利用时变非福斯特超结构 *удержж*持并放大电磁波

Victor Pacheco-Peña[1†]、*Yasaman Kiasat*[2†‡]、*Diego M. Solís*[2,3], *Brian Edwards*[2], 和 *Nader Engheta*[2*]

[1]纽卡斯尔大学数学、统计学与物理学院，英国泰恩河畔纽卡斯尔，*NE1 7RU*[2]宾夕法尼亚大学电气与系统工程系，美国宾夕法尼亚州费城，*PA 19104*[3] 埃斯特雷马杜拉大学计算机与通信技术系，西班牙卡塞雷斯，*10003*

*电子邮箱：*engheta@seas.upenn.edu*

摘要

我们提出一种机制：在电磁波传播过程中，将介质的介电常数从正值快速变为无色散（即非福斯特）负值，再变回正值，从而既能 удержж住电磁波，又能将其放大。我们通过考察无限介质中的平面波，从理论上探究这一现象背后的物理机制。有趣的是，我们证明，将 ε(t) 从正值快速变为负值，会使波停止传播（表现为相位在时间上冻结），而冻结场的振幅则呈指数增长。将介电常数恢复为原来的正值（或改为新的正值），会使波解冻，并分别以原频率（或新频率）恢复传播。我们对这类时变非福斯特结构中的偶极子辐射进行了数值研究。作为一种可能的实现方案，我们提出一种平行板波导平台，其中加载了时变介质，以模拟并联集总非福斯特负电容器。这类非福斯特时变结构可能为控制和操纵波与物质的相互作用开辟新的途径。

† 这些作者对本研究的贡献相同。

‡ YK 的现地址： 美国宾夕法尼亚州费城 Locust 街 210 号 16E，邮编 19106, yasaman.kiassat@gmail.com

引言

减慢波传播一直是科学界广泛关注的课题。已有多种方法被证明可以降低光速并在空间中俘获光，例如超冷原子气体[1],光学谐振腔[2], 光子晶体[3], 以及无序介质中的波干涉[4] ，这些方法的灵感来自电子输运中的安德森局域化[5]。光放大也备受关注，已通过增益和非线性介质等多种效应实现。另一方面，四维（4D）超材料的理念近年来日益受到关注。这类材料不仅随三维空间（3D）变化，也随时间（一维）变化[6–15]。时变电磁平台历史悠久，可追溯至20th 世纪中期[16,17]。以往的研究中，介质的相对介电常数（ε）随时间快速变化，从一个正值变为另一个正值（两者均大于 1）。这实际上相当于空间界面的时间类比：界面两侧是具有不同ε的两个半无限材料，由此产生前向（FW）波（即时间折射波）和后向（BW）波（即时间反射波）[18–20]。近年来，人们利用空间界面与时间界面之间的这种类比，探索了多种有趣的现象[13,21]。例如，光子时间晶体（PTC）的概念应运而生，其中介电常数在两个正值之间随时间调制，发挥着空间光子晶体的时间对应物的作用[22]。在此背景下，Lyubarov 等从理论上证明，这种调制可以实现光放大，并提出了非谐振 PTC 激光器这一令人振奋的设想。[23]受时空超材料为波与物质相互作用带来的机遇启发，我们在此提出一种能够удерж住并放大传播中电磁波的新机制。与 PTC 有着根本不同的是，该效应基于一次时间跃迁：从介电材料跃迁至基于非福斯特元件的无色散负介电常数材料。首先，我们探究这一方法背后的物理机制。我们考虑一列初始单色平面波，它在无限、空间均匀且各向同性的介质中传播，该介质具有随时间变化的相对介电常数 ε(t)。随后，通过一步快速改变 ε(t)，使其从正值变为无色散负值，从而形成时间边界。分析结果表明，初始单色电磁波的相位在空间中冻结。当材料保持在这一状态且总波在空间中冻结时，时间边界处激发的前向波和后向波的振幅会分别随时间呈指数增长和衰减，从而使介质中的总波（前向波+后向波）也能呈指数增长。在这种情形下，波原本的单色特性会转变为一种在时间上不再具有周期性的信号

（尽管它在空间上仍具有周期性），但其随时间呈指数变化，因此没有单一频率。要实现无色散的负介电常数（这是使介电常数在时间上保持为负所必需的），必须考虑非福斯特元件，因此需要为材料提供外部能源。经过足够长的时间后，介电常数会迅速恢复为大于 1 的正值。此时，波便解冻并恢复双向传播。如果新的正介电常数不同于原来的正值，还会发生频率转换。因此，通过外部能源驱动（这是非福斯特结构所必需的），对介电常数进行适当设计，使其在有限时段内为负值，便可实现光放大和频率转换。此外，我们还数值演示了在这种非福斯特时变介质中发生二维偶极辐射的情形。作为所提出机制的示例，我们考察并数值评估了一种平行板波导：其中加载了可切换、并联的薄时变电介质，以模拟具有非福斯特负电容的电容器。评估结果表明，该结构能够实现上述特性。

保持并放大波：介电常数从正值快速变为负值

首先，我们通过考察四种情形（见图1），讨论单界面的空间边界与时间边界之间的异同，以及传统（即无源）介质与非福斯特（即由外部源驱动的有源）介质之间的异同。在所有情形中，以及本文其余部分，我们均假设所有相关材料的相对磁导率均与自由空间相同（即 $\mu_1 = \mu_2 = 1$），且所有介电常数均为实数。我们的分析始终从传统的入射场开始，即介质1中的传播单色连续波（CW），定义为 $E_1 = y\$e^{i[\omega_1 t - k_1 x]}$，，其中 $k_1 = \omega_1/v_1$ 为介质1中的波数，ω_1 为角频率，$v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ 为相速度，c 为真空光速，$\varepsilon_1 \geq 1$ 为相对介电常数。图1a显示了两个半无限介质之间的传统空间界面，其定义为 $\varepsilon(x) = \varepsilon_1[x < x_1] + \varepsilon_2[x > x_1]$，其中 $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$使用艾弗森括号定义。众所周知，波遇到位于 $x = x_1$的空间界面时，会产生反射波和透射波。透射波数“改变”为 $k_2 = \omega_1/v_2$，其中 $v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_2}$，但频率保持不变（即 $\omega_2 = \omega_1$）。

现在来考虑这种空间边界的时间类比[6, 16–18]：介质在空间上无限延伸，其时变介电常数定义为 $\varepsilon(t) = \varepsilon_1[t < t_1] + \varepsilon_2[t > t_1]$。图1c对此情形作了示意。当介质的介电常数在 $t = t_1$ 处快速变化，且变化上升时间远小于信号周期 T 时，便形成一个时间边界[13, 16–20, 24, 25]。与空间边界类似，这会产生两列波：一列向前传播（FW），即时间折射波；另一列向后传播（BW），即时间反射波。然而，在时间边界的情形下，波数保持不变（$k_1 = k_2 = k$），但 FW 波和 BW 波的频率均由 ω_1 变为 $\omega_2 = (v_2/v_1)\ \omega_1$[16, 17]。这些结果已广为人知[26]。

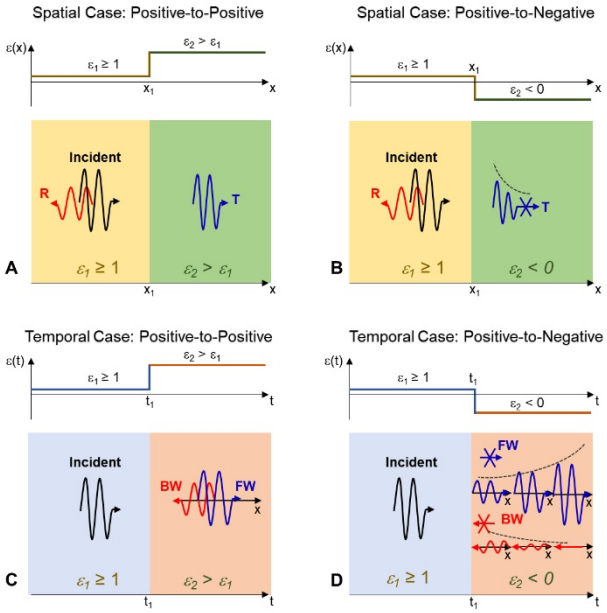


图 1| 空间边界与时间边界类比示意图。a, 两个具有不同正相对介电常数的半无限介质之间的空间边界。**b,** 两个具有不同且符号相反的相对介电常数的半无限介质之间的空间边界（一个为正 $\varepsilon \geq 1$，另一个为负实数值 $\varepsilon < 0$）。**c,** 空间无限介质中的时间边界，其中相对介电常数随时间从一个正值变为另一个正值。**d,** 与 c 类似，但相对介电常数从正值变为负实数值（仅非福斯特概念下才可能）（一个为正 $\varepsilon \geq 1$，另一个为负 $\varepsilon < 0$）。注意，c 和 d 中前向波和后向波的示意图表示整个空间在某一时刻的场。

回到空间边界，现考虑介质2的介电常数为负实数值的情形，即 $\varepsilon_2 < 0$（图1b）。众所周知，在这种情况下，介质2中透射波的波数变为虚数，从而产生空间上倏逝衰减的场，因此不会发生传播。透射波、反射波和入射波的频率保持不变。

然而，时间边界另一侧的介质 ε_2 为负值时会发生什么？图1d示意了这种情况。可以预期，与正值到正值的时间界面类似，此时会产生一组前向波和后向波，且波数保持不变。但这两种新波的频率会如何变化，其传播又会怎样？在这种情形下，频率也会改变，但现在是从实数值 ω_1 变为虚数值（因为 $\omega_2 = (v_2/v_1)\omega_1 = (\sqrt{\varepsilon_1}/\sqrt{\varepsilon_2})\omega_1$），这会使前向波和后向波随时间呈指数变化，其中一个随时间增长，另一个随时间衰减。在这种情况下，诱导形成正值到负值的时间边界后，总电场（$E_{2\_t1} = E_{FW1} + E_{BW1}$）和磁场（$H_{2\_t1} = H_{FW1} - H_{BW1}$）可根据时间界面处矢量**D**和**B**的守恒来计算，这些矢量构成已知边界条件[16]（详细推导见补充材料第1和第2节）：

$$E_{2\_t1} = \hat{y}\left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1x-\omega_1t_1) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1x-\omega_1t_1)\right]e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} + \hat{y}\left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1x-\omega_1t_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1x-\omega_1t_1)\right]e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \quad (1a)$$

$$H_{2\_t1} = \hat{z}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\cos(k_1x-\omega_1t_1) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1x-\omega_1t_1)\right]e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} + \hat{z}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\cos(k_1x-\omega_1t_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1x-\omega_1t_1)\right]e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \quad (1b)$$

其中，μ_0 和 ε_0 分别是真空的磁导率和介电常数。每个方程中的第一项和第二项分别对应前向波和后向波，不过严格来说，它们已不再是波，因为它们不再传播。尽管如此，为简便起见，我们仍沿用前向波和后向波这两个术语。$i\mathrm{G}\sqrt{|\varepsilon_2|}$ 前符号的选择是合理的，因为我们已完全在时域中独立推导出相关表达式，所用方法为拉普拉斯变换，详见补充材料第 8 节。从式 1 可以立即看出，电磁波在时间上不再呈正弦周期变化（但在空间上仍具有周期性）。相反，这两个场（前向波和后向波）随时间呈指数增长或衰减，并在空间中被冻结 。换言之，电磁波的性质发生了变化：它不再是单色波，而是纯粹随时间指数变化的波，其总电场

E_{2_t1} 实际上并未在无限介质中移动，且 $t > t_1$。然而，正如我们稍后将展示的，这种场分布确实具有非零的净时间平均坡印廷矢量，从而保证动量守恒。图 1d 对这一现象作了示意说明。对于 $t>t_1$，式 1 中由总电场描述的电磁场已不再是单色的（而是随时间纯粹呈指数变化）；与此同时，我们希望在这一时间段内保持介电常数为负值。因此，我们得出结论：该介质必须是无色散的，并且其介电常数在此时间段内必须始终为负值。根据福斯特电抗定理，这对于无源介质而言是不符合物理规律的[27]。（在补充材料第 10 节中，我们以 Drude 色散为例，说明无源介质不可能具有这种负介电常数。）迄今为止，我们尚未对时变超材料的无源或有源性质作出任何假设。然而，此时有必要提出一个问题：在真实的无源物理系统中，E_{2_t1} 真的可能呈指数增长吗？有趣的是，已有研究在时间谐波情形下，对具有无色散负介电常数的介质中的类似指数增长进行了分析研究[28]。那么，无色散负介电常数材料有何特殊之处？众所周知，基本的能量色散约束与因果性要求共同迫使无源材料具有满足以下关系的色散参数（采用时间约定 $e^{i\omega t}$）：$\{\partial[w\,\varepsilon(w)]/\partial w\} > \varepsilon_0$，且 $\{\partial[w\,\mu(w)]/\partial w\} > \mu_0$[29]。这两个表达式表明，任何无源、无损或低损耗材料中储存的总电抗性能量始终大于真空中储存的能量。因此，对于无源介质，负介电常数必须具有色散性，不能在一定频率范围内保持恒定。因此，不难得出结论：若要实现无色散的负ε，就需要使用带有外部能源的有源介质。有趣的是，类似的表达式也适用于电路理论中的任何电抗元件。在这一领域，福斯特电抗定理要求 $\{\partial[X(w)]/\partial w\} > 0$，且 $\{\partial[Y(w)]/\partial w\} > 0$（其中 X 和 Y 分别为电抗和电纳）[27]。人们已利用福斯特电抗定理与无源材料能量色散约束之间的这种联系，借助非福斯特（即有源）元件，设计出无色散超材料[30–32]，例如实现宽带近零介电常数（ENZ）响应[33]。基于这些信息，我们前述的冻结电磁波机制或许可以通过采用带有外部能源的非福斯特结构的时变平台实现。

ε正到负时间边界的结果：$\varepsilon(t)$ 的阶跃函数

现在，我们用一些定量值来评估式 1 所描述的电磁波 保持现象的响应。假设平面波传播所在的整个介质的相对介电常数在 $t_1 = 37$时迅速从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为 $\varepsilon_2 = -20$，并在 $t > t_1$期间保持该值，其中 T 是原单色波的周期。这个时变的 $\varepsilon(t)$ 如图 2 所示。在此配置下，总电场和磁场关于空间和时间的解析结果分别如图 2d、g 所示。从这些结果可以看出，在引入时间边界之前（$t < t_1$），电磁波沿 x*x* 轴正方向传播；而时间边界引入后（$t > t_1$），波实际上被冻结并呈指数增长。通过考察瞬时坡印廷矢量关于空间和时间的变化（图 2j），也可以验证这一现象。如图所示，$t < t_1$ 时它为正值，说明波正在传播；而 $t > t_1$时，波在空间上被冻结，并随时间呈指数增长。（正如我们稍后将展示的，$t > t_1$ 时，坡印廷矢量并非严格为零，而是具有非零净值。）

为进一步研究这些理论结果，图 2 的第二列（图 2e、h、k）和第三列（图 2f、i、l）分别展示了在 $t = 37T$（t_1之前）和 $t = 39T$（t_1之后）时，解析得到的电场和磁场分布以及瞬时坡印廷矢量。这两个时刻分别对应于在 $t_1 = 37.1T$ 引入时间边界之前和之后的瞬间。可以看到，在 $t = 37T$ 时（图 2e、h、k），电场和磁场分布对应于一个沿*x*-轴正方向传播的单一波；电场与磁场同相，因此瞬时坡印廷矢量为正，如前所述。然而，在 $t = 39T$ 时（图 2f、i、l），由于ε 已变为负值并保持在该值（采用非福斯特的概念），电场和磁场在空间上不同步：E 达到最大值的位置，H 几乎为零，反之亦然。事实上，正如补充材料第 4 节的详细计算所示，当我们在 $t= t_1$ 将介电常数从正值变为负值时，E 和 H 之间的相位差在 t_{1+} 时为 180 度（见图 2c）；但随着时间推移，这一相位差趋近于 90 度（但绝不会恰好达到 90 度）[†]，与此同时 E 和 H 的幅值呈指数增长。

[*] 关于如何穿越$\varepsilon_2 = 0$ 的问题，补充材料第 9 节对此进行了详细讨论。 [†] 虽然在 $t > t_1$ 时，我们不再有单色信号（而是有指数增长和衰减的场），但我们仍然使用 E 和 H 之间的相位差这一概念，来表示它们的最大值之间的空间分离，以及它们的

这两种渐近行为的结合使 $t > t_1$, 时的净坡印廷矢量不为零；正如我们稍后将展示的，这保证了动量守恒。为求完整起见，补充材料第 5 节图 S2 展示了在 $t = t_1$ 之前和之后的不同时间，前向波和后向波的电场与磁场分布的解析结果。这些结果表明，前向波和后向波分别呈指数增长和衰减，同时在空间中几乎静止。值得一提的是，在 Lyubarov等人的研究中[23]，，他们通过随时间周期性调制介质的介电常数来实现光放大，同时光仍在传播；而在我们的方法中，只在时间上通过单个步骤改变一次介电常数，波在空间中也基本被冻结。

