arXiv:2304.03912v2 [math.AG] 8 Sep 2023

椭圆曲线的Gromov-Witten生成级数作为构形空间积分

Jie Zhou

摘要

根据 Bloch-Okounkov 和 Okounkov-Pandharipande 的研究，椭圆曲线的 Gromov-Witten 不变量生成级数可以用多变量椭圆函数来表示。在本文中，我们给出这些生成级数的新分拆求和公式，并证明它们是由 Poincaré 丛截面构造的上同调类的构形空间积分。我们还讨论了它们的拟椭圆性质和拟模性质。

目录

1 引言 **2**

1.1 椭圆曲线 GW 生成级数回顾.2 1.2 构形空间积分与对划分求和.3

2 配对的构造 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \quad \varphi_n^{\mathrm{GW}} \rangle$ **6**

2.1 Φ_n^{GW}的构造.7 2.2 γ_n^{GW}的构造.9 2.3 配对 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \rangle$ .11

3 有序A圈积分的求值 11

3.1 自由费米子的 $2n$点函数 C_{2n} .11 3.2 有序A圈积分的求值.12 3.3 递归结构.23

4 GW生成级数的精细结构 24

4.1 T的纯权结构 $\overset{\Omega}{\underset{\mathrm{GW}n}{}}$ .24 4.2 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}_n}}$ 的拟椭圆性与拟模性.28 4.3 T_n 的椭圆与模补全.34

附录 A 有序A圈积分的拟椭圆性 **38**

A.1 椭圆函数与拟椭圆函数基础.38 A.2 定理 3.12 的证明.40

附录 B 求值 n点函数 43

B.1 自由玻色子与自由费米子的二点函数.43 B.2 有序A圈积分以及$n = 3$ 情形下的正则化积分. 47

1 引言

椭圆曲线在理解几何的现代面向方面发挥着重要作用。由于其丰富的内涵，它们处于多个分支的交汇处，并为许多理论和工具的发展提供了最简单的示例。本文聚焦于椭圆曲线的 Gromov-威滕（GW）理论。

1.1 椭圆曲线 GW 生成级数综述

设 $\mathcal{E}$ 是一个赋有凯勒类 ω 的椭圆曲线。令

$$\left\langle\!\left\langle \prod_{i=1}^{n} \omega\psi_i^{\ell_i} \right\rangle\!\right\rangle_{g,n,d}^{\bullet\mathcal{E}}$$

表示亏格为 g 、次数为 d 且具有 n 个标记点的非连通、定常后裔 GW 不变量（满足维数公理 $2g-2+n = \sum_{i=1}^{n}(\ell_i+1)$），其中 ψ_i 是附着于第 i 个标记的后裔余切线类，符号 $\bullet$ 表示非连通计数。由于插入项仅涉及 ω 的后裔类，该不变量被称为定常不变量。沿用 [OP06a], 的记号，我们记

$$\left\langle\!\left\langle \prod_{i=1}^{n} \omega\psi_i^{\ell_i} \right\rangle\!\right\rangle_{g,n}^{\bullet\mathcal{E}} = \sum_{d\geq 0} \left\langle\!\left\langle \prod_{i=1}^{n} \omega\psi_i^{\ell_i} \right\rangle\!\right\rangle_{g,n,d}^{\bullet\mathcal{E}} q^d, \quad \left\langle\!\left\langle \omega\psi^{-2} \right\rangle\!\right\rangle_{0,1}^{\bullet\mathcal{E}} := 1$$

并定义 n 点生成函数

$$F_n(z_1,\cdots,z_n;q) := \sum_{\ell_1,\cdots,\ell_n\geq -2} \left\langle\!\left\langle \prod_{i=1}^{n} \omega\psi_i^{\ell_i} \right\rangle\!\right\rangle_{g,n}^{\bullet\mathcal{E}} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\ell_i+1}. \tag{1.1}$$

著名的 GW/Hurwitz 对应 [OP06a, 定理 5] 将 F_n 与如下特征联系起来。沿用 [Oko01、OP06a、OP06b、EO06], 的记号，考虑由算子 ψ_r、$\psi^*{}_s$、r、$s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 生成的克利福德代数，它们满足

$$\psi_r\psi_s^* + \psi_s^*\psi_r = \delta_{r+s}\,.$$

半无限楔积 $\bigwedge^{\infty/2} V = \bigoplus_m \bigwedge^{\infty/2}{}_m V$，其中 m 表示荷，被构造为上述算子代数的一个表示。人们将上述算子组织成生成级数（称为场）

$$\psi(u) = \sum_r \psi_r u^{-r}, \quad \psi^*(v) = \sum_s \psi_s^* v^{-s}.$$

定义

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(u) &= \sum_r u^r \psi_{-r}\psi_r^* = [v^0](\psi(uv)\psi^*(v)), \\ \boldsymbol{T}_n(u) &= \boldsymbol{T}(u_1)\cdots\boldsymbol{T}(u_n) = [v_1^0 v_2^0\cdots v_n^0]\,(\psi(u_1v_1)\psi^*(v_1)\cdots\psi(u_nv_n)\psi^*(v_n)), \end{aligned}$$

