对的。

定义 3.18 对于宇宙 P，令 $\mathcal{W}^P := \bigcup \{X \in P : D[X]\}$。

我们根据命题3.5.5得出 $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{L_{\mathbb{S}}}$。

引理 3.19 设 P 是一个对有限并封闭的宇宙，且 $\alpha \in OT(\Pi_1^1)$。

1. 存在一个有限集 $K(\alpha) \subset OT(\Pi_1^1)$，使得 $\forall Y \in P \forall \gamma [K(\alpha) \cap Y = K(\alpha) \cap \mathcal{W}^P \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{C}^\gamma(Y))]$。2. 存在一个特定集合 $X \in P$，使得 $\forall Y \in P \forall \gamma [X \subset Y \,\&\, D[Y] \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{C}^\gamma(Y))]$。

命题3.20 对每个极限宇宙 P，$D[\mathcal{W}^P]$ 均成立，且 $\exists X \in L_{\mathbb{S}} (X = \mathcal{W}^P)$，如果 $P \in L_{\mathbb{S}}$。

对于在可容许集上统一成立的全称 Π_n-公式 $\Pi_n(a)$（$n > 0$），令

$$P \in M_2(\mathcal{C}) :\Leftrightarrow P \in Lmtad \,\&\, \forall b \in P [P \models \Pi_2(b) \rightarrow \exists Q \in \mathcal{C} \cap P (Q \models \Pi_2(b))].$$

定义3.21 令 $\gamma = \psi_\sigma^f(\alpha) \prec \mathbb{S}$ 和 $\mu = \Lambda(\gamma) < \mathbb{S}^+$ 为定义2.17中的序数。令 $O(\gamma) = o_\mu(f) < \mathbb{S}^+$，其中 $o_\mu(f)$ 是定义2.11中由 ε 数 μ 定义的序数。

令 $O(\Omega) = 1$，$O(\mathbb{S}) = \mathbb{S}^+$ 且 $O(\gamma) = 0$ 否则。

引理 3.22 令 $\mathcal{C}$ 为一个 Π^1_0-类，使得 $\mathcal{C} \subset Lmtad$。假设 $P \in M_2(\mathcal{C})$、$\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$ 且 $O(\alpha) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P))$，则存在一个宇宙 $Q \in \mathcal{C}$，使得 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^Q)$ 且 $O(\alpha) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^Q))$。

证明。假设 $P \in M_2(\mathcal{C})$、$\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$ 和 $O(\alpha) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P))$。首先由$\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P)$、$O(\alpha) \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P)$ 和引理 3.19，取一个特定集合 $X_0 \in P$，使得 $\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(X_0)$、$O(\alpha) \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(X_0)$ 且 $K(\alpha) \cap \mathcal{W}^P \subset X_0$。于是对任意宇宙 $X_0 \in Q \in P$，由 $\mathcal{W}^Q \subset \mathcal{W}^P$ 可得 $O(\alpha) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^Q))$。

接下来，将 $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \cap \alpha \subset \mathcal{W}^P$ 作解析表达，我们有

$$\forall \beta < \alpha[\beta \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \Rightarrow \exists Y \in P(D[Y] \,\&\, \beta \in Y)]$$

由引理 3.19 可得 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \exists X \in P\{D[X] \,\&\, K(\beta) \cap \mathcal{W}^P \subset X \,\&\, \beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)\}$。因此，对任意 $\beta < \alpha$ 以及任意特定集合 $X \in P$，存在 $\gamma \in K(\beta)$、$Z \in P$ 和一个特定集合 $Y \in P$，使得若 $\gamma \in Z \,\&\, D[Z] \rightarrow \gamma \in X$ 且 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)$，则 $\beta \in Y$。引理 3.17 $D[X]$ 对极限宇宙是绝对的。因此，以下 Π_2-谓词在宇宙 $P \in M_2(\mathcal{C})$ 中成立：

$$\begin{aligned}&\forall \beta < \alpha \forall X \exists \gamma \in K(\beta) \exists Z \exists Y[\{D[X] \,\&\, (\gamma \in Z \,\&\, D[Z] \rightarrow \gamma \in X) \,\&\, \beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)\} \\ &\Rightarrow (D[Y] \,\&\, \beta \in Y)] \end{aligned} \tag{10}$$

现在取一个满足 $X_0 \in Q$ 且 $Q \models$ (10) 的宇宙 $Q \in \mathcal{C} \cap P$。在极限宇宙 Q 中沿上述论证反向推导，我们得到 $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^Q) \cap \alpha \subset \mathcal{W}^Q$和 $X_0 \subset \mathcal{W}^Q = \bigcup\{X \in Q : Q \models D[X]\} \in P$。因此，引理 3.19 得出$\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^Q)$。我们得到 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^Q)$。□