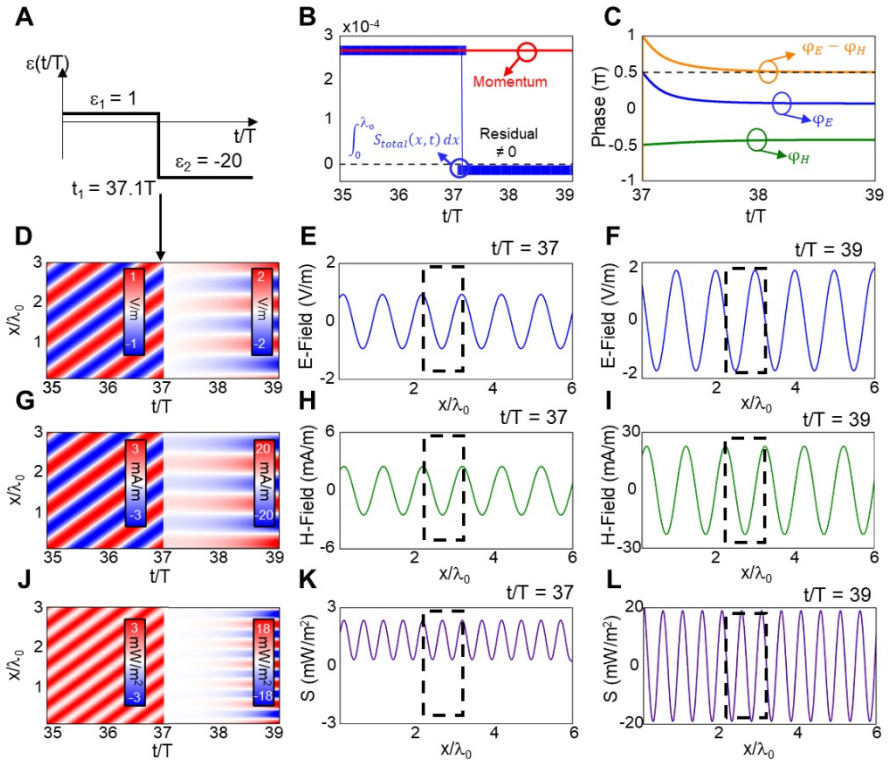


图 2| 介电常数由正变负的时间边界解析结果：ε(t) 的阶跃函数ε(t)。a、d、g、j 时间相关介电常数、 电场、磁场和瞬时坡印廷矢量随空间 (x) 和时间 (t) 的分布，其中整个介质的相对

ε ε1 = 1 ε2 在 t . = 20 1 = 37 1 > 1.

T 时从正实数值变为负实数值，并在 t t 时保持该值（基于非福斯特概念）。（注意，两个不同时间范围使用了不同的比例尺范围，以展示分布细节。）**b,** 瞬时坡印廷矢量（蓝色）在一个波长距离内的空间平均值 ($\int^{0} S_{total}(x,t)dx$ λ0), 以及动量（红色）随时间的变化。**c,** 根据补充材料第 4 节所示理论计算的 $t > t_1$ 时刻 E 场（蓝色）和 H 场（绿色）的相位及其差值（黄色）。**e、f** 电场，**h、I** 磁场，以及**k、l**瞬时坡印廷矢量随空间 (x) 的分布，取自**d、g、j** 在 t = 37 T（第二列）和 t = 39T（第三列）时刻的数据，分别对应介电常数由正值变为负值前后的时刻。

零值，也就是说，此处趋近于 90 度相位差是指在 E 达到最大值的位置，H 正在趋近于零值（但永远不会恰好达到零值），反之亦然。

介电常数正-负-正时间分层介质的结果：$\varepsilon(t)$方波函数

在上一节中，我们讨论了这样一种情况：利用非福斯特现象的概念，将ε 从正值快速变为负值，并保持在该值。然而，如果ε 在变为负值后又变回正值，会发生什么？本节通过考察由两个阶跃变化定义的时变ε(t)来回答这一问题（类似于时间上的方波函数，即两个连续的时间边界），也就是一个时间薄层[24]。我们再次考虑单色平面波在无限介质中传播的情形，其时间依赖的ε 如图 3 所示（这一情形的一般解析解见补充材料第 1 节）。

我们首先考察$\varepsilon_1 = 1$ 和$\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 均为正值的情况（见图 3a）。此时，ε在 $t_1 = 37T$ 时从$\varepsilon_1 = 1$ 变为 $\varepsilon_2 = 5$，随后在 $t_2 = 40T$ 时变为$\varepsilon_3 = 10$。在这种设置下，整个介质的ε 在 $t_2 - t_1 = 3T$ 期间保持为ε_2。该设置下电场分布随空间和时间变化的解析结果如图 3a 所示。可以看到，在第一个时间边界（$t = t_1$）处产生了一组前向波$_1$ 和后向波$_1$，它们以新的频率 $w_2 = (\sqrt{\varepsilon_1}/\sqrt{\varepsilon_2})w_1$传播，正如前文所述。随后，在 t_2引入ε 的第二次时间变化时，这两列波再次分裂。正如预期的那样，这四列波（两列前向传播波和两列后向传播波）现在均以单一频率 $w_3 = P\sqrt{\varepsilon_2}\, G\varepsilon_3 Q\, Rw_2 = P\sqrt{\varepsilon_1}\, G\varepsilon_3 Q\, Rw_1$传播。$t < t_1$, $t_1 < t < t_2$, 和 $t > t_2$ 时的电场分布结果分别见补充材料第 6 节（图 S3b、c、d）。从这些结果可以清楚地看出，波的频率在每个时间边界处都会改变，而波数 k（因此波长）在整个过程中保持不变。为求完整起见，并更直观地了解在 t_1 和 t_2, 处引入各时间边界后频率的变化，我们在两个不同位置（$x/l_0 = 2$ 和 $x/l_0 = 2.25$）计算了电场分布，结果如图 3b 所示。可以看到，波在 $t < t_1$, $t_1 < t < t_2$ 和 $t > t_2$这些时间区域内的周期各不相同。

现在来考察图 3d 所示的情况，其中 ε 降至负值。在这种情况下，ε 在 $t_1 = 37T$ 时由 $\varepsilon_1 = 1$ 迅速变为 $\varepsilon_2 = -15$，随后在 $t_2 = 40T$ 时变为正值 $\varepsilon_3 = 10$ ($\varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$)。在持续时间 $t_2 - t_1 = 3T$ 内，整个介质的ε 保持为负（采用非福斯特情形）。图 3d 展示了这种随时间变化的 ε 对应的电场分布随空间和时间的变化。我们看到，电磁波沿正向 x

$t < t_1$传播。随后，该波在时间间隔 $t_1 < t < t_2$ 内基本处于冻结状态，其振幅呈指数增长（前向波和后向波分别呈指数增长和衰减，见补充材料图 S3 和图 S4）（尽管坡印廷矢量仍不为零，见图 3f），这与上一节讨论的 ε阶跃函数情形的结果一致。

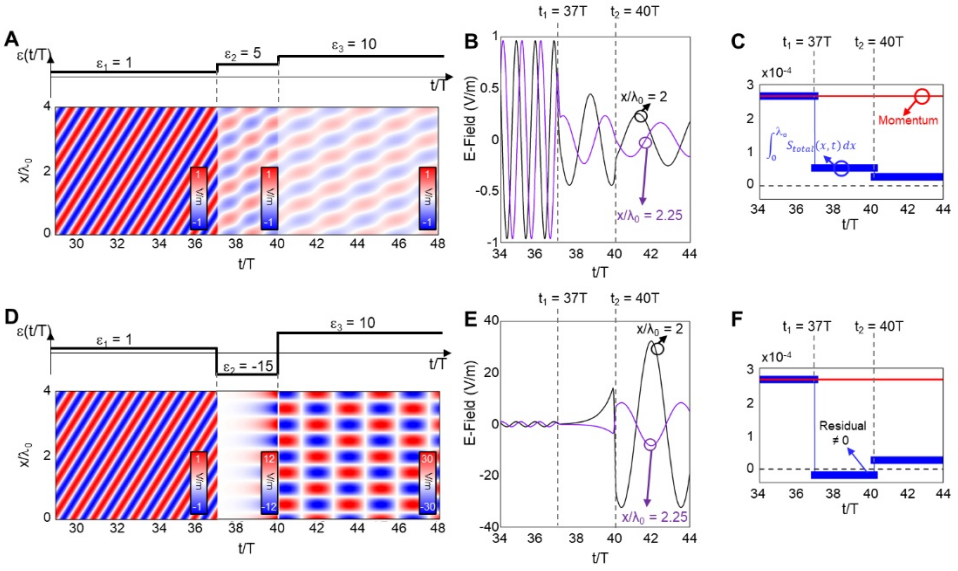


图 **3|** 介电常数正-负-正时间分层介质的解析结果：ε(t) 的方波函数。a，当相对ε在 $t_1 = 37T$ 时从$\varepsilon_1 = 1$ 变为正实数值 $\varepsilon_2 = 5$，随后在 $t_2 = 40T$ 时变为$\varepsilon_3 = 10$ 时，电场随空间 (x) 和时间 (t) 的分布。b，从面板 a 提取的两个空间位置 $x = 2l_0$（黑色）和 $x = 2.25l_0$（紫色）处电场随时间 (t) 的分布。c，根据面板 a 计算的瞬时坡印廷矢量在一个波长距离上的空间平均值 ($\int^{\circ} S_{total}(x,t)dx$ % &，蓝色) 以及动量（红色）随时间的变化。d，当相对ε在 $t_1 = 37T$ 时从$\varepsilon_1 = 1$ 变为实数负值 $\varepsilon_2 = -15$（基于非福斯特的概念），随后在 $t_2 = 40T$ 时变为$\varepsilon_3 = 10$ 时，电场随空间 (x) 和时间 (t) 的分布。（请注意，在面板 d 中，三个不同的时间范围使用了三种不同的比例尺范围，以展示分布细节。）e，从面板 d 提取的 $x = 2l_0$（黑色）和 $x = 2.25l_0$（紫色）处的电场分布。f，与 c 相同，但对应于 d 中讨论的情况。

现在，在 $t > t_2$，时，介质的介电常数变回正值 ε_3。值得注意的是，这使介质中的波得以解冻，从而再次传播。不过，我们注意到，对于 $t > t_2$，，除了频率从 w_1 到 $w_3 = P\sqrt{\varepsilon_1}\, G\varepsilon_3 Q\, Rw_1$发生变化之外，还出现了两个有趣的现象：i）由于前向波和后向波的振幅近似相同（但并非完全相同），波的表现几乎像“驻波”；ii）电磁波的振幅增至 $t < t_1$ 时振幅的 ~30 倍。需要强调的是，在 $t > t_2$，时，并未形成完美的驻波，因为严格来说，前向波和后向波的振幅虽然都很高，却并

不完全相同。事实上，我们通过解析方法证明，沿 +x 方向存在非零的净坡印廷矢量值，这保证了动量守恒。为更清楚地观察这些结果，补充材料第 6 节（图 S3f、g、h）还展示了 $t < t_1$, $t_1 < t < t_2$, 和 $t > t_2$ 时的电场分布。为求完整，图 3e 还展示了两个单独位置 $x/l_0 = 2$ 和 $x/l_0 = 2.25$ 处的电场计算值。此外，补充材料图 S5 展示了总波、前向波和后向波的瞬时坡印廷矢量随空间和时间的变化。将负方波函数的结果（图 3d–f）与正方波函数的结果（图 3a–c）进行比较，可以看出，采用所提出的基于非福斯特概念、涉及非色散负介电常数的时间薄层，能够实现对波的 удерж留和放大以及频率转换。

时间间隔 $t_2 - t_1$ 对冻结波的影响

由于在时间间隔 $t_2 - t_1$ 内，冻结波会经历指数增长和衰减，因此可以提出这样一个问题：这个时间间隔与 $t > t_2$内前向波和后向波的振幅之间是否存在联系？为回答这些问题，我们首先考虑图 4a 所示的 ε 正方波函数。为简化起见，此处 ε 在 $t = t_1$, 时由一个正值 $\varepsilon_1 \geq 1$ 变为另一个正值 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ，并在该值保持 $t_2 - t_1$ 的时间，然后于 $t = t_2$时恢复为 $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \geq 1$ 。如上一节所述并如图 4a 示意所示，在第一个时间边界（$t = t_1$）会产生一组波（前向波$_1$, 后向波$_1$），其系数分别为 T_1 和 R_1, 。在 $t = t_1$, 处应用 D 和 B 的时间连续性，即在 d→0 趋于零的极限下满足 $D_{t1-\delta} = D_{t1+\delta}$ 和 $B_{t1-\delta} = B_{t1+\delta}$ ，即可轻松计算出这些系数（完整细节见补充材料第 1 节）。随后，这两列波在 $t = t_2$处分裂成第二组波（前向波$_2$, 后向波$_2$），其系数 T_2 和 R_2 按相同过程计算。根据参考文献 [18], ，这些系数 T_1, R_1, T_2 和 R_2 随后定义为 $(T_1, R_1) = 0.5[(\varepsilon_1/\varepsilon_2) \pm (\sqrt{\varepsilon_1}/\sqrt{\varepsilon_2})]$ 以及 $(T_2, R_2) = 0.5\mathrm{Y}(\varepsilon_2/\varepsilon_3) \pm \mathrm{P}\sqrt{\varepsilon_2}\mathrm{G}\varepsilon_3\mathrm{Q}$ RZ。近期，人们利用整个过程中波的传播特性，通过恰当设计时间间隔 $t_2 - t_1$., ，实现了水波的时间反演[24] 以及电磁波的抗反射时间涂层[36]。现在，对于负方波函数（图 4b），我们此前已在图 3d、e 中看到，当 ε 变为负值时，空间冻结的前向波$_1$ 和后向波$_1$ 会在 $t = t_1$ 处产生。这些冻结波呈指数增长/衰减，直到在 t 时分裂为一个前向波$_2$ 和一个后向波$_2$

= t_2 时，当介电常数再次变为正值。结合图 4a、b 所示的情形，介电常数方波函数对应的总电场（E_{3_t2}）通解可定义如下（完整推导及磁场的完整解见补充材料第 3 节）：

$$E_{3\_t2} = \begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}+e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \\ &\left. +\frac{1}{4}\left(-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right)\ sin\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}-e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \\ &\left\langle \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}+e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \\ &\left. +\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right)\ sin\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}-e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

其中，第一项和第二项分别表示最终的前向波和后向波（两者均由两组波组成），对应于 $t > t_2$。由式 2 可知，大括号内的指数项决定了冻结波在时间间隔 $t_2 - t_1$ 内的指数衰减或增长。有趣的是，可以看出，项–YP$\sqrt{\varepsilon_1}$ G/ $|\varepsilon_2|$Rw1$(t_2 - t_1)$Z 和 YP$\sqrt{\varepsilon_1}$ G/ $|\varepsilon_2|$Rw1$(t_2 - t_1)$Z 分别会使指数随时间衰减和增长；正如式 1 和图 1-3 中所讨论的，当 $t_2 - t_1$，足够大时，衰减项会变得越来越小。因此，由该衰减项在 $t = t_2$ 产生的新一组波将非常小（但不为零）。由增长项在 $t = t_2$ 产生的另一组波则会很大。这两组波组合后，形成 $t > t_2$ 时的前向波和后向波，其振幅近似（但并非完全）相同，这一点可从补充材料中的图 3 和图 S3 的结果看出。

为了定量研究这一性能，我们考虑一个 ε 方波函数：在 $t = t_1$ 时，它从 ε_1= 1 变为负实数值（ε_2），随后在 $t = t_2$ 时恢复为 $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = 1$。图 4c、d 分别展示了在第一处时间边界之后、紧邻 t_2 （$t = t_2^-$ 之前）产生的冻结前向波$_1$ 和后向波$_1$ 的振幅结果，并考察了 ε 保持为负值的不同时间间隔（$t_2 - t_1$）。在这些图中，为进行比较，考虑了 ε_2 的两个取值（$\varepsilon_2 = -4$ 和 $\varepsilon_2 = -8$）。从这些结果中，我们首先观察到，正如式 1 所预期的那样，与 $\varepsilon_2 = -8$ 的情况相比，$\varepsilon_2 = -4$ 时冻结 前向波$_1$ 和后向波$_1$ 的指数增长/衰减更快。此外，我们注意到，当 $\varepsilon_2 = -4$ 时，后向波$_1$ 的振幅在 $t_2 - t_1 = 0.2T$ 时衰减至 ~0.21，而当 $t_2 - t_1$ 增加至 0.8T 时，振幅则大幅降至 ~0.01。

