适合文章类型的横幅将在此处以排版后的文章形式显示

arXiv:2304.03859v1 [physics.flu-dyn] 7 Apr 2023

三维软体流动

Songyuan Cui[1], Yashraj Bhosale[1], 和 Mattia Gazzola[123]†

[1]机械科学与工程系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，厄巴纳，伊利诺伊州 61801，美国[2]国家超级计算应用中心，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，厄巴纳，伊利诺伊州 61801，美国[3]卡尔·R·沃斯基因组生物学研究所，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，厄巴纳，伊利诺伊州 61801，美国

（收到时间：xx；修订时间：xx；接受时间：xx）

黏性流动是一种高效的整流机制，可利用小尺度下的流动惯性来操控流体与粒子。这通常涉及流体围绕浸没的固体特征振动；该特征通过集中应力，调控具有实用拓扑结构的稳态流动的产生。鉴于软材料在生物和人工环境中的相关性，近期研究从理论上阐明了二维情况下物体弹性对流动流场的影响。在此，我们以浸没软球这一最简单的情形为例，将这些发现推广至三维空间。首先，我们考虑了此前未计入的项，改进了刚性球极限下已有的解。随后，我们引入物体柔顺性，揭示了一种即使在斯托克斯流中也存在的三维弹性流动过程。这一效应与二维分析的结果一致，但在解析上有所不同；通过与直接数值模拟进行对照，我们验证了该效应，并表明它也适用于具有复杂几何与拓扑的物体，为实现更先进的流动控制开辟了道路。

关键词： 黏性流动，微流体学，弹性，流固相互作用

1. 引言

本研究探讨物体弹性对三维黏性流动的影响。黏性流动是一种惯性现象，指流体围绕局部微结构振荡时产生的稳定、整流流动。由于它能够在短时间和短距离尺度上重塑周围流场，因此已应用于微流体学的多个领域，包括粒子操控（Lutz 等 2003, 2005；Marmottant 与 Hilgenfeldt 2004；Lutz 等 2006；Wang 等 2011；Chong 等 2013；Chen 与 Lee 2014；Klotsa等 2015；Thameem 等 2017；Pommella 等 2021）和化学混合（Liu 等 2002；Lutz 等 2003, 2005；Ahmed 等 2009），以及囊泡运输与裂解（Marmottant 与 Hilgenfeldt 2003, 2004）。近年来，多曲率流动体的应用进一步拓展了流场操控能力，从而推动了紧凑型、

† 通信邮箱：mgazzola@illinois.edu

摘要不得延伸至第 2 页

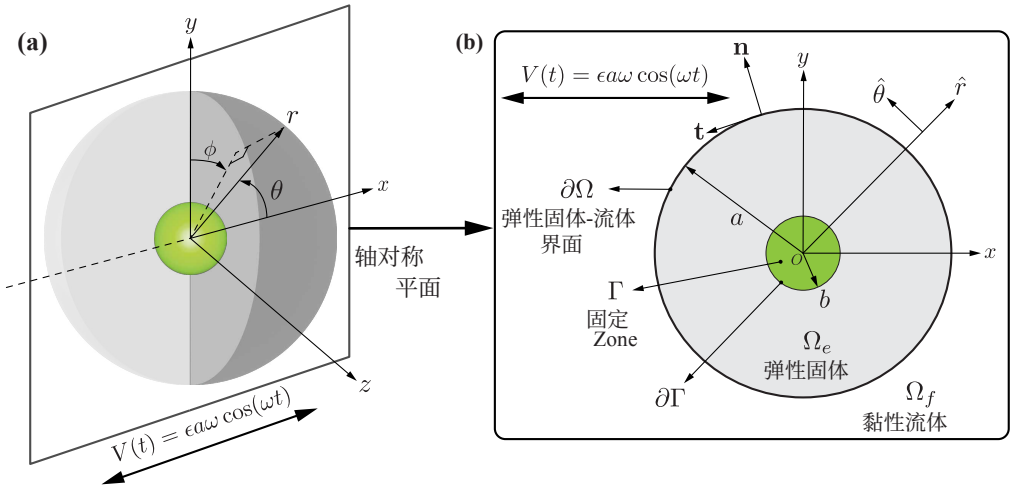

图 1：问题设置。(a) 半径为 a 的三维弹性固体球体 Ω_e，带有一个刚性夹杂物（半径为 b 的固定区 Γ），浸没在黏性流体 Ω_f 中。本研究采用球坐标系，其中（r、θ、ϕ）分别为径向、极角和方位角坐标。球体受到远场速度为 $V(t) = \epsilon a\omega\cos(\omega t)$、沿对称轴 x 方向的振荡流作用。(b) 弹性球体的二维轴对称横截面。

坚固且可调的装置的发展，可用于过滤和分离合成及生物颗粒（Parthasarathy 等 2019；Bhosale 等 2020；Chan 等2022；Bhosale 等 2022*b*）。更近来，受医学和生物学应用的推动，研究者开始考察物体柔顺性的影响（Pande 等 2023；Anand 与 Christov 2020），其中一项研究首次提出了针对软圆柱体的二维流动理论（Bhosale等 2022*a* ）。其主要结论可概括为以下关系

$$\langle\psi_1\rangle = \sin 2\theta\ [\Theta(r) + \Lambda(r)] \tag{1.1}$$

其中，$\langle\psi_1\rangle$ 是时间平均斯托克斯流函数，r 和 θ 分别是柱坐标系中的径向和极角坐标。该关系揭示了另一种流动过程 Λ（r），它完全由物体弹性诱发；即使在刚体流动 Θ（r）无法存在的斯托克斯流中，这种过程依然存在（Holtsmark 等 1954）。随后研究表明，弹性调制能够实现与刚体相似的流动构型，但所需频率显著更低。这种频率降低具有重要意义，因为它使黏性流动能够在生物驱动的限制范围内实现。