命题 3.23 设 $\gamma = \psi^f_\sigma(\alpha)$、$\in \mathcal{G}(Y)$ 和 $\gamma \preceq \gamma_0 = \psi^g_{\mathbb{S}}(b)$，且 $b = \mathfrak{p}_0(\gamma)$。则 $O(\gamma) \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y)$。

证明。我们有 $\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(Y)$ 和 $\mathcal{C}^\gamma(Y) \cap \gamma \subset Y$。由此得到 $\{\sigma, b\} \cup SC_{\mathbb{S}+}(f) \subset \mathcal{C}^\gamma(Y)$。根据定义 2.14，我们得到 $SC_{\mathbb{S}+}(f,b) < \mu = \Lambda(\gamma)$。$E_{\mathbb{S}}(SC_{\mathbb{S}+}(f,b)) \subset \mathcal{C}^\gamma(Y)$ 由 $\gamma < \mathbb{S}$ 得出。另一方面，根据 (5)，对于 $b = \mathfrak{p}_0(\gamma)$，我们有 $SC_{\mathbb{S}+}(f,b) \subset \mathcal{H}_b(\gamma)$。由此得到 $E_{\mathbb{S}}(SC_{\mathbb{S}+}(f,b)) \subset \mathcal{H}_b(\gamma) \cap \mathbb{S} \subset \gamma$。我们得出 $E_{\mathbb{S}}(SC_{\mathbb{S}+}(f,b)) \subset \mathcal{C}^\gamma(Y) \cap \gamma \subset Y$。因此，$SC_{\mathbb{S}+}(f,b) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y)$。由 $SC_{\mathbb{S}+}(f,b) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y)$ 可知，对于 $\gamma = \psi^f_\sigma(\alpha) \in \mathcal{G}(Y)$，$O(\gamma) = o_\mu(f) \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y)$。□

定义 3.24 我们如下定义 $\mathbb{S} \geq \alpha \in OT(\Pi^1_1)$ 的 α-递归马洛宇宙类 $M_2(\alpha)$：

$$P \in M_2(\alpha) \Leftrightarrow P \in Lmtad \,\&\, \forall \beta \prec \alpha[O(\beta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P)) \Rightarrow P \in M_2(M_2(\beta))] \tag{11}$$

$M_2(\alpha)$ 是一个 Π_3-类。

引理 3.25 如果 $\mathbb{S} \geq \eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$、$O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P))$ 且 $P \in M_2(M_2(\eta))$，并且 $P \in L_{\mathbb{S}}$，那么 $\eta \in \mathcal{W}^P$。

证明。我们通过对 $\in$进行归纳来证明这一点。假设归纳假设，即该引理对任意 $Q \in P$ 都成立。根据引理 3.22，取一个 $Q \in P$ 使得 $Q \in M_2(\eta)$，并且对于$Y = \mathcal{W}^Q \in P$，$\{0, \Omega\} \subset Y$，$O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y))$，且

$$\eta \in \mathcal{G}(Y) \tag{8}$$

另一方面，由定义 (11) 得到 $\forall \gamma \prec \eta[O(\gamma) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^Q)) \Rightarrow Q \in M_2(M_2(\gamma))]$。归纳假设给出 $Y = \mathcal{W}^Q$

$$\forall \gamma \prec \eta(\gamma \in \mathcal{G}(Y) \,\&\, O(\gamma) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y)) \Rightarrow \gamma \in Y)$$

另一方面，根据命题 3.23，$O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y))$ 可推出 $O(\gamma) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(Y))$，其中 $\mathcal{G}(Y) \ni \gamma \prec \eta$。因此

$$\forall \gamma \prec \eta(\gamma \in \mathcal{G}(Y) \Rightarrow \gamma \in Y) \tag{9}$$

因此，由引理 3.15 可得 $\eta \in X$ 且 $D[X]$，其中 $X = W(\mathcal{C}^{\eta}(Y)) \cap \eta^+$。$X \in P$ 由 $Y \in P \in Lmtad$ 得出。因此 $\eta \in \mathcal{W}^P$。□

引理 3.26 $\forall \eta \leq \mathbb{S}[O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})) \Rightarrow L_{\mathbb{S}} \in M_2(M_2(\eta))]$。

