arXiv:2304.03860v1 [math.DS] 7 Apr 2023

元胞自动机的严格周期点与周期因子

Nacira Allaoua 和 Rezki Chemlal。应用数学实验室，理学院。阿卜杜拉赫曼·米拉·贝贾亚大学。阿尔及利亚贝贾亚 06000。

2023年4月11日

摘要

我们证明，具有几乎等度连续点的元胞自动机的严格时间周期点集合在该测度的拓扑支撑中是稠密的。这推广了 Lena、Margara 和 Dennunzio 关于具有等度连续点的元胞自动机的严格时间周期点集合的稠密性的结果。

2000年数学主题分类：37B15, 54H20, 37A30。
关键词：元胞自动机、动力系统、遍历理论、等度连续点。

1 引言

元胞自动机是计算对象，在许多应用领域中被用作模型并受到研究。

它们被用于为复杂系统建模，例如在统计物理学中用作流体力学的微观尺度模型 [6], 、模拟社会选择 [14] 或肿瘤生长 [1]。

人们对它们感兴趣，是因为它们在复杂系统建模方面具有巨大潜力。

元胞自动机由一个无限的有限相同自动机格组成。该格通常为 $\mathbb{Z}^n$，其 n 称为元胞自动机的维数。每个自动机都根据局部规则，并依据自身当前状态以及固定有限集合中相邻自动机的状态，同步更新其状态。自动机所有可能状态的集合称为字母表，而字母表中的每个元素称为一个字母。构型是格中所有自动机状态的一个快照。

对元胞自动机作为符号动力系统的研究始于 Hedlund [8]。元胞自动机的动力学行为主要是在离散动力系统的语境下进行研究的，方法是为构型空间赋予积拓扑，使其与康托尔空间同胚。

2 定义与背景。

2.1 拓扑动力学。

一个拓扑动力系统 (X,T) 由紧致度量空间 X和连续自映射 T 组成。

若存在 $p>0$，使得 $T^p(x)=x.$，则称点 x 为周期点。满足此性质的最小 p 称为 $x.$ 的周期。若某个 $m\geq 0.$ 使得 $T^m(x)$ 是周期点，则称点 x 为最终周期点或渐近周期点。

类似地，若存在 $p>0$，使得对每个 $x\in X$ 都有 $T^p(x)=x$，则称动力系统是周期的；若某个 $m\geq 0.$ 使得 T^m 是周期的，则称其为最终周期的。

若对任意 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $d(x,y)<\delta$ 时，对于任意整数 $n\geq 0$，都有 $d(T^n(y)\ T^n(x))<\epsilon$，则称点 $x\in X$ 为等度连续点，或称其为李雅普诺夫稳定。

若 (X,T) 的所有点都是等度连续点，则称 (X,T) 是等度连续的：由于 X 是紧的，等度连续系统是一致等度连续的。若等度连续点集是余剩集，则称 (X,T) 几乎等度连续。

我们称(X,T) 是敏感的，如果对于任意 $x\in X$，都有：

$$\exists\epsilon>0,\forall\delta>0,\exists y\in B_\delta(x),\exists n\geq 0 \text{ such that } d\left(T^n(y),T^n(x)\right)\geq\epsilon.$$

我们称 (X,T) 是膨胀的，如果有：

$$\exists\epsilon>0,\forall x\neq y\in X,\exists n\geq 0,d\left(T^n(x),T^n(y)\right)\geq\epsilon.$$

一个动力系统(X,T) 是传递的，即对于任意非空开集 U、$V\subset A^{\mathbb{Z}}$，存在 $n>0$ 使得 $U\cap F^{-n}(V)\neq\emptyset.$。如果对于任意非空开集 U、$V\subset A^{\mathbb{Z}}$，$U\cap F^{-n}(V)\neq\emptyset$ 对所有充分大的 $n.$ 都成立，则称其为拓扑混合的

2.2 因子

令 (X,T) 和 (Y,U) 为两个动力系统，且 π为连续满射映射π： $X\to Y$使得 $\pi\circ T=U\circ\pi$.。我们称 π为因子映射，并称 (Y,U) 是 (X,T) 的因子。如果 π 为双射，则称 π为共轭，并称 (X,T) 与 (Y,U) 共轭。共轭是动力系统上的等价关系。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ Y & \xrightarrow{U} & Y \end{array}$$

