arXiv:2304.03878v1 [math.FA] 8 Apr 2023

巴拿赫空间中的离散对数 Sobolev 不等式

达里奥·科尔德罗-埃劳斯金和亚历山德罗斯·埃斯凯纳齐斯

巴黎索邦大学于西厄数学研究所，法国巴黎 *75252*

Abstract. 设 $\mathcal{C}_n = \{-1,1\}^n$ 为赋有均匀概率测度 σ_n的离散超立方体。我们证明，若 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是一个有限余型巴拿赫空间，且 $p \in [1,\infty)$，那么每个函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 都满足与维数无关的向量值 L_p 对数 Sobolev 不等式

$$\|f - \mathbb{E}f\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant \mathsf{K}_p(E) \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \, \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p}.$$

有限余型这一假设对于结论成立是必要的。该估计是 Ledoux（1988）在高斯空间中一项结果的超立方体对应版本，也是 Talagrand（1994）一条深刻不等式的最优向量值版本。作为应用，我们利用这类向量值 L_p 对数 Sobolev 不等式，为汉明立方体到具有给定拉德马赫型的巴拿赫空间的非线性商映射的双 Lipschitz 畸变导出新的下界。

1. Introduction

令 $\mathcal{C}_n$ 为配备均匀概率测度 σ_n 的汉明立方体 $\{-1,1\}^n$，并令 $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为严格递增的凸函数，且满足 $\psi(0) = 0$。若 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是赋范空间，我们将取值于 E 的函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 的 ψ-Orlicz 范数记为

$$\|f\|_{L_\psi(E)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\left\{ \gamma > 0 : \int_{\mathcal{C}_n} \psi\big(\|f(x)\|_E/\gamma\big) \, \mathrm{d}\sigma_n(x) \leqslant 1 \right\}. \tag{1}$$

显然，若 $\psi(t) = t^p$，则 $L_\psi(E)$ 范数退化为向量值的 $L_p(E)$ 范数。按照标准记法，若 $\psi(t) = t^p \log^\alpha(e + t^p)$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立，我们将 $L_\psi(E)$ 记为 $L_p(\log L)^\alpha(E)$。此外，我们将 $\mathbb{E}f$ 记作关于 σ_n 的期望 f；当 $E = \mathbb{C}$ 时，简写$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(\mathbb{C})}$为$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha}$。若 $i \in \{1,\dots,n\}$，则 f的第 i 阶偏导数定义为

$$\forall\, x \in \mathcal{C}_n, \qquad \partial_i f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{f(x) - f(x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_n)}{2}. \tag{2}$$

当 $E = \mathbb{C}$ 时，我们将函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{C}$ 的梯度的 L_p 范数记为

$$\|\nabla f\|_{L_p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big(\sum_{i=1}^n |\partial_i f(x)|^2 \Big)^{p/2} \, \mathrm{d}\sigma_n(x) \right)^{1/p}. \tag{3}$$

受 Margulis 图连通性定理的一个定量版本启发，[30], Talagrand[41] 证明了一条重要的函数不等式：对于每个 $p \in [1,\infty)$，都存在 $\mathsf{C}_p \in (0,\infty)$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，每个函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{C}$ 都满足

$$\|f - \mathbb{E}f\|_{L_p(\log L)^{p/2}} \leqslant \mathsf{C}_p \|\nabla f\|_{L_p}. \tag{4}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：42C10；次要分类：30L15、46B07、60G46。*Key words and phrases.* 汉明立方体，对数 Sobolev 不等式，拉德马赫型，双 Lipschitz 嵌入。*E-mail addresses:* dario.cordero@imj-prg.fr，{alexandros.eskenazis@imj-prg.fr，ae466@cam.ac.uk}。

当 $p=2$ 时，这个估计等价于离散超立方体上的通常对数 Sobolev 不等式，二者只差隐含常数的取值；该常数可由 Bonami 和 Gross 的经典研究推出（另见第 4.3 节，其中将此不等式与更经典的熵表述进行比较）。值得指出的是，$L_p(\log L)^{p/2}$ 是能够保证某种类似于 (4) 的不等式成立的最优 Orlicz 空间。作为对数 Sobolev 不等式 (4) 的直接推论，Talagrand 还首次证明了超立方体上的无维数依赖 Poincar´e 不等式；根据该不等式，每个 $f\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{C}$ 都满足

$$\|f-\mathbb{E}f\|_{L_p} \leqslant \mathsf{C}_p \|\nabla f\|_{L_p}. \tag{5}$$

自 Talagrand 最初的证明以来，(5) 的改进与推广一直是离散分析领域的核心研究课题（例如参见相关著作 [5, 6, 36, 20, 21, 16, 22, 13, 10]）。

在一篇近期引人注目的文章中，Ivanisvili、van Handel 和 Volberg [22], 在对目标空间作出最优假设的条件下，得到了 (5) 的一个向量值推广。在 [22, 定理 1.5], 中，他们证明，若巴拿赫空间 E 具有有限余型（参见 [28, 第 9] 章），那么对任意 $p\in[1,\infty)$，存在常数 $\mathsf{C}_p(E)$，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 都满足

$$\|f-\mathbb{E}f\|_{L_p} \leqslant \mathsf{C}_p(E) \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \, \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p}. \tag{6}$$

注意，这个不等式确实推广了 (5)，因为当 $E=\mathbb{C}$ 时，根据 Khintchine 不等式 [24]，(6) 的右端与 $\|\nabla f\|_{L_p}$ 等价，且等价常数仅依赖于 p。关于形如 (6) 的向量值不等式，Pisier 的经典研究 [37]，最早探讨了这一问题；他证明，对于任意目标巴拿赫空间 E，将 $\mathsf{C}_p(E)$ 替换为 $\log n$ 的某个常数倍后，(6) 仍然成立。在 [41, 第 6], 节中，Talagrand 构造了一个巴拿赫空间，使得对数因子无法去除。因此，根据 Maurey–Pisier 定理 [32]，有限余型假设对于维数无关不等式 (6) 的成立是必要的。

与 Poincar´e 不等式 (5) 不同，后者在巴拿赫空间分析的背景下已得到广泛研究，而 Talagrand 对数 Sobolev 不等式 (4) 的向量值版本却一直难以捉摸（即使是最著名的特殊情形 $p=2$）。本文的主要目的是通过证明 (4) 的一个最优 向量值版本，将 Talagrand 的工作 [41]与 Ivanisvili、van Handel 和 Volberg 的工作[22] 统一起来。主要结果如下。

定理 1. 设$(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个具有有限余型的巴拿赫空间，且 $p\in[1,\infty)$。存在常数 $\mathsf{K}_p(E)\in(0,\infty)$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数 $f\colon \mathcal{C}_n\to E$ 均满足

$$\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant \mathsf{K}_p(E) \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \, \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p}. \tag{7}$$

事实上，我们的证明给出了任意巴拿赫空间中一个更强的无维数依赖不等式（见注 7），其思路与 [22, 定理 1.4] 一致。这使我们能够导出经典 Pisier 不等式的以下改进 [37, 引理 7.3]，该结果或许具有独立意义。

推论 2. 对于每个 $p\in[1,\infty)$，都存在 $\mathsf{K}_p\in(0,\ \infty)$，使得以下结论对任意巴拿赫空间 $(E,\|\cdot\|_E)$成立。对于任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数 $f\colon \mathcal{C}_n\to E$ 均满足

$$\begin{aligned} \big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant \mathsf{K}_p &\left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \, \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p} \\ &+ 2(\log n+1) \int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_1(E)} \, \mathrm{d}\sigma_n(\delta). \end{aligned} \tag{8}$$

值得强调的是，(8) 是对 Pisier 不等式的双重改进。除了它使我们能够为函数 $f-\mathbb{E}f$的 L_p $(\log L)^{p/2}$ Orlicz 范数推导出上界，而不是通常的 L_p 范数之外，维数因子 $\log n$ 还乘以 f 的梯度的向量值 L_1范数，而非 [37]中的向量值 L_p 范数。

1.1. 超收缩半群的 Poincar´e 不等式的自我改进。 正如我们将在第 2 节中详细解释的，证明定理 1 时遇到的主要难点，源于不等式 (7) 右侧出现了向量值梯度。相比之下，我们可以通过简单得多的推理证明：对于向量值函数，只要额外的标量值不等式成立，度量 Poincar´e 不等式（即右侧仅取决于函数值之间距离的不等式）就能提升为度量型对数 Sobolev 不等式。我们将这一推论概括如下：

$$\textit{scalar log-Sobolev + vector Poincaré} \qquad \Longrightarrow \qquad \textit{vector log-Sobolev}$$

并将在下文的命题 9 中将其形式化。目前，我们先指出它的一个推论：这是第一个针对由换位生成的对称群 $\mathcal{S}_n$ 、作用对象为 2 型鞅空间的向量值对数 Sobolev 不等式（所有相关定义见第 4 节）。

定理 3。 设 $\mathcal{S}_n$ 为具有 n 个元素的对称群，配备均匀概率测度 ν_n，且 $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ 的生成集由所有对换组成。若 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个鞅型为 2 的巴拿赫空间，则存在常数 $\mathsf{M}(E) \in (0,\infty)$，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数 $f:\mathcal{S}_n\to E$ 都满足

$$\left\|f-\mathbb{E}f\right\|^2_{L_2(\log L)(E)} \leqslant \frac{\mathsf{M}(E)\log n}{n-1}\sum_{\tau\in\mathcal{T}_n}\int_{\mathcal{S}_n}\left\|f(\pi)-f(\tau\circ\pi)\right\|^2_E \,\mathrm{d}\nu_n(\pi). \tag{9}$$

此推论改进了同一情形下相应的 Poincar´e 不等式；该不等式可由 Khot 和 Naor 的工作 [25,Section 6] 推得，但还差一个（必要的）对数因子。