证明。我们对 $O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}))$ 作归纳来证明该引理。设 $O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}))$ 且 $L_{\mathbb{S}} \models \Pi_2(b)$，其中 $b \in L_{\mathbb{S}}$。我们需要找到一个宇宙$Q \in L_{\mathbb{S}}$，使得 $b \in Q$、$Q \in M_2(\eta)$ 和 $Q \models \Pi_2(b)$。

根据定义 (11)，$L_{\mathbb{S}} \in M_2(\eta)$ 等价于 $\forall \gamma \prec \eta[O(\gamma) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})) \Rightarrow L_{\mathbb{S}} \in M_2(M_2(\gamma))]$, , 其中 $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{L_{\mathbb{S}}}$ 由命题3.5.5得出。我们得到 $\gamma \prec \eta \Rightarrow O(\gamma) < O(\eta)$。因此，归纳假设给出 $L_{\mathbb{S}} \in M_2(\eta)$。设 g 是集合论意义下的一个原始递归函数，使得 $L \in M_2(\eta) \Leftrightarrow P \models \Pi_3(g(\eta))$。于是 $L_{\mathbb{S}} \models \Pi_2(b) \wedge \Pi_3(g(\eta))$。由于这是一个 Π_3- 公式，且在一个 Π_3-反射宇宙 $L_{\mathbb{S}}$中成立，因此我们可以得出，对于某个 $Q \in L_{\mathbb{S}}$，$Q \models \Pi_2(b) \wedge \Pi_3(g(\eta))$，进而 $Q \in M_2(\eta)$。证毕。□

引理 3.27 $\forall \eta \leq \mathbb{S}\left[\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}) \,\&\, O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})) \Rightarrow \eta \in \mathcal{W}\right]$。

证明。假设 $\mathbb{S} \geq \eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W})$ 且 $O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}))$。由引理 3.26 可得$L_{\mathbb{S}} \in M_2(M_2(\eta))$。由此可知 $L_{\mathbb{S}} \in M_2(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C} = M_2(M_2(\eta))$，如同在引理 3.26 的证明中再次利用 $L_{\mathbb{S}}$ 的 Π_3-反射所得。然后根据引理 3.22，取一个集合 $P \in L_{\mathbb{S}}$，使得 $\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$、$O(\eta) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}^P))$ 且$P \in \mathcal{C} = M_2(M_2(\eta))$。由引理 3.25 可得 $\eta \in \mathcal{W}^P \subset \mathcal{W}$。□

定义 3.28 令 $\mathcal{W}_1 := W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}))$。

命题 3.29 1. $\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S}^+ = \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+$ 且 $\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S} = \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}) \cap \mathbb{S} = \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S} = \mathcal{W} \cap \mathbb{S}$.

2. $\mathbb{S} \in \mathcal{W}_1$。

3. 对每个 $n < \omega$，$TI[\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)]$。

证明。3.29.1 和 3.29.2。由于不存在正则序数$> \mathbb{S}^+$, $\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)\cap\mathbb{S}^+ = \mathcal{W}_1\cap\mathbb{S}^+$。我们从 $\psi_{\mathbb{S}^+}(a) > \mathbb{S}$和 $W(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$中看到 $\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})\cap\mathbb{S} = \mathcal{W}\cap\mathbb{S} = \mathcal{W}_1\cap\mathbb{S}$。因此 $\mathbb{S} \in \mathcal{W}_1$。

3.29.3. $TI[\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S}^+]$由 $\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S}^+ = \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+$推出。通过对 $n < \omega$ 进行元归纳，我们利用 Gentzen 跳跃集得到 $TI[\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)]$。□

引理 3.30 $a \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)$ & $\psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in OT(\Pi^1_1) \Rightarrow \psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in \mathcal{W}_1$对每个 $n < \omega$ 均成立。

证明。根据命题 3.29.3，只需证明 $Prg[\mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)\ B]$对于$B(a)$：$\Leftrightarrow \big[\psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in OT(\Pi^1_1) \Rightarrow \psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in \mathcal{W}_1\big]$。假设 $a \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。由命题 3.2.1 和 3.29.1 可得 $\psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})$。

接下来，我们通过对 $\ell\beta$ 进行归纳，证明 $\beta \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{H}_a(\psi_{\mathbb{S}^+}(a)) \Rightarrow \beta \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。根据命题 3.29，我们可以假设 $\beta = \psi_{\mathbb{S}^+}(b)$。于是 $b \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})\cap\mathcal{H}_a(\psi_{\mathbb{S}^+}(a))$，并且根据长度归纳假设有 $b \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。此外， $b < a$。因此，归纳假设推出 $\beta \in \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。