因子关系具有传递性：如果 (X,T)、(Y,U)、(Z,V) 是三个动力系统，且 (Y,U) 是 (X,T) 的因子，(Z,V) 是 (Y,U) 的因子，那么 (Z,V) 是 (X,T) 的因子。

根据定义，满射动力系统的因子仍然是满射的。如果 (X,T) 的周期为 p，且 (Y,U) 是 (X,T) 的一个因子，那么二者都是

使得 (Y,U) 是 (X,T) 的因子的动力系统。如果 (X,T) 和 (Y,U) 的周期分别为 p 和 q，那么 q 是 $p.$的因数。

命题 1 任意动力系统 (X,T) 都存在一个最大的等度连续因子 $\pi:(X,F)\to(Y,U)$，使得对于任意等度连续因子 $\varphi:(X,T)\to(Z,V)$，都存在唯一的因子映射 $\psi:(Y,U)\to(Z,V)$，满足 $\psi\circ\pi=\varphi.$。系统 (Y,U) 在共轭意义下唯一。

2.3 符号动力学

设 A 是一个称为字母表的有限集合。单词是由 A 中的元素组成的任意有限序列。记 $A^*=\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A^n$ 为所有有限单词 $u=u_0...u_{n-1}$ 的集合；单词 $u\in A^n$ 的长度为 $|u|=n.$

令 $A^{\mathbb{Z}}$ 表示所有函数 $x:\mathbb{Z}\to A$ 的集合，我们将其视为由 A 中的元素构成的、以 $\mathbb{Z}$ 为索引的配置。

我们将这样的配置写作 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，其中 $x_n\in A$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$均成立，并将 $A^{\mathbb{Z}}$ 称为配置空间。

将 A 视为离散拓扑空间；于是 A 是紧致的，因此在 Tychonoff 乘积拓扑下，$A^{\mathbb{Z}}$ 是紧致的。事实上，$A^{\mathbb{Z}}$ 是一个康托尔空间：它是紧致、无孤立点、全不连通且可度量化的。

$A^{\mathbb{Z}}$ 上的标准度量定义为

$$d(x,y)=2^{-n}with\ n=mini\geq 0:x_i\neq y_i\ \text{or}\ x_{-i}\neq y_{-i}$$

令 x 为 $A^{\mathbb{Z}}$ 的一个构型，对于满足 $i<j$ 的两个整数 i、j，我们用 $x(i,j)$ 表示 $\in A^{j-i+1}$ 单词 $x_i...x_j.$

对于任意单词 u，我们定义柱集 $[u]_l=\left\{x\in A^{\mathbb{Z}}:\ x(l,l+|u|-1)=u\right\}$，其中单词 u 位于位置 $l.$。柱集 $[u]_0$ 简记为 $[u]$。柱集是既闭又开的集合。

度量 d是非阿基米德的；也就是说，$d(x,y)\leq\max\{d(x,z)\ \ d(z,y)\}$。因此，任意两个柱集要么其中一个包含另一个，要么它们的交集为空。

移位映射 $\sigma:A^{\mathbb{Z}}\to A^{\mathbb{Z}}$ 定义为 $\sigma(x)_i=x_{i+1}$，对于任意 $x\in A^{\mathbb{Z}}$和 $i\in\mathbb{Z}$ 均成立。移位映射是 $A^{\mathbb{Z}}.$ 上的连续双射。动力系统 $\left(A^{\mathbb{Z}},\sigma\right)$ 通常称为满移位。

构型 $^\infty u^\infty$ 定义为 $(^\infty u^\infty)_{k|u|+i}=u_i$，其中 $k\in\mathbb{Z}$，对于 $k\in\mathbb{Z},0\leq i<|u|$ 和 $u\in A^*.$ 均成立。构型 $^\infty u^\infty$ 是移位周期的，称为空间周期构型。