回顾一下，若 (Ω,μ) 是一个测度空间，则非负函数 $h:\Omega\to\mathbb{R}_+$ 的熵为

$$\mathrm{Ent}(h) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_\Omega h\log h\,\mathrm{d}\mu - \left(\int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu\right)\log\left(\int_\Omega h\,\mathrm{d}\mu\right). \tag{10}$$

类似于 (9) 的对数 Sobolev 不等式通常用熵而非 Orlicz 范数来表述，但可以通过以下初等估计看出，这两种表述是等价的

$$\frac{1}{2}\max\left\{\|f\|^2_{L_2(E)},\mathrm{Ent}\big(\|f\|^2_E\big)\right\} \leqslant \|f\|^p_{L_2(\log L)(E)} \leqslant 14\max\left\{\|f\|^2_{L_2(E)},\mathrm{Ent}\big(\|f\|^2_E\big)\right\}, \tag{11}$$

它们对每个函数 $f:\Omega\to E$ 都成立。有关此主题的更多内容，请参阅第 4.3 节。

1.2. 商空间的畸变下界。 若 $(\mathcal{M},d)$ 和 $(\mathcal{N},\delta)$ 是两个度量空间，则 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$的双 Lipschitz 畸变记为 $\mathsf{c}_{\mathcal{N}}(\mathcal{M})$，它是满足以下条件的最小 $D\geqslant 1$：存在$\sigma\in(0,\infty)$ 和映射 $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$，使得

$$\forall\, x,y\in\mathcal{M},\qquad \sigma d(x,y)\leqslant\delta\big(f(x),f(y)\big)\leqslant\sigma D d(x,y). \tag{12}$$

设 $\mathcal{C}_n$ 为配备汉明度量 $\varrho(x,\ y)=\|x-y\|_1$ 的超立方体。向量值 Poincar´e 不等式 (6) 的一个重要几何应用是，它为将 $(\mathcal{C}_n,\ \varrho)$ 嵌入具有指定拉德马赫型的赋范空间提供了最优的畸变下界。回顾一下，$(E,\ \|\cdot\|_E)$ 具有拉德马赫型 $p\in[1,2]$，常数为 $T\in(0,\ \infty)$，是指对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意向量 x_1、……、$x_n\in E$，都有

$$\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i x_i\Big\|^p_E\,\mathrm{d}\sigma_n(\varepsilon)\leqslant T^p\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p_E. \tag{13}$$

Enflo [14, 15] 的一个经典论证结合 [22] 表明，如果赋范空间 E 具有拉德马赫型 p，常数为 T，那么 $\mathsf{c}_E(\mathcal{C}_n) \geqslant cT^{-1}n^{1-1/p}$，其中 $c>0$ 为普适常数。

令 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$ 为任意等价关系，并记 $\mathcal{C}_n/\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{R}$ 的所有等价类的集合，该集合配备商度量，定义为

$$\forall\, [\varepsilon],[\delta] \in \mathcal{C}_n/\mathcal{R}, \quad \varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}\big([\varepsilon],[\delta]\big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\big\{\varrho(\eta_1,\zeta_1)+\cdots+\varrho(\eta_k,\zeta_k)\big\}; \tag{14}$$

这里的最小值取遍所有满足以下条件的 $k \geqslant 1$ 和 η_1、.....、η_k、ζ_1、.....、$\zeta_k \in \mathcal{C}_n$：对每个 $j \in \{1,\ldots,k-1\}$，都有 $\eta_1 \in [\varepsilon]$、$\zeta_k \in [\delta]$ 以及$[\zeta_j] = [\eta_{j+1}]$。我们还将 $\partial_i\mathcal{R}$ 记作沿 i方向的 $\mathcal{R}$的边界，即

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \partial_i\mathcal{R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \big\{\varepsilon \in \mathcal{C}_n : \big(\varepsilon,(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{i-1},-\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1},\ldots,\varepsilon_n)\big) \notin \mathcal{R}\big\} \tag{15}$$

En结合 [22]的结果，Flo 的论证给出了如下的一般下界

$$\mathsf{c}_E\big(\mathcal{C}_n/\mathcal{R}\big) \geqslant \frac{cT^{-1}\big\|\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}([\varepsilon],[\delta])\big\|_{L_p(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n)}}{\big(\sum_{i=1}^n \sigma_n(\partial_i\mathcal{R})\big)^{1/p}} \tag{16}$$

对于将商空间 $\mathcal{C}_n/\mathcal{R}$ 双 Lipschitz 畸变嵌入到一个具有拉德马赫型 p的赋范空间中，其中 $c>0$ 为一个普适常数。作为新的向量值对数 Sobole夫不等式的推论，我们将在下面的第 4.1 节中证明以下改进的界。

推论 4. 存在一个普适常数 $c>0$，使得若赋范空间 E 具有常数为 T 的拉德马赫型 p，则对任意 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathsf{c}_E\big(\mathcal{C}_n/\mathcal{R}\big) \geqslant \frac{cT^{-1}\big\|\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}([\varepsilon],[\delta])\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n)}}{\big(\sum_{i=1}^n \sigma_n(\partial_i\mathcal{R})\big)^{1/p}}. \tag{17}$$

利用第 [10, 节中的向量值影响不等式，可以得到对下界 (16) 的另一种（不可比较的）改进。根据定理 3 的结果，还可以从度量对数 Sobole夫不等式中得到类似的下界；这些不等式具有完全一般性，例如适用于对称群的商群。

致谢。 我们感谢 Michel Ledoux 和 Ramon van Handel 参与了富有价值的讨论，并提出了建设性意见。

2. Preliminary discussion

2.1. 历史回顾。 在阐述导出定理 1 的思路之前，我们先讨论离散和连续情形下对数 Sobolev 不等式的现有研究方法。对于不等式 (4) 的情形 $p=2$，它等价于 Bonami 超收缩不等式 [8], ，且颇为特殊，因为有许多截然不同（而且简单）的方法可以证明它，而这些方法无法推广到 p 的其他取值。因此，我们特意不单独讨论这一情形。

在 [27], Ledoux 开创了对数 Sobolev 不等式的研究，他证明了高斯空间中公式 (4) 的完全对应形式（$\mathbb{R}^n$，γ_n），其中 γ_n 是标准正态分布。因此，他的工作改进了 Maurey 和 Pisier 此前在 [37]证明的高斯空间中与维数无关的 Poincaré 不等式。Ledoux 的证明依赖于余面积公式，并关键性地运用了高斯等周不等式 [40, 9]。正如 Ledoux 本人所指出的，他的定理只有在端点情形 $p=1$才是新的。对于 $p \in (1,\infty)$，相应的不等式也可由高斯空间中的 Meyer 的黎斯变换不等式 [34] （另见 [38]）与 Bakry 和 Meyer [1] 关于算子 $\mathcal{L}^{-\alpha}$ 在 Orlicz 空间中有界性的一个精细结果串联推出，其中 $\mathcal{L}$ 是超收缩半群的生成元（另见 [18]）。

此外，Ledoux 在 [27] 中提到，他的结果可以推广到向量值情形（依照 [37] 的思路），但其证明从未发表。他的方法（见注8）实际上给出了一个

关于 Ent($\|f\|_E^2$) 的上界；将其与 (11) 结合后，可得到适用于 $p = 2$ 的定理 1 的高斯版本。反过来，这个熵上界是将 [19] 的标量对数 Sobolev 不等式应用于函数 $\|f\|_E$，并利用链式法则对范数求导而得到的。克服对链式法则的依赖（离散情形下并不存在链式法则），正是定理 1 的主要新意。

Talagrand 在超立方体上推导出 (4) 的技巧，让人想起 Ledoux 对应的高斯不等式方法。事实上，他证明的第一步是一段复杂的归纳论证，由此得出离散超立方体子集的等周型不等式 [41, 定理 1。1]（近期改进见 [13]）。尽管离散空间中不存在直接对应的余面积公式，但在 [41, 第 5] 节中，Talagrand 使用离散的分层表示，并恰当应用其离散等周不等式，推导出 (4)。与高斯情形类似，还可以利用 Lust-Piquard 关于超立方体上 Riesz 变换的维数无关界，给出 L_p 对 $p \in (1, \infty)$ 的对数 Sobolev 不等式 (4) 的另一种证明[29]。值得强调的是，推导 (4) 的论证只要求 Riesz 变换满足一个下界，该下界对每个 $p \in (1, \infty)$ 都成立，如 [4, 定理 11], 所示；而相应的上界仅对 $p \geqslant 2$ 成立（见 [29, 第 283] 页）。据我们所知，这是对数 Sobolev 不等式 (4) 唯一已知的两种证明。

顺带指出，L_2 Poincar´e 不等式的另一种改进形式是 [42]中得到的 Talagrand 影响不等式。影响不等式的原始证明依赖于傅里叶–沃尔什变换的 Parseval 恒等式，并结合巧妙的层析分解和超压缩性的运用；后来，[11]给出了半群证明。在 [10], 中（这项工作的一篇前身），我们研究了 Talagrand 影响不等式的向量值版本，得到了L_p 类比和推广，并探讨了其几何后果。与定理 1 不同，[10] 的所有向量值影响不等式，要么对目标空间的假设并非最优（例如其中一些要求超反射性），要么在 Orlicz 空间中的指数并非最优。

2.2. **关于证明**。影响不等式已成功推广到向量值函数，但 Talagrand 不等式 (4) 的两种现有证明方法似乎都仅适用于标量值情形。具体而言，依赖离散等周不等式的原始证明遇到了一个概念性难题：如何为向量值函数构造层析表示。另一方面，在调和分析中，寻找 Lust-Piquard 的 Riesz 变换不等式 [29, 4] 的巴拿赫空间值推广，一直是悬而未决的问题；以当前方法看来，这一问题难以解决（参见 [35, 第 4]节的讨论）。尽管如此，受 [11, 10] 启发的一种论证可以导出与定理 1 类似的不等式，不过左侧的 Orlicz 空间并非最优。第 5 节将进一步解释这一点。