在本研究中，我们通过考察一个振荡的软球这一最简单的情形，将这一认识拓展到三维空间。首先，我们对刚性球体情形提出了改进的理论解：在Lane（1955）的推导中补入了此前未考虑的涡量拉伸相关项。结果表明，我们的公式显著提高了与直接数值模拟和实验结果的定量吻合度。接下来，在同一理论框架下，我们考虑物体弹性，并寻求依赖于材料柔顺性的修正流动解。我们得到了一个独立的弹性修正项，其性质与上述二维结果相似，但在解析形式上有所不同。随后，我们通过直接数值模拟验证了该理论的准确性，并展示了观测到的弹性效应如何推广至具有复杂几何与拓扑的物体，从而进一步拓展软流动的潜在应用价值。

2. 问题设置与控制方程

我们通过考察图 1 所示的设置推导流动解：一个三维黏弹性固体球 Ω_e，半径为 a，浸没在黏性流体 Ω_f 中。流体以速度 $V(t) = \epsilon a\omega\cos\omega t$振荡，其中 ϵ，ω和 t分别表示无量纲振幅、角频率和时间。沿用我们此前对软二维圆柱的设置（Bhosale等，2022*a*），我们通过在球心附近设置一个刚性夹杂物 Γ（半径为 $b < a$，其边界记为 $\partial\Gamma$），以运动学方式约束应变和速度为零。我们进一步将弹性固体与黏性流体之间的边界记为 $\partial\Omega$。

假设流体和固体均为各向同性且不可压缩，其中流体为牛顿流体，运动黏度为ν_f、密度为ρ_f；固体则遵循 Kelvin- Voigt 黏弹性模型。软生物材料的典型特征（Bower 2009）是，其内部弹性应力采用剪切模量为G、运动黏度为 ν_e、密度为 ρ_e的 neo-Hookean 超弹性模型描述。不过，我们将在后文说明，超弹性或黏弹性模型的选择不会影响该理论。

流体相和固体相的动力学由不可压缩柯西动量方程控制，并使用特征速度 $V = \epsilon a\omega$、长度 $L = a$、时间 $T = 1/\omega$和静水压力 $P = \mu_f V/L = \mu_f\epsilon\omega$进行无量纲化

$$\begin{aligned}
&\text{Incomp.}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f\cup\Omega_e\right.\\
&\text{Fluid}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \epsilon(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{M^2}\left(-\nabla p + \nabla^2\boldsymbol{v}\right),\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f\right.\\
&\text{Solid}\left\{\alpha\text{Cau}\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \epsilon(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = \frac{\text{Cau}}{M^2}\left(-\nabla p + \beta\nabla^2\boldsymbol{v}\right) + \nabla\cdot(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)',\ \boldsymbol{x}\in\Omega_e,\right.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 和 p 分别为速度场和压力场，$\boldsymbol{F}$ 为变形梯度张量，定义为 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$；其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$ 为材料位移场，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{X}$ 分别表示材料点变形后和静止时的位置。张量上的撇号 $'$ 表示其偏量。该系统中的关键无量纲参数包括缩放振荡振幅 ϵ、沃默斯利数$M = a\sqrt{\rho_f\omega/\mu_f}$、柯西数 Cau $= \epsilon\rho_f a^2\omega^2/G$、密度比 $\alpha = \sqrt{\rho_e/\rho_f}$和黏度比 $\beta = \mu_e/\mu_f$。从物理上看，沃默斯利数（M）表示惯性力与黏性力之比，柯西数（Cau）表示惯性力与弹性力之比。因此，较高的M 意味着流体环境中的惯性作用更占主导，而较高的 Cau 值则对应着更柔软的物体。随后，我们对控制方程施加一组与 Lane（1955）一致的边界条件

$$\text{Pinned zone}\left\{\boldsymbol{u} = 0, \boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Gamma\right. \tag{2.2}$$

$$\text{Interface velocity}\left\{\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_f,\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega\right. \tag{2.3}$$

$$\text{Interface stresses}\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma}_f = -p\boldsymbol{I} + (\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T),\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f\\
\boldsymbol{\sigma}_e = -p\boldsymbol{I} + \beta(\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T) + \frac{M^2}{\text{Cau}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)',\ \boldsymbol{x}\in\Omega_e,\\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_e\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_f\cdot\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega\\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_e\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_f\cdot\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega
\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\text{Far-field}\left\{\boldsymbol{v}(|\boldsymbol{x}|\to\infty) = \cos t\,\hat{i},\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f,\right. \tag{2.5}$$

其中，方程（2.2）是固定区刚度约束，方程（2.3）是固相与流体相之间的无滑移边界条件，方程（2.4）规定了应力连续性，方程（2.5）

是远场流速。凡可能产生歧义之处，我们分别用下标 e 和 f 表示弹性相和流体相。接下来，我们确定相关参数的范围，并通过摄动理论求解方程（2.1）。

3. 摄动级数解

在黏性流动应用中，通常非维振荡振幅 $\epsilon \ll 1$ 较小（Wang 1965；Bertelsen 等1973；Lutz 等2005），密度比 α 和黏度比 β 为 O (1)，沃默斯利数 $M \geqslant$ 为 O (1)（Marmottant 与 Hilgenfeldt 2004；Lutz 等2006）。对于柯西数Cau，我们采用与Bhosale等(2022*a*)相同的处理方式：刚体取 Cau $= 0$，弹性体取 Cau $= \kappa\epsilon$，且 $\kappa =$ 为 O (1)。后一假设意味着 Cau $\ll 1$，从物理上说，这表示物体具有弱弹性。我们作出这一假设有两个原因。首先，我们选择较小的 Cau，以简化对超弹性材料的处理；对于 Cau $\geqslant$ 为 O (1) 的情形，这类材料的非线性会带来数学上的挑战。其次，使 Cau 与 ϵ 相匹配可简化渐近展开，同时保留结果在实践中的普适性（详情见 Bhosale等(2022*a*)补充材料 §2）。