元胞自动机是一个与移位交换的连续映射 $F:A^{\mathbb{Z}}\to A^{\mathbb{Z}}$。根据 Curtis-Hedlund-Lyndon 定理 [8]，对于每个元胞自 F，都存在一个整数 r 和一个块映射 f，从 A^{2r+1} 映射到 A，使得$F(x)_i=f(x_{i-r},...,x_i,...x_{i+r})$。整数 r称为元胞自动机的半径。

赋予 $A^{\mathbb{Z}}$ 由所有柱集生成的 σ-代数，以及ν 对字母表中的每个字母赋予相同概率的均匀测度。当且仅当元胞自动机是满射时，均匀测度才是不变的 [8]。

2.4 元胞自动机的等度连续点和几乎等度连续点

2.4.1 K˚urka 的分类

K˚urka [12] 引入了一种基于等度连续性、敏感性和扩张性性质的拓扑分类。等度连续点的存在等价于阻挡单词的存在，即一种能够阻止扰动在一维格点上传播的构型。

定义 2 设 F 为一个元胞自动机。
1. 如果点 x 满足：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y : d(x, y) < \delta, \forall n \geq 0, d\left(F^n(y), F^n(x)\right) < \epsilon.$$

2. 如果每个点 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 都是等度连续点，则称 F 是等度连续的。

3. 如果对所有 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 都有：则称 F 是敏感的。

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y : d(x, y) < \delta, \exists n \geq 0, d\left(F^n(y), F^n(x)\right) \geq \epsilon.$$

定义 3 设 F 是一个元胞自动机。若存在 $p \in [0, |w| - s]$，使得对于任意 x、$y \in [w]$，都有 $F^n(x)(p, p+s) = F^n(y)(p, p+s)$，对所有 $n \geq 0$. 均成立，则称满足 $|w| \geq s$ 的单词 w 是 F 的一个 s-阻塞单词。

命题 4 设 F 是一个半径为 $r > 0$. 的元胞自动机。以下条件等价。

1. F 不敏感。2. F 有一个 r—阻
塞单词。3. F 有某个等度连续点。

2.4.2 吉尔曼分类

基于沃尔夫的工作 [17], , 吉尔曼 [9] 引入了一种基于伯努利测度的分类，这些测度不一定是不变的。他还引入了可测等度连续点和可测扩张性的概念。

因此，元胞自动机可分为三类：具有等度连续点的元胞自动机、具有几乎等度连续点但不具有等度连续点的元胞自动机，以及几乎扩张的元胞自动机。

在 [15] 中，Tisseur 将 Gilman 的分类推广到了任意移位遍历测度，并给出了一个元胞自动机的例子：它具有几乎等度连续点，但没有等度连续点。

定义 5 设 F 是一个元胞自动机，$[i_1, i_2]$ 是 $\mathbb{Z}$的一个有限区间。对于 $x \in A^{\mathbb{Z}}$，我们将 $B_{[i_1,i_2]}(x)$ 定义为：

$$B_{[i_1,i_2]}(x) = \left\{ y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall j : F^j(x)(i_1, i_2) = F^j(y)(i_1, i_2) \right\}.$$

对于任意区间 $[i_1, i_2]$，由 $x\mathfrak{R}y$ 定义的关系 $\mathfrak{R}$，当且仅当 $\forall j : F^j(x)(i_1, i_2) = F^j(y)(i_1, i_2)$ 时成立，这是一个等价关系，而集合 $B_{[i_1,i_2]}(x)$ 是其等价类。

引理 6 若 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$ 则：
(i) $B_{[-n,n]}(x)$ 是闭的。(ii)
$F\left(B_{[-n,n]}(x)\right) \sqsubseteq B_{[-n,n]}(F(x))$。

定义 7 设 (F, μ) 为配备移位遍历测度 μ 的元胞自动机，点 x 是 $\mu-$ 等度连续的，当且仅当对于任意 $m > 0$，我们有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\left([x(-n, n)] \cap B_{[-m,m]}(x)\right)}{\mu([x(-n, n)])} = 1.$$

我们称 F 是 $\mu-$ 几乎扩张的，若存在 $m > 0$，使得对所有 $x \in A^{\mathbb{Z}}$：
$\mu\left(B_{[-m,m]}(x)\right) = 0.$