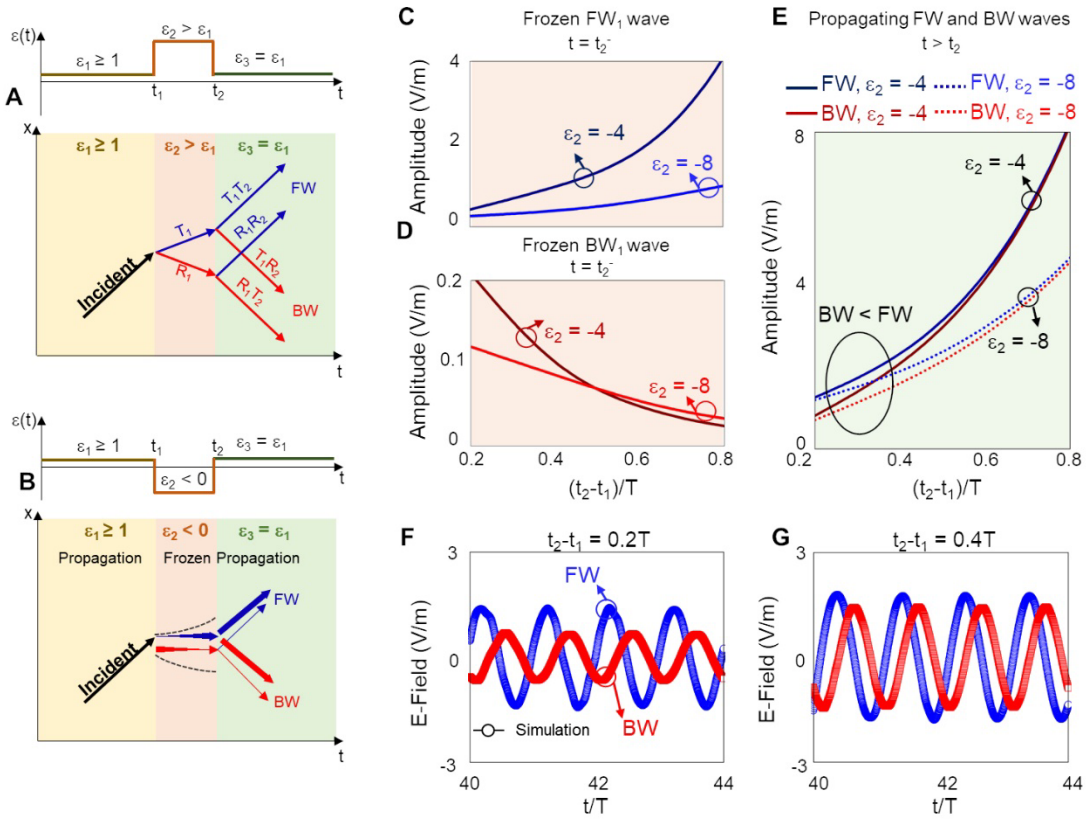


图 4| 时间间隔 t_2-t_1的影响。a、b，分别示意介电常数方波函数，考虑（$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$，$\varepsilon_2 > 1$）和（$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$，$\varepsilon_2 < 0$）。c、d，第一时间边界处产生的前向波$_1$和后向波$_1$的振幅随时间间隔 $t_2 - t_1$ 的变化，其中 $\varepsilon = \varepsilon_2 < 0$ 分别在第二时间边界（t_2^-）之前计算。此处考虑 ε_2 的两个取值：$\varepsilon_2 = -4$（深蓝色和深红色）以及 $\varepsilon_2 = -8$（浅蓝色和浅红色）。e，最终前向波和后向波的振幅随时间间隔 $t_2 - t_1$ 的变化，其中 $\varepsilon = \varepsilon_2 < 0$ 在引入第二时间边界（$t > t_2$）后计算。f、g，前向波（蓝色）和后向波（红色）的电场数值结果（分别在 $x/\lambda_0 = 7.5$ 和 $x/\lambda_0 = -7.5$ 处计算），对应时间 $t > t_2$；其中 $\varepsilon_1 = 1$、$\varepsilon_2 = -8$ 和 $\varepsilon_3 = 1$，所用时间间隔分别为 $t_2 - t_1 = 0.2T$ 和 $t_2 - t_1 = 0.4T$，且 $\varepsilon = \varepsilon_2 < 0$。

如前所述，这一性能会直接影响第二处时间边界 $t = t_2$ 之后产生的前向波和后向波总波的振幅（见式 2）。参照图 4c、d 所示的示例，图 4e 展示了 $t > t_2$ 时前向波和后向波总波的振幅随时间间隔 $t_2 - t_1$ 的变化，并采用相同的两个负值 ε_2（$\varepsilon_2 = -4$ 和 $\varepsilon_2 = -8$）。从这些结果可以清楚地看出，当时间间隔 $t_2 - t_1$大于 0.7T 时，前向波和后向波的振幅几乎（但并非完全）相同；而缩短这一时间间隔时，情况则并非如此。为求完整，我们使用 COMSOL Multiphysics® 计算了前向波和后向波的电场分布模拟结果，并将其展示于图 4f、g；所考虑的 ε 方波函数取值为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$，且 $\varepsilon_2 = -8$

分别使用 $t_2 - t_1 = 0.2T$ 和 $t_2 - t_1 = 0.4T$。可以观察到，分别使用 $t_2 - t_1 = 0.2T$ 和 $t_2 - t_1 = 0.4T$ 时，波的振幅不同/相似（但并不完全相同），这与图 4e 中的讨论一致。为完整起见，补充材料图 S6 展示了更多数值模拟和解析计算结果，说明采用我们的方法时，介电常数呈不同方波函数的情况下，能够实现波放大和频率转换。此外，补充材料第 7 节图 S7 展示了在考虑不同 $t_2 - t_1$ 值（即 0.2T、0.4T 和 0.6T）时，$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ and $\varepsilon_2 = -4$ 情况下瞬时坡印廷矢量的解析结果。结果表明，当 $t > t_2$ 且 $t_2 - t_1 = 0.6T$ 时，前向波和后向波的振幅相似（但不相等），形成近乎（但并非完全）完美的驻波，如上所述；而采用较小的 $t_2 - t_1 = 0.2T$ 时则并非如此。

电磁动量考量

在我们的时域、空间无界、均匀非福斯特超结构中，电磁动量必须守恒。这里的确如此。根据我们的分析（见补充材料），将 $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}$ 视为单位体积的电磁动量[37], ，从图 2 和图 3 可以看出，该项在所有三个时间区域 $t < t_1$, $t_1 < t < t_2$, 和 $t > t_2$中始终保持不变。在时间区域 $t < t_1$ 和 $t > t_2$, 中，这一与坡印廷矢量直接相关的动量密度十分明显，因为这两个区域中存在传播波（即在 $t < t_1$ 中有一个传播波，而在 $t > t_2$, 中有振幅相近（但略有差异）的前向波和后向波，因此净坡印廷矢量不为零，见图 2b 和图 3f）。然而，时间区域 $t_1 < t < t_2$, 中存在随时间场增强和衰减的冻结波，因此需要在此进一步讨论。在这一时间间隔内，我们有两个冻结波，每个冻结波携带的“空间平均”坡印廷矢量均为零（“空间平均”指瞬时坡印廷矢量在一个波长距离上的平均值）。然而，同时考虑这两个随时间一增一减的冻结波时，这种组合会呈现非零的净空间平均坡印廷矢量，从而确保动量守恒。组合冻结波中存在这一非零净坡印廷矢量，可以解释为指数衰减和增长倏逝波空间情形的时间类比：每个倏逝波都不携带时间平均坡印廷矢量，而两者同时存在则确实显示出一个净时间平均坡印廷矢量隧穿通过这两个倏逝波

波。

时域超结构与非福斯特元件

如前所述，由于无源介质受到色散约束，要使介电常数从正值变为负的无色散值并在一段时间内维持该值，需要具有外部能源的有源时域超结构。本节提出并通过数值方法评估一种加载了可切换并联负非福斯特元件的二维平行板波导的性能（通过薄时变层模拟，其中ε 从大于 1 的正值变为负值），以展示引入此类有源非福斯特元件后，如何使波导中的电磁波在空间上被束缚并放大。在这项数值研究中，采用填充空气（$\varepsilon_1 = 1$）的波导，工作频率为$f = 1.5\text{GHz}$（$l_1 = 200\ \text{mm}$）。两块理想电导体（PEC）金属板之间的距离为$h = 0.5l_1$，，沿x-轴的总长度为 $6l_1$，宽度（沿z-轴，面外方向）设为 $W = 1\text{m}$，以近似为二维波导。为模拟负介电常数，在波导中插入一组由 75 个负非福斯特电容器组成的阵列，彼此之间以厚度为 $0.08\lambda_1$ 的空气层（$\varepsilon_1 = 1$）隔开。这些负电容器通过薄介质模拟（厚度为 $0.01\lambda_1$），其时变ε 从正值（$\varepsilon_1 = 1$）变为负值 $\varepsilon_2 = -4$。通过这一设置，可以切换模拟的负非福斯特元件，使介质的介电常数从正值变为负值[33]。负电容器在 $t_1 = 9T$ 时开启，并在 $t > t_1$ 期间保持开启。为确保使用波导中已有的信号评估超结构，信号源在第一个时间边界（$t = t_1$）出现的同时关闭。

采用此配置，不同时间区域的电场分布数值结果如图 5c–e 所示（为完整起见，图 5c–e 右侧插图展示了电场分布的放大图）。如图所示，当 $t < t_1$ 时，波沿 x 正方向传播（图 5c）。在 $t_1 = 9T$ 处诱导时间边界后，非福斯特电容器所在区域内的波基本上被冻结在空间中，随后其振幅随时间增大（见图 5d–e）。请注意，诱导时间边界时波导内的电场会改变符号，这与上述讨论一致。这种增长所需的能量由非福斯特元件所需的外部能源提供。这些结果展示了如何将电磁波保持 并

由于电容值的变化而得到放大。

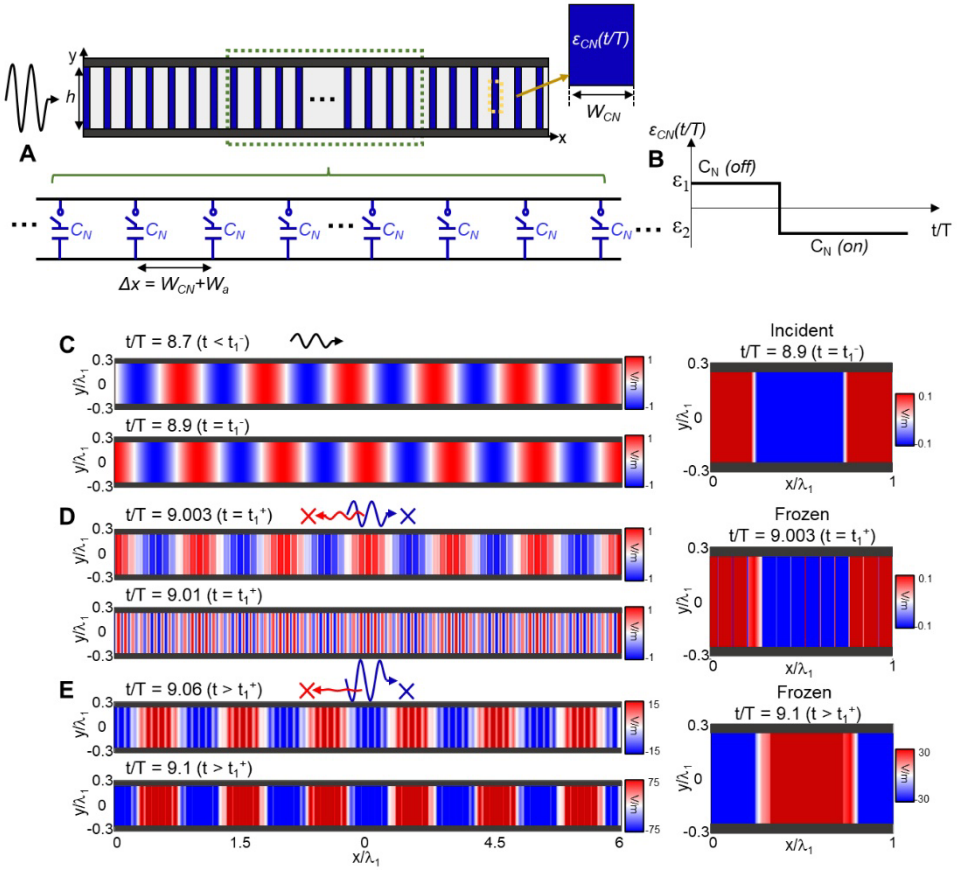


图 5| 采用非福斯特元件的时变平行板波导方案。a, 二维（2D）平行板波导的示意图，其高度为$h = 0.5l_1$，沿x轴的总长度为 $6l_1$。波导内放置了 75 个非福斯特负电容（C_N），彼此间距为$\Delta x = 0.08l_1$。电容器由厚度为 $W_{CN} = 0.01l_1$ 的薄介质模拟，其时间相关的ε会在 $t = t_1 = 9T$ 时从$\varepsilon_1 = 1$ 变为$\varepsilon_2 = -4$。平行板波导的等效电路如面板 a 底部所示。**b,** ε 随时间变化的示意图。**c、d、e,** 分别为时间边界之前和边界时刻（$t < t_1^-$ 和 $t = t_1^-$）、刚激活电容器之后（$t = t_1^+$），以及时间边界之后较长时间（$t > t_1^+$）的电场分布数值结果。面板 c–e 右侧的插图展示了不同时刻电场分布的放大图。

时变非福斯特超结构中的偶极子辐射

最后，我们展示一个浸没在所提出的时变非福斯特平台中的二维（2D）偶极子的性能。示意图如图 6a 所示。当 $t < t_1$ 时，二维电偶极子在 $\varepsilon_1 = 1$ 无限介质中辐射。在 $t = t_1$，时，偶极子关闭，ε 迅速变为 $\varepsilon_2 < 0$，这意味着介质中已有的电磁信号将被冻结在空间中，其幅值将呈指数增长。该情形的数值结果（使用 COMSOL Multiphysics ®）考虑了 $\varepsilon_1 = 1$ 在 $t < t_1$ 时的情况，并将其变为 $\varepsilon_2 =$

-4 在 $t = t_1 = 9.4T$ 时的结果如图6b所示（其中展示了电场、H场和功率随时间的分布，均在$x/\lambda_0 = y/\lambda_0 = 0.75$处计算。为确保结果收敛，首先关闭信号源，然后在 0.7T 后迅速改变 ε（更多详情见方法部分）。如图所示，在 $t < t_1$ 时，二维偶极子发射的波在非福斯特平台被冻结时于无限介质中传播，并在 $t > t_1$, 时呈指数增长，这与前文的讨论一致。

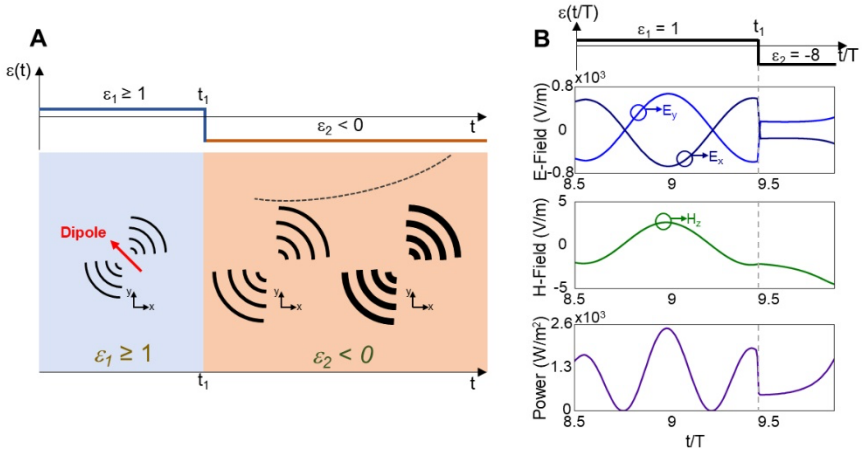


图 6| 将二维（2D）偶极子置于时变非福斯特平台中。a, 示意图显示偶极子在 $t < t_1$ 时辐射，此时 $e_1 \geq 1$ ；随后信号在空间中被冻结，其幅度随时间呈指数增长，在 $t > t_1$ 时 $e_2 < 0$。**b,** 在$x/\lambda_0 = y/\lambda_0 =0.75$处计算得到的面内电场分量（$E_x$，深蓝色；$E_y$，蓝色）、面外H场（绿色）和功率分布（紫色）的数值结果。时间相关函数 e 显示在顶部面板中，来自**b.**