其中算子按时间顺序排列：

$$|u_iv_i| > |v_i| > |u_jv_j| > |v_j| \text{ for } i<j. \tag{1.2}$$

下文中，记号 $[t^k]f$ 表示形式洛朗级数 f 中 t 的次数为 t^k 的系数。对 $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}} V$ 取相应的 $\langle - \rangle$ q-迹，记作下文所示，可得

$$\langle \boldsymbol{T}_n \rangle = [v_1^0 v_2^0 \cdots v_n^0] \left\langle \psi(u_1 v_1)\psi^*(v_1) \cdots \psi(u_n v_n)\psi^*(v_n) \right\rangle . \tag{1.3}$$

除去下文将详细说明的归一化因子外，这就是n点函数F_n

$$F_n(z_1, \cdots, z_n; q) = \operatorname{Tr}_{\bigwedge_0^{\frac{\infty}{2}} V} \left(q^H \prod_{i=1}^{n} \mathcal{E}_0(z_i) \right) , \quad \mathcal{E}_0(z_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{z_i(\lambda_k - k + \frac{1}{2})} , \tag{1.4}$$

∞其中H 是哈密顿算子，半无限楔积 $\bigwedge_0^{\frac{2}{}} V$ 中的态由划分$\lambda = \sum_k \lambda_k$标记。算子 $\mathcal{E}_0(z)$ 实际上就是在$u = e^z$下的算子$\boldsymbol{T}(u)$ 。

对应关系 (1.4) 使我们能够用来自 [BO00]的特征标公式改写n点函数$F_n(z1, \cdots, z_n, q)$

$$F_n(z_1, z_2, \cdots, z_n; q) = (q)_\infty^{-1} \cdot \sum_{\text{all permutations of } z_1, \cdots, z_n} \frac{\det M_n(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\theta(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)} , \tag{1.5}$$

其中$M_n(z_1$,$z2, \cdots$,$z_n)$ 是矩阵，其(i, j)，$j \neq n$ 项在$i > j + 1$ 时为零，否则为

$$\frac{\theta^{(j-i+1)}(z_1 + \cdots + z_{n-j})}{(j-i+1)!\theta(z_1 + \cdots + z_{n-j})} , j \neq n , \qquad \frac{\theta^{(n-i+1)}(0)}{(n-i+1)!} , j = n .$$

这里 $\theta(z)$ 是满足$(\partial_z \theta)(0) = 1$ 且$(q)_\infty$ 的唯一奇雅可比 θ函数: $= \prod^{+\infty}{}_{k=1}(1 - q^k)$是欧拉函数。这些公式虽然优美，却具有相当复杂的组合结构，因为它们以矩阵行列式表示，而矩阵的各项是雅可比 theta 函数在不同自变量组下的导数。

1.2 构形空间积分与分拆求和

本研究旨在从构形空间积分的角度，更具概念性地理解F_n ，并推导出关于这些积分的新公式。我们的出发点不是（1.4），而是（1.3）。

我们将重点讨论F_n 的一个缩放版本，其定义如下:

$$T_n(z_1, \cdots, z_n; q) := \theta(\sum_{i=1}^{n} z_i) \cdot (q)_\infty F_n(z_1, \cdots, z_n; q) . \tag{1.6}$$

注意，因子$(q)_\infty^{-1}$仅仅是亏格为一且没有标记点的区域所对应的不稳定连通分支的贡献。因此，乘以$(q)_\infty$即可抵消这一贡献。关于函数T_n的枚举内容，参见 [Zag16] （另见 [BO00、Oko01、Mil03]）。