定义 8 设 (F, μ) 表示一个配备移位遍历测度 $\mu.$ 的元胞自动机。定义元胞自动机的类如下：
1- $(F, \mu) \in \mathcal{A}$ 当且仅当 F 在某个 $x \in A^{\mathbb{Z}}$.处等度连续2- $(F, \mu) \in \mathcal{B}$ 当且仅当 F 在某个 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 处 $\mu-$几乎等度连续，但 $F \notin \mathcal{A}$。3- $(F, \mu) \in \mathcal{C}$ 当且仅当 F 是 $\mu-$几乎扩张的。

以下命题及其证明是 Gilman 的结果 [10] 证明详见 [5]。

命题 9 设 F 是半径为 r的元胞自动机。若 F 有一个等度连续点 x，则单词序列 $\left(F^i(x)(-r, r)\right)_{i\geq 0}$ 最终是周期性的。

证明。设 r 为元胞自动机的半径，且 x 是一个 ν-等度连续点。于是有
$\nu\left(B_{[-r,r]}(x)\right) > 0.$

由移位的遍历性，对于固定值 $p > 0$，有：

$$\nu\left(\sigma^{-p}B_{[-r,r]}(x) \cap \left(B_{[-r,r]}(x)\right)\right) > 0.$$

对于任意 $y \in \sigma^{-p}B_{[-r,r]}(x) \cap \left(B_{[-r,r]}(x)\right)$，有：

$$\forall k \geq 0 : F^k(y)(-r, r) = F^k(y)(-r + p, r + p).$$

记 $y(-r, r) = w$，并用 u 表示 w两次出现之间的单词。再用 y^- 表示第一个单词 w 左侧的部分，并用 y^+ 表示第二个单词 w.右侧的部分

通过在单词 w 和 u 之间加入单词 uw（位于 y 处），我们得到一个新的元素 $y^{(1)}$，其中包含两个单词 uw.的出现次数

通过重复这一过程，我们得到一个序列 $y^{(i)}$，其中每次迭代都多出现一次单词 uw.

根据 $F-$ 作用下的递推，我们可以证明， $y^{(i)}$ 仍属于$B_{[-ij_1-(i+1)r,ij_1+(i+1)r]}(x)$, 对于任意 $i>0$.
对于 $i=1$，我们证明 $y^{(1)} \in B_{[-j_1+2r,j_1+2r]}(x)$。
由于单词 $y^{(1)}(j_1, j_1+2r) = w$ 的图像，在右侧独立于单词 y^+ 下方的无限列，在左侧独立于wu下方的无限列。另一方面，单词 $y^{(1)}(-j_1-2r,-j_1) = w$ 的图像，在左侧依赖于 y^- 下方的无限列，在右侧依赖于 wu下方的列。

根据集合 $B_{[-r,r]}(x)$ 的定义， $x(-r,r) = w$ 的图像与 w.左右两侧的行为无关。因此，我们有:

$$\forall i : F^i\left(y^{(1)}\right)(-r,r) = F^i\left(y^{(1)}\right)(-r,r).$$

于是我们有： $y^{(1)} \in B_{[-j_1+2r,j_1+2r]}(x)$。

现在假设 $y^{(i)} \in B_{[-ij_1-(i+1)r,\ ij_1+(i+1)r]}(x)$，我们希望证明 $y^{(i+1)} \in B_{[-(i+1)j_1-(i+2)r,\ (i)i+1j_1+(i+2)r]}(x)$。
与步骤 $i=1$ 中的论证相同，可以得出，单词$y^{(i)}(ij_1, ij_1+(i+1)r) = w$ 的像在右侧取决于无限单词 y^+，在左侧取决于单词 wu 以及下方的无限列。另一方面，单词 $y^{(1)}(-ij_1,-ij_1-(i+1)r) = w$的像在左侧取决于无限单词 y^-，在右侧取决于 wu 以及下方的无限列。
由于每个元素 $y^{(i)}$ 属于 $B_{[-ij_1-(i+1)r,ij_1+(i+1)r]}(x)$，它也属于$B_{[-r,r]}(x)$。