接下来，我们通过将所有相关场按 ϵ 的幂进行渐近展开，求解方程（2.1）的摄动级数解。我们的推导主要沿用（Bhosale 等，2022*a*）针对二维弹性圆柱采用的方法，并将其扩展至三维情形。于是，零阶解简化为纯振荡流中的刚性球体，其运动由非定常斯托克斯方程控制（Lane 1955）。随后分两个阶段推导一阶解。首先，求出零阶流场所致弹性体的变形。其次，将所得的物体变形作为流动的边界条件，引入弹性反馈，从而得到流动解，阶数为 O（ϵ）。下文概述具体步骤，详细内容见补充材料。

我们首先将所有物理量 q 摄动展开至 O (ϵ)，其中包括 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, p, \Omega, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$，如下：

$$q \sim q_0 + \epsilon q_1 + O\left(\epsilon^2\right) \tag{3.1}$$

并将它们代入控制方程 Eqs. (2.1) 和边界条件 Eqs. (2.2)–(2.5)。具体步骤见补充材料（Eq.1.17–1.26），其中下标（0、1、.....）表示解的阶数。接下来，我们采用几何上较为方便的球坐标系 $(r,\ \theta,\ \phi)$，其中径向坐标为 r，极角为 θ，方位角为 ϕ，原点位于球体中心。水平轴方向 $\boldsymbol{i}$对应于 $\theta = 0$。

3.1. 零阶 O (1) 解

固相中零阶 O (1) 下的控制方程和边界条件可简化为

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot ((\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_0)^T)' = 0,\ \ r \leqslant 1;\ \ \boldsymbol{u}_0|_{r=\zeta} = 0 \tag{3.2}$$

其中 $\zeta = b/a$ 为固定区的无量纲半径。由于在这一阶Cau $= \kappa\epsilon = 0$，方程（3.2）的解在物理上对应于一个固定的、刚性的球体，其

$$\partial\Omega_0 = r = 1;\ \ \boldsymbol{u}_0 = 0,\ \ \boldsymbol{v}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{dt} = 0,\ \ r \leqslant 1. \tag{3.3}$$

《Focus on Fluids》文章的篇幅不得超过本页长度

因此，流体相的控制方程和边界条件可简化为

$$
\begin{aligned}
M^2\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla}^4\boldsymbol{\varphi}_0 \quad r \geqslant 1 \\
v_{0,r}|_{r=1} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\varphi_0\sin\theta)}{\partial\theta}\bigg|_{r=1} &= 0;\ v_{0,\theta}|_{r=1} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\varphi_0)}{\partial r}\bigg|_{r=1} = 0 \\
v_{0,r}|_{r\to\infty} &= \cos\theta\ \cos t;\ v_{0,\theta}|_{r\to\infty} = -\sin\theta\ \cos t,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中 $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\boldsymbol{\phi}$ 是定义为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\varphi}$ 的矢量势，其中 $\boldsymbol{\phi}$ 是方位方向的单位矢量。注意，粗体 $\boldsymbol{\nabla}^2$ 指的是矢量拉普拉斯算子，它不同于球坐标中的标量拉普拉斯算子。该系统（方程（3.3）、（3.4））描述了浸没在振荡非定常 Stokes 流中的刚性球体，其存在精确的解析解（Lane 1955）

$$
\varphi_0 = -\frac{\sin\theta}{4}\left(3\frac{h_1(mr)}{mh_0(m)} - r - \frac{h_2(m)}{r^2h_0(m)}\right)e^{-it} + c.c.,\ r \geqslant 1 \tag{3.5}
$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，且 $m = \sqrt{i}M$。这里，h_n 和 $c_\circ$ $c_\circ$ 分别指第一类 n^{th} 阶球 Hankel 函数及其复共轭。正如 Lane（1955）所观察到的，流体相中的零阶矢量势场 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 随时间纯粹振荡，因此该阶不会出现稳态流。此外，O (1) 阶的流动不受弹性影响。

3.2. 一阶 $O(\epsilon)$ 解

接下来，我们求解下一阶近似 O (ϵ)，此时预计会出现与时间无关的稳态流（Lane 1955）。在 O (ϵ) 阶，固体控制方程（补充材料，方程 1.38–1.42、1.49）化简为齐次双调和方程

$$
\boldsymbol{\nabla}^4\boldsymbol{\varphi}_{e,1} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_e \tag{3.6}
$$

其中，我们定义应变函数 $\boldsymbol{\varphi}_e = \varphi_e\boldsymbol{\phi}$，与流体相类似，因此位移场为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\varphi}_e$。方程（3.6）表明，在 $O(\epsilon)$ 阶所采用的具体固体弹性模型已无关紧要，因为线性化使所有非线性应力–应变响应都消失了（补充材料，方程 1.38–1.42）。方程（3.6）还需结合固定区界面处的狄利克雷边界条件

$$
u_{1,r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\varphi_{e,1}\sin\theta)}{\partial\theta}\bigg|_{r=\zeta} = 0; \quad u_{1,\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\varphi_{e,1})}{\partial r}\bigg|_{r=\zeta} = 0. \tag{3.7}
$$

此外，根据方程（2.4），$O(1)$ 阶流体解会对固体施加界面应力；在 $O(\epsilon)$ 阶，固体不再是刚体，而是可变形体。因此，界面处径向和切向应力满足以下边界条件 $\partial\Omega_0$

$$
\begin{aligned}
\frac{M^2}{\kappa}\frac{\partial u_{1,r}}{\partial r}\bigg|_{r=1} &= \frac{\partial v_{0,r}}{\partial r}\bigg|_{r=1} \\
\frac{M^2}{\kappa}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{1,r}}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{1,\theta}}{\partial r} - \frac{u_{1,\theta}}{r}\right)\bigg|_{r=1} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_{0,r}}{\partial\theta} + \frac{\partial v_{0,\theta}}{\partial r} - \frac{v_{0,\theta}}{r}\right)\bigg|_{r=1},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