令人惊讶的是，我们对最优向量值对数 Sobolev 不等式 (7) 的证明并未为标量不等式 (4) 提供新的方法，反而将其作为黑箱使用。出发点是观察到，(7) 左侧的 Orlicz 范数可以由两项之和控制：第一项是熵类项，用以刻画 $\|f - \mathbb{E}f\|_E$的振荡；第二项则进一步由 $f - \mathbb{E}f$的 L_1 范数控制。因此，后一项可以通过 [22]的向量值 L_1 Poincar´e 不等式 (6) 加以控制。直接应用 Talagrand 不等式 (4)，不足以用 f的向量值梯度控制剩余的（标量）Orlicz 项。为此，我们应用一个在 Talagrand 证明 (4) 中起技术作用的不等式；该不等式的关键在于用 f范数的非对称梯度控制上述 Orlicz 范数。最后，通过受 Ledoux 的方法启发的微分论证，我们得到了所需的界。

3. Proof of Theorem 1

该证明依赖于 [41]的标量 L_p 对数 Sobolev 不等式 (4)。事实上，我们将使用 Talagrand 的证明中出现的一条更强结论，而非该不等式本身；这是一条关于非对称 梯度的类似不等式。对于函数 $h\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$，我们将

考虑由下式给出的 h 的非对称梯度 $\mathsf{M}h : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}_+$

$$\forall\, x \in \mathcal{C}_n, \qquad \mathsf{M}h(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i h(x)_+^2 \right)^{1/2}, \tag{18}$$

其中 $a_+ = \max\{a, 0\}$ 是一个实数 $a \in \mathbb{R}$。在其对 (4) 的证明中，Talagrand 至关重要地证明了以下更精细的技术结果，见 [41, 命题 5.1]。

命题 5 (Talagrand)。对于每个 $p \in [1, \infty)$，存在 $\kappa_p \in (0, \infty)$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，以下结论成立。若 $h : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}_+$ 是满足 $\sigma_n\{h = 0\} \geqslant \frac{1}{2}$ 的非负函数，则

$$\|h\|_{L_p(\log L)^{p/2}} \leqslant \kappa_p \big\| \mathsf{M}h \big\|_{L_p}. \tag{19}$$

回忆 任意函数 $f : \mathcal{C}_n \to E$ 都存在唯一的傅里叶–沃尔什展开，其形式为

$$\forall\, x \in \mathcal{C}_n, \qquad f(x) = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} \widehat{f}(S) w_S(x), \tag{20}$$

其中，傅里叶系数 $\widehat{f}(S) \in E$ 以及沃尔什函数 $w_S : \mathcal{C}_n \to \{-1, 1\}$ 由 $w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$ 给出。由上述展开可知，超立方体上的任意函数 $f : \mathcal{C}_n \to E$ 都存在唯一的多线性延拓至 $\mathbb{R}^n$，也就是说，存在唯一的函数 $F : \mathbb{R}^n \to E$，使得 $F|_{\mathcal{C}_n} = f$ 且 F 对每个变量都是仿射函数。

我们将使用以下逐点估计，它是凸性的推论。

引理 6. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 是一个赋范空间。那么，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个函数 $f : \mathcal{C}_n \to E$ 都满足逐点估计

$$\forall\, x \in \mathcal{C}_n, \qquad \mathsf{M}\|f\|_E(x) \leqslant \Big(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i \partial_i f(x) \Big\|_E^2 \Big)^{1/2}. \tag{21}$$

证明。固定 $x \in \mathcal{C}_n$。不失一般性，我们总可以假设 E 是有限维的，因为 F 的取值属于 $\operatorname{span}\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{span}\{f(x) : x \in \mathcal{C}_n\}$，其维数至多为 2^n。因此（通过逼近），我们可以假设 $f(x) \neq 0$，并且 $\|\cdot\|_E$ 在 $E \setminus \{0\}$ 上光滑，也就是说，对于每个 $v \in E \setminus \{0\}$，都存在 $\mathsf{D}_v^* \in E^*$，使得 $\|\mathsf{D}_v^*\|_{E^*} \leqslant 1$；若 $\beta : (-\eta, \eta) \to E$ 是某个满足 $\beta(0) = v$ 的 $\eta > 0$ 光滑函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \big\|\beta(t)\big\|_E = \Big\langle \mathsf{D}_v^*, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \beta(t) \Big\rangle. \tag{22}$$

再固定 $i \in \{1, \ldots, n\}$，并令 $F : \mathbb{R}^n \to E$ 为 f 的多线性延拓。该引理将由以下两个简单的技术性论断推出。

论断。函数 $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 定义如下：

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \qquad \phi_i(s) = \big\| F(x + s e_i) \big\|_E \tag{23}$$

是凸函数。

证明。事实上，根据 F 的多线性展开，我们有

$$F(x + s e_i) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1\ldots,n\}: \\ i \notin S}} \widehat{f}(S) w_S(x) + (x_i + s) \sum_{\substack{S \subseteq \{1\ldots,n\}: \\ i \in S}} \widehat{f}(S) w_{S \setminus \{i\}}(x), \tag{24}$$

这是变量 s 的仿射函数。因此，$s \mapsto \|F(x + s e_i)\|_E$ 确实是凸的。 □

断言。我们有如下逐点估计

$$\partial_i \|f\|_E(x)_+ \leqslant \Big| \frac{\partial \|F\|_E}{\partial x_i}(x) \Big|. \tag{25}$$

证明。我们假设 $\|\cdot\|_E$ 在 $E\setminus\{0\}$ 上光滑，且 $f(x)\neq 0$，因此右端有定义。我们将区分两种情况，并为求完整而列出所有细节。

情况 *1.* 假设 $x_i=1$。那么，我们将证明对于每个 $h>0$,

$$\partial_i\|f\|_E(x)_+=\left(\frac{\|F(x)\|_E-\|F(x-2e_i)\|_E}{2}\right)_+\leqslant\left(\frac{\|F(x+he_i)\|_E-\|F(x)\|_E}{h}\right)_+ \tag{26}$$

并通过令 $h\to 0^+$ 取极限即可得出结论。用式 (23) 中的函数 ϕ_i 来表述，不等式 (26) 可改写为

$$\forall\ h>0,\qquad\left(\frac{\phi_i(0)-\phi_i(-2)}{2}\right)_+\leqslant\left(\frac{\phi_i(h)-\phi_i(0)}{h}\right)_+. \tag{27}$$

若 $\phi_i(0)\leqslant\phi_i(-2)$，则该不等式显然成立。另一方面，若 $\phi_i(0)>\phi_i(-2)$，由 ϕ_i 的凸性可得

$$\phi_i(0)\leqslant\frac{2}{2+h}\phi_i(h)+\frac{h}{2+h}\phi_i(-2), \tag{28}$$

这可改写为

$$\frac{\phi_i(0)-\phi_i(-2)}{2}\leqslant\frac{\phi_i(h)-\phi_i(0)}{h}\leqslant\left(\frac{\phi_i(h)-\phi_i(0)}{h}\right)_+. \tag{29}$$

情况 *2.* 假设 $x_i=-1$。类似地，我们将证明对于每个 $h>0$,

$$\partial_i\|f\|_E(x)_+=\left(\frac{\|F(x)\|_E-\|F(x+2e_i)\|_E}{2}\right)_+\leqslant\left(\frac{\|F(x-he_i)\|_E-\|F(x)\|_E}{h}\right)_+. \tag{30}$$

和之前一样，我们可以假设 $\phi_i(0)>\phi_i(2)$，并以如下形式使用凸性 o f

$$\phi_i(0)\leqslant\frac{2}{2+h}\phi_i(-h)+\frac{h}{2+h}\phi_i(2), \tag{31}$$

这可以改写为

$$\frac{\phi_i(0)-\phi_i(2)}{2}\leqslant\frac{\phi_i(-h)-\phi_i(0)}{h}\leqslant\left(\frac{\phi_i(-h)-\phi_i(0)}{h}\right)_+. \qquad\square$$

结合已证明的断言 (25) 与 (22)，可得

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\|f\|_E(x)^2&=\sum_{i=1}^n\partial_i\|f\|_E(x)_+^2\overset{(25)}{\leqslant}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial\|F\|_E}{\partial x_i}(x)\Big)^2=\int_{\mathcal{C}_n}\Big|\sum_{i=1}^n\delta_i\frac{\partial\|F\|_E}{\partial x_i}(x)\Big|^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)\\&\overset{(22)}{=}\int_{\mathcal{C}_n}\Big|\sum_{i=1}^n\delta_i\Big\langle\mathsf{D}^*_{f(x)},\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big\rangle\Big|^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)=\int_{\mathcal{C}_n}\Big|\Big\langle\mathsf{D}^*_{f(x)},\sum_{i=1}^n\delta_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big\rangle\Big|^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)\\&\leqslant\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n\delta_i\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big\|_E^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta).\end{aligned} \tag{32}$$

现在注意到，当 $x\in\mathcal{C}_n$ 时，F 的多重线性显然表明

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=x_i\partial_i f(x) \tag{33}$$

因此，我们可以将上述界改写为

$$\mathsf{M}\|f\|_E(x)^2\leqslant\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\delta_i\partial_i f(x)\Big\|_E^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)=\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n\delta_i\partial_i f(x)\Big\|_E^2\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta), \tag{34}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了以下事实：当 δ 按照 σ_n 分布且 $x\in\mathcal{C}_n$ 固定时，随机向量 δ 和 $(x_1\delta_1,\ldots,x_n\delta_n)$ 具有相同的分布。$\square$