每一步都包含多一次单词 uw 出现次数的配置序列$y^{(i)} = y^- w \underbrace{uw...uw}_{i-1}()$ $\overrightarrow{}^{y^+}$ 收敛于移位周期配置$(uw)^\infty$，它与 y 在$(-r,r)$上的坐标相同。由于集合 $B_{[-r,r]}(x)$是闭集，周期点$(uw)^\infty$ 属于 $B_{[-r,r]}(x)$，因此单词序列 $\left(F^i(x)(-r,r)\right)_{i\geq 0}$最终是周期的。 ■

2.5 元胞自动机的周期点

设（$A^{\mathbb{Z}}$， F）是一个元胞自动机。由于与移位可交换，每个移位周期点都是 $F-$最终周期点，因此最终周期点集是稠密的。

移位周期点称为空间周期点；元胞自动机中不是移位周期点的周期点称为严格时间周期点。

Boyle 和 Kitchens [4] 证明，闭元胞自动机的周期点集是稠密的。
Blanchard 和 Tisseur[3] 对具有等度连续点的满射元胞自动机也得到了相同的结果。

Acerbi、Dennunzio 和 Formenti [2] 证明，如果每个混合元胞自动机的周期点集都是稠密的，那么每个元胞自动机的周期点集都是稠密的。

满射元胞自动机是否具有稠密的周期点集，仍然是一个公开问题。

以下两个结果启发了我们关于元胞自动机具有几乎等度连续点时严格时间周期点稠密性的命题。

命题 10（[15]）设（$A^{\mathbb{Z}}, F, \mu$）是一个元胞自动机，且 μ 是一个不变测度；如果 F 存在 $\mu-$ 个等度连续点，那么周期点集在 $\mu.$ 的拓扑支撑中稠密。

命题 11 ([13]) 设 ($A^{\mathbb{Z}}$; F) 是一个几乎等度连续且满射的元胞自动机。那么， F 的严格时间周期点集合是稠密的。

命题 12（[13]）设（$A^{\mathbb{Z}}$； F）为扩张元胞自动机。则， F 的严格时间周期点集合为空。

3 结果

3.1 严格时间周期点

在本节中，我们将 Lena、Margara 和 Dennunzio 关于具有几乎等度连续点的元胞自动机中严格时间周期点集合稠密性的结果加以推广。

命题 13 设 ($A^{\mathbb{Z}}, F$) 是一个元胞自动机， μ是一个 $F-$不变且移位遍历的测度。

如果 F 有几乎等度连续点，那么 F 的严格时间周期点集在 $\mu.$ 的拓扑支撑中稠密。

证明。设 r 是元胞自动机的半径， z 是一个几乎等连续点，因此 $\mu(B_{[-r,r]}(z))$ > 0。由于 μ 是一个移位遍历测度 $\exists p > 2r+1$，使得：

$$\mu(S = B_{[-r,r]}(z) \cap \sigma^{-p}(B_{[-r,r]}(z))) > 0.$$

由 Poincar´e 递推定理，存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 和 $x \in S$ 使得

$F^m(x)_{[-r,r+p]} = x_{[-r,r+p]}$。令 $w = z_{[-r,r]} = x_{[-r,r]} = x_{[-r+p,r+p]}$ 和 $u = x_{[r,-r+p]}$。
存在 $p - 2r \geq 2$ $\exists v \neq u$ ，使得 $|wv| = |wu|$。
由命题 9 的证明可知，移位周期点 $a = (wv)^\infty$、 $b = (wu)^\infty$，以及满足以下条件的点 y

$y_{]-\infty,\ -r[} = (wv)^\infty$ $y_{[-r,+\infty[} = (wu)^\infty$ 属于 S。

我们将序列 $(y^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ 定义为：

$$\begin{cases} y^{(0)} = y_{[-r,r+p]} = wuw \\ y^{(i)} = y_{[-r-ip,r+(i+1)p]} = (wv)^i\ wuw\ (uw)^i \end{cases}$$