特别地，我们得到 $\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W}) \cap \psi_{\mathbb{S}^+}(a) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{W}_1$。因此，$\psi_{\mathbb{S}^+}(a) \in W(\mathcal{C}^{\mathbb{S}}(\mathcal{W})) = \mathcal{W}_1$。□

3.4 良基性证明（续）

定义 3.31 对于不可约函数 f，令

$$f \in J :\Leftrightarrow SC_{\mathbb{S}^+}(f) \subset \mathcal{W}_1.$$

对于 $a \in OT(\Pi^1_1)$ 和不可约函数 f，定义：

$$\begin{aligned}
A(a,f) &:\Leftrightarrow \forall\sigma \in \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+[\psi^f_\sigma(a) \in OT(\Pi^1_1) \,\&\, O(\psi^f_\sigma(a)) \in \mathcal{W}_1 \Rightarrow \psi^f_\sigma(a) \in \mathcal{W}].\\
\mathrm{MIH}(a) &:\Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap a \forall f \in J\ A(b,f).\\
\mathrm{SIH}(a,f) &:\Leftrightarrow \forall g \in J[g <^0_{lx} f \Rightarrow A(a,g)].
\end{aligned}$$

引理 3.32 假设在定义 3.31 中， $a \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)\cap\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)$、 $f \in J$、元归纳假设(a)和子归纳假设(a, f)成立。则

$$\forall\kappa \in \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+[\psi^f_\kappa(a) \in OT(\Pi^1_1) \,\&\, O(\psi^f_\kappa(a)) \in \mathcal{W}_1 \Rightarrow \psi^f_\kappa(a) \in \mathcal{W}].$$

证明。按照引理 3.27 中的做法即可看出这一点。设 $\alpha_1 = \psi^f_\kappa(a) \in OT(\Pi^1_1)$ 满足 $O(\alpha_1) \in \mathcal{W}_1$, $a \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$, $\mathbb{S} \geq \kappa \in \mathcal{W}_1$ 和 $f \in J$。由引理 3.27，只需证明 $\alpha_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{W})$。

由命题 3.2.1 可得 $\{\kappa, a\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(f) \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$，因此 $\alpha_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$。只需证明以下断言。

$$\forall\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1[\beta_1 \in \mathcal{W}]. \tag{12}$$

对（12）的证明通过对 $\ell\beta_1$ 进行归纳。假设 $\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1$ 并令

$$\mathrm{LIH} :\Leftrightarrow \forall\gamma \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1[\ell\gamma < \ell\beta_1 \Rightarrow \gamma \in \mathcal{W}].$$

我们证明 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。我们可以假设，对于某些 π、b、g，有 $\beta_1 = \psi_\pi^g(b)$，且满足 $\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(g)$、 $\subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$ 和 $\alpha_1 < \pi \leq \mathbb{S}$。

情况 1. $b < a$, $\beta_1 < \kappa$ 和 $\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset \mathcal{H}_a(\alpha_1)$：令 B 表示由以下递归方式定义的 β_1 的子项集合。首先，$\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset B$。令 $\alpha_1 \leq \beta \in B$。若 $\beta =_{NF} \gamma_m + \cdots + \gamma_0$，则 $\{\gamma_i : i \leq m\} \subset B$。若 $\beta =_{NF} \varphi\gamma\delta$，则 $\{\gamma, \delta\} \subset B$。若 $\beta =_{NF} \gamma^+$，则 $\gamma \in B$。若 $\beta = \psi_\sigma^h(c)$ 且 $\sigma > \alpha_1$，则 $\{\sigma, c\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(h) \subset B$。

然后，由 $\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$，我们可以归纳得出 $B \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$。因此，根据归纳假设，我们得到 $B \cap \alpha_1 \subset \mathcal{W}$。此外，如果 $\alpha_1 \leq \psi_\sigma^h(c) \in B$，则 $c < a$。我们声称

$$\forall \beta \in B(\beta \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)) \tag{13}$$