总之，我们探讨了这样一种情形：利用介电常数从正值迅速变为负值的时域超结构来诱导时间边界，这需要使用外部能量驱动的非福斯特结构。本文研究了这类时域结构背后的物理机制，展示了如何迫使这种介质中的电磁波有效地“停止”，进入冻结状态，随后随时间增长；本文通过解析和数值方法对此进行了证明。此外，若将时域超结构的介电常数恢复为另一个正值，则波的传播会再次成为可能，同时实现频率转换。研究表明，要在时域结构中实现这种非色散负介电常数，需要一个由外部能量驱动的有源介质；这与电路理论中著名的福斯特电抗定理直接相关。我们利用加载了平行薄时变介质的平行板波导，对所提出的这种“波的加注站”理论进行了数值研究，这些介质模拟 非福斯特负

电容器，并展示了解析计算与数值计算结果一致。这一概念在减慢和停止光并同时实现放大方面具有令人振奋的潜在应用，或可为相干光源带来新的可能性。

方法

所有数值模拟均使用商用软件 COMSOL Multiphysics® 的时域求解器完成。对于图 4-5 所示的配置以及补充材料图 S6 所示的结果，顶部和底部边界采用了 PEC边界，右侧边界则实施了散射边界条件，以避免不必要的反射。通过仿真区域左侧边界的散射边界条件施加入射场。对于图 4 和图 S6 所示的结果，采用了经过细化的映射网格，最大和最小单元尺寸分别为 0.14λ 和 0.15×10^{-3}λ，，曲率因子为 0.2，狭窄区域分辨率为 1。通过采用结合两个内置单步函数的解析函数，对这些图中 e 的快速变化进行建模（即模拟方波函数 e），平滑过渡为 7.5×10^{-6} T，并设置一个导数以确保结果收敛。对于图 5 中讨论的结果，同样采用了映射网格，最大和最小单元尺寸分别为 0.16λ 和 0.15×10^{-3}λ，，曲率因子和狭窄区域分辨率值与图 4 中结果相同。此外还实施了自动网格细化。e 的快速变化采用具有 1.2×10^{-5}T 平滑过渡和一个连续导数的解析单步函数进行建模，以确保结果收敛。对于图 6 所示的结果，在$x/\lambda = y/\lambda = 0$ 处放置了一个电偶极子，并将其嵌入半径为 3λ 的圆形几何中（用于模拟无限介质）。在圆周围实施散射边界条件，以避免不必要的反射。偶极子沿x- 轴和y轴的偶极矩分别设为 +1 和 -1，以模拟旋转 45 度的偶极子。电流偶极矩的幅值采用正弦信号建模，并在 t/T = 8.7 时关闭，平滑过渡为 ~1.49T，同时设置一个连续导数以促进模拟收敛。在 $t_1 = 9.4$T 时，整个介质的 e 通过采用平滑度为 2.9×10^{-4}T 且具有一个连续导数的解析阶跃函数，从 $\varepsilon_1 = 1$ 快速变为 $\varepsilon_2 = -8$。

参考文献

1. Hau, L. V., Harris, S. E., Dutton, Z. & H. Behroozi, C. 超冷原子气体中的光速降低至每秒 17 米。*Lett. to Nat.* **397**，594–598（1999）。2. Yanik, M. F. & Fan, S. 全光学停止光。物理评论快报 **92**，1–4（2004）。3. Soljačić, M. 等 光子晶体慢光增强非线性相位敏感性。*J. Opt. Soc. Am. B* **19**，2052（2002）。4. Wiersma, D. S., Bartolini, P., Lagendijk, A. & Righini, R. 无序介质中的光局域化。*Nature* **390**，671–673（1997）。5. Anderson, P. W. 某些随机晶格中不存在扩散。*Phys. Rev.* **386**，1492（1956）。6. Pacheco-Peña, V. & Engheta, N. 时间超材料中的有效介质概念。*Nanophotonics* **9**，379–391（2020）。7. Hadad, Y., Sounas, D. L. & Alu, A. 时空梯度超表面。*Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.* **92**，1–6 （2015 年）。8. Huidobro, P. A., Galiffi, E., Guenneau, S., Craster, R. V. & Pendry, J. B. 时空调制超材料中的菲涅耳拖曳。*Proc. Natl. Acad. Sci.* **116**，24943–24948（2019）。9. Ptitcyn, G., Mirmoosa, M. S. & Tretyakov, S. A. 时间调制超原子。*Phys. Rev. Res.* **1**，1–11（2019）。10. Li, H., Moussa, H., Sounas, D. & Alù, A. 基于时间调制的宇称-时间对称性。*Phys. Rev. Appl.* **14**，031002（2020）。11. Wang, X., Díaz-Rubio, A., Li, H., Tretyakov, S. A. & Alù, A. 多功能时空超表面的理论与设计。*Phys. Rev. Appl.* **13**，1（2020）。12. Pacheco-Peña, V. & Engheta, N. 时间瞄准。*Light Sci. Appl.* **9**，1–12（2020）。13. Akbarzadeh, A., Chamanara, N. & Caloz, C. 基于时间不连续性和空间色散的逆棱镜。*Opt. Lett.* **43**，3297–3300（2018）。14. Galiffi, E. 等 时变介质中的光子学。*Adv. Photonics* **4**，1–32（2022年）。15. Pacheco-Peña, V., M. Solís, D. & Engheta, N. 时变电磁介质：观点。*Opt. Mater. Express* **12**，3829（2022年）。16. Morgenthaler, F. 电磁波的速度调制。*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **6**，167–172（1958）。17. Fante, R. 电磁波向时变介质中的传播。*IEEE Trans. Antennas Propag.* **19**，417–424（1971）。18. Xiao, Y., Maywar, D. N. & Agrawal, G. P. 电磁波在时间边界处的反射与透射。*Opt. Lett.* **39**，577（2014）。19. Mendoca, J. T. & Shukla, P. K. 时间折射与时间反射：两个基本概念。*Phys. Scr.* **65**，160–163（2002）。20. Plansinis, B. W., Donaldson, W. R. & Agrawal, G. P. 反射的时间类比是什么

d

光束折射？ 物理评论快报 **115**，1–5（2015年）。21. Li, H., Yin, S., Galiffi, E. & Alù, A. 极端能量变换的时间宇称-时间对称性。 物理评论快报 **127**，153903（2021年）。22. Martínez-Romero, J. S., Becerra-Fuentes, O. M. & Halevi, P. 介电常数和磁导率均发生调制的时间光子晶体。 物理评论*A*辑 **93**，1–9（2016年）。23. Lyubarov, M. 等 光子时间晶体中的放大发射和激光发射。 科学（*80***377**，425 428 2022-。）。–（）。24. Bacot, V., Labousse, M., Eddi, A., Fink, M. & Fort, E. 时空变换中的时间反演与全息术。 自然物理 **12**，972–977（2016年）。25. Moussa, H. 等 光子时间界面中的时间反射和宽带频率转换现象。 自然物理（2023年）。doi:10.1038/s41567-023-01975-y 26. Collin. 微波工程基础。（John Wiley & Sons：霍博肯，新泽西州，2001年）

.

27. Foster，R. M. 电抗定理。*Bell Labs Tech. J. 3* **2**，259–267（1924年）。28. Tretyakov, S. A. & Maslovski, S. I. Veselago材料：本构参数色散的可能与不可能。*IEEE Antennas Propag. Mag.* **49**，37–43（2007年）。29. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 连续介质电动力学，第*8*卷。（Elsevier，2004年）。30. Barbuto, M., Monti, A., Bilotti, F. & Toscano, A. 非福斯特有源加载SRR的设计及其在超材料启发型组件中的应用。*IEEE Trans. Antennas Propag.* **61**，1219–1227（2013年）。31. Hrabar, S., Krois, I., Bonic, I. & Kiricenko, A. 基于非福斯特元件的无色散有源超材料基本概念。载于*2010*年*ICECom*会议论文集，第*20*届应用电磁学与通信国际会议1–4（IEEE，2010年）。32. Tretyakov, S. A. 具有宽带负介电常数和负磁导率的超材料。微波、光学技术快报 **31**，163–165（2001年）。33. Hrabar, S., Krois, I. & Kiricenko, A. 面向隐身应用的有源无色散ENZ超材料。超材料 **2**，89–97（2010年）。34. Linvill, J. G. 晶体管负阻抗变换器。*Proc. IRE* **41**，725–729（1953年）。35. Buiantuev, B. 等 基于Linvill浮动阻抗变换器的负电容器物理导向设计。*IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **70**，139–154（2022年）。36. Pacheco-Peña, V. & Engheta, N. 时间抗反射涂层。*Optica* **7**，323（2020年）。37. Stratton, J. A. 电磁理论。（John Wiley & Sons, Inc.，1941年）。doi:10.1002/9781119134640

致谢

作者谨此感谢范内瓦·布什教员奖学金计划提供的部分资助。该计划由国防部助理部长（研究与工程）办公室下属的基础研究办公室赞助，并由海军研究办公室通过资助编号 N00014-16-1-2029 提供经费。V.P.-P. 感谢纽卡斯尔大学提供的支持（纽卡斯尔大学研究奖学金）。N.E. 也感谢西蒙斯基金会／对称性驱动极端波现象合作项目提供的部分资助，资助编号为 # 733684

补充材料

利用时间非福斯特超结构储存并放大电磁波

Victor Pacheco-Peña[1], Yasaman Kiasat[2], Diego M. Solís[2,3], Brian Edwards[2] 和 *Nader Engheta[2*]*

[1]英国纽卡斯尔大学数学、统计与物理学院，泰恩河畔纽卡斯尔，*NE1 7RU*[2] 美国宾夕法尼亚大学电气与系统工程系，费城，*PA 19104*[3] 西班牙埃斯特雷马杜拉大学计算机技术与通信系，卡塞雷斯，*10003*[*]电子邮箱：*engheta@seas.upenn.edu*

---

1. 诱导两个时间边界：解析表达式。

2. 介电常数单阶跃函数 $\varepsilon_1 \geq 1$ 和 $\varepsilon_2 < 0$：解析表达式。3. 介电常数方波函数 $\varepsilon_1 \geq 1$、$\varepsilon_2 < 0$ 和 $1 \leq \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$：解析表达式。

4. 当 $\varepsilon_2 < 0$ 时，E 与 H 的相位差。

5. 前向波和后向波结果：介电常数单阶跃函数。6. 前向波和后向波结果：介电常数平方函数。7. 瞬时坡印廷矢量：$t_2 - t_1$ 的影响。8. 时间边界 $t = 0$ 之后电场的拉普拉斯变换推导。9. 含损耗的非福斯特结构。9.1 稳定性研究。9.2 在 $at\ t=t_1$ 散射的波的振幅。9.3 在 $at\ t=t_2$"解冻"前向和后向波。10. 介电常数快速时间变化的不可能性（从正值变为负值

)

在 Drude无源介质中。

11. 补充视频 12. 参考文献

1. 诱导两个时间边界：解析表达式

此处给出了诱导两个时间边界情况下的解析表达式。主文稿中的图1c、d展示了所研究的问题，图S1则对其进行了示意说明。假设一个单色连续波（连续波）在介电常数随时间变化的无限介质中传播 ε(t)。该ε 的初始相对值为 ε_1，持续 $t < t_1$。随后，在 $t = t_1$ 时，介电常数迅速变为 ε_2（由此诱导出第一个时间边界）；在该值下保持一段时间间隔 $t_2 - t_1$，然后在 $t = t_1$ 时迅速变为 ε_3（此时引入第二个时间边界）。需要强调的是，介电常数的这种快速变化并非瞬时发生，但其速度足够快，瞬态上升时间远小于波的周期。

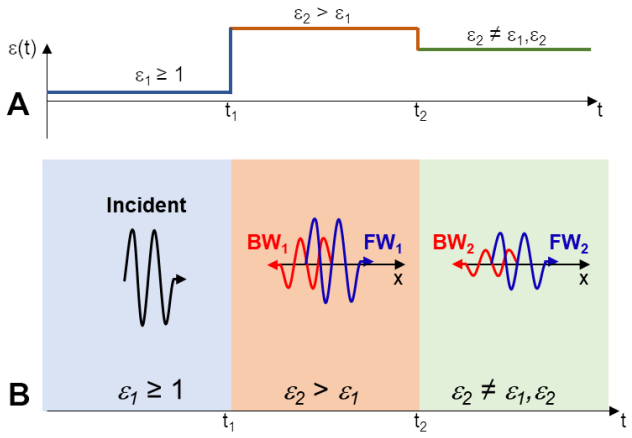


Figure S1| 两个诱导时间边界的示意图。a, 时变介电常数。 **b,** Time-时变介电常数，以及在每个时间边界产生的空间波。

通过这一设置，可以定义不同时间窗口内的电场：$t < t_1$, $t_1 < t < t_2$ 和 $t > t_2$，其中整个介质的介电常数分别为ε_1，ε_2 和ε_3。首先考虑时间$t < t_1$。在无限介质中传播的单色连续波的电场（E）和磁场（H）可定义如下：

$$E_1 = \hat{y} e^{i[\omega_1 t - (k_1 x)]} \tag{S.1a}$$

$$H_1 = \hat{z} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_1}} e^{i[\omega_1 t - (k_1 x)]} \tag{S.1b}$$

其中，ω_1 为角频率，$k_1 = \omega_1 / v_1$ 为波数，$v_1 = c \sqrt{\mu / \varepsilon_1}$ 为相速度，c为真空光速，而ε_1 和 μ_1 分别为相对介电常数和磁导率。

现在，在$t = t_1$，ε 从ε_1 迅速变为ε_2。在这种情况下，形成第一个时间边界，影响整个介质中已经存在的波。在此背景下，会产生前向波（E_{2FW_t1}）和后向波（E_{2BW_t1}）；对于在阻抗不同的两个半无限介质之间传播的波，它们分别是空间情形中透射波和反射波在时间上的对应形式。

整个介质中的总电场（E_{2_t1}）可写为如下形式（此处仅写出 E 场）：

$$E_{2\_t1} = E_{2FW\_t1} + E_{2BW\_t1} \tag{S.2a}$$

$$E_{2\_t1} = T_1 e^{i\omega_1 t_1} e^{i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x)} + R_1 e^{i\omega_1 t_1} e^{-i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x)} \tag{S.2b}$$

其中，T_1 和 R_1 分别为前向波和后向波的系数，$v_2 = c\ \sqrt{\mu/\ \overline{\ _2\varepsilon_2}}$ 为相速度。通过在$t = t_1$处应用 D 和 B 的守恒条件，即在 d→0的极限下满足 $D_{t1\text{-}\delta} = D_{t1+\delta}$ 和 $B_{t1\text{-}\delta} = B_{t1+\delta}$，可计算系数 T_1 和 R_1。从现在起，我们假设只有介电常数随时间变化，即 $\mu_1 = \mu_2 = 1$。据此，这两个系数可定义如下[1–3]:

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) \tag{S.3a}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) \tag{S.3b}$$

从公式 S.2 可以看出，在所诱导的时间界面处产生的前向波和后向波以新的频率（v_2/v_1）ω_1 传播，同时波数 k 保持不变。这是时间边界的两个重要特征[2]，与空间边界不同；在空间边界中，预期会出现相反情况（频率守恒而 k 发生变化）。

现在，在 $t = t_2$ 处，介电常数从 ε_2 迅速变为 ε_3。这将引入第二个时间边界，此时，已经在整个介质（$E_{2FW\_t1} + E_{2BW\_t1}$）中传播的两列波（前向波$_1$, 后向波$_1$）将再次分裂成四列新波：两列向前传播，两列向后传播。在此情况下，整个介质中的总场（E_{3_t2}）可计算如下:

$$\begin{aligned} E_{3\_t2} = {} & T_1 T_2 e^{i\omega_1 t_1} e^{i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t_2-t_1)\right]} e^{i\frac{v_3}{v_1}\omega_1(t-t_2)} e^{-i(k_1 x)} + R_1 R_2 e^{i\omega_1 t_1} e^{-i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t_2-t_1)\right]} e^{i\frac{v_3}{v_1}\omega_1(t-t_2)} e^{-i(k_1 x)} \\ & + T_1 R_2 e^{i\omega_1 t_1} e^{i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t_2-t_1)\right]} e^{-i\frac{v_3}{v_1}\omega_1(t-t_2)} e^{-i(k_1 x)} + R_1 T_2 e^{i\omega t_1} e^{-i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t_2-t_1)\right]} e^{-i\frac{v_3}{v_1}\omega_1(t-t_2)} e^{-i(k_1 x)} \end{aligned} \tag{S.4}$$

其中，$v_3 = c\ \sqrt{\mu/\ \overline{{}_3\varepsilon_3}}$ 为相速度，T_2 和R_2 为 $t = t_2$ 处新的一组前向波和后向波的系数。这些系数可按照与公式 S.3 相同的过程计算：

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) \tag{S.5a}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} - \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) \tag{S.5b}$$

本节所示的公式给出了在 ε_1、ε_2 和 ε_3 取任意值时的解。在接下来的几节中，我们将详细介绍正文所述的具体情形，其中 $\varepsilon_2 < 0$ 和 ε_1、$\varepsilon_3 \geq 1$，以便冻结电磁波。