其中，左侧对应固体相中的弹性应力（$M^2\,\mathrm{Cau}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)'$，式（2.4））而右侧对应流体相中的黏性应力（$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^T$，式（2.4）），二者均在零阶界面 $r = 1$处求值。由于界面处压力连续，压力项（$-p\boldsymbol{I}$，式（2.4））相互抵消，因此式（3.8）中没有该项（补充材料，

式 1.31）。我们指出，尽管固体界面在这一阶发生变形，式（ $r = 1$ 3.8）中使用 仍然是自洽的。事实上，正如 *Bhosale* 等人（2022*a*）以及补充材料中的式 1.44–1.46 所示，与 $r = 1$ 近似相关的误差都出现在更高阶 $O\left(\epsilon^2\right)$，因此不会影响我们的解。此外，我们注意到，黏性应力项（$\beta(\boldsymbol{\nabla v} + \boldsymbol{\nabla v}^T)$，式（2.4））也属于更高阶 $O\left(\epsilon^2\right)$，因此未出现在式（3.8）中，这意味着在 $O(\epsilon)$ 阶下，黏度模型的具体选择无关紧要。接下来，我们利用界面处的 $O(1)$ 流速，根据式（3.4）和（3.5），直接计算式（3.8）右侧

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial v_{0,r}}{\partial r}\right|_{r=1} &= 0 \\ \left.\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_{0,r}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{0,\theta}}{\partial r} - \frac{v_{0,\theta}}{r}\right)\right|_{r=1} &= \sin\theta\, F(m)\, e^{-it} + c.c. \end{aligned} \tag{3.9}$$

with

$$F(m) = -\frac{3mh_1(m)}{4h_0(m)}. \tag{3.10}$$

结合边界条件方程（3.7）–（3.10），齐次双调和方程（3.6）可精确求解，从而得到 $O(\epsilon)$ 固体应变函数

$$\varphi_{e,1} = \frac{\kappa}{M^2}\sin\theta\left(c_1 r + \frac{c_2}{r^2} + c_3 r^3 + c_4\right) F(m)\, e^{-it} + c.c., \tag{3.11}$$

其中，c_1、c_2、c_3、c_4（以 ζ 为变量）的精确表达式见补充材料（方程 1.56）。根据方程（$O(\epsilon)$ 固体位移场 $\boldsymbol{u}_1$，可直接得到体相 Ω_e 和边界处 $\partial\Omega$的位移。由此，界面边界条件会在运动学上影响 $O(\epsilon)$ 阶流动，后文将对此进行说明。

O (ϵ) 阶流动的控制方程采用矢量势形式表示为

$$M^2\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial t} + M^2\left((\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0\right) - M^2\left((\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_0\right) = \boldsymbol{\nabla}^4\boldsymbol{\varphi}_1, \quad r \geqslant 1. \tag{3.12}$$

注意，方程（$M^2(\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_0$ 中的项 3.12）对应涡量拉伸，而 Lane（1955）在推导刚性球流动时未考虑该项。通过纳入这一项，我们的工作改进了现有理论，详见第 4 节。

接下来，由于我们关注的是稳态流，我们考虑方程（3.12）的时间平均形式

$$\boldsymbol{\nabla}^4\langle\boldsymbol{\varphi}_1\rangle = M^2\underbrace{\langle(\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0 - (\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\varphi}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_0\rangle}_{\text{RHS}}, \quad r \geqslant 1, \tag{3.13}$$

其中，将方程（3.5）代入右端，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}^4\langle\boldsymbol{\varphi}_1\rangle &= \sin 2\theta\,\rho(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad r \geqslant 1, \\ \rho(r) &= \frac{1}{16r^4}\left(r^3J^{(3)} + r^2J^{(2)} - 6rJ^{(1)} + 6J\right)J^* + c.c. \\ J(r) &= 3\frac{h_1(mr)}{mh_0(m)} - r - \frac{h_2(m)}{r^2h_0(m)}\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

这里，J 是方程（3.5）中随径向变化的项，其中 $J^{(n)}$ 和 J^* 分别是其 n^{th} 导数和复共轭。求解这个非齐次双调和方程需要四个相互独立的边界条件。前两个是径向和切向的时间

平均远场速度

$$\left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\langle\varphi_1\rangle\sin\theta)}{\partial\theta}\right|_{r\to\infty} = \left.\frac{1}{r}\frac{\partial(r\langle\varphi_1\rangle)}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0. \tag{3.15}$$

接下来，我们回顾式（2.3）中的无滑移边界条件，该条件需要在$O(\epsilon)$精确的固体–流体界面处施加

$$\boldsymbol{v}_e|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_e|_{r=1+\epsilon u_{1,r}} + O\left(\epsilon^2\right) = \boldsymbol{v}_f\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_f\big|_{r=1+\epsilon u_{1,r}} + O\left(\epsilon^2\right). \tag{3.16}$$

我们注意到，球面界面在$O(\epsilon)$阶下变形为$r' = 1 + \epsilon u_{1,\,r}$，其中$u_{1,\,r}$是通过对应变函数$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\varphi}_{e,\,1}$取旋度得到的$O(\epsilon)$阶精确位移场的径向分量。与 Bhosale 等人(2022*a*)类似，我们采用 Longuet-Higgins（1998）提出的方法，通过对 $r = 1$ 作泰勒展开来施加式（3.16）中的无滑移边界条件（补充材料，式 1.64–1.66）

$$\boldsymbol{v}_f\big|_{r=1+\epsilon u_{1,r}} = \left.\left(\boldsymbol{v}_{f,1} + \epsilon\frac{\partial\boldsymbol{v}_{f,0}}{\partial r}u_{1,r}\right)\right|_{r=1} + O\left(\epsilon^2\right). \tag{3.17}$$