设 $\mathrm{E} = \mathbb{C}/\Lambda_\tau, \Lambda_\tau = \mathbb{Z}2\pi\mathrm{i} \oplus \mathbb{Z}2\pi\mathrm{i}\tau$ 为一条椭圆曲线。在万有覆盖 $\mathrm{E} = \mathbb{C} \to \mathrm{E}$ 上固定加法坐标 z，并在覆盖 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \to \mathrm{E}$ 上固定乘法坐标 $\mathrm{u} = \mathrm{e}^z$ 。取 E 上原点为覆盖映射 $\mathbb{C} \to \mathrm{E}$ 下 $0 \in \mathbb{C}$ 的像。我们还固定一个弱托雷利标记 $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$，即 $\mathrm{H}_1(\mathrm{E}, \mathbb{Z})$ 的一个辛标架。类 A 是连接 $2\pi\mathrm{i}\tau$ 与 $2\pi\mathrm{i}$ $\tau + 2\pi\mathrm{i}$ 的线段在 $\mathbb{C}$上的像。

对于任意 $n \geq 1$，令 $\mathrm{Conf}_n(E)$ 为 E 上 n 个有序点的构形空间。我们将在相对构形空间 $\widetilde{E^n} \times_{\mathrm{Conf}_n(E)} \to E^n$上构造一个相对上同调类 φ_n^{GW}和一个相对同调类 γ_n^{GW}，然后考察它们的配对

$$\left\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle \tag{1.7}$$

具体而言，这就是纤维积分。它们的定义见第2节。

我们的第一个主要结果是以下分划求和公式。

定理 1.1. *(=命题 3.15+定理 4.3)* 设 $\boldsymbol{B}_n(z)$ 为变量 $\mathcal{E}_m^*(z), m \geq 1$ 的完全贝尔多项式 $\boldsymbol{B}_n(z)$，其中这些变量是艾森斯坦-克罗内克级数[1]

$$\mathcal{E}_m^*(z) := (-1)^{m-1}(m-1)!\left(\frac{1}{z^m} + \sum_{\lambda\in\Lambda_\tau - \{(0,0)\}}\left(\frac{1}{(z+\lambda)^m} + (-1)^{m-1}\frac{1}{\lambda^m}\right)\right), \quad m \geq 1\,.$$

设 $\widetilde{E^n}$ 在 $E^n \times \mathrm{Conf}_n(E)$ 的 n 个分量上的线性坐标分别为 $z_1, \cdots, z_n$。记$\prod_{[n]\setminus\{j\}}$ 为 $[n]\setminus\{j\}$ 的划分集合，其中各元素均具有形式 $\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_\ell\}$。于是有

$$\left\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle = \sum_{j\in[n]}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}} \frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|}, \quad \frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|} := \prod_{k=1}^{\ell}\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|}(\sum_{i\in\pi_k} z_i)}{|\pi_k|}\,. \tag{1.8}$$

证明方法是先将 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$ 具体表示为积分（见 (3.14)）。然后，我们根据 φ_n^{GW}关于多变量椭圆函数的显式表达式进行计算。在推导定理 1.1 时，我们还得到了若干纯组合结果，例如定理 3.12 和定理 3.18；这些结果似乎也具有独立的研究价值。它们与 [BO00] 中的部分旗公式相对应。

根据定理 1.1，我们进而将 (1.6) 中的 GW 生成级数T_n 与 (1.7) 中代数几何量之间的配对联系起来。

定理 1.2. *(=定理 4.9)* 沿用上述记号，设$\widetilde{E^n}$ 在 $\widetilde{E^n} \times \mathrm{Conf}_n(E)$ 的 n 个分支上的线性坐标分别为 $z_1, \cdots, z_n$，并令 $q = e^{2\pi \mathbf{i}\tau}$。则

$$T_n(z_1, \cdots, z_n; q) = \left\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle. \tag{1.9}$$

这一结果是对 [OP06a, OP06b] 中证明的（1.3）在其等价形式（1.4）下的重新表述。 [EO06 第3节3] 也提供了计算（1.3）的一种实用方法（另见 [Mil03]）。然而，除了将其化简为（1.4）之外，我们在文献中没有发现关于如何计算它们的系统研究。因此，我们决定利用（1.3）中的量 $\langle \psi(u_1 v_1)\psi^*(v_1)\cdots\psi(u_n v_n)\psi^*(v_n)\rangle$ 纯属代数几何且具有显式形式这一事实，为该结果给出第二个证明。定理 1.2 的证明通过说明（1.9）右端满足相同的差分方程和关于 T_n 的奇异性条件来完成；根据定理 1.1，该右端由（1.8）中的求和表达式给出。相关条件见 [BO00]（另见 [Oko01]）。这些条件足以唯一确定它们。