2. 介电常数$\boldsymbol{\varepsilon_1 \geq 1}$ 和$\boldsymbol{\varepsilon_2 < 0}$的单阶跃函数：解析公式 ***on.***

既然我们已经定义了诱导两个时间边界时的电场，现在就来关注这样一种特殊情形下的总电场：在 $t = t_1$ 时刻，介电常数从正值（$\varepsilon_1 \geq 1$）迅速变为负值 $\varepsilon_2 < 0$，并保持为该值，也就是介电常数单阶跃函数；这一过程借助有外部能源的有源非福斯特结构实现。

在这种情况下，介电常数变化前后的总电场可分别由公式 S.1a 和公式 S.2 描述。重新整理公式 S.2 后，$t > t_1$的电场如下：

$$E_{2\_t1} = T_1 e^{i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)} + R_1 e^{-i\left[\frac{v_2}{v_1}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)} \tag{S.6}$$

现在，我们可以使用公式 S.6，考虑所研究的情况：介电常数从正值（$\varepsilon_1 \geq 1$）变为$\varepsilon_2 < 0$。在此设定下，$t > t_1$ 的总场定义如下：

$$E_{2\_t1} = Re\left\{T_1 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)} + R_1 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)}\right\} \tag{S.7a}$$

$$\begin{aligned} E_{2\_t1} = Re\Bigg\{ & T_1 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} [\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) - i\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)] \\ & + R_1 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} [\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) - i\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)]\Bigg\} \end{aligned} \tag{S.7b}$$

$$\begin{aligned} E_{2\_t1} = & \left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)\right] e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \\ & + \left[-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)\right] e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \end{aligned} \tag{S.7c}$$

请注意，公式 S.7c 中的第一项和第二项分别对应于时间边界 $t = t_1$ 之后产生的前向波和后向波。如图所示，这两种波在空间上保持冻结的同时，随时间呈指数增长或衰减。主文稿图 2 所示示例中的前向波和后向波的解析结果见图 S2。

为完整起见，我们可以根据公式 S.7a 计算磁场 $H_{2\_t1} = H_{2FW\_t1} - H_{2BW\_t1}$ 如下:

$$H_{2\_t1} = Re\left\{\eta_2 T_1 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)} - \eta_2 R_1 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} e^{-i(k_1 x-\omega_1 t_1)}\right\} \quad \text{(S.7d)}$$

其中 $\eta_2 = i\mathrm{M}\overline{3\mu_1\mu_0}\ \sqrt{|\varepsilon_2|\varepsilon_0}\mathrm{P}\ \mathrm{Q}$。按照与公式 S.7a-c 相同的步骤，我们得到以下表达式:

$$\begin{aligned} H_{2\_t1} = {} & \hat{z}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)\right] e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \\ & +\hat{z}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\cos(k_1 x-\omega_1 t_1) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\sin(k_1 x-\omega_1 t_1)\right] e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \end{aligned} \quad \text{(S.7e)}$$

对应正文中的公式 1b。

3. 介电常数平方函数 $\boldsymbol{\varepsilon_1 \geq 1,\ \varepsilon_2 < 0}$ 和 $\boldsymbol{1 \leq \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1}$：解析表达式。

如正文所述，所提出的空间冻结电磁波传播机制的一项有趣特性是：一旦时变介电常数从正值（$\varepsilon_1 \geq 1$）变为负值（$\varepsilon_2 < 0$），然后再变回另一个不同的正值（$1 \leq \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$），即可同时实现频率转换和波放大。本节将详细介绍这一令人振奋情形的解析表达式。

介电常数从正值变为实负值时的总电场由式 S.7e 定义，而介电常数恢复为正值（$t > t_2$）时的总电场由式 S.4 定义。将 $\varepsilon_2 < 0$ 代入式 S.4 后，定义 $t > t_2$ 时电场的方程如下：

$$E_{3\_t2} = Re\left\langle e^{-i(k_1 x)} e^{i\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)} e^{i\omega_1 t_1}\left\{T_1 T_2 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + R_1 R_2 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right.$$
$$\left. + e^{-i(k_1 x)} e^{-i\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)} e^{i\omega t_1}\left\{T_1 R_2 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + R_1 T_2 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \quad \text{(S.8a)}$$

请注意，上述表达式中的第一项和第二项（行）分别对应第二个时间边界之后产生的最终前向波和后向波。如式 S.8 所示，总电场取决于系数 T_1T_2, R_1R_2, T_1R_2 和 R_1T_2，这些系数可通过式 S.3 和式 S.5 计算。基于此，对式 S.8 进行处理后，$t > t_2$ 的总电场最终解如下：

$$E_{3\_t2} = \left\langle \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2) - \omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left(-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right) sin\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2) - \omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} - e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\Big\rangle$$
$$\left\langle + \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2) - \omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \quad \text{(S.8b)}$$
$$\left. +\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right) sin\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2) - \omega_1 t_1\right]\left\{e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} - e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle$$

取自正文中式 2 所示的表达式。

为完整起见，可按照相同方法由式 S.8a 计算磁场 H_{2_t2}

按照式 S.7d 中的过程：

$$H_{2\_t1} = \begin{array}{l} Re\left\langle \eta_3 e^{-i(k_1 x)} e^{i\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)} e^{i\omega_1 t_1}\left\{ T_1 T_2 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + R_1 R_2 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \\ \left. -\eta_3 e^{-i(k_1 x)} e^{-i\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)} e^{i\omega t_1}\left\{ T_1 R_2 e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + R_1 T_2 e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \end{array} \quad \text{(S8.c)}$$

其中 η_3 =M3$\overline{\mu_1\mu_0}$ $\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_0}$P Q 和 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$)。按照式 S.8a-b 的相同步骤，可得以下表达式：

$$\begin{array}{l} H_{2\_t1} = \\ \frac{\sqrt{\mu_1\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_0}}\left\langle \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{ e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \\ \left. + \frac{1}{4}\left(-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right) sin\left[k_1 x - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{ e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} - e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \\ -\frac{\sqrt{\mu_1\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_0}}\left\langle + \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\right) cos\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{ e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} + e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right. \\ \left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}\sqrt{\varepsilon_3}}+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\varepsilon_3}\right) sin\left[k_1 x + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3}}\omega_1(t-t_2)-\omega_1 t_1\right]\left\{ e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]} - e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t_2-t_1)\right]}\right\}\right\rangle \end{array} \quad \text{(S8.d)}$$

4. 当 $\boldsymbol{\varepsilon_2 < 0}$ 时 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的相位差

本节给出介质的介电常数在 $t = t_1$ 时刻由正值（$\varepsilon_1 \geq 1$）变为负值（$\varepsilon_2 < 0$）后，E 场和 H 场相位的理论计算结果。如正文所述，对于 $t > t_1$，由于前向波和后向波分别被冻结并呈指数增长/衰减，介质中的信号不再是单色信号。不过，为了更好地理解两者的极大值与零值之间的空间分离，这里仍采用 E 场和 H 场相位的概念。本节将给出 E 场（j_E）和H场（j_E）相位的理论闭式表达式。

如上所示，当波传播所经过的介质的介电常数在 $t = t_1$ 处从正值（$\varepsilon_1 \geq 1$）变为负值（$\varepsilon_2 < 0$）时，该介质中的电场和H场分别可由公式 S.7c 和 S.7e 定义（分别对应正文中的公式 1a 和 1b）。然后，我们可以利用恒等式 $A\sin(\theta) + B\cos(\theta) = C\sin(\theta + \varphi)$，其中 $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi = atan\left(\frac{B}{A}:\right.$，将公式 S.7c 和 S.7e 改写如下：

采用公式 S.7c 定义的电场：

$$E_{2\_t1} = \mathrm{C}\sin(\theta + \varphi_E) \tag{S.9a}$$

$$A_E = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}} e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}} e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.9b}$$

$$B_E = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|} e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|} e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.9c}$$

$$C_E = \sqrt{A_E^2 + B_E^2} \tag{S.9d}$$

$$\theta = k_1 x - \omega_1 t_1 \tag{S.9e}$$

那么：

$$\varphi_E = atan\left(\frac{B_H}{A_H}\right) = atan\left(\frac{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}F - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}G}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}F - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}G}\right) \tag{S.9f}$$

$$F = e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.9g}$$

$$G = e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.9h}$$

或者简单地说

$$\varphi_E = atan\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\left(\frac{-F-G}{F-G}\right)\right] \tag{S.9i}$$

随后，我们可以对H场应用相同的过程，计算其在时间 $t > t_1^+$时的相位 φ_H 。重写

方程 S.7e，得到：

$$H_{2\_t1} = C_H \sin(\theta + \varphi_H) \tag{S.10a}$$

$$A_H = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.10b}$$

$$B_H = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.10c}$$

$$C_H = \sqrt{A_H^2 + B_H^2} \tag{S.10d}$$

$$\theta = k_1 x - \omega_1 t_1 \tag{S.10e}$$

然后：

$$\varphi_H = atan\left(\frac{B_H}{A_H}\right) = atan\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}F + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}G}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}F - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_1\mu_0}}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}G}\right) \tag{S.10f}$$

$$F = e^{-\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.10g}$$

$$G = e^{\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\omega_1(t-t_1)\right]} \tag{S.10h}$$

或者简写为

$$\varphi_H = atan\left[\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{F+G}{F-G}\right)\right] \tag{S.10i}$$

从 φ_E 和 φ_H 的表达式（分别为方程 S.9i 和 S.10i）可以看出，它们的相位会随时间演变，这正如预期。最后，我们可以将相位差写为

$$\varphi_E - \varphi_H = atan\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}}\left(\frac{-F-G}{F-G}\right)\right] - atan\left[\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{F+G}{F-G}\right)\right] \tag{S.11}$$

随后使用方程 S.9i、S.10i 和 S.11 中的表达式来表示主文图 2c 中所示的结果，

并指出，只有在时间 $t = \infty$ 时，相位差 $\varphi_E - \varphi_H$ 才为 90 度。这是因为当 $t = \infty$ 时，方程 S.11 中的 F 和 G 分别变为 0 和 ∞。这意味着，在 $t = \infty$ 的极限下（或在 $G = \infty$ 的极限下），$F = 0$，且 S.11a 中 atan() 函数的自变量变为：

$$\lim_{G=\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}} \left(\frac{-F-G}{F-G} \right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}} \tag{S.12a}$$

$$\lim_{G=\infty} \frac{\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(\frac{F+G}{F-G} \right) = -\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \tag{S.12b}$$

因此，

$$\varphi_E - \varphi_H = atan\left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{|\varepsilon_2|}} \right] - atan\left[-\frac{\sqrt{|\varepsilon_2|}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right] = \pi/2 \tag{S.12c}$$

展示了 90 度的相位差，这种情况仅在 $t = \infty$ 时出现，如正文所述。

5. 前向波和后向波结果：介电常数单阶跃函数。

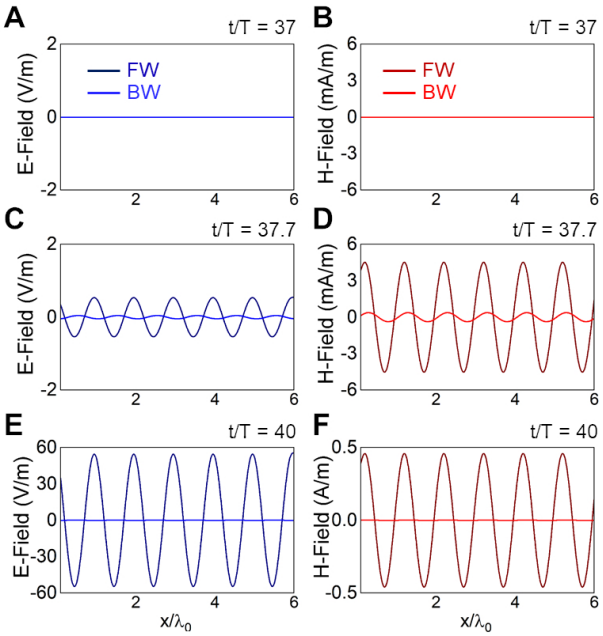


图 S2| 前向波和后向波的解析阶跃函数$\varepsilon_2 < 0$。介电常数从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为 $\varepsilon_2 = -20$ 时，在 $t_1 = 37.1T$ 的不同时间下，电场（第一列）和磁场（第二列）。前向波和后向波分别以深色线和浅色线表示电场（蓝色）和磁场（红色）。

6. 前向波和后向波结果：介电常数方波函数。

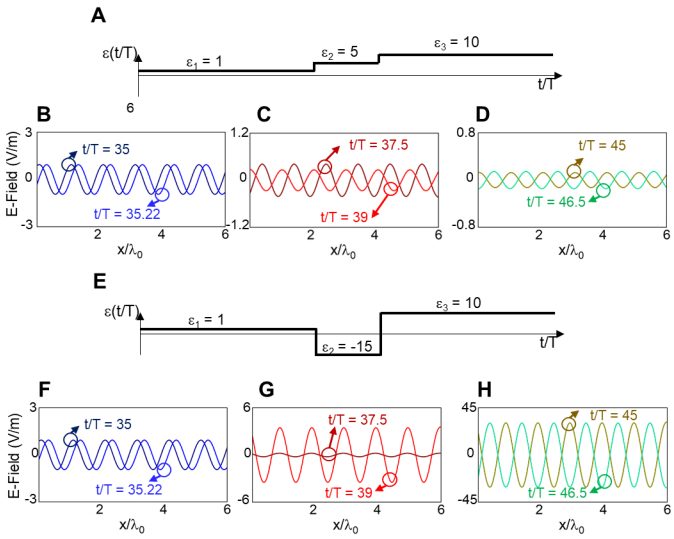


图 S3| 介电常数方波函数的电场分布 ε。a-d 正到正再到正的时变薄层。**b-d** 在 t = 35T（即 t_1, 深蓝色之前）和 t = 35.22T（即 t_1, 浅蓝色之前）**b**、t = 37.5T（即 $t_1 < t < t_2$, 深红色）和 t = 39T（即 $t_1 < t < t_2$, 浅红色）**c**, 以及 t = 45T（即 $t > t_2$, 深黄色）和 t = 46.5T（即 $t > t_2$, 浅绿色）**d**时，电场分布随空间 **(x)** 的变化。**e-h** 正到负再到正的时变薄层。**f-h** 与**b-d**相同，但介电常数对应**e**。

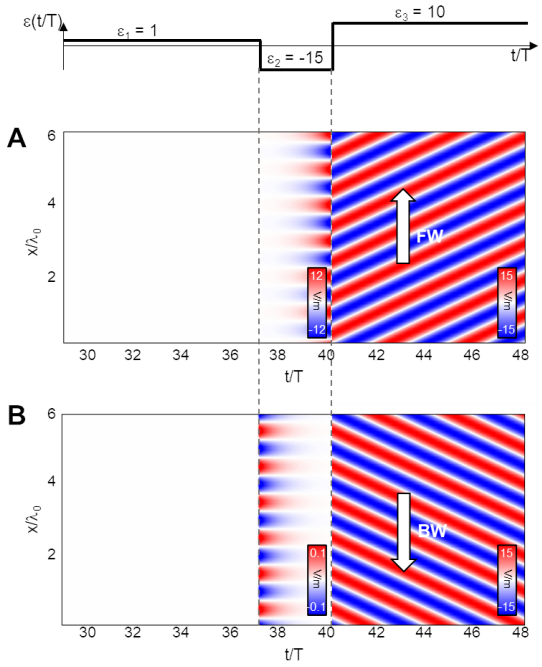


图 S4| 前向波和后向波的方波函数解析解 $\varepsilon_2 < 0$。a、b 前向波和后向波的电场分布分别随空间和时间的变化；其中 ε $\varepsilon_1 = 1$ $\varepsilon_2 =$ 15 $_1 =$ 在 t T 时从 变为负值，随后在 t T 时又变为 。37 $\varepsilon_3 = 10$ $_1 = 40$ ε 随时间变化的 显示在面板 a 上方。