边界处固体的速度$\boldsymbol{v}_e|_{r=1+\epsilon u_{1,r}}$（式（3.16）左端）也可按$\epsilon$阶精度计算为$\partial u_{1,r}/\partial t\big|_{r=1}$（补充材料，式 1.63）。注意，$u_{1,r}$和$\partial\boldsymbol{v}_{f,0}/\partial r$均可由式（3.5）和（3.11）确定。因此，将式（3.17）代入式（3.16），即可得到$r = 1$处$\boldsymbol{v}_1$的ϵ阶流速$\boldsymbol{v}_{f,1}$，以下记作$\boldsymbol{v}_1$（补充材料，式 1.62–1.67）。随后进行时间平均，可得式（3.14）剩余的两个边界条件

$$\begin{aligned}
\langle v_{1,r}\rangle\big|_{r=1} &= \left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\langle\varphi_1\rangle\sin\theta)}{\partial\theta}\right|_{r=1} = 0\\
\langle v_{1,\theta}\rangle\big|_{r=1} &= -\left.\frac{1}{r}\frac{\partial(r\langle\varphi_1\rangle)}{\partial r}\right|_{r=1} = -\frac{\kappa}{M^2}\sin 2\theta\, G_1(\zeta)F(m)F^*(m)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

with

$$G_1(\zeta) = \frac{(\zeta-1)^2(4\zeta^2+7\zeta+4)}{3\zeta(2\zeta^3+4\zeta^2+6\zeta+3)}. \tag{3.19}$$

方程（3.18）在物理上意味着，在零阶固定界面处，流体相中存在经整流的切向滑移速度（$\langle v_{1,\theta}\rangle|_{r=1} \neq 0$）。这种滑移速度通过等效地改变流体雷诺应力（$r = 1$（对于刚体而言，则体现为刚体的弹性变形）$\langle v_{1,\theta}\rangle|_{r=1} = 0$（$\sin 2\theta\rho(r)$，见方程（3.14））），从而影响最终形成的流致流。我们进一步指出，与刚体流致流不同，这种改变即使在斯托克斯极限下也会出现，因为它独立于纳维–斯托克斯方程中的非线性惯性对流；我们此前关于二维软圆柱流致流的研究也得出了类似结论（Bhosale 等，2022*a*）。这一现象与脉动气泡的人工混合模态流致流具有相似特征（Longuet-Higgins 1998；Spelman & Lauga 2017）；而本文推导的流动过程则自发源于黏性流体与弹性固体之间的耦合。

给定方程（3.14）描述的稳态流动以及方程（3.15）和（3.18）的边界条件，最终可将流动解写为

$$\langle\varphi_1\rangle = \sin 2\theta\,\left[\Theta(r) + \Lambda(r)\right], \tag{3.20}$$