[1]变量 $\mathrm{x}1, \cdots, \mathrm{x}_m, \cdots$ 的完全贝尔多项式的一个简明定义为 $\mathrm{B}_m(\mathrm{x}1, \cdots, \mathrm{x}_m) = \mathrm{m}!\cdot[\mathrm{t}^m]\exp(\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{tk}\,\mathrm{k}!\,\mathrm{x}_k)$。量 $\mathcal{E}_m^*$ 也可以写成 $(\ln\theta)^{(m)} + 2\mathrm{G}_m$，其中 $2\mathrm{G}_m$ 是普通艾森斯坦级数，定义为对 $(\mathrm{m}-1)!\cdot\lambda^{-m}$ 在 $\lambda\in\Lambda_\tau - \{(0,0)\}$ 上求和所得。

上述构形空间积分结果符合镜像对称的一般理念，即“GW 生成级数 = 周期积分”。然而，它不同于椭圆曲线镜像对称中更原始、也更常见的表述 [Dij95] （另见 [RY09, BBBM17, GM20, Li11, Li12, Li16, LZ21]）：后者将（1.1）中的一个劳朗系数与一组由图标记的上同调类的周期积分之和联系起来。

定理 1.2 中的积分公式为利用有序A-圈积分以及 LZ21, LZ23] 中发展的正则化积分工具，研究F_n的性质提供了新的视角。我们通过研究F_n的椭圆与模补全来展示这一点。

定理 1.1 和定理 1.2 中的结构性结果有助于进一步研究 GW 生成级数的性质。我们希望这些经过特别整理的形式能够为探索 GW 生成级数的丰富结构（如拟模性）与构形空间分层之间的关系提供一些启示。

论文结构

在第2节中，我们构造相对上同调 φ_n^{GW}和同调类 γ_n^{GW}。在第3节中，我们推导式 (1.7) 的具体公式，不仅适用于类 γ_n^{GW}，也适用于其他自然的圈类γ_n。在第4节中，我们将结果特化到类 γ_n^{GW}，并在假设定理 3.12 成立的基础上证明主要结果定理 1.1 和定理 1.2，同时证明有关T_n的拟椭圆性和拟模性的其他一些结果。我们还利用正则化积分这一工具研究T_n 的性质。在附录 A 中，我们回顾雅可比 theta 函数的一些基本性质，并证明定理 3.12。我们将有关n点函数的一些复杂计算放在附录 B 中。

致谢

作者感谢李思和沈烨峰在相关课题上的富有成果的合作，并感谢张定新和周子俊给予的有益交流与讨论。作者得到国家重点研发计划（编号：2022YFA1007100）和国家海外高层次青年人才引进计划的支撑。

记号与约定

- 为简化记号，只要函数的自变量由上下文可明确知晓，我们通常会省略这些自变量。

- 在全文中，当我们需要记录诸如函数f_n 这类构造中的变量时，其中的变量取自某个有限集J 或变量序列$\boldsymbol{K}$，且其基数为n，我们使用记号f_J 或$f_{\boldsymbol{K}}$。相应地，我们会滥用记号S，同时表示集合S 及其基数 $|S|$。

- 在理解映射 $\exp:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ 的基础上，我们在 $\mathbb{C}$ 上使用加法坐标z，并在 $\mathbb{C}^*$ 上使用乘法坐标$u = e_z$，两者可以互换使用。

对于非空集合$S \subseteq [n] := (1, 2, \cdots, n)$，我们使用如下记号：

$$z_S = \sum_{i\in S} z_i\,, \quad u_S = \prod_{i\in S} u_i\,.$$

- 取一个空间 X 和一个非空有限集 S，令 X_a 为一个副本，其标签由 X 赋予 $a \in S$，并

$$X_S = \prod_{a\in S} X_a\,, \quad \mathsf{Conf}_S(X) = \left\{(p_a)_{a\in S} \in \prod_{a\in S} X_a \mid p_a \neq p_b \text{ for } a \neq b \in S\right\}.$$

  X_S 中 $\mathsf{Conf}_S(X)$ 的补集称为 X_S 中的大对角线。

- 我们分别用 P 和 Q统称点 $P_i, 1 \leq i \leq n$ 和 $Q_j, 1 \leq j \leq n$。类似地，我们采用相同约定表示一列坐标，例如 $z = (z1, \cdots, zn)$。

- 记号 $[t^k]f$ 表示 f 关于 t 的形式洛朗级数中 t^k 项的系数。

2 配对的构造 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \rangle$

本节将构造一个相对上同调类 φ_n^{GW}和一个相对同调类γ_n^{GW}，然后利用奇异上同调与奇异同调之间的相对配对，定义式 (1.7) 中所需的配对 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \rangle$。这些构造旨在将式 (1.3)“几何化”。