有了上述结果，我们就可以证明定理 1。

定理 *1* 的证明。 设 $f\colon\ \mathcal{C}_n \to E$ 为任意函数，其中 E 是一个具有有限余型的空间，不妨设 $\mathbb{E}f = 0$。此外，考虑非负函数$h \overset{\text{定义}}{=} \|f\|_E\colon\ \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}_+$，并记 $\mathsf{m} \geqslant 0$ 为 h的一个中位数。则函数 $(h-\mathsf{m})_+$ 满足$\sigma_n\{(h-\mathsf{m})_+ = 0\} = \sigma_n\{h \leqslant \mathsf{m}\} \geqslant \frac{1}{2}$。因此，命题 5 给出估计

$$\big\|(h-\mathsf{m})_+\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}} \leqslant \kappa_p \big\|\mathsf{M}(h-\mathsf{m})_+\big\|_{L_p}. \tag{35}$$

由于 m 是 h 的一个中位数，我们有

$$\mathsf{m} \leqslant \frac{1}{\sigma_n\{h \geqslant \mathsf{m}\}} \int_{\{h \geqslant \mathsf{m}\}} h \, \mathrm{d}\sigma_n \leqslant 2\|h\|_{L_1} = 2\|f\|_{L_1(E)}, \tag{36}$$

因此，将上述结果与不等式 $0 \leqslant h \leqslant (h-\mathsf{m})_+ + \mathsf{m}$ 结合，可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} = \|h\|_{L_p(\log L)^{p/2}} &\leqslant \big\|(h-\mathsf{m})_+ + \mathsf{m}\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}} \\ &\overset{(35)\wedge(36)}{\leqslant} \kappa_p \big\|\mathsf{M}(h-\mathsf{m})_+\big\|_{L_p} + 2\|f\|_{L_1(E)}. \end{aligned} \tag{37}$$

断言。 对于任意标量函数 $\phi\colon\ \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$，我们都有逐点估计

$$\forall\, x \in \mathcal{C}_n, \qquad \mathsf{M}\phi_+(x) \leqslant \mathsf{M}\phi(x). \tag{38}$$

证明。 由于 $\phi_+(x) = \max\{\phi(x),\ 0\}$，只需证明对于每个 $x,\ y \in \mathcal{C}_n$，

$$\big(\phi_+(x) - \phi_+(y)\big)_+ \leqslant \big(\phi(x) - \phi(y)\big)_+. \tag{39}$$

记 $a = \phi(x)$ 和 $b = \phi(y)$，该不等式可改写为 $(a_+ - b_+)_+ \leqslant (a-b)_+$。若$a_+ \leqslant b_+$，则该不等式显然成立，因此我们假设 $a_+ > b_+$，这意味着 $a > 0$。此时，若 $b \leqslant 0$，则问题归结为 $a \leqslant a - b$，它成立；若 $b > 0$，则该式成为恒等式。 □

结合 (37) 与不等式 (38)，我们由此推出

$$\|f\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant \kappa_p \big\|\mathsf{M}h\big\|_{L_p} + 2\|f\|_{L_1(E)}, \tag{40}$$

因为 $\mathsf{M}(h-m) \equiv \mathsf{M}h$。此外，根据 Ivanisvili、van Handel 和 Volberg 的 L_1 Poincaŕe 不等式 (6)，[22], 第二项还可以进一步由以下表达式上界

$$\|f\|_{L_1(E)} \leqslant \mathsf{C}_1(E) \int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_1(E)} \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \leqslant \mathsf{C}_1(E) \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p}, \tag{41}$$

这里我们用到了 E 具有有限余型这一事实。最后，为了控制 (40) 中的第一项，我们使用引理 6 的逐点不等式以及具有最佳常数 [23, 26] 的 Kahane 不等式，得到估计

$$\big\|\mathsf{M}h\big\|_{L_p} \leqslant \Big\| \Big(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f(x) \Big\|_E^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L_p} \leqslant \sqrt{2} \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_p(E)}^p \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/p}. \tag{42}$$

至此，定理得证。 □

同样的论证使我们能够证明推论 2 中的精细化 Pisier 不等式。

推论 *2* 的证明。 回顾 Pisier 不等式 [37, 引理 7。3]（另见 [20] 以了解乘法常数的取值），对于任意 $r \in [1, \infty)$，每个 $f\colon\ \mathcal{C}_n \to E$ 都满足

$$\|f - \mathbb{E}f\|_{L_r(E)} \leqslant (\log n + 1) \left(\int_{\mathcal{C}_n} \Big\| \sum_{i=1}^n \delta_i \partial_i f \Big\|_{L_r(E)}^r \mathrm{d}\sigma_n(\delta) \right)^{1/r} \tag{43}$$

再次假设 $\mathbb{E}f = 0$，将 (40) 与 (42) 以及针对 $r = 1$ 的 Pisier 不等式结合，可在一般赋范空间中得到所需的上界。□

注 7。 将上述论证与 Ivanisvili、van Handel 和 Volberg 的主要结果 [22] 结合，可针对一般巴拿赫空间取值，得到对 (7) 和 (8) 的相互改进。按照[22],，设 $\xi_1(t)\dots,\xi_n(t)$ 是满足以下条件的独立同分布随机变量

$$\mathbb{P}\big\{\xi_i(t)=1\big\}=\frac{1+e^{-t}}{2}\qquad\text{and}\qquad\mathbb{P}\big\{\xi_i(t)=-1\big\}=\frac{1-e^{-t}}{2} \tag{44}$$

并记 $\delta_i(t)$ 定义为 $=\xi_i\big(\frac{t-e^{-t})o}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$ 在 [22, 定理 1.4], 中，作者证明了如下估计

$$\|f-\mathbb{E}f\|_{L_r(E)}\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n\delta_i(t)\partial_i f\Big\|_{L_r(E)}^r\right)^{1/r}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}. \tag{45}$$

将此界用于 $r = 1$，并将 (42) 代入 (40)，可得更强的不等式

$$\begin{aligned}\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)}\leqslant\kappa_p&\left(\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n\delta_i\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p\,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)\right)^{1/p}\\&+\pi\int_0^\infty\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n\delta_i(t)\partial_i f\Big\|_{L_1(E)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}.\end{aligned} \tag{46}$$

注 8。 定理 1 的高斯版本曾在 Ledoux 的经典著作 [27]中宣布，但其证明从未发表。Ledoux 在私人通信中向我们确认，他在 [27] 中的结论如下。对于任意赋范空间 E 和任意 $n\in\mathbb{N}$，每个光滑函数$f:(\mathbb{R}^n,\ \gamma_n)\to E$ 都满足不等式

$$\mathrm{Ent}\big(\|f\|_E^2\big)\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\partial_i f\Big\|_{L_2(E)}\,\mathrm{d}\gamma_n(g), \tag{47}$$

其中，熵和 $L_2(E)$范数均相对于标准高斯测度 γ_n。为此，只需注意，将 Gross 对数 Sobolev 不等式应用于函数 $\|f\|_E$ 可得

$$\mathrm{Ent}\big(\|f\|_E^2\big)\leqslant 2\sum_{i=1}^n\big\|\partial_i\|f\|_E\big\|_{L_2}^2=2\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\partial_i\|f\|_E\Big\|_{L_2}^2\,\mathrm{d}\gamma_n(g). \tag{48}$$

按照定理 1 证明中的论证，我们不妨假设 $\|\cdot\|_E$在 $E\smallsetminus\{0\}$ 上光滑，且 $f(x)\neq 0$ 几乎处处成立，因此有 $\partial_i\|f\|_E(x)=\langle\mathsf{D}^*_{f(x)},\ \partial_i f(x)\rangle$，其中 $\mathsf{D}^*_{f(x)}$ 是 E^*单位球中的某个线性泛函。因此，

$$\mathrm{Ent}\big(\|f\|_E^2\big)\leqslant 2\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\Big\langle\mathsf{D}^*_{f(x)},\sum_{i=1}^n g_i\partial_i f(x)\Big\rangle^2\,\mathrm{d}\gamma_{2n}(x,g)\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\partial_i f\Big\|_{L_2(E)}^2\,\mathrm{d}\gamma_n(g). \tag{49}$$

初等不等式 (11)（另见第 4.3 节）与 Ledoux 不等式 (47) 以及向量值高斯 Poincar´e 不等式相结合

$$\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_2}\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\partial_i f\Big\|_{L_2(E)}^2\,\mathrm{d}\gamma_n(g)\right)^{1/2} \tag{50}$$

Maurey 和 Pisier 的 [37, 推论 2.4] 推出了定理 1 的高斯版本，适用于 $p = 2$ 以及取值于任意赋范空间的函数 E。利用中心极限定理等标准方法，根据一般不等式 (46) 可将这一估计推广到 $p\in[1,\infty)$ 的所有取值，参见例如 [22, 注 1.3]。

值得强调的是，由于超立方体上的离散导数不存在链式法则，定理 1 证明中主要的额外难点在于，需要将 $\|f\|_E$ 的离散偏导数与 $\|F\|_E$ 的经典偏导数联系起来。事实证明，每个 i 阶偏导数只能通过 $\mathcal{C}_n$ 中一个依赖于 i 的 $(n-1)$ 维子立方体上的单侧不等式来控制（引理 6）；然而，鉴于 Talagrand 的非对称对数 Sobolev 不等式（命题 5），这已足以给出完整梯度的界。

4. Self-improvement of Poincaré inequalities

本节将第 1.1 节中的讨论形式化。在该节中，我们声称，只要相应的标量值不等式成立，范数的度量 Poincar´é 不等式就可以提升为对数 Sobolev 型不等式。更准确地说，我们证明以下命题。