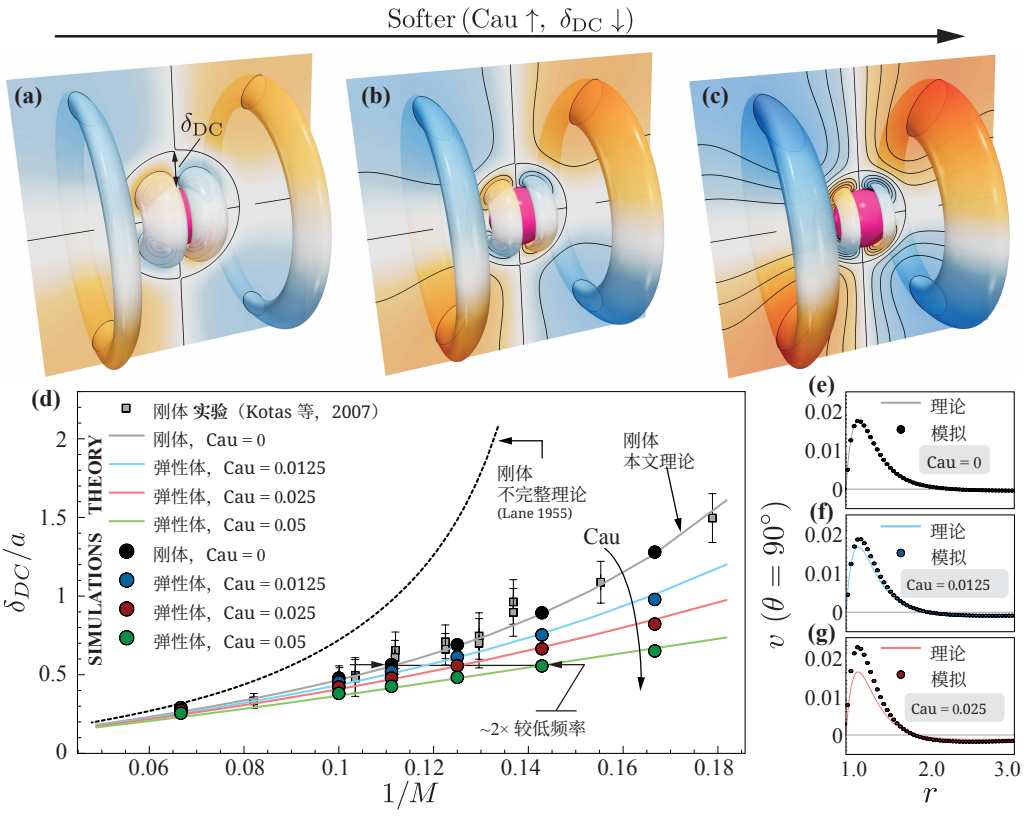

图 2：弹性球体及其流致流响应。(a-c) 在 $M = 6$ 处，随着柔软度 Cau 增大，三维时间平均拉格朗日（即经斯托克斯漂移校正，见补充材料 §3）斯托克斯流函数所描绘的流致流响应。(a) 刚性极限 Cau $= 0$，(b) Cau $= 0.025$，(c) Cau $= 0.05$。请注意，蓝色/橙色分别表示顺时针/逆时针旋转区域。整个研究中，固定区的无量纲半径均设为 $\zeta = 0.4$，以使切向滑移速度的大小（方程 3.18）保持在 O (1)，与渐近分析一致。减小固定区半径会迅速增大前因子 $G_1(\zeta)$（方程 3.19），从而导致滑移速度远大于 O (1)，削弱渐近假设。半径较大时则相反，因此 $\zeta = 0.4$ 是一个稳健的折中值。固定区半径对流致流的影响详见补充材料 §4。(d) 不同物体弹性 Cau 下，理论和模拟所得的归一化直流层厚度（δ_{DC}/a）随逆沃默斯利数（$1/M$）的变化。图中还绘出了刚性极限下不完整理论（虚线）（Lane 1955）和实验结果（灰色方块）（Kotas 等人，2007）以供参考。我们以直流层厚度表征流致流；该厚度指最内侧的回流区，因其在捕获、过滤和化学混合中的用途，以及其稳健性而采用这一表征方式。(e-g) 在 $M = 6$ 处，理论和模拟所得速度大小沿 $\theta = 90°$ 方向的径向衰减，展示了柔软度 Cau 增大的情况。(e) 刚性极限 Cau $= 0$，(f) Cau $= 0.0125$，(g) Cau $= 0.025$。模拟采用基于涡量方法的公式（Gazzola 等人，2011；Bhosale 等人，2021、2023），在轴对称柱坐标系中求解纳维–斯托克斯方程的涡量形式。在这一框架中，流体和固体被建模为密度匹配（$\rho_f = \rho_e = 1$）。刚性球体和固定区被建模为布林克曼固体，弹性相则被建模为剪切模量为 G 的黏弹性开尔文–沃伊特固体。软物体的变形通过逆映射技术追踪（Bhosale 等人，2021；Kamrin 与 Nave，2009；Kamrin 等人，2012）。远场速度为 $V(t) = V_0 \cos\ \omega t$，特征速度为 $V_0 = \epsilon a \omega$，其中 $\epsilon = 0.1$、$a = 0.1$，且 $\omega = 32\pi$。流体动力黏度 μ_f 和弹性体的剪切模量 G 根据沃默斯利数 $M = a\sqrt{\rho_f \omega}/\mu_f$ 和柯西数 Cau $= \epsilon \rho_f a^2 \omega^2 / G$ 确定。其他模拟参数包括：计算域 $[0, 1] \times [0, 0.5]$,，均匀网格间距 $h = 1/1024$，布林克曼惩罚因子 $\lambda = 1e6$，平滑长度 $\epsilon_{moll} = 2h$，库朗–弗里德里希斯–列维数 CFL $= 0.1$。有关这些参数的详情，请参阅（Gazzola 等人，2011；Bhosale 等人，2021；Parthasarathy 等人，2022；Bhosale 等人，2023）。

其中， $\Theta(r)$ 是校正刚体解

$$\begin{aligned}\Theta(r) = &-\frac{r^4}{70}\int_r^\infty \frac{\rho(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau + \frac{r^2}{30}\int_r^\infty \tau\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{30}\int_1^r \tau^4\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{20}\int_1^\infty \frac{\rho(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{12}\int_1^\infty \tau\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &+ \frac{1}{r^3}\left(-\frac{1}{70}\int_1^r \tau^6\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{28}\int_1^\infty \frac{\rho(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{20}\int_1^\infty \tau\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

而 $\Lambda(r)$ 是新的弹性修正

$$\Lambda(r) = 0.5\frac{\kappa}{M^2}\,G_1(\zeta)F(m)F^*(m)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\right) \tag{3.22}$$

其中 $G_1(\zeta)$和 $F(m)$分别由方程（3.19）和方程（3.10）给出。值得注意的是，尽管方程（3.21）与 Lane（1955） 的解形式相同，但 $\rho(r)$ 的显式表达式不同（方程 3.14），这是由于方程（3.12）中的涡量拉伸项所致。至此，我们的理论分析告一段落。

4. 对复杂物体的数值验证与扩展

接下来，我们将我们的理论与刚性极限下已知的实验和解析结果（Kotas 等人，2007；Lane（1955））进行比较，同时也与采用基于轴对称涡方法的公式开展的直接数值模拟（Gazzola 等人，2012；Bhosale 等人，2021、2023）进行比较（另见图 2 的图注）。图 2a 展示了以 Cau $= 0$、频率为 $M \approx 6$ 振荡的刚性球体的斯托克斯流函数分布。我们强调轴对称性之上的二重对称性，以及厚度为 δ_{DC}的明确定义的直接环流（DC）层的存在。这种特征性的流动构型，以及 DC 层厚度随 $1/M$ 增大而发散（$\delta_{DC} \to \infty$），与 Lane（1955）的结果一致。我们的理论在 Cau $= 0$ 时（图 2d 中的灰线）以及模拟结果（图 2d 中的黑点）均再现了这一定性行为。然而，我们注意到，Lane（1955）的结果（图 2d 中的黑色虚线）与我们的模拟/理论结果之间存在显著的定量差异；相比之下，我们的结果与 Kotas 等人（2007）的实验结果（灰点）以及（灰色方块）高度吻合。正如前文所述，我们的理论之所以具有更高的准确性，直接源于纳入了公式（3.13）中的涡量拉伸项。接下来，当我们启用固体柔性（Cau > 0）时，可以观察到二重对称性得以保留（公式（3.20）中的 $\sin 2\theta$），而 δ_{DC}则由于弹性修正项 $\Lambda \neq 0$而收缩，这与在一系列 Cau 下进行的数值模拟结果一致（图 2(b-d)）。这些观察结果与我们此前关于二维软圆柱流致流的研究（Bhosale 等人，2022a）一致，因此也可以给出类似的直观解释。由于球体表面可发生变形，流动会获得反馈变形速度，而该表面也因此成为额外的惯性源。由于沃默斯利数（M）是惯性力与黏性力之比，这相当于具有更大 M的刚体流致流，因此随着弹性的增加，DC 层厚度会减小。这意味着，弹性体能够以显著更低的振荡频率达到其刚性对应物的流致流构型。图 2d 展示了这种频率降低现象；例如，当 Cau $= 0.05$ 时，在 $\sim 2\times$ 较低的频率下即可达到相同的 DC 层厚度。与刚性物体类似，软球体的 δ_{DC} 仍会随着 M减小而发散，不过其取值更低，因为弹性修正Λ（r）不会改变刚性贡献Θ（r）的渐近行为（详细信息见补充材料第 6 节）。我们还注意到，随着 Cau 增大且 M 减小，模拟结果与理论结果之间的偏差会增大。这是因为当 κ/M^2 时