通过对 $\ell\beta$ 进行归纳证明（13）。令 $\beta \in B$。根据归纳假设，我们可以假设 $\alpha_1 \leq \beta = \psi_\sigma^h(c)$。于是，根据归纳假设，我们有 $\{\sigma, c\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(h) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。另一方面，我们有 $c < a < \omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)$。若 $\sigma = \mathbb{S}^+$，则由引理 3.30 得出 $\beta = \psi_{\mathbb{S}^+}(c) \in \mathcal{W}_1$。令 $\sigma \leq \mathbb{S}$。于是 $\{\sigma\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(h) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{S}^+ = \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+$。令 $\alpha_1 \leq \beta = \psi_\sigma^h(c) \preceq \psi_{\mathbb{S}}^{h_0}(c_0)$。于是，根据长度归纳假设，$SC_{\mathbb{S}^+}(c_0) \subset B$ 且 $SC_{\mathbb{S}^+}(c_0) \subset \mathcal{W}_1$。因此，对于最小的 ε 数 $\Lambda(\beta) > \max(SC_{\mathbb{S}^+}(c_0))$，有 $\Lambda(\beta) \in \mathcal{W}_1$。由 $SC_{\mathbb{S}^+}(h) \cup \{\Lambda(\beta)\} \subset \mathcal{W}_1$，我们得到 $O(\beta) \in \mathcal{W}_1$。元归纳假设(a) 得出 $\beta \in \mathcal{W}$。由此证明了（13）。□

特别地，我们得到 $\{\pi, b, \Lambda(\beta_1)\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。此外，我们有 $b < a$。因此，再次由 MIH(a) 可得 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。

情形 2。 $b = a$, $\pi = \kappa$, $SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset \mathcal{H}_a(\alpha_1)$ 且 $g <_{lx}^0 f$：与 (13) 中一样，我们看到，$SC_{\mathbb{S}^+}(g) \subset \mathcal{W}_1$ 可由引理 3.30 和 MIH(a) 得出。SIH(a, f) 可得 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。

情形 3。 $a \leq b$ 且 $SC_{\mathbb{S}^+}(f) \cup \{\kappa, a\} \not\subset \mathcal{H}_b(\beta_1)$：与 [1,2] 中一样，我们看到存在一个 γ 使得 $\beta_1 \leq \gamma \in \mathcal{W} \cap \alpha_1$。于是，由 $\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$ 可得 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。

这就完成了对 (12) 和该引理的证明。□

引理 3.33 对于 $\psi_\kappa^f(a) \in OT(\Pi_1^1)$，若 $a \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \omega_n(\mathbb{S}^+ + 1)$， $\{\kappa\} \cup SC_{\mathbb{S}^+}(f) \subset \mathcal{W}_1 \cap \mathbb{S}^+$ 且 $O(\psi_\kappa^f(a)) \in \mathcal{W}_1$，则 $\psi_\kappa^f(a) \in \mathcal{W}$。

证明。由引理 3.32 和命题 3.29.3 可知这一点。注意，若 $\beta = \psi_\kappa^g(a) < \psi_\kappa^f(a) = \alpha$ 由 $g <_{lx}^0 f$，则根据引理 2.13，有 $\mathrm{p}_0(\beta) = \mathrm{p}_0(\alpha)$、 $\Lambda(\beta) = \Lambda(\alpha)$ 和 $O(\beta) < O(\alpha)$。□

引理 3.34 对每个 $\alpha \in OT(\Pi_1^1)$， $\alpha \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。

证明。通过对 $\ell\alpha$ 进行元归纳，并应用命题 3.13 和 3.14 以及引理 3.30 和 3.33，即可得出。□

定理 1.2 的证明。对每个 $\alpha \in OT(\Pi_1^1)$，由引理 3.34 可得 $\alpha \in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1)$。因此，由命题 3.29.1，对每个 $n < \omega$, $\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1))$，可得 $\in \mathcal{C}^{\mathbb{S}^+}(\mathcal{W}_1) \cap \Omega = \mathcal{W} \cap \Omega = W(\mathcal{C}^0(\emptyset)) \cap \Omega$，其中 $W(\mathcal{C}^0(\emptyset)) = W(OT(\Pi_1^1))$。

参考文献

[1] T. Arai，借助非单调归纳定义的良基性证明 I： Π^0_2-算子，《符号逻辑杂志》69（2004年）830–850。[2] T. Arai，利用极大显著集的良基性证明，即将在《数学逻辑档案》发表。[3] T. Arai，单个稳定序数的序数分析，已投稿。[4] T. Arai，序数分析讲义：根特大学数学系迷你课程讲义，2023年3月14日至3月25日。[5]W. Buchholz，《正规函数与序数的构造系统》。载于：Diller, J.、M¨uller, G. H.（编），《基尔1974年证明论专题讨论会》，《数学讲义》第500卷，第4-25页，施普林格（1975年）。[6] M. Rathjen，自由参数 Π^1_2-概括的序数分析，《数学逻辑档案》44（2005年）263-362。