命题 9. 设 $p \geqslant 1$ 且 $\alpha > 0$。固定一个赋范空间 $(E, \|\cdot\|_E)$、一个概率空间 (Ω, μ)以及 Ω 上的测度 β $\Omega \times\Omega$。假设每个有界函数 $f\colon \Omega \to E$ 都满足

$$\big\|f - \mathbb{E}f\big\|_{L_p(E)}^p \leqslant \iint_{\Omega\times\Omega} \big\|f(x) - f(y)\big\|_E^p \,\mathrm{d}\beta(x,y) \tag{51}$$

并且每个标量有界函数 $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 都满足

$$\big\|h - \mathbb{E}h\big\|_{L_p(\log L)^\alpha}^p \leqslant \mathsf{C}^p \iint_{\Omega\times\Omega} \big|h(x) - h(y)\big|^p \,\mathrm{d}\beta(x,y) \tag{52}$$

对某个 $\mathsf{C} > 0$成立。那么，对于每个有界函数 $f\colon \Omega \to E$，我们有

$$\big\|f - \mathbb{E}f\big\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}^p \leqslant 2^{p-1}\big(\mathsf{C}^p + 1\big) \iint_{\Omega\times\Omega} \big\|f(x) - f(y)\big\|_E^p \,\mathrm{d}\beta(x,y). \tag{53}$$

证明。假设 $\mathbb{E}f = 0$，并记 $h = \|f\|_E$。于是，我们有

$$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}^p = \|h\|_{L_p(\log L)^\alpha}^p \leqslant 2^{p-1}\big(\big\|h - \mathbb{E}h\big\|_{L_p(\log L)^\alpha}^p + \big|\mathbb{E}h\big|^p\big) \tag{54}$$

由 Orlicz 范数的三角不等式和 Hölder 不等式（$A+B$）$^p \leqslant 2^{p-1}$（$A^p + B^p$）。为控制（54）中的第一项，我们使用（52）得到

$$\begin{aligned} \big\|h - \mathbb{E}h\big\|_{L_p(\log L)^\alpha}^p &\overset{(52)}{\leqslant} \mathsf{C}^p \iint_{\Omega\times\Omega} \big|h(x) - h(y)\big|^p \,\mathrm{d}\beta(x,y) \\ &= \mathsf{C}^p \iint_{\Omega\times\Omega} \big|\|f(x)\|_E - \|f(y)\|_E\big|^p \,\mathrm{d}\beta(x,y) \leqslant \mathsf{C}^p \iint_{\Omega\times\Omega} \big\|f(x) - f(y)\big\|_E^p \,\mathrm{d}\beta(x,y). \end{aligned} \tag{55}$$

对于第二项，注意到（51）给出

$$\big|\mathbb{E}h\big|^p = \big|\mathbb{E}\|f\|_E\big|^p \leqslant \mathbb{E}\|f\|_E^p \overset{(51)}{\leqslant} \iint_{\Omega\times\Omega} \big\|f(x) - f(y)\big\|_E^p \,\mathrm{d}\beta(x,y) \tag{56}$$

由此得证。 □

例如，将命题 9 与 [8, 19, 22]，结合，我们很容易推出超立方体上的一个度量对数 Sobolev 不等式，前提是满足拉德马赫型假设。同一估计也可由（46）直接推出，但通过命题 9 证明要简单得多。

推论 10. 对于每个 $p \in [1,2]$ 以及每个拉德马赫型为 p 的赋范空间 $(E, \|\cdot\|_E)$，存在 $\tau_p(E) \in (0,\infty)$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 都满足

$$\big\|f - \mathbb{E}f\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant \tau_p(E) \left(\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i f\big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p}. \tag{57}$$

此外， $\tau_p(E)$ 与 E 的拉德马赫型 p 常数成正比。

4.1. **畸变　　下界与商空间**。利用推论 10，我们将证明推论 4　　.

推论 *4* 的证明。设 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$ 是一个等价关系，并考虑一个嵌入$f\colon\ \mathcal{C}_n/\mathcal{R} \to E$，满足双 Lipschitz 条件

$$\forall\ [\varepsilon],[\delta] \in \mathcal{C}_n/\mathcal{R}, \qquad \sigma\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}\big([\varepsilon],[\delta]\big) \leqslant \big\|f\big([\varepsilon]\big) - f\big([\delta]\big)\big\|_E \leqslant \sigma D\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}\big([\varepsilon],[\delta]\big) \tag{58}$$

对某些 $\sigma > 0$ 和 $D \geqslant 1$。此外，考虑由 $F(\varepsilon) = f([\varepsilon])$ 给出的 f 的提升 $F\colon\ \mathcal{C}_n \to E$，其中$\varepsilon \in \mathcal{C}_n$。那么， f 上的下 Lipschitz 条件给出

$$\begin{aligned}\big\|F(\varepsilon) - F(\delta)\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n;E)} &= \big\|f\big([\varepsilon]\big) - f\big([\delta]\big)\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n;E)} \\ &\overset{(58)}{\geqslant} \sigma\big\|\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}\big([\varepsilon],[\delta]\big)\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n)}.\end{aligned} \tag{59}$$

另一方面，由三角不等式和推论 10，我们有

$$\big\|F(\varepsilon) - F(\delta)\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(\mathcal{C}_n\times\mathcal{C}_n;E)} \leqslant 2\big\|F - \mathbb{E}F\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)} \leqslant 2\tau_p(E)\left(\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i F\big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p}.$$

现在注意到，对每个 i,

$$\big\|\partial_i F\big\|_{L_p(E)}^p = \frac{1}{2^p}\int_{\mathcal{C}_n} \big\|f\big([\varepsilon]\big) - f\big([(\varepsilon_1,\dots,-\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_n)]\big)\big\|_E^p\,\mathrm{d}\sigma_n(\varepsilon) \overset{(58)}{\leqslant} \sigma^p D^p \sigma_n\big(\partial_i\mathcal{R}\big), \tag{60}$$

当 $\varrho_{\mathcal{C}_n/\mathcal{R}}\big([\varepsilon],\ [(\varepsilon_1,\ \dots,\ -\varepsilon_i,\ \dots,\ \varepsilon_n)]\big) = 2$ 若 $\varepsilon \in \partial_i\mathcal{R}$，否则其值为 0。综合以上各点，即可得到所需的 D下界。□

4.2. **定理 3 的证明**。回顾一下，赋范空间 $(E,\ \|\cdot\|_E)$具有常数为 $M \in (0,\ \infty)$ 的 2 型鞅性质，是指对于任意 $n \in \mathbb{N}$、任意概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 以及由 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数构成的任意滤过 $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$，每个适应于 $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$ 的 E 值鞅 $\{\mathcal{M}_i : \Omega \to E\}_{i=0}^n$ 都满足

$$\big\|\mathcal{M}_n - \mathcal{M}_0\big\|_{L_2(\mu;E)}^2 \leqslant M^2\sum_{i=1}^n \big\|\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1}\big\|_{L_2(\mu;E)}^2. \tag{61}$$

使 (61) 成立的最小常数 $M > 0$ 记为 $\mathsf{m}_2(E)$。

在 [25, 第 6], 节中，Khot 和 Naor 证明了具有 Schechtman 意义下指定长度的度量空间嵌入到具有给定鞅型的赋范空间时，其双 Lipschitz 畸变的下界。Maurey 早期一项有影响力的工作证明，这类度量空间的一个重要例子是对称群的 Cayley 图 $\mathcal{S}_n$，其生成集 $\mathcal{T}_n$ 由所有对换组成。为了证明畸变下界，Khot 和 Naor 在这类空间中使用了 Poincar´e 型不等式。对于对称群，可以从定理 [25, 定理 7] 的证明中推出以下不等式。

定理 11 (Khot–Naor)。 若 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个具有鞅型 *2* 的巴拿赫空间，则对于任意$n \in \mathbb{N}$，每个函数 $f\colon\ \mathcal{S}_n \to E$ 均满足

$$\big\|f - \mathbb{E}f\big\|_{L_2(E)}^2 \leqslant \frac{2\mathsf{m}_2(E)^2}{n-1}\sum_{\tau\in\mathcal{T}_n}\int_{\mathcal{S}_n} \big\|f(\pi) - f(\tau\circ\pi)\big\|_E^2\,\mathrm{d}\nu_n(\pi). \tag{62}$$

为了推导定理 3 的向量值对数 Sobolev 不等式，我们还需要 Diaconis 和 Saloff-Coste 的以下标量值结果 [12,第 4 节.3]。

定理 12 (Diaconis–Saloff-Coste)。 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个函数 $f:\ \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ 都满足 s

$$\operatorname{Ent}\big(f^2\big) \leqslant \frac{6\log n}{n-1} \sum_{\tau\in\mathcal{T}_n} \int_{\mathcal{S}_n} \big|f(\pi) - f(\tau\circ\pi)\big|^2 \,\mathrm{d}\nu_n(\pi). \tag{63}$$

定理 *3* 的证明。 根据不等式 **(11)**（另见更一般的引理 **13**）以及不等式 **(62)** 的标量情形，定理12表明每个函数 $f:\mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ 都满足

$$\big\|f - \mathbb{E}f\big\|^2_{L_2(\log L)} \leqslant \frac{C\log n}{n-1} \sum_{\tau\in\mathcal{T}_n} \int_{\mathcal{S}_n} \big|f(\pi) - f(\tau\circ\pi)\big|^2 \,\mathrm{d}\nu_n(\pi), \tag{64}$$