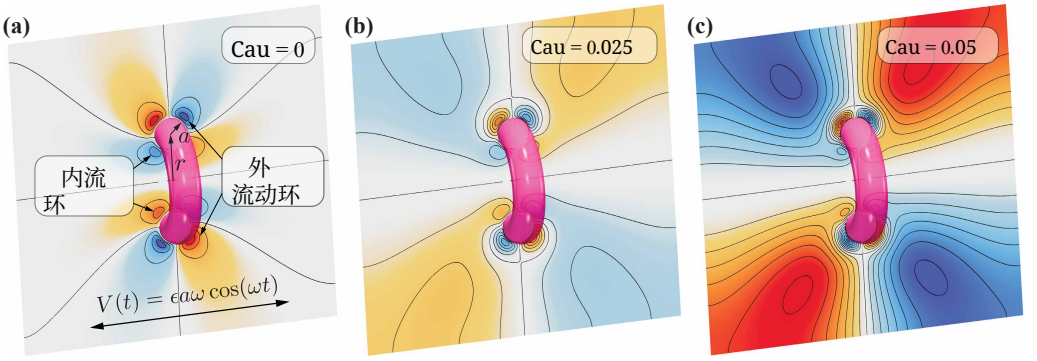

图 3：拓展至复杂物体。这里我们考察软环面中由柔顺性引起的流致流。环面是一种复杂形状，具有多重曲率，其拓扑结构也有别于球体。数值模拟得到的时间平均欧拉流动拓扑：环面的核心半径为 r，横截面半径为 $a = r/3$，处于 $M \approx 4$，物体弹性 Cau 各不相同。(a) 刚性极限 Cau $= 0$，(b) Cau $= 0.025$，以及 (c) Cau $= 0.05$。黏性流体以速度 $V(t) = \epsilon a\omega \cos\ \omega t$ 振荡。环面圆形横截面的中心由一个半径为 $0.4a$ 的刚性环形嵌入体固定。其他所有物理参数和模拟参数均与球体流致流一致（详情见图 2 图注）。

公式（3.18）增大时，假定为 O（ϵ）的切向滑移速度可能超过 O（1），最终导致渐近分析失效。最后，我们通过展示理论结果与模拟得到的径向变化时间平均速度之间的高度一致性，完成验证 $\langle v \rangle$（见 $\theta = 90°$ 图2（e–g））。有关惯性（M）和弹性（Cau）对速度大小（流动强度）影响的详细分析，请参见补充材料第 4 节。

最后，我们展示如何将获得的理论见解推广到具有多重曲率和不同拓扑结构的三维几何形状；这里以环面为例，这种形状因其微流体特性而受到关注（Chan等，2022）以及近期的生物工程演示（Dou 等，2022）。图 3a 展示了刚性环面浸没在振荡流场 $M \approx 4$中所产生的流致流。如图所示，突出显示的回流特征（可用于粒子操控的内外流环）在刚性极限下较弱，难以满足实际应用需求。提高弹性（Cau）可以改善这一点；事实上，我们观察到流动强度增强（图 3b、c）。最后需要指出的是，若要在刚性环面中获得类似于图 3c 的流动拓扑，就需要更高的振荡频率 $\sim 4\times$（补充材料第 §7 节），这与通过软球流致流分析获得的直觉一致。

5. 结论

总之，本研究改进了现有的三维刚性球体声流理论，将其扩展至弹性材料的情形，并进一步通过直接数值模拟予以验证。与我们此前关于二维软圆柱体的研究一致，我们的工作揭示了一种额外的声流模式：材料顺应性使其成为可能，即使在斯托克斯流中也能出现。研究还表明，相较于刚性物体，物体弹性能够增强声流，或使声流在显著更低的频率下产生。最后，我们展示了理论认识如何推广至球体以外的几何形状，凸显了该理论在实际应用中的普适性。总体而言，这些发现加深了我们对流动流场的基础认识，并可能对生物学和工程领域产生影响。