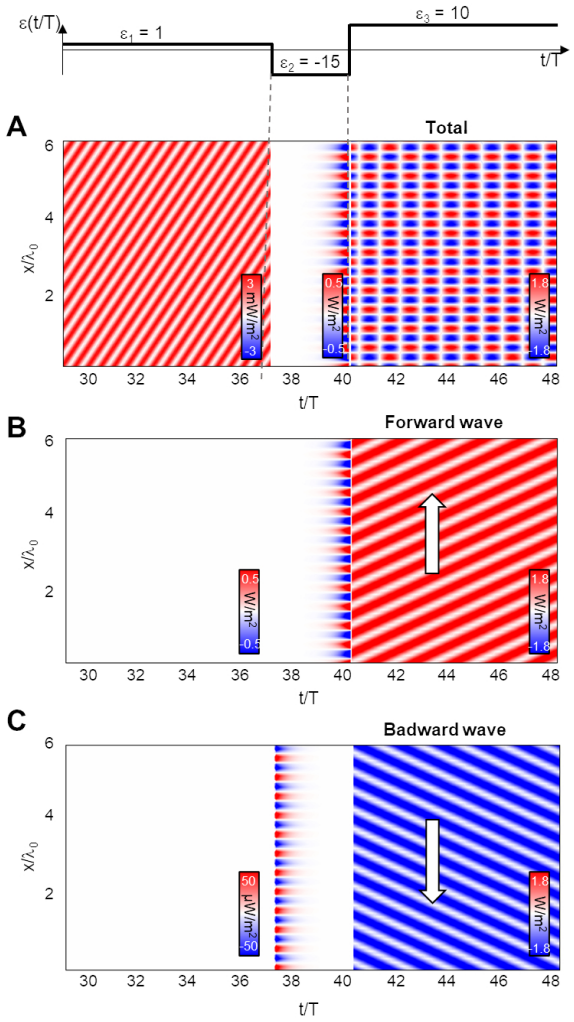


图 S5| 瞬时坡印廷矢量方波函数$\varepsilon_2 < 0$。a、b、c 分别表示在 ε $\varepsilon_1 = 1$ ε_2 于 t T 时从 变为负值、随后于 t T 时又变为 的 = 15 $_1 = 37$ $\varepsilon_3 = 10$ $_2 = 40$ ε 情况下，总波、前向波和后向波的瞬时坡印廷矢量随空间和时间的变化。时间依赖关系显示在面板 a 的上方。

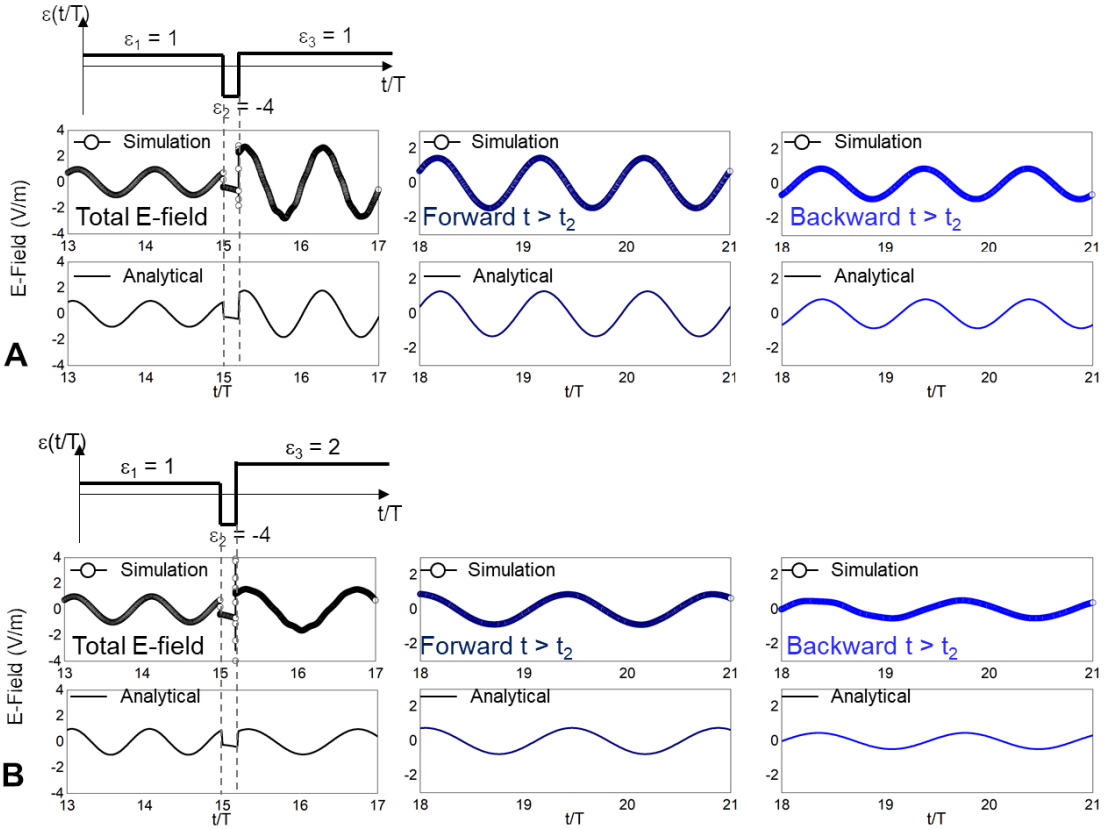


图 S6| 方波函数的解析与数值结果$\varepsilon_2 < 0$。当 ε 从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为：**a,** $\varepsilon_2 = -4$ 并恢复至 $\varepsilon_3 = 1$，**b,** $\varepsilon_2 = -4$ 然后变为 $\varepsilon_3 = 2$时，总电场（左列）、正向分布（中列）和反向分布（右列）的模拟（圆圈）与数值结果（实线）。所有情况下，第一和第二个时间边界分别在 $t_1 = 15T$ 和 $t_2 = 15.2T$ 处引入。每个面板上方显示随时间变化的 ε 。

7. 瞬时坡印廷矢量：$t_2 - t_1$ 的影响。

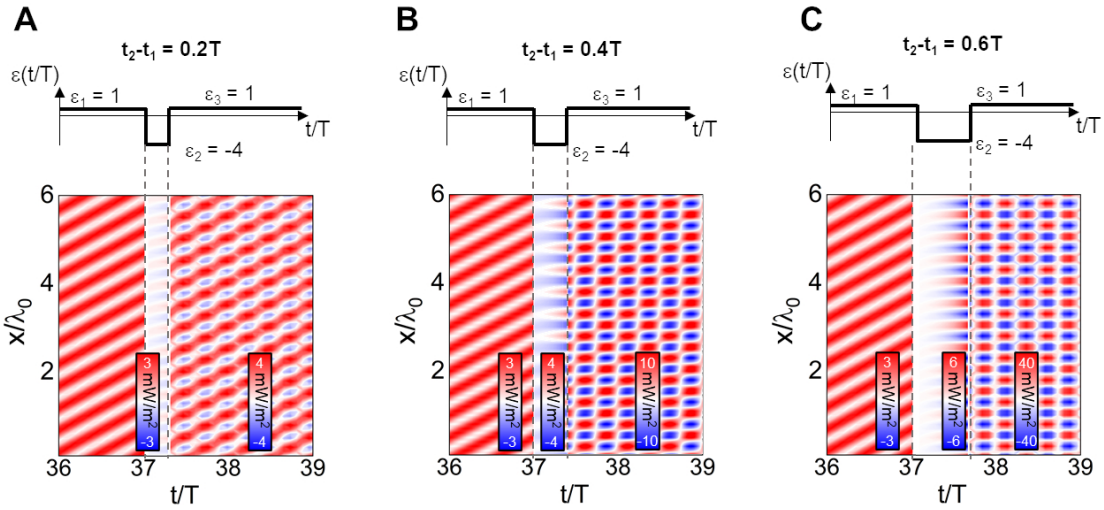


图 S7| 瞬时坡印廷矢量方波函数 $\varepsilon_2 < 0$。 主文稿图 4 所讨论情形下，总场的瞬时坡印廷矢量随空间和时间的变化：**a,** ε 从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为负值 $\varepsilon_2 = -4$（$t_1 = 37T$ 时），随后在 $t_2 = 37.2T$ 时变为 $\varepsilon_3 = 1$。**b,** ε 从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为负值 $\varepsilon_2 = -4$（$t_1 = 37T$ 时），随后在 $t_2 = 37.4T$ 时变为 $\varepsilon_3 = 1$。**c,** ε 从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为负值 $\varepsilon_2 = -4$（$t_1 = 37T$ 时），随后在 $t_2 = 37.6T$ 时变为 $\varepsilon_3 = 1$。每个面板上方均显示随时间变化的 ε。

8. 时间边界 = *0* 之后电场的拉普拉斯变换推导 .

从麦克斯韦方程组出发

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{S.13a}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \tag{S.13b}$$

我们对场量 $E_y(x,t)$、 $D_y(x,t)$、 $H_z(x,t)$ 和 $B_z(x,t)$ 应用拉普拉斯变换，得到

$$\frac{\partial \tilde{E}_y(x,s)}{\partial x} = -[s\tilde{B}_z(x,s) - B_z(x,t=0_-)] \tag{S.14a}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z(x,s)}{\partial x} = -\left[s\tilde{D}_y(x,s) - D_y(x,t=0_-)\right] \tag{S.14b}$$

其中， $E.y(x,s)$、 $\tilde{D}_y(x,s)$、 $\tilde{H}_z(x,s)$ 和 $B.z(x,s)$ 分别是量 $E_y(x,t)$、 $D_y(x,t)$、 $H_z(x,t)$ 和 $B_z(x,t)$ 在 $t \geq 0$ 时的拉普拉斯变换。项 $B_z(x,t=0_-)$ 和 $D_y(x,t=0_-)$ 表示这些量在 $t=0_-$ 时的初始值。在时间边界$t=0$ 处，有 $B_z(x,t=0_+) = B_z(x,t=0_-)$ 和 $D_y(x,t=0_+) = D_y(x,t=0_-)$，从而得到 $H_{2z}(x,t=0_+) = H_{1z}(x,t=0_-)$ 和 $\varepsilon_2 E_{2y}(x,t=0_+) = \varepsilon_1 E_{1y}(x,t=0_-)$。其中， $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 < 0$ 分别是该介质在 $t=0$ 之前和之后的相对介电常数， $E_{1y}(x,t=0_-)$ 和 $E_{2y}(x,t=0_+)$ 分别是 $t=0_-$ 和$t=0_+$ 处的场值。由式 (S.14) 得

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_{2y}(x,s)}{\partial x^2} = -\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_2 s^2 \tilde{E}_{2y}(x,s) + \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_2 s E_{2y}(x,t=0_+) = \mu_0 \frac{\partial H_z(x,t=0_+)}{\partial x} \tag{S.15}$$

假设原始电场和磁场分别表示为 $E_{1y}(x,t) = \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ 和$H_{1y}(x,t) = @\varepsilon_1\varepsilon_0\,\mu_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$，则方程 (S.15) 的解可写为

$$\tilde{E}_{2y}(x,s) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{s\cos(k_1 x) + \omega_1 \sin(k_1 x)}{s^2 + \omega_1^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{S.16}$$

考虑到 $\varepsilon_2 < 0$ 可改写为 $\varepsilon_2 = -|\varepsilon_2|$，我们对式 (S.16) 进行拉普拉斯逆变换，得到

$$E_{2y}(x,t) = -\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1 x)\cosh\left(\omega_1 t\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\right) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1 x)\sinh\left(\omega_1 t\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\right) \tag{S.17}$$

经过简单的数学运算后，可写为

$$\begin{aligned} E_{2y}(x,t) = {} & \frac{1}{2}\left[-\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1 x) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1 x)\right] e^{+\omega_1 t\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}} \\ & + \frac{1}{2}\left[-\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}\cos(k_1 x) + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}\sin(k_1 x)\right] e^{-\omega_1 t\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_2|}}} \end{aligned} \tag{S.18}$$

当 $t_1 = 0$ 时，该表达式与主文中的公式（1a）以及本补充材料文档中的公式 S.7c 相同。

9. 有损非福斯特结构。

在引入损耗之前，我们先仔细考察主文稿中的非色散时变情形，其极化响应为瞬时响应，并由 $P(t) = \varepsilon_0 \varepsilon(t) E(t)$ 参数化（全文均不考虑磁响应）；再考虑从真空出发，为简单起见，转变为某种具有 $\varepsilon(t) < 0$ 的非福斯特介质：显然，在 $\varepsilon(t)$ 发生平滑（C^1 连续但可任意陡峭）的阶跃函数变化时，$\varepsilon(t) = 0$ 所代表的 epsilon 近零（ENZ）条件处会出现奇点。对于所研究的平面波传播，并考虑动量（k）守恒，波动方程可写为 DT\varepsilon$(&)$E$(&)U D&$ $+(kc)^2 E(t) = 0$；该方程可仅用 t 中的简单有限差分格式轻松求解。这样便可对这一奇异转变进行数值观测，如下方 $E(t, x = 0)$ 的图所示，其中时变 epsilon 从 $\varepsilon_1 = 1$ 变为 $\varepsilon_2 = -4$，转变时间为 $T/10^4$。随着时间步长 Δ_t 减小，我们在离散时间域中会更接近 ENZ 条件；因此，根据 D 的连续性，E 会变得越来越大（见图 S8b 的局部放大图，其中黑色虚线表示用 tanh() 函数建模的 $\varepsilon(t)$）。（实际上，如果 Δ_t 粗糙到未能在 $\varepsilon(t)$ 的过渡斜坡上采样任何点，那么所得的 E 在 $t = 0$ 处也会表现为阶跃函数，不会出现尖峰，这与解析解相同。）

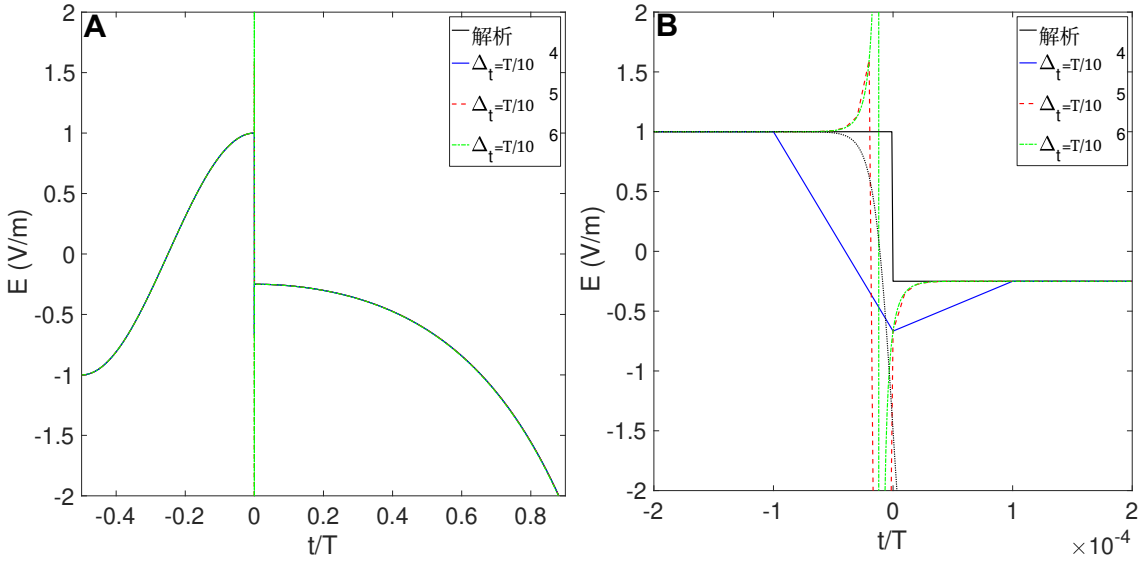


图 S8| 无损情形下电场的时间演化。 **a** 对于从 $\varepsilon_1 = 1$ 到 $\varepsilon_2 = -4$ 的跃迁（跃迁时间为 $T/10^4$），比较在 $z = 0$ 处采用多个时间步长时电场随时间变化的数值结果和解析结果。**b** 放大图 **a**，显示当 $\varepsilon(t) = 0$ 时，$E(t)$ 的发散行为。

同时还给出了理想（不连续）阶跃函数的解析解（黑色实线）以供比较，它直接展示了如何绕过这一问题：采用电路类比（或更严格地说，集总元件传输线），其中介电磁化率 χ 由单位长度串联电容 $C(t) = \varepsilon_0\chi(t)$描述，我们可以将非奇异跃迁看作一个电开关的闭合，该开关将此电容 $C(t)$与 ε_0并联。尽管介电极化（电荷）由电场（电压）驱动，但下文将使用若干由连续波（CW）电流源驱动的时变（开关式）玩具模型电路（即不涉及波传播），以便深入了解实际的波传播问题。（因此，我们将不加区分地用 $C(t)$（单位为 F）表示电路中的电容，用 $C(t)$（单位为 F/m）表示传输线的单位长度电容。）这是基于这样的认识：在后一种情形中，保持跃变处连续的是电流，而非电压 $\varepsilon(t)$：在任何非磁性时变材料中，B 的连续性意味着 H 及其旋度也连续，因此我们不仅有连续的电荷 D，也有连续的电流 $\frac{dD}{dt}$。

在此图中，$t = 0$ 图 S8a 所研究的无色散情形与图 S9a 中的电流驱动电路有许多相似之处；在后者中，我们进一步在平滑变化的电容器串联一个电阻器，以模拟各种寄生损耗。该电阻器的存在限制了时变电容器两端的电压上限 $C(t)$。若首先假设 $C(t)$ 绝热变化，则可舍去 $v_1(t)$ 中的项 $\frac{dC(t)}{dt}$，并写作

$$v_1(t) = \frac{1}{1+\frac{C(t)}{\varepsilon_0}+i\omega RC(t)}\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}i_s(t) \tag{S.19}$$