其中 $C>0$ 是一个普适常数。将此结果与定理 **11** 的向量值不等式以及命题 **9** 的一般推论结合起来，我们便得到定理 **3**。□

4.3. Orlicz 范数与 α-熵。 为了在具体例子中（包括定理 **3**）应用命题 **9**，我们需要基本估计式 **(11)**，它给出了 $L_2(\log L)$ 范数与熵之间的关系。本节将这一双向界推广到更一般的 **Orlicz** 范数。若 $x \in (0,\infty)$ 且$\alpha>0$，我们采用以下特定记法

$$\log^{\alpha} x = \operatorname{sign}(\log x)|\log x|^{\alpha}, \tag{65}$$

因此 $x \mapsto \log^{\alpha} x$ 在 $(0,\infty)$ 上递增。最后，对于非负函数 $h:(\Omega,\ \mu) \to [0,\infty)$，且 $\alpha>0$，我们将其 α-熵 记为

$$\operatorname{Ent}^{\alpha}(h) = \int_{\Omega} h\log^{\alpha}\Big(\frac{h}{\int_{\Omega} h\,\mathrm{d}\mu}\Big)\,\mathrm{d}\mu, \tag{66}$$

其中，$0\log^{\alpha} 0$ 始终理解为 0。

我们需要对 **Orlicz** 范数建立一个双边估计。特殊情形 $p=2$ 和 $\alpha=1$ 隐含于 **Bobkov** 和 **G¨otze** 的工作第 4] 节 [7, 中。我们对所涉及的各种参数所对应的常数依赖关系作了较宽松的处理。

引理 13. 固定 $p \geqslant 1$ 和 $\alpha>0$。若 $(\Omega,\ \mu)$ 是概率空间，$(E,\|\cdot\|_E)$ 是赋范空间，且 $f:\Omega\to E$ 是可测函数，则有

$$c_{\alpha}^{-1}\max\big\{\|f\|^p_{L_p(E)}, \operatorname{Ent}^{\alpha}\big(\|f\|^p_E\big)\big\} \leqslant \|f\|^p_{L_p(\log L)^{\alpha}(E)} \leqslant C_{\alpha}\max\big\{\|f\|^p_{L_p(E)}, \operatorname{Ent}^{\alpha}\big(\|f\|^p_E\big)\big\}, \tag{67}$$

其中 $c_{\alpha} = 2^{(\alpha-1)_+}\big(1+(\alpha/e)^{\alpha}\big)+(\alpha/e)^{\alpha}$，并且

$$C_{\alpha} = \max\Big\{\log^{\alpha}(e+1) + 2(\alpha/e)^{\alpha},\, \tfrac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1}\log^{\alpha}\Big(e+\tfrac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1}\Big)\Big\} + 2. \tag{68}$$

证明。 由于所有涉及的量都仅取决于 $\|f\|_E$，不失一般性，可假设 f 是取非负值的标量。我们先证明左侧的不等式。假设$\|f\|^p_{L_p(\log\ L)_{\alpha}} \leqslant 1$，即

$$\int_{\Omega} f^p\log^{\alpha}(e+f^p)\,\mathrm{d}\mu \leqslant 1. \tag{69}$$

不等式 $\log(e+x)\ \geqslant 1$当 $x>0$时意味着$\int_{\Omega} f^p\mathrm{d}\mu \leqslant 1$。为了控制项 $\operatorname{Ent}^{\alpha}(f^p)$，注意到如果 $A=\big\{f^p > \int_{\Omega} f^p\,\mathrm{d}\mu\big\}$，则有

$$\operatorname{Ent}^{\alpha}(f^p) \leqslant \int_A f^p\Big(\log f^p - \log\int_{\Omega} f^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu. \tag{70}$$

我们将这个积分拆分为两部分。首先，注意到

$$\int_{A\cap\{f\leqslant 1\}} f^p\Big(\log f^p - \log\int_{\Omega} f^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \Big(\int_{\Omega} f^p\,\mathrm{d}\mu\Big)\Big(-\log\int_{\Omega} f^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{\alpha} \leqslant \Big(\frac{\alpha}{e}\Big)^{\alpha}, \tag{71}$$

当 $x \in (0,1)$ 时， $x \log^{\alpha}(1/x) \leqslant \big(\alpha/e\big)^{\alpha}$。对于剩余的积分，我们写作

$$\begin{aligned} &\int_{\{f>1\}} f^p \Big(\log f^p - \log \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\alpha} \, \mathrm{d}\mu \\ &\qquad \leqslant 2^{(\alpha-1)_+} \int_\Omega f^p \Big(\log^{\alpha} f^p - \log^{\alpha} \Big(\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu \Big) \Big) \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^{(\alpha-1)_+} \big(1 + (\alpha/e)^{\alpha} \big), \end{aligned} \tag{72}$$

其中 $\gamma_+ = \max\{\gamma, 0\}$ ，并且我们使用了不等式 $(A+B)^{\alpha} \leqslant 2^{(\alpha-1)_+}(A^{\alpha} + B^{\alpha})$，它对每个 $A, B \geqslant 0$ 都成立。这证明了 (67) 中最左侧的不等式。

对于右侧的不等式，假设

$$\max \big\{ \|f\|_{L_p}^p, \mathrm{Ent}^{\alpha}\big(f^p\big) \big\} \leqslant 1. \tag{73}$$

那么，由于 $\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 1$， $x \mapsto \log^{\alpha} x$ 在 $(0, \infty)$ 上的单调性给出

$$\int_\Omega f^p \log^{\alpha} f^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f^p \log^{\alpha} \Big(\frac{f^p}{\int f^p \, \mathrm{d}\mu} \Big) \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{Ent}^{\alpha}\big(f^p\big) \leqslant 1. \tag{74}$$

此处我们将使用初等不等式

$$y \log^{\alpha}(e+y) \leqslant \underbrace{\max \Big\{ \log^{\alpha}(e+1) + 2(\alpha/e)^{\alpha}, \tfrac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1} \log^{\alpha} \Big(e + \tfrac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1} \Big) \Big\}}_{K_\alpha} + 2y \log^{\alpha} y \tag{75}$$

该不等式对所有 $y > 0$ 都成立。事实上，假设 (75) 成立，则有

$$\int_\Omega f^p \log^{\alpha}(e + f^p) \, \mathrm{d}\mu \overset{(75)}{\leqslant} K_\alpha + 2 \int_\Omega f^p \log^{\alpha} f^p \, \mathrm{d}\mu \overset{(74)}{\leqslant} K_\alpha + 2 \tag{76}$$

因此

$$\int_\Omega \frac{f^p}{K_\alpha + 2} \log^{\alpha} \Big(e + \frac{f^p}{K_\alpha + 2} \Big) \, \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{K_\alpha + 2} \int_\Omega f^p \log^{\alpha}(e + f^p) \, \mathrm{d}\mu \leqslant 1. \tag{77}$$

这意味着 $\|f\|_{L_p(\log L)^{\alpha}} \leqslant (K_\alpha + 2)^{1/p}$，这就是所需的估计。

为证明初等不等式 (75)，我们考虑几种情形。若 $0 < y < 1$，

$$y \log^{\alpha}(e+y) + 2y \log^{\alpha}(1/y) \leqslant \log^{\alpha}(e+1) + 2(\alpha/e)^{\alpha} \tag{78}$$

因为第一项递增，第二项则有上界 $2(\alpha/e)^{\alpha}$。另一方面，若 $y \geqslant \frac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1}$ ，并记 $\beta = 2^{1/\alpha} > 1$，则有 ———

$$2 \log^{\alpha} y = \log^{\alpha} y^{\beta} \geqslant \log^{\alpha} \big(\beta(y-1) + 1 \big) > \log^{\alpha}(y+e) \tag{79}$$

因此 (75) 不含项 K_α 时仍成立。最后，若 $1 < y < \frac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1}$，那么我们只需使用 tha t

$$y \log^{\alpha}(e+y) \leqslant \frac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1} \log^{\alpha} \Big(e + \frac{2^{1/\alpha}+e-1}{2^{1/\alpha}-1} \Big) \tag{80}$$

并且 (75) 成立，其中不含项 $2y\log^{\alpha} y$。引理得证。 □

5. Further remarks

5.1. 半群方法的局限。 我们在此给出一个受 [22, 10] 启发的论证，主要是出于教学考虑；该论证导出定理 1 的若干版本，其左端使用了次优的 Orlicz 空间。本部分内容由我们与 Ramon van Handel 共同完成，感谢他允许我们在此收录。我们需要以下技术性结果，该结果出自 [17,引理 44 和注释 48]。注意， $p=2$ 的情形可通过在 Walsh 基上展开并利用 Parseval 恒等式轻松证明。

引理 14. 对于每个 $p\in(1,\infty]$，都存在 $A_p\in(0,\infty)$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数$h:\mathcal{C}_n\to\mathbb{C}$ 都满足

$$\forall\ t>0,\qquad \big\|\nabla P_t h\big\|_{L_p}\leqslant\frac{A_p}{\big(e^{p^*t}-1\big)^{1/p^*}}\|h\|_{L_p},\tag{81}$$

其中 $p^*=\min\{p,2\}$。

由 Talagrand 对数 Sobolev 不等式 [41] 和插值，可推出超压缩性的 Orlicz 空间版本。

引理 15. 对于每个 $p\in(1,\infty)$，都存在 $\mathsf{L}_p\in(0,\infty)$，使得以下结论成立。对于任意赋范空间 $(E,\|\cdot\|_E)$、任意 $\alpha\in[0,p/2]$ 以及任意 $n\in\mathbb{N}$，每个函数 $f\colon\mathcal{C}_n\to E$ 都满足

$$\forall\ t\in(0,1),\qquad \big\|P_t f\big\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}\leqslant\frac{\mathsf{L}_p}{t^{2\alpha/pp^*}}\|f\|_{L_p(E)},\tag{82}$$