我们需要通过归纳法证明 $y^{(i)} \in B_{[-r-(i-1)p,r+ip]}(y)$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$对于 $i = 1$ ，由于 $y^{(1)}_{[-r-p,r+2p]} = wv\ wuw\ uw$ 所以 $y^{(1)}_{[-r,r+p]} = y_{[-r,r+p]} = wuw$。假设对于 $j > 0$ 有 $F^t(y^{(1)})_{[-r,r+p]} = F^t(y)_{[-r,r+p]}$ 对于 $0 \leq t \leq j$。在这种情况下。

$$\begin{aligned} F^{j+1}(y^{(1)})_{[-r,r+p]} &= f(F^j(y^{(1)})_{[-2r,2r+p]}) \\ &= f(F^j(y^{(1)})_{[-2r,-r]}F^j(y)_{[-r,r+p]}F^j(y^{(1)})_{[r+p,r+2p]}) \\ &= F^{j+1}(y)_{[-r,r+p]} \end{aligned}$$

由此可得 $(F^j(y^{(1)})_{[-r,r+p]})_{j\in\mathbb{N}} = (F^j(y)_{[-r,r+p]})_{j\in\mathbb{N}}$，这意味着 $y^{(1)} \in B_{[-r,r+p]}(y)$

接下来，假设 $y^{(i-1)} \in B_{[-r-(i-2)p,r+(i-1)p]}(y)$，并采用与步骤 $i = 1$ 中相同的论证，我们证明 $(F^j(y^{(i)})_{[-r-(i-1)p,r+ip]})_{j\in\mathbb{N}} = (F^j(y)_{[-r-(i-1)p,r+ip]})_{j\in\mathbb{N}}$，这意味着 $y^{(i)} \in B_{[-r-(i-1)p,r+ip]}(y)$。

由于对于所有 $i \in \mathbb{N}$ $y^{(i)} \in B_{[-r-(i-1)p,r+ip]}(y)$，可得:

$$y^{(i)} \in B_{[-r,r+p]}(y) = B_{[-r,r]}(z) \cap \sigma^{-p}(B_{[-r,r]}(z)) = S$$

$y^i{}_{i\in\mathbb{N}}$ 点的序列收敛于 $y^{'} = (wv)^\infty wuw(uw)^\infty$。由于 S 是闭集 $y^{'} \in S$，且 S 中每个点的 F 轨道都具有相同的中心坐标，因此可得 $F^m(y^{'})_{[-r,r+p]} = x_{[-r,r+p]} = y^{'}_{[-r,r+p]} = wuw$，这意味着 $F^m(y^{'})_{[-r,+\infty[} = y^{'}_{[-r,+\infty[}$。

利用相同的论证，我们证明存在一个点 $x^{'} \in B_{[-r-p,r-p]} \cap \sigma^{-p}(B_{[-r-p,r-p]})$，使得

$$F^m(y^{'})_{[-r-p,r]} = x^{'}_{[-r-p,r]} = y^{'}_{[-r-p,r]} = wvw$$

这意味着 $F^m(y^{'})_{]-\infty,\ -r]} = y^{'}_{]-\infty,\ -r]}$。由此可得 $F^m(y^{'}) = y^{'}$，并据此得出结论。 ■

例 14 ([9]) 考虑以下元胞自动机 $\left(\mathrm{B}^{\mathbb{Z}}, F\right)$ 其中 $\mathrm{B}=\{\square, \swarrow, \downarrow\}$这里粒子 $\square$ 被视为背景，粒子 $\swarrow$ 向左移动，粒子 $\downarrow$向下移动。

当 $\swarrow$ 和 $\downarrow$ 相遇时，碰撞会产生 $\square$ （相互湮灭）。局部规则如下表所示。

$*\square\square$	$*\square\swarrow$	$*\square\downarrow$	$*\swarrow\square$	$*\swarrow\swarrow$	$*\swarrow\downarrow$	$*\downarrow\square$	$*\swarrow\downarrow$	$*\downarrow\downarrow$
$\square$	$\swarrow$	$\square$	$\square$	$\swarrow$	$\square$	$\downarrow$	$\square$	$\downarrow$

这个元胞自动机属于 $\mathcal{B}$ 类，因此具有敏感性。

3.2 周期因子

命题 15 设 $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ 是一个含有等度连续点的元胞自动机，则 F 至少有一个周期因子。

证明。由于 F存在某个等度连续点，因此存在一个类 $B_{[-n,n]}(x)$，使得 $B_{[-n,n]}(x)^{\circ} \neq \varnothing$.