基金资助。本研究获美国国家科学基金会 CAREER 项目资助，项目编号 CBET-1846752（MG）。

利益声明。作者声明不存在利益冲突。

Rapids 文章的篇幅不得超过此页长度

参考文献

Ahmed, Daniel, Mao, Xiaole, Juluri, Bala Krishna & Huang, Tony Jun 2009 一种基于声驱动侧壁捕获微气泡的快速微流控混合器。《微流体与纳米流体》7 (5), 727–731。Anand, Vishal & Christov, Ivan C 2020 柔性黏弹性管中的瞬态可压缩流动。《流体物理学》32 (11), 112014。Bertelsen, A, Svardal, Aslak & Tjøtta, Sigve 1973 振荡圆柱相关的非线性流动效应。《流体力学杂志》59 (3), 493–511。Bhosale, Yashraj, Parthasarathy, Tejaswin & Gazzola, Mattia 2020 黏性流动中形状曲率的影响。《流体力学杂志》898, A13。Bhosale, Yashraj, Parthasarathy, Tejaswin & Gazzola, Mattia 2021 一种用于刚性/柔性混合体流固相互作用的重网格涡方法。《计算物理学杂志》444, 110577。Bhosale, Yashraj, Parthasarathy, Tejaswin & Gazzola, Mattia 2022a 柔性流动——通过弹性边界实现流动整流。《流体力学杂志》945, R1。Bhosale, Yashraj, Upadhyay, Gaurav, Cui, Songyuan, Chan, Fan Kiat & Gazzola, Mattia 2023 PyAxisymFlow：一款用于解析黏性流中三维轴对称刚柔混合体流固相互作用的开源软件。Bhosale, Yashraj, Vishwanathan, Giridar, Upadhyay, Gaurav, Parthasarathy, Tejaswin, Juarez, Gabriel & Gazzola, Mattia 2022b 多曲率黏性流动：流动拓扑与粒子操控。《美国国家科学院院刊》119 (36), e2120538119。Bower, Allan F 2009 《固体应用力学》。CRC 出版社。Chan, Fan Kiat, Bhosale, Yashraj, Parthasarathy, Tejaswin & Gazzola, Mattia 2022 黏性流动中的三维几何与拓扑效应。《流体力学杂志》933, A53。Chen, Yun & Lee, Sungyon 2014 利用声学气泡操控生物对象：综述。《综合与比较生物学》54 (6), 959–968。Chong, Kwitae, Kelly, Scott D, Smith, Stuart & Eldredge, Jeff D 2013 黏性流中的惯性粒子捕获。《流体物理学》25 (3), 033602。Dou, Zhi, Hong, Liu, Li, Zhengwei, Chan, Fan Kiat, Bhosale, Yashraj, Aydin, Onur, Juarez, Gabriel, Saif, M. Taher A., Chamorro, Leonardo P. & Gazzola, Mattia 2022 一种用于流动整流的体外活体系统。Gazzola, Mattia, Chatelain, Philippe, Van Rees, Wim M & Koumoutsakos, Petros 2011 非散度自由变形几何下单个及多个游动者的模拟。《计算物理学杂志》230 (19), 7093–7114。Gazzola, Mattia, Van Rees, Wim M & Koumoutsakos, Petros 2012 C 字形起游：鱼类幼体的最优起游方式。《流体力学杂志》698, 5–18。Holtsmark, J, Johnsen, I, Sikkeland, To & Skavlem, S 1954 振荡不可压缩流体中圆柱障碍物附近的边界层流动。《美国声学学会杂志》26 (1), 26–39。Kamrin, Ken & Nave, Jean-Christophe 2009 一种模拟可变形固体的欧拉方法：有限应变弹性的应用。arXiv 预印本 arXiv:0901.3799。Kamrin, Ken, Rycroft, Chris H & Nave, Jean-Christophe 2012 有限应变弹性与流固相互作用的参考映射技术。《力学与固体物理学杂志》60 (11), 1952–1969。Klotsa, Daphne, Baldwin, Kyle A, Hill, Richard JA, Bowley, Roger M & Swift, Michael R 2015 双球游动器的推进。《物理评论快报》115 (24), 248102。Kotas, C.W., Yoda, M. & Rogers, P.H. 2007 振荡椭球体附近稳态流的可视化。《流体实验》42 (1), 111–121。Lane, CA 1955 球体附近的声学流。《美国声学学会杂志》27 (6), 1082–1086。Liu, Robin H, Yang, Jianing, Pindera, Maciej Z, Athavale, Mahesh & Grodzinski, Piotr 2002 气泡诱导的声学微混合。《芯片实验室》2 (3), 151–157。Longuet-Higgins, Michael S 1998 振荡球形气泡产生的黏性流动。《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》454 (1970), 725–742。Lutz, Barry R, Chen, Jian & Schwartz, Daniel T 2003 无需微制造的微流体学。《美国国家科学院院刊》100 (8), 4395–4398。

Lutz, Barry R, Chen, Jian & Schwartz, Daniel T 2005 通道内短圆柱周围形成的微观稳态流动涡：流动可视化与斯托克斯层标度。《流体物理学》**17** (2), 023601。Lutz, Barry R, Chen, Jian & Schwartz, Daniel T 2006 流体动力学镊子：1. 利用稳态流动微涡非接触捕获单细胞。《分析化学》**78** (15), 5429–5435。Marmottant, Philippe & Hilgenfeldt, Sascha 2003 单个振荡气泡对囊泡的可控变形与裂解。《自然》**423** (6936), 153–156。Marmottant, Philippe & Hilgenfeldt, Sascha 2004 一种用于生物工程的气泡驱动微流体输运元件。《美国国家科学院院刊》**101** (26), 9523–9527。Pande, Shrihari D, Wang, Xiaojia & Christov, Ivan C 2023 任意沃默斯利数下柔性管道中的振荡流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.00543* 。Parthasarathy, Tejaswin, Bhosale, Yashraj & Gazzola, Mattia 2022 耦合振荡库埃特流系统中的弹性固体动力学。《流体力学杂志》**946**, A15。Parthasarathy, Tejaswin, Chan, Fan Kiat & Gazzola, Mattia 2019 流动增强的流介导输运。《流体力学杂志》**878**, 647–662。Pommella, Angelo, Harun, Irina, Hellgardt, Klaus & Garbin, Valeria 2021 微气泡流动提高微藻细胞壁通透性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2112.08519* 。Spelman, Tamsin A & Lauga, Eric 2017 任意轴对称稳态流动：流动、力与推进。《工程数学杂志》**105** (1), 31–65。Thameem, Raqeeb, Rallabandi, Bhargav & Hilgenfeldt, Sascha 2017 振荡流中的快速惯性粒子操控。《物理评论：流体》**2** (5), 052001。Wang, Cheng, Jalikop, Shreyas V & Hilgenfeldt, Sascha 2011 通过控制流动几何对微粒进行尺寸敏感分选。《应用物理快报》**99** (3), 034101。Wang, Chang-Yi 1965 振荡球体诱导的流场。《声学与振动杂志》**2** (3), 257–269。