其中 $p^*=\min\{p,2\}$。

证明。 当 $\alpha=0$ 时，所需的不等式显然成立，因为 P_t 是一个压缩算子。因此，通过对 $L_p(\log L)^\alpha$ 奥利奇空间进行复插值（例如， [33]中明确出现了这种插值），一般情形可由端点情形 $\alpha=p/2$ 推出。由于 P_t 具有正核，Jensen 不等式给出逐点界 $\|P_tf\|_E\leqslant P_th$，其中 $h=\|f\|_E$，因此我们有

$$\big\|P_tf\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)}\leqslant\big\|P_th\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}}\leqslant\big\|P_th-\mathbb{E}h\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}}+\mathbb{E}h.\tag{83}$$

由于 $\mathbb{E}P_th=\mathbb{E}h$，Talagrand 不等式 (4) 给出

$$\big\|P_th-\mathbb{E}h\big\|_{L_p(\log L)^{p/2}}\overset{(4)}{\leqslant}\mathsf{C}_p\big\|\nabla P_th\big\|_{L_p}\overset{(81)}{\leqslant}\frac{\mathsf{C}_pA_p}{\big(e^{p^*t}-1\big)^{1/p^*}}\|f\|_{L_p(E)}.\tag{84}$$

结合上述结果即可完成证明，因为此外 $\mathbb{E}h=\|f\|_{L_1(E)}\leqslant\|f\|_{L_p(E)}$。 □

有了这些引理，我们现在可以尝试用 [22, 10] 中的方法证明定理 1。

定理 *1* 的尝试性证明。 考虑函数 $f\colon\ \mathcal{C}_n\to E$，不失一般性，假设 $\mathbb{E}f=0$。那么，

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}=2\Big\|\int_0^\infty P_t\Delta P_tf\ \mathrm{d}t\Big\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}&\leqslant 2\int_0^\infty\big\|P_t\Delta P_tf\big\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}\ \mathrm{d}t\\&\overset{(82)}{\leqslant}\widetilde{\mathsf{L}}_p\int_0^\infty\big\|\Delta P_tf\big\|_{L_p(E)}\max\big\{t^{-2\alpha/pp^*},1\big\}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{85}$$

最后一个估计是将 (82) 用于 $t\in(0,1)$ 并结合通常的超压缩不等式得到的

$$\forall\ t\geqslant1,\qquad \big\|P_t\Delta P_tf\big\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)}\leqslant\mathsf{K}_{p,\alpha}\big\|P_t\Delta P_tf\big\|_{L_{1+e^{2t}(p-1)}(E)}\leqslant\mathsf{K}_{p,\alpha}\big\|\Delta P_tf\big\|_{L_p(E)},\tag{86}$$

其中，在第一个不等式中，我们使用了一个适用于任意函数的 Orlicz 范数之间的界。根据 [22] 在 [10, 命题 18]，中给出的主要技术界，我们推得

$$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)} \leqslant \widetilde{\mathsf{L}}_p \int_0^\infty \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i(t)\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p} \max\left\{t^{-2\alpha/pp^*},1\right\}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}, \tag{87}$$

其中，随机变量 $\delta_i(t)$ 在注 7 中定义。假设该空间具有余型$q\in[2,\infty)$，文献 [22, 的第 4] 节证明了

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i(t)\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p} \leqslant \mathsf{C}_{p,q} t^{\frac{1}{\max\{p,q\}}-\frac12}\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p} \tag{88}$$

结合上述结果，最终得到估计

$$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)} \leqslant \widetilde{\mathsf{L}}_p\mathsf{C}_{p,q}\left(\int_0^\infty t^{\frac{1}{\max\{p,q\}}-\frac12}\max\left\{t^{-2\alpha/pp^*},1\right\}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}\right)\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p\right)^{1/p}.$$

然而请注意，当且仅当 $\alpha < \frac{pp^*}{2\max\{p,q\}} \leqslant \frac{p}{2}$ 时，该积分收敛。因此，这种方法无法得到定理 1 中达到的最优 Orlicz 空间。□

5.2. **向量值影响不等式的约化**。反过来，本文中使用的论证或许能为文献 [10] 中尚未解决的一些问题提供启示。事实上，这些论证可以直接导出两种可能有用的约化方法。

• 在 [10, 定理 6] 中已证明，当 E 是一个具有拉德马赫 2 型的巴拿赫空间时，对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，不等式成立

$$\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_2(E)}^2 \leqslant \frac{\mathsf{C}(E)}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i f\big\|_{L_2(\log L)^{-1+\varepsilon}(E)}^2 \tag{89}$$

目前仍不清楚，在不对空间 E 作额外假设的情况下，是否可以像 [42] 中处理的标量情形那样取 $\varepsilon=0$。按照惯例，设 $\mathbb{E}f=0$ 并记 $h=\|f\|_E$，我们首先可以使用三角不等式

$$\|f\|_{L_2(E)}^2 = \|h\|_{L_2}^2 \leqslant 2\big(\|h-\mathbb{E}h\|_{L_2}^2+|\mathbb{E}h|^2\big). \tag{90}$$

接下来，我们注意到，根据 Talagrand 标量影响不等式，第一项满足

$$\|h-\mathbb{E}h\|_{L_2}^2 \leqslant \mathsf{C}\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i h\big\|_{L_2(\log L)^{-1}}^2 \leqslant \mathsf{C}\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i f\big\|_{L_2(\log L)^{-1}(E)}^2, \tag{91}$$

其中，最后一个不等式使用了逐点界 $|\partial_i h|\leqslant\|\partial_i f\|_E$。因此，为了证明带有 $\varepsilon=0$ 的（89），证明下面严格较弱的估计既是必要的也是充分的

$$\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_1(E)}^2 \leqslant \mathsf{C}(E)\sum_{i=1}^n \big\|\partial_i f\big\|_{L_2(\log L)^{-1}(E)}^2 \tag{92}$$

因为左侧恰好就是 $|\mathbb{E}h|^2$。

• 在 [10] 中，我们还研究了所谓的 L_1-L_p 不等式；从思想上说，这些估计是 Talagrand 不等式（4）的对偶估计。在标量值函数的情形下，[10, 定理 33] 断言，对于任意 $p\in(1,\infty)$，存在 $\mathsf{C}_p>0$，使得每个 $f\colon \mathcal{C}_n\to\mathbb{C}$ 都满足

$$\big\|f-\mathbb{E}f\big\|_{L_p} \leqslant \mathsf{C}_p\big\|\nabla f\big\|_{L_p(\log L)^{-p/2}}. \tag{93}$$

此外，类似于第 5.1 节中所用的半群论证，证明了一个与（93）类似的结果：对于取值于有限

余型赋范空间的函数，右侧为次优的 Orlicz 空间，见 [10, 定理 29]。检查定理 1 的证明可知，若能证明对实值函数而言，（93）右侧以非对称梯度 $\mathrm{M}f$ 替代后仍成立更强的结果，那么 [10]的向量值结果也会得到改进。

5.3. **贝克纳不等式**。在 [2], ，贝克纳提出了一族高斯空间中的泛函不等式，它们在庞加莱不等式与对数 Sobolev 不等式之间进行插值。更具体地说，他证明，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $q \in [1,2]$，每个函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都满足

$$\|f\|_{L_2}^2 - \|f\|_{L_q}^2 \leqslant (2-q)\big\|\nabla f\big\|_{L_2}^2. \tag{94}$$

注意，将两边除以 $2-q$ 并令 $q \to 2^-$ 取极限，即可得到 Gross 对数 Sobolev 不等式 [19]。事实上，贝克纳型不等式与对数 Sobolev 不等式等价（常数的取值除外）。实际上，对于 $r \in (0,1]$， $r \mapsto \log \|f\|_{L_{1/r}}$ 的凸性意味着量

$$\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\Big(\|f\|_{L_2}^2 - \|f\|_{L_q}^2\Big) \tag{95}$$

随 $q \in [1,2$ 增大。结合这一观察与定理 1，我们可推出以下结论。

推论 16. 设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个有限余型的巴拿赫空间。存在常数 $\mathsf{B}(E) \in (0,\infty)$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $q \in [1,2]$，每个满足 $\mathbb{E}f = 0$ 的函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 都有

$$\big\|f\big\|_{L_2(E)}^2 - \big\|f\big\|_{L_q(E)}^2 \leqslant \mathsf{B}(E)(2-q)\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i\partial_i f\Big\|_{L_2(E)}^2 \,\mathrm{d}\sigma_n(\delta). \tag{96}$$

利用定理 3，可以在高斯空间或对称群上得到类似结果。

5.4. **泛函等周型不等式**。Talagrand 的等周不等式[41] 断言，任意布尔函数 $f\colon \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ 都满足

$$\|\nabla f\|_{L_2} \geqslant \mathsf{c}\mathrm{Var}(f)\sqrt{\log\big(1/\mathrm{Var}(f)\big)}, \tag{97}$$

其中 $\mathsf{c} > 0$ 是一个普适常数。在近期的工作 [3], 中，Beltran、Ivanisvili 和 Madrid 提出了式 (97) 对取值于有限余型空间的函数的一些推广。他们的证明基于 [22] 的方法；与第 5.1 节中的结果类似，目标空间的余型在他们的一些估计中表现为指数。我们在此给出一个与此思路相近的结果，它是定理 1 的直接推论（另请注意它与影响不等式 [42, 10]的相似之处）。

命题 17。 设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个具有有限余型的巴拿赫空间，且 $p \in [1,\infty)$。存在常数 $\eta_p(E) \in (0,\infty)$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，每个满足 $\mathbb{E}f = 0$ 的函数 $f\colon \mathcal{C}_n \to E$ 都满足

$$\left(\int_{\mathcal{C}_n}\Big\|\sum_{i=1}^n \delta_i\partial_i f\Big\|_{L_p(E)}^p \,\mathrm{d}\sigma_n(\delta)\right)^{1/p} \geqslant \eta_p(E)\cdot\|f\|_{L_p(E)}\Big(1+\sqrt{\log\big(\|f\|_{L_p(E)}/\|f\|_{L_1(E)}\big)}\Big). \tag{98}$$