由引理 9，单词序列 $\left(F^{i}(x)(-r, r)\right)_{i \geq 0}$最终周期，因此存在一个前周期 m 和一个周期 p，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$：

$$F^{m}(x)(-r, r)^{\infty}=F^{m+ip}(x)(-r, r)^{\infty}.$$

定义集合族 $W_{k}=\left[F^{k}(x)(-r, r)\right]$，其中 $0 \leq k \leq m+p-1$.

考虑集合 $W=\cup_{m}^{m+p-1} W_{k}$，我们将证明 F 对 W 的限制有一个周期因子。

设函数 π 由 W 到 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 定义为:

$$\pi(x)=k-m: x \in W_{k}: m \leq k \leq m+p-1$$

定义周期动力系统 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (x+1) \bmod p)$，我们有

$$\pi(F(x))=\left\{\begin{array}{l} k-m+1 \text{ if } x \in W_{k} \text{ and } m \leq k \leq m+p-2 \\ 1 \text{if } x \in W_{m+p-1} \end{array}\right. =P(\pi(x))$$

因此，$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (x+1) \bmod p)$ 是 (W, F) 的一个周期因子。 ■

例16 具有等度连续点的非满射元胞自动机$\left(\mathbf{3}^{\mathbb{Z}} F\right)$，其中 $\mathbf{3}=\{w, 0, r\}$ 规则定义为

$x_{i-1}x_{i}$	wr	$w0$	ww	rr	$r0$	rw	$0r$	00	$0w$
$F(x)_{i}$	r	0	w	0	r	w	0	0	w

这个元胞自动机不是满射；此外，我们有 $F([w000w]) = F([w00rw]) = [w000w]$，因此 $\left(\mathbf{3}^{\mathbb{Z}}, F\right)$ 不是单射。

考虑这个柱集 $[wr000w]$，我们有

x	...	w	r	0	0	0	w	...
$F(x)$	...	w	r	r	0	0	w	...
$F^2(x)$	...	w	r	0	r	0	w	...
$F^3(x)$	...	w	r	r	0	r	w	...
$F^4(x)$	...	w	r	0	r	0	w	...

记 $W=[wr0r0w]\cup[wrr0rw]$，则 F 对集合 W 的限制具有一个周期因子。

命题 17 设 $(A^{\mathbb{Z}},F)$ 是一个满射元胞自动机，具有等连续点但并非等连续；则等连续因子的集合包含无穷多个等价类 $\tilde{\mathrm{p}}$。

证明。假设等连续因子的集合只包含有限多个等价类 $\tilde{\mathrm{p}}$。

记 $\tilde{\mathrm{p}}_1,\tilde{\mathrm{p}}_2,...\tilde{\mathrm{p}}_s$ 为现有的 s 等价类。

设 r 为元胞自动机的半径，且 x 是一个等连续点。

由引理 9 的证明可知，序列 $y\in A^{\mathbb{Z}}$

$$F^i(x(-r,r)\,y(-n,n)\,x(-r,r))$$

最终是周期性的，因此与一个周期因子相关联。

设 $P=\mathrm{lcm}_{1\le i\le s}(\tilde{\mathrm{p}}_i)$，以及由 F–周期点构成的序列 $(x(-r,r)\;y(-n,n)\,x(-r,r))^{\infty}$，它收敛到 y.