与 ω 源的振荡频率 $i_s(t)$。在 $C(t) = -\varepsilon_0$（或等价地，$\varepsilon(t) = 0$）的极限下，我们有 $v_1(t) = -$ $ 3(&) Z(Pε")$，它确实仅在 $R \to 0$ 时发散。基于此，我们略去该电路中电流和电压随 $C(t)$ 连续阶跃变化的数值求解 ~~（否则~~这项求解十分简单），回到图 S8 中最初的传播问题。不过现在，我们将在新的极化响应 R W$_P$(&) W& $_P$(&) X(&) $= E(t)$ 中纳入电阻器的作用。在缓慢变化的 $C(t)$ 条件下，并假设为连续波，该响应可改写为 $P(t) =$ X(&) !A$PZX(&)$E(t)$，即 $\varepsilon(t) = 1 +$ X(&)/ε" !A$PZX(&)。对这一响应进行严格的数学处理（适用于 $C(t)$ 的任意变化）要复杂得多（详见 4），但我们仍可写出关于 P 的波动方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(kc)^2\right)\left(R\frac{\partial P(t)}{\partial t}+\frac{P(t)}{C(t)}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} \tag{S.20}$$

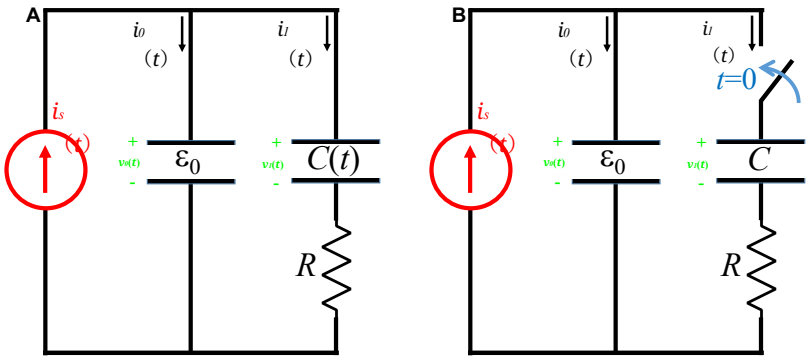


图 S9| 连续波电流驱动电路模型，捕捉了平面波时间界面的部分物理特性。a连续且**b**突变阶跃函数过渡$\varepsilon(t)$。

在图S10中，我们从图S8所示的相同介电函数时间变化出发，但纳入了电阻器若干取值的影响 $R=(-1,-0.1,-0.01)$。这些取值表征了色散介电函数从 $\varepsilon(\omega)$ 跃变至 $\varepsilon(\omega)\approx(-3.9655-0.4141\mathrm{i},-3.9997-0.0417\mathrm{i},-4.0000-0.0042\mathrm{i})$ 时的有效跳变；其中 ω 为初始频率。重要的是，我们强调 $R\leq 0$ 初始时的情况。为理解这一点，让我们回到电路模型：一旦 $\varepsilon(t)\leq 1$，$C(t)\leq 0$，因此我们需要负电阻来维持稳定性。然而，稳定性条件在 $|C(t)|=\varepsilon_0$ 处遇到分支切割，这意味着为避免不稳定性，当 $C(t)$ 穿过 $-\varepsilon_0$ 时，我们需要将电阻器的符号由负变正（关于此问题的有趣讨论见 [5]）。在图S10的传播问题中，改变电阻器的符号实际上是在避免两种可能的不稳定性之一，而另一种恰恰就是我们所寻求的放大机制（详情将在下文介绍）。这些模拟结果表明，当 $C(t)=-\varepsilon_0$ 时，E 的界限会随 $|R|$ 减小；因此，Δ_t 的取值已无关紧要，只要它足够小，能够跟踪极化响应在过渡期间的变化速度即可（本例中我们取 $\Delta_t=T/10^6$ ）。

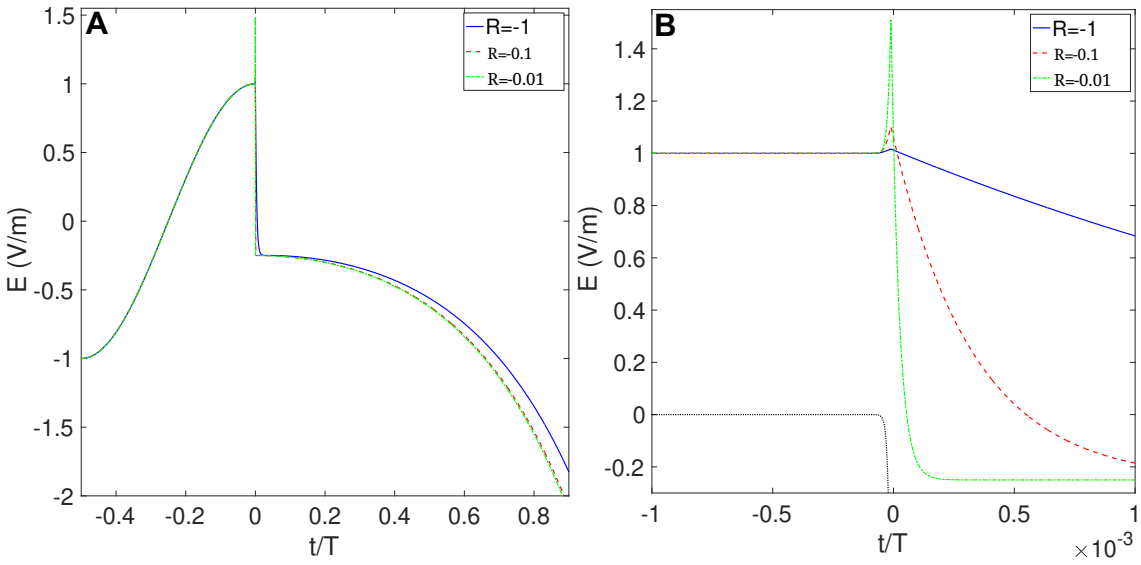


图 S10| 图 S9a 中有损情形下电场的时间演化。 **a** 数值求解了当 $C(t)$ 从 0 变为 $-5\varepsilon_0$ 时，$z=0$ 处电场随时间变化的情况，并考虑了 R 的若干取值（在 $R=0$ 的极限下等效于 $\varepsilon_2=-4$）。 **b** 对**a**的放大视图，展示了当 $C(t)=-\varepsilon_0$ 时 $E(t)$ 的有界行为，以及较大的 R 也会导致响应变慢（黑色虚线表示 $C(t)$ 从 0 跃迁至 $-5\varepsilon_0$）。

9.1 稳定性研究。

在阐明 $C(t)$ 连续变化时所涉及的物理机制后，以下我们将采用电开关对不连续的阶跃函数跃迁进行建模，如图 S9b 所示。我们借助拉普拉斯变换 $\mathcal{L}$ 分析该玩具模型电路在 $t>0$ 下的瞬态响应，并针对谐波源 $I\mathrm{h}_s(s)=\frac{1}{s-i\omega}$写出：

$$\tilde{V}_0(s)=\frac{1+sRC}{s(\varepsilon_0+C+sRC\varepsilon_0)}\left(\tilde{I}_s(s)+\varepsilon_0 v_0^-\right) \tag{S.21a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}:\ v_0(t\geq 0)=-\frac{1+i\tau\omega}{\kappa\omega}e^{i\omega t}+\frac{C}{C+\varepsilon_0}\frac{i\tau+\kappa v_0^-}{\kappa}e^{-\frac{t}{\frac{C}{C+\varepsilon_0}\tau}}+v_{DC} \tag{S.21b}$$

其中 $\kappa=-i(C+\varepsilon_0)+\varepsilon_0\tau\omega$、 $\tau=RC$ 为通常的时间常数，而 $v_0^-\equiv v_0(t=0^-)$。请注意，在我们的电路与传输线等效关系中，$v_0(t)$ 表示电场 E。现在，除与讨论无关的直流分量外，我们有一个受驱动的振荡项 $e^{i\omega t}$，以及一个时间常数为 $\frac{C}{C+\varepsilon_0}\tau$ 的瞬态响应。对于非福斯特电容器，假设 $C<-\varepsilon_0$，我们需要 $R\geq 0$，以便将此极点置于 s 平面的左半部，并使系统达到稳定工作点。

考虑传播时，情况会更为微妙。根据动量守恒，我们通过求解 $\omega=\omega_n@1+\frac{C/\varepsilon_0}{1+i\omega nRC}$，得到 $t>0$、 ω_n 的新频率。共有三个解

该超越方程：

$$\omega_n = \frac{1}{3\tau}\left(i(C+1) + 2^{1/3}e^{i(2n+1)\frac{\pi}{3}}\frac{K_1}{K_2} - 2^{-1/3}e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{3}}K_2\right), \quad n = 0,1,2, \qquad \text{(S.22)}$$

其中定义

$$K_0 = -2i\left(\frac{C}{\varepsilon_0}+1\right)^3 + 9i\left(\frac{C}{\varepsilon_0}-2\right)(\tau\omega)^2,\ K_1 = \left(\frac{C}{\varepsilon_0}+1\right)^2 - 3(\tau\omega)^2,\ K_2 = \left(K_0 + \sqrt{4K_1^3 + K_0^2}\right)^{1/3} \qquad \text{(S.23)}$$

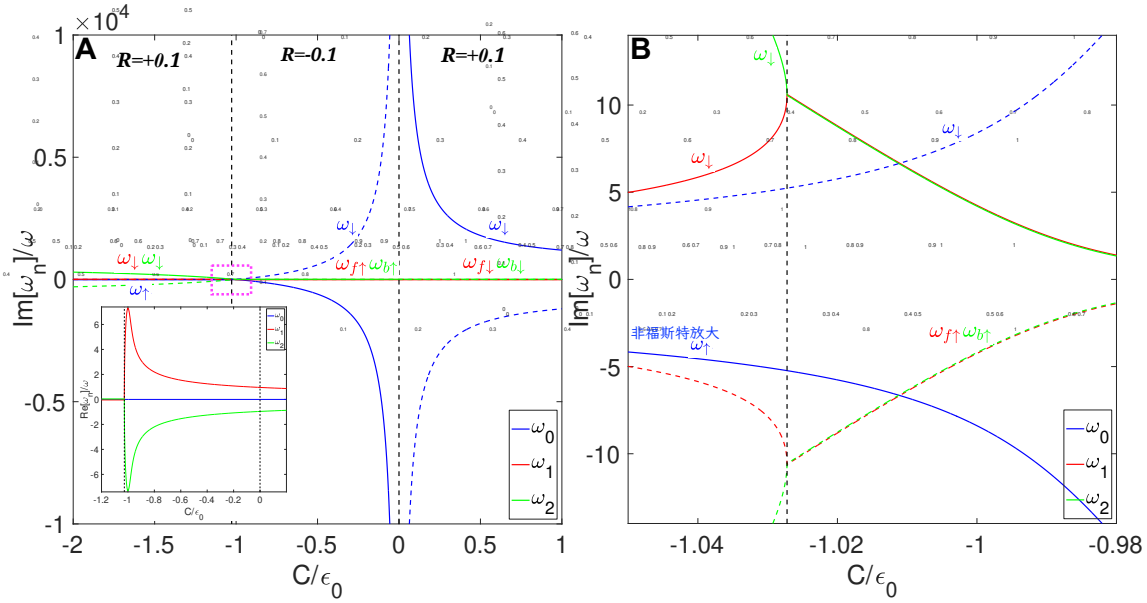


图 S11| 公式 S.22 得出的本征频率。相对于初始 ω归一化后，随 $\frac{C}{\epsilon_0}$的变化，其中电阻器固定为 $\pm 0.1(\Omega \cdot \mathrm{m})$。**a** 虚部（插图显示实部）。**b** **a**在 $\frac{C}{\varepsilon_0} \to -1$ 附近的放大图（粉色虚线矩形）。尽管在此刻度下无法分辨，但在最右侧区域，$\omega_{f\downarrow}$ 和$\omega_{b\downarrow}$ 的虚部随 $C > 0$增大。

若固定 $R = \pm 0.1(\Omega \cdot \mathrm{m})$，并将这些解频率绘制为 C 的函数（图S11a 中的实线和虚线分别对应 $R = +0.1$ 和 $R = -0.1$），可以观察到，正如预期的那样，当 C >0 且 $R > 0$ （实线）时，三个解的轨迹位于复 ω 平面的上半部，即呈现时间衰减：$\omega_{\downarrow}$ 表示纯虚数（过阻尼）本征频率，不发生传播；而欠阻尼的 $\omega_{f\downarrow}$ 和 $\omega_{b\downarrow}$ 则分别向前和向后传播（这些频率的实部显示在图S11a 的插图中）。当 C 降至负值时，为了使纯虚数解保持稳定，我们需要使用负电阻（虚线）；然而，此时传播模变得不稳定，但这种不稳定性的幅度可控，因此可以精确地加以利用，实现放大。若继续增大 C 的负值幅度（t），当 K_2 中的项 $4K_1^3 + K_0^2$ 穿过零时，会出现另一处分支切割；在本例中，这发生在 $C\,\varepsilon_0 \approx -1.0272$ 处（与电路模型不同，$C\,\varepsilon_0 \to -1$ 仅在 $R \to 0$ 的极限情况下出现）。因此，一旦我们

越过这一点（放大视图见图S11b），就需要再次使用 $R>0$ （实线）来舍弃问题极点（最左侧区域中的绿色虚线，以黑色虚线为界）。因此，我们得到一个衰减极快的模（绿色），以及一对共轭的衰减模（红色）和增长模（蓝色）；这三个模均为纯虚数（不发生传播）。

在图S12a中，我们固定$C\ \varepsilon_0=-5$ ，并展示相同的参数曲线随 R 的变化情况，这些曲线揭示了系统在 $R=0$ 处稳定性行为的不连续性。如上所述，由于该 C 值满足 $C<-\varepsilon_0$，三个频率均为纯虚数，相应的介电常数 $\varepsilon(\omega_n)$ 均为纯实数且为负（图S12b）；其中，快速衰减模（绿色曲线）非常接近完美的 ENZ 条件。

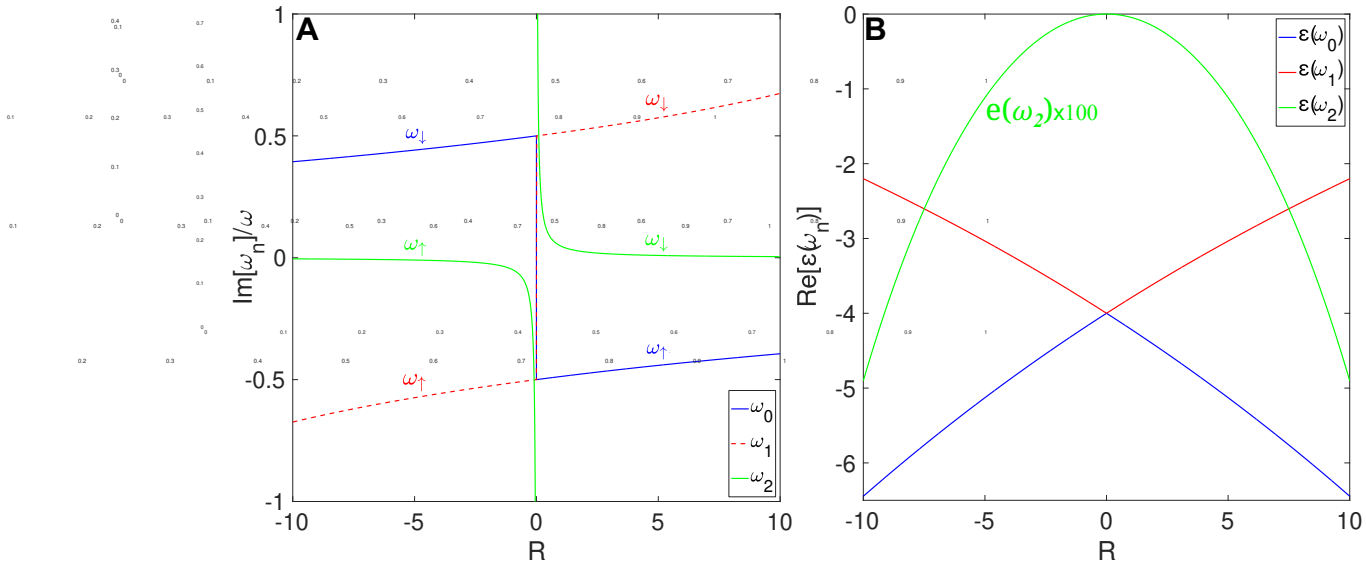


图 S12| 公式 S.22 的本征频率。a 虚部（相对于初始 ω 归一化）随 R 的变化，其中$C\ \varepsilon_0=-5$。**b** 这些频率下介电函数的相应取值（$\varepsilon(\omega_2)\approx 0$，因此缩放了 100 倍）。