证明。 根据定理 1，只需证明 $\|f\|_{L_p(\log L)^{p/2}(E)}$ 有下界，且该下界不小于 (98) 右侧。更一般的估计

$$\|f\|_{L_p(\log L)^\alpha(E)} \geqslant \mathsf{c}_{p,\alpha}\|f\|_{L_p(E)}\Big(1+\log^{\alpha/p}\big(\|f\|_{L_p(E)}/\|f\|_{L_1(E)}\big)\Big) \tag{99}$$

可通过将 [10, 引理 17] 与 H¨older 不等式串联得到

$$\|FG\|_{L_{p/2}} \leqslant \mathsf{C}_\alpha\|F\|_{L_p(\log L)^\alpha}\|G\|_{L_p(\log L)^{-\alpha}} \tag{100}$$

适用于奥利奇空间。由于我们未能找到命题 (100) 的出处，特此说明，它可由两点不等式直接推出

$$(xy)^{p/2} \leqslant \tfrac{\mathsf{C}_\alpha}{2}\big(x^p\log^\alpha(e+x^p) + y^p\log^{-\alpha}(e+y^p)\big), \tag{101}$$

该式对每个 $x, y \geqslant 0$ 都成立，其中 $\mathsf{C}_\alpha > 0$ 是某个固定常数。 □

References

[1] 多米尼克·巴克里和 Paul-Andr
´ ´ ´
Seminar on é Meyer。
Probability XVI 920 *Lecture Notes in Math.* 138 145, 146 150
《关于对数 Sobolev 不等式》。I、II。收录于 , , 第 卷，页码 – –。施普林格，柏林-纽约，1982年。[2] 威廉·贝克纳。《高斯测度的广义 Poincar´é 不等式》。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，105(2):397–400，1989年。[3] 大卫·贝尔特兰、帕阿塔·伊万尼什维利和 Jos´é Madrid。《超立方体上的尖锐等周不等式》。预印本见 https://arxiv.org/abs/2303.06738，2023年。[4] 利莫尔·本·埃弗拉伊姆和 Fran¸çoise Lust-Piquard。《离散立方体和 CAR 代数上的 Poincar´é 型不等式》。
Probab. Theory Related Fields，141(3-4):569–602，2008年。[5] 谢尔盖·G·博布科夫。《离散立方体上的等周不等式，以及高斯空间中等周不等式的初等证明》。 *Ann. Probab.*，25(1):206–214，1997年。[6] 谢尔盖·G·博布科夫和 Friedrich G
¨ ´
Probab. Theory ötze。
Related Fields 114 2 245 277, 1999
《离散等周不等式和 Poincare 型不等式》。, ( ): – 。[7] 谢尔盖·G·博布科夫和 Friedrich G¨ötze。《与对数 Sobolev 不等式相关的指数可积性和运输成本》。 *J. Funct. Anal.*，163(1):1–28，1999年。[8] 阿琳·博纳米。《 ´关于函数 $L^p(G)$ 的傅里叶系数的研究》。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，20（第 2 分册）：335–402（1971），1970年。[9] 克里斯特·博雷尔。《高斯空间中的 Brunn-Minkowski 不等式》。 *Invent. Math.*，30(2):207–216，1975年。[10] 达里奥·科尔德罗-埃劳斯金和亚历山德罗斯·埃斯凯纳齐斯。《重新审视 Talagrand 影响不等式》。即将在 *Anal. PDE* 发表。预印本见 https://arxiv.org/abs/2010.11583，2020。[11] 达里奥·科尔德罗-埃劳斯金和米歇尔·勒杜。《超收缩测度、Talagrand 不等式与影响》。收录于 *Geometric aspects of functional analysis*， *Lecture Notes in Math.* 第 2050 卷，页码 169–189。施普林格，海德堡，2012年。[12] Persi Diaconis 和 Laurent Saloff-Coste。《有限马尔可夫链的对数 Sobolev 不等式》。
Ann. Appl. , ( ): – 。
Probab. 6 3 695 750, 1996
[13] 罗南·埃尔丹和雷南·格罗斯。《通过路径随机分析研究布尔超立方体上的集中现象》。
Invent. , ( ): – 。
Math. 230 3 935 994, 2022
[14] 佩尔·恩弗洛。《关于 L_p 空间之间不存在一致同胚》。 *Ark. Mat.*，8:103–105，1969年。[15] 佩尔·恩弗洛。《关于无限维拓扑群》。收录于 *Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach(1977–1978)*，页码 Exp. No. 10–11，11。 ´巴黎综合理工学院，帕莱索，1978年。[16] 亚历山德罗斯·埃斯凯纳齐斯。《关于面向 UMD 目标空间的 Pisier 不等式》。
Canad. Math. Bull.，64(2):282–291，2021年。[17] 亚历山德罗斯·埃斯凯纳齐斯和帕阿塔·伊万尼什维利。《汉明立方体上的多项式不等式》。
Probab. Theory Related , (-): – 。
Fields 178 1 2 235 287, 2020
[18] 乔治·F·费斯纳。《超收缩半群与 Sobolev 不等式》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，210 62，1975 51: – 。[19] 伦纳德·格罗斯。《对数 Sobolev 不等式》。 *Amer. J. Math.*，97(4):1061–1083，1975年。[20] Tuomas Hyt¨önen 和 Assaf Naor。《重新审视 Pisier 不等式》。 *Studia Math.*，215(3):221–235，2013年。[21] 帕阿塔·伊万尼什维利、Ramon van Handel 和 Alexander Volberg。《平方函数与汉明立方体：对偶性》。*Discrete Anal.*，页码 Paper No. 1，18，2018 年。[22] 帕阿塔·伊万尼什维利、Ramon van Handel 和 Alexander Volberg。《拉德马赫型与 Enflo 型一致》。
Ann. , ( ): – 。
of Math. (2) 192 2 665 678, 2020
[23] 让-皮埃尔·卡汉。《关于向量和 $\sum \pm u_n$》。 *C. R. Acad. Sci. Paris*，259:2577–2580，1964年。[24] 亚历山大·欣钦。《 ¨论二进制分数 ¨》。 *Math. Z.*，18(1):109–116，1923年。[25] 苏巴什·科特和 Assaf Naor。《通过傅里叶分析得到的不可嵌入定理》。 *Math. Ann.*，334 852，2006 4 821( ): – 。[26] Rafa-ł Lata-ła 和克日什托夫·奥莱什凯维奇。《关于 Khinchin-Kahane 不等式的最佳常数》。 *Studia Math.*，109 1 101( ): –104，1994年。[27] Michel Ledoux。《高斯等周问题与对数 Sobolev 不等式》。, ( ): – 。
´ ´ ´ ´
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 米歇尔·勒
Math. 306 2 79 82, 1988
杜和 Michel Talagrand。《[28] 》，第 卷。施普林格出版社，柏林，。《等周与随机过程》。
Probability in Banach spaces 23 *Ergebnisse der Mathematik und* Fran[29]
ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)] 1991
çoise Lust-Piquard。《与 Walsh 系统和费米子数算子相关的 Riesz 变换》。，155(1):263–285，1998年。

[30] Gregory A. Margulis。《大连通度图的概率特征》。 *Problemy Peredači Informacii* 10 2 101 108, 1974 , ( ): –。[31] Bernard Maurey。《对称序列的构造》。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, ( ): A–A。[32] Bernard Maurey 和 Gilles Pisier。《独立向量值随机变量序列及巴拿赫空间的几何性质》。 *Studia Math.*, 58(1): 45–90, 1976年。[33] Paul-Andr´e Meyer。《奥利克兹空间之间的插值》。载于 , , 第 [34] 卷 , 第 – 页。施普林格，柏林-纽约，。 *Seminar on Probability XVI* 920 *Lecture Notes in Math.* 153 158 1982. Paul-Andr´e Meyer。《高斯分布的黎斯变换》。载于 *XVIII*, *Lecture Notes in Math.*, 第 [35] 卷 X_p 184 3 991 1016, , 第 179–193 页。2016 施普林格，柏林，1984年。 *Ann. of Math. (2)*Assaf Naor。《离散黎斯变换与锐利度量不等式》。[36] , ( ): –。 *J. Reine Angew. Math.*Assaf Naor 和 Gideon Schechtman。《关于非线性型与 Pisier 不等式的评述》。[37] , 552 213 236, 2002: –。*1985)* 1206 *Lecture Notes in Math.* 167 241 1986 *Probability and analysis (Varenna,* Gilles Pisier。《巴拿赫空间几何中的概率方法》。载于 [38] , 第 *Séminaire de Probabilités* 卷 *XXII* 1321 485 501 1988 , 第 – 页。施普林格，柏林，。 *Lecture Notes in Math.*Gilles Pisier。《黎斯变换：P.-A. Meyer 不等式的一个更简单的解析证明》。载于 [39] , *Martingale theory in harmonic* , 第 [40] 卷 *analysis and Banach spaces (Cleveland, Ohio, 1981)* 939 *Lecture Notes in Math.* 211 215 *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 第 – 页。施普林格，柏林，。[41] Gideon Schechtman。《一类有限度量空间的 Lévy 型不等式》。载于 , 第 *Geom. Funct. Anal.* 卷 [42] , 第 – 页。施普林格，柏林-纽约，1982年。 *Ann. Probab.* Vladimir N. Sudakov 和 Boris S. Tsirelson。《球对称不变测度下半空间的极值性质》。, 41: 14–24, 165, 1974年。《概率分布理论问题 II》。Michel Talagrand。《等周问题、离散立方体上的对数 Sobolev 不等式及 Margulis 图连通性定理》。, 3(3): 295–314, 1993年。Michel Talagrand。《关于 Russo 近似零一律》。, 22(3): 1576–1587, 1994年。