于是，对任意 $y\in A^{\mathbb{Z}}$，有:

$$\begin{aligned}F^P(y) &= F^P\left(\lim_{k\to\infty}x(-r,r)\,y(-n,n)\,x(-r,r)^{\infty}\right)=\lim_{k\to\infty}F^P(x(-r,r)\,y(-n,n)\,x(-r,r)^{\infty})\\ &= \lim_{n\to\infty}(x(-r,r)\,y(-n,n)\,x(-r,r)^{\infty})=y.\end{aligned}$$

于是我们得到 $F^P=Id$，因此 F 是等度连续的，这与假设矛盾。

■

推论18 具有等度连续点但本身并非等度连续的满射元胞自动机，其极大等度连续因子不是元胞自动机。

证明。假设极大等度连续因子是一个元胞自动机，并将其记为 M。那么它是满射，且存在一个周期 p，使得$M^p=M$.

由于满射周期因子类有无穷多个。选取一个周期因子 E，使得 q E 的周期满足 $q>p$，因为 E 是 M 的一个因子，所以 q 是 p 的一个除数，这就产生了矛盾。

■

4 结论

我们已经证明，任何具有几乎等度连续点的元胞自动机，在该测度的拓扑支撑上都有稠密的严格时间周期点集。

请注意，该类仅包含没有拓扑等度连续点的元胞自动机，因此它们是敏感元胞自动机。

文献 [11] 表明，存在具有稠密严格时间周期点集的混合元胞自动机。也存在其严格时间周期点集既非空也不稠密的混合元胞自动机。

Gilman 分类的对偶问题很有意思。是否存在这样的近似扩张元胞自动机，使其严格时间周期点集既非空也不稠密?

参考文献

[1]T. Alarc´on、H. M. Byrne 和 P. K. Maini，《非均匀环境中肿瘤生长的元胞自动机模型》，《理论生物学杂志》，第 225 卷，第 2 期，2003 年，第 257–274 页。http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00244-3.[2] L. Acerbi、A. Dennunzio 和 E. Formenti。《元胞自动机的移位与提升》，载于 S.B. Cooper、B. Lowe 和 A. Sorbi（编）：CiE 2007，LNCS 4497，Springer-Verlag，柏林、海德堡（2007），第 1–10 页。[3] F. Blanchard 和 P. Tisseur。《具有等连续点的元胞自动机的一些性质》。《亨利·庞加莱研究所年刊》36（2000），第 569–582 页。[4] M. Boyle 和 B. Kitchens。《元胞自动机中的周期点》，预印本（1999）。《数学研究》。【v7】R. Chemlal，《一维元胞自动机的一些谱性质》。《元胞自动机杂志》，2018 年，第 13 卷第 1/2 期，第 159–172 页，共 14 页。[6] B. Chopard。《物理系统的元胞自动机与格子玻尔兹曼建模》。载于 G. Rozenberg 等编《自然计算手册：理论、实验与应用》。Springer，2010。[7] F. Farina 和 A. Dennunzio。《具有寄生相互作用和环境效应的捕食者—猎物元胞自动机》。《基础信息学》，83：337–353，2008。[8] G. Hedlund。《移位动力系统的端同态与自同构》。《数学系统理论》，4(3)（1969），第 20–375 页。[9] R.H. Gilman。《线性自动机类》。《遍历理论与动力系统》，7（1987），第 105–118 页。

[10] R.H. Gilman. 线性自动机的周期行为，《数学讲义丛书：动力系统》1342，216–219页。Springer，纽约，1988年。[11] J. Kari，K. Zhang，两种传递性元胞自动机及其严格时间周期点，《2013年元胞自动机与离散复杂系统研讨会》[12] P. K˙urka。《拓扑与符号动力学》。Cours sp´ecialis´es，法国数学学会，巴黎，2003年。[13]P. Di Lena，L. Margara 和 A. Dennunzio，《元胞自动机中的严格时间周期点》，Automata and JAC，2012年。[14] A. Nowak，M. Lewenstein。《利用元胞自动机建模社会变迁》。《从科学哲学视角研究社会科学中的建模与仿真》。《理论与决策丛书》第23卷，1996年，第249–285页。[15] P. Tisseur。《一类低复杂度元胞自动机》，《巴黎科学院院刊》，I辑，346卷（2008年）。[16] P. Walters。《遍历理论导论》，《数学研究生教材》79。Springer-Verlag，纽约，1982年。[17] S. Wolfram。《元胞自动机的普适性与复杂性》。《物理学D辑》，10卷（1–2期）（1984年），1–35页。