9.2 t=t_1 时散射波的振幅。

而在无色散介电函数的时变界面中，所需的边界条件（BCs）是 D 和 B （若 $\mu=1$，则为 H ）连续——E 和 P 则不连续——；如今，如前所示，我们有三个散射波，因此需要额外的边界条件。从图 S9b 可以直接看出，当我们在 $t_1=0$处闭合开关时，由于存在电阻器，电荷不会瞬时从 ε_0 转移至 C ，因此 $v_1^+=v_1^-=0$。电阻器两端的电压（$v_R^+=Ri_1^+$）等于 $v_0^+=v_0^-$：将这一行为转化为波问题， E 和 P 现在是连续的，阶跃

不连续性出现在 dP。$dt = \frac{E^-}{R}$中。按照 6中的方法，若我们写成

$$E(t \le 0) = e^{-ikz}e^{i\omega t}, \qquad E(t \ge 0) = e^{-ikz}\sum_{n=0}^{2} a_n e^{i\omega_n t}, \tag{S.24}$$

其中 a_n 是该叠加中的未知复系数，由此得到矩阵方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon(\omega_0) & \varepsilon(\omega_1) & \varepsilon(\omega_2) \\ \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} & \sqrt{\varepsilon(\omega_1)} & \sqrt{\varepsilon(\omega_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^- \\ \sqrt{\varepsilon^-} \end{bmatrix}, \tag{S.25}$$

其中，第1、2、3行分别表示在 $t = 0$ 处针对 E 、 D 和 H 的边界条件。还请注意，图S9b所示的空气过渡情形将该系统特化为 $\varepsilon^- = 1$。图S13a展示了当按图S11的方式扫描 C ，且 $R = \pm 0$ 时的 $|a_n|$。1（这些系数的大小与 R 的符号无关），图中显示：(i) 对于 $C = 0$ ，只有 $\omega_{f\downarrow}$ （在此极限情形下为 ω_f ）仍然存在（$a_n = 1$），这与并联开路相符；(ii) 随着我们接近最左侧的分支切割，以及更重要的是随着我们减小 $|R|$ ，a_1 和 a_2 的大小趋于无穷，而该点趋向 $C\ \varepsilon_0 = -1$ 时，由 R 限定的 a_0 也趋于无穷。这不足为奇，因为在无色散情形下，$E^+ = \frac{}{D\varepsilon_{EN}}\ z$ 将趋于无穷。在图S13b中，我们重复了图S10b中的时间界面，但采用开关或理想（非平滑）阶跃函数：结果与之前基本相同，只是 C（t） $= 0$ 产生的尖峰消失了。正如预期，在极限 $R \to 0$ 下，我们恢复无色散解（黑色虚线）。

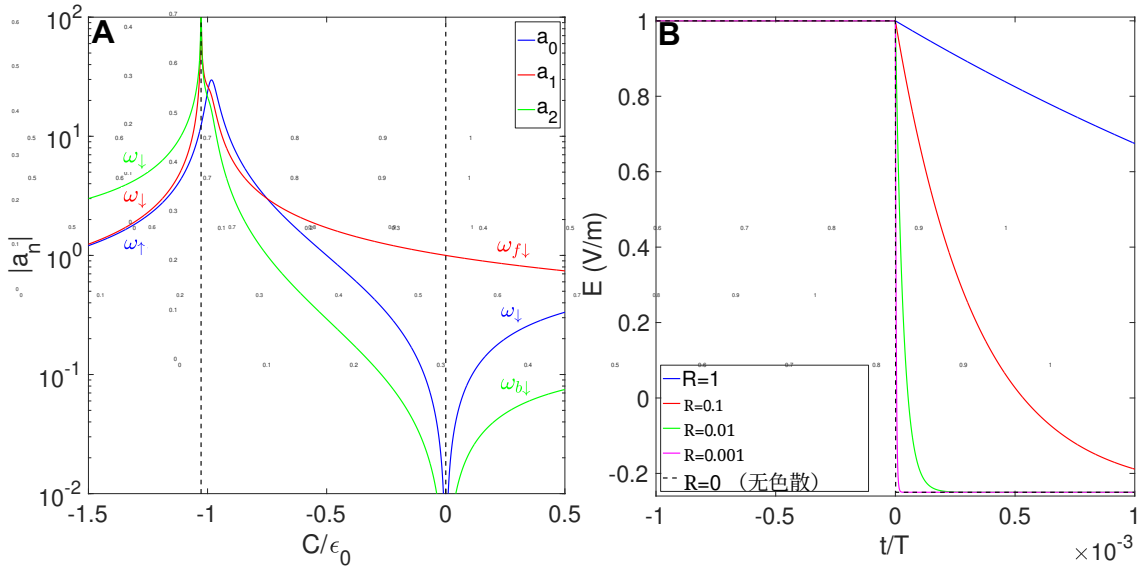


图 S13| 图 S2b 所示有损情形下的散射系数和电场的时间演化。a 电阻器固定为 +0 时，时间散射波的系数幅值随. $\frac{C}{\varepsilon_0}$的变化。1(Ω·m)。 **b** 当图 S9b 中的开关在 $t_1 = 0$时闭合，且$C = -5\varepsilon_0$ 取R 的若干数值时，$z = 0$ 处电场随时间变化的解析解和数值解（完全重合）（类似于图 S10b）。

9.3 在 $t=t_2$ 时“解冻”前向波和后向波。

在无色散情形下，超结构一旦进入非福斯特放大区间（例如，在我们从$\varepsilon^- = 1$ (空气)过渡到$\varepsilon^+ = -4$之后），我们便可以逆转介电函数的时间变化，并恢复出两个放大的（正向和反向传播的）波，如主文稿所示。这个过程可以用图S9a中的时变电路建模，并在极限$R \to 0$下呈现无色散特性；不过，在实际实验中使用开关或许更为现实（例如，参见正文图5中提出的加载平行板波导）。在这种情况下，显然，断开图S9b中的开关并不能重现反向过渡。即使没有电阻器，根据D 的连续性，我们也需要将电容器C 中的全部电荷（极化P）瞬时转移回ε_0：断开开关会使电容器保持带电状态，尽管它已与电路断开，因此无法响应驱动电场。一种可能的替代方案是图S14a所示的电路：假设非福斯特电容器C 自t_1 以来一直在充电（在我们的示例中为$t_1 = 0$ ），我们可以设想在某一时刻$t_2 > t_1$接入一个大小相同、符号相反的新电容器，从而恰好抵消$C < 0$ 的作用。再次利用拉普拉斯变换，瞬态电压变为

$$\tilde{V}_l(s) = \frac{\tilde{I}_s(s)+\varepsilon_0 v_0^- +(1+lsR\varepsilon_0)Cv_1^-}{s\varepsilon_0}, \quad l = 0,1 \tag{S.26a}$$

$$\mathcal{LT}^{-1}\text{:}\ \ v_l(t' \geq 0) = \mathrm{i}\frac{1-e^{i\omega t'}}{\varepsilon_0\omega} + l\mathrm{RC}v_1^-\delta(t') + \frac{\epsilon_0 v_0^- + Cv_1^-}{\varepsilon_0}, \tag{S.26b}$$

有 $t' = t - t_2$，并且其中的项 $\frac{\varepsilon_0 v_0^- + C\ \ v^-_{10}}{\varepsilon}$恰好实现了我们想要的效果：将电荷有效地从 C 转移到 ε_0。然而，我们也注意到（除非 $R = 0$），v_1中存在一个狄拉克 δ项，这与 $+C$ 和 $-C$ 中相互抵消的瞬时电荷尖峰有关（因此，它们的电流将包含 δ 和 $d\delta/dt$中的项）。在实际应用中，可以通过在新接入的电容器上添加一个小电阻（出于与上述类似的原因，该电阻为负值）来轻松解决这个问题：在图 S14b 中，我们回顾了案例研究示例，并在 $t_2 = T$处将介质切换回真空，同时考察了这个附加电阻的几个取值。数值解与解析解（为简洁起见，此处省略，但可按照与方程 S.22、25 类似的方式求得）完全重合，并显示出：(i) $P(t > t_2)$迅速衰减至零（附加电阻的绝对值越小，衰减越快）；(ii) 在极限情况下（即没有附加电阻），该转变趋于 $P_{\pm C}$中的 $\delta($ $t - t_2)$ 项。

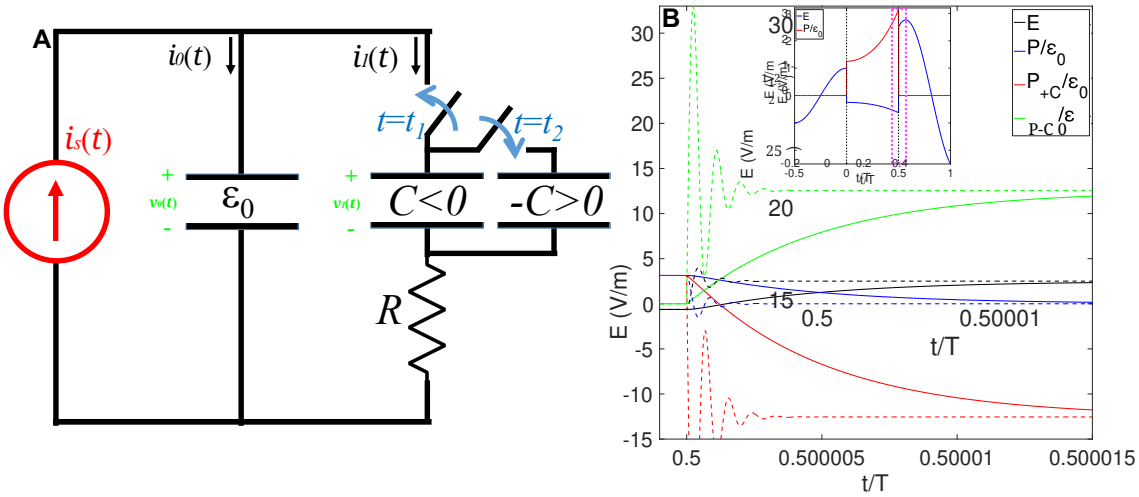


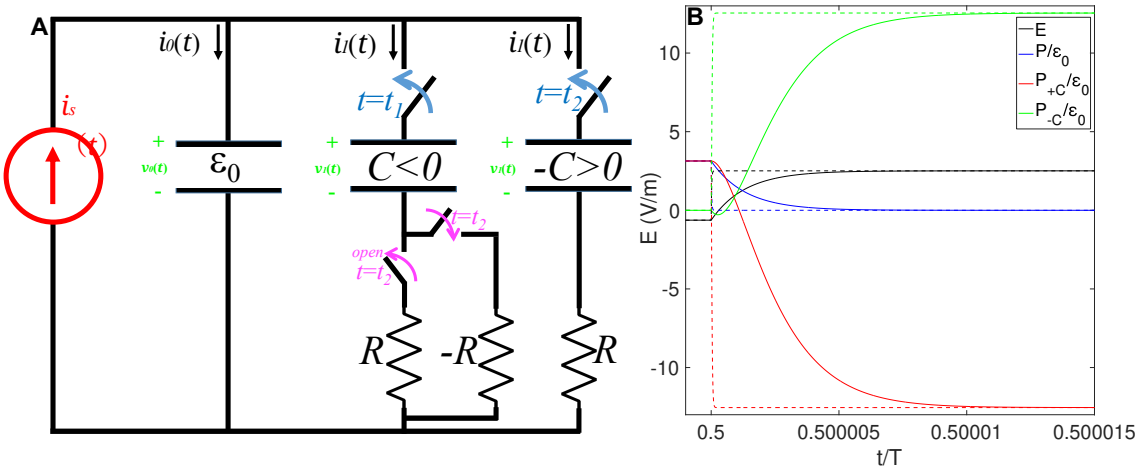
图 S14| 介电函数在 t_1 和 t_2处两次跃迁的电路玩具模型。 **a** 开关电路示意图。**b** 使用该电路（传输线）模型描述时变介质的极化响应时，跃迁发生在 $t = t_2$附近的电场和电容器中极化随时间变化的详细情况，其中 $R = 10^{-4}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$。实线（虚线）对应额外连接了一个阻值为 -10^{-4} （-10^{-6}）$\Omega\cdot\mathrm{m}$ 的负电阻。插图显示了包含两个时间界面的完整模拟（该放大区域围绕发生在 $t = t_2$ 处的跃迁，位于粉色虚线矩形内）。

此外，我们还可以设想图 S15a 所示的另一种配置，即在 $t = t_2$处接入整个 RC支路。暂且忽略图中以粉色标出的开关，并假设新的 RC支路具有 $-C$ 和 $-R$。与图 S14a 类似，我们有

$$\tilde{V}_0(s) = \frac{(1+sRC)\tilde{I}_s(s)+\varepsilon_0 v_0^- +(1+sR\varepsilon_0)Cv_1^-}{s\epsilon_0(1+sRC)} \tag{S.27a}$$

$$\mathcal{LT}^{-1}\colon\ v_0(t'\geq 0) = \mathrm{i}\frac{1-e^{i\omega t'}}{\varepsilon_0\omega} + \frac{C}{\varepsilon_0}v_1^- e^{-\frac{t'}{\tau}} + \frac{\varepsilon_0 v_0^- + Cv_1^-}{\varepsilon_0}. \tag{S.27b}$$

与公式 S.26 中一样，我们实现了从 C 到 ε_0的准瞬时电荷转移，但没有涉及电荷（或电流）尖峰。此外，现在还出现了一个纯实极点形式的附加项（$e^{-t'/\tau}$），因此我们需要 $RC > 0$ 来确保稳定性。这意味着我们必须改变非福斯特支路中电阻器的符号；在 $t = t_2$ 之后它变为负值（因此图 S15a 中标记为粉色的开关），相应地，新 RC 支路中的电阻器必须为正值。图 S 15b 中，我们用这一新设置重复了图 S14b 的数值实验，得到的结果非常相似，区别仅在于所涉及的瞬态模式性质不同。



图S15| 图S14中介电函数两次跃迁的替代电路模型。 **a**开关电路示意图。 **b**与图S14b相同，其中 $R = 10^{-4}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$（实线）和 $R = 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$（虚线）。

*10. Drude*无源介质中介电常数快速时间变化（从正值变为负值）的不可能性。

考虑一种具有 Drude色散的均匀无限无耗无源介质

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{S.28}$$

若有一个角频率为 ω_1 、满足 $\omega_1 > \omega_{p1}$ 的单色波在这种介质中传播，则该介质对这一信号的介电常数为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_1^2}\right) \tag{S.29}$$

这是一个正值。现在假设我们希望通过将等离子体频率提高到高于 ω_1 的 ω_{p2} ，使该介质的介电常数随时间快速地从正值变为负值。然而，当我们改变等离子体频率时，由于波动量应保持守恒，信号频率确实会发生变化，以满足条件

$$\omega_1 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = \omega_2 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_2} \tag{S.30}$$

这导致

$$\omega_1^2 \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_1^2}\right) = \omega_2^2 \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega_2^2}\right) \tag{S.31}$$

这意味着

$$\omega_2^2 = \omega_{p2}^2 + \omega_1^2 - \omega_{p1}^2 > \omega_{p2}^2 \tag{S.32}$$

这会导致 $\varepsilon_2 > 0$。因此，不可能在此类无源介质中实现介电常数的这种时间变化。因此，我们需要利用非福斯特结构来强制并保持$\varepsilon_2 < 0$

11. 补充视频索引

补充视频 1：介电常数从正到正再到正的变化。补充视频 2：介电常数从正到负再到正的变化。

12. 参考文献

1. Morgenthaler, F. 电磁波的速度调制。*IEEE Trans. Microw. TheoryTech.* **6**, 167–172 (1958). 2. Fante, R. 电磁波向时变介质中的传输。*IEEE Trans. AntennasPropag.* **19**, 417–424 (1971). 3. Xiao, Y., Maywar, D. N. & Agrawal, G. P. 电磁波在时间边界处的反射与透射。*Opt. Lett.* **39**, 577 (2014). 4. Solís, D. M. & Engheta, N. 线性时变介质中极化响应的泛函分析：对克拉默斯-克罗尼希关系的推广。*Phys. Rev. B* **103**, 144303 (2021). 5. Ugarte-Munoz, E., Hrabar, S., Segovia-Vargas, D. & Kiricenko, A. 用于有源超材料和天线的非福斯特电抗元件的稳定性。*IEEE Trans. Antennas Propag.***60**, 3490–3494 (2012). 6. Solís, D. M., Kastner, R. & Engheta, N. 色散存在时的时变材料：具有时间不连续性的洛伦兹介质中的平面波传播。*Photonics Res.* **9**, 1842 (2021).