令 $\kappa \in \mathrm{Pic}_{(g-1)}(E)$ 为唯一的奇 theta 特征 $\kappa^{\otimes 2} = K_E$，同时也是唯一满足 $h^0(E, \kappa) \neq 0$的特征。它是雅可比簇 $\mathrm{Jac}(E) \cong \mathrm{Pic}_{(0)}(E)$上对应奇 theta 除子的黎曼常数。线丛 $\mathcal{O}_{\mathsf{Jac}(E)}([\Theta])$ 以 θ 为其唯一的全纯截面，该截面沿 Θ消失，并满足归一化条件 $(\partial_z\theta)(0) = 1$。

令 $\eta \in \mathrm{Pic}_{(g-1)}(E)$ 和 c 为 $\mathrm{Jac}(E)$上的对应平移 $\eta \otimes \kappa^{-1}$。考虑映射

$$\delta \times \mathrm{id} : E \times E \to J \times \Delta\,, \quad (P, Q) \mapsto (P - Q, Q)\,,$$

其中 J 是 E 的一个副本，通过相对于全纯体积形式 $dz \in H^0(E, K_E)$的阿贝尔-雅可比映射与 $\mathrm{Jac}(E)$ 同构。在包含映射下

$$\Delta \to J \times \Delta \xrightarrow{(\delta\times\mathrm{id})^{-1}} E \times E\,,$$

空间 Δ 可视为 $E \times E$中的对角线。其 A-圈类 $A \in H_1(\Delta)$ 随后在 Künneth 分解下映射为$A \otimes 1 + 1 \otimes A \in H_1(E \times E)$。记 $\check{}\eta = \eta^{-1} \otimes K_E$ 为 η的塞尔对偶。众所周知（例如参见 [Rai89, BL13]）

$$\delta^* L_c \cong (\check{}\eta \boxtimes \eta) \otimes \mathcal{O}_{E\times E}([\Delta])\,, \quad L_c := \mathcal{O}_J([\Theta - c])\,, \tag{2.1}$$

这里的 $\Theta - c$ 是将 Θ 平移 $-c$ 后得到的除子。此外，如果 $c \neq 0$，那么除一个常数因子外，存在唯一的截面 $(\check{}\eta \boxtimes \eta)(\Delta)$。Szegö 核 $S_c(P - Q)$ 就是这样一个截面，它由沿对角线 Δ 的留数唯一确定。

现在取椭圆曲线的 $2n$ 个副本，分别标记为 $[n] = (1, 2, \cdots, n)$、$[\bar{}n] = (\bar{1}, \cdots, \bar{n})$。另记 $E_{[n]} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$。令

$$\boldsymbol{\delta \times id} : E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]} \to \mathsf{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]} \tag{2.2}$$

为这些映射的笛卡尔积

$$\begin{aligned} \delta_k \times \mathrm{id}_{\bar{k}} : E_k \times E_{\bar{k}} &\to J_k \times \Delta_k , \\ (P_k, Q_k) &\mapsto (P_k - Q_k, Q_k) , \quad k = 1, 2, \cdots, n . \end{aligned}$$

将 $\mathrm{J}_{[n]}$,$\Delta_{[n]}$ 的第 k 个分量上的线性坐标分别记为 z_k、w_k。令 $u_k = e^{z_k}$、$v_k = e^{w_k}$。

令 J° 表示去掉原点 0 后的去心雅可比簇，其对应的笛卡尔积为 $\mathrm{J}^\circ_{[n]} \subsetneq \mathrm{J}_{[n]}$。另令 $\mathrm{Conf}_{[n]}(\Delta)$ 表示 $\Delta_{[n]} \cong \Delta^n$ 中大对角线的补集。为后续使用，我们在表 1 中列出上述两个空间上的各种除子$E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]}$,$\mathrm{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]}$。我们用记号 $|\mathrm{D}| = \mathrm{D}_0 + \mathrm{D}_\infty$ 表示 $\mathrm{D} = -\mathrm{D}_0 + \mathrm{D}_\infty$ 的支撑。

表 1： $E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]}$ 与 $\mathrm{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]}$ 上通过映射 $\delta \times id$ 相关的除子。

除子在$E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]}$	上的除子$\mathrm{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]}$
$\Delta = -\sum_{i<j} \Delta_{ij} - \sum_{i<j} \Delta_{\bar{i}\bar{j}} + \sum_{i,j} \Delta_{i\bar{j}}$	$\mathrm{D} = (\delta \times \text{标识})^{-1}(\Delta)$
$+ \sum_{i<j} \Delta_{ij} + \sum_{i<j} \Delta_{\bar{i}\bar{j}}$	D_0
$+ \sum_{i<j} \Delta_{\bar{i}\bar{j}}$	$\mathrm{J}_{[n]} \times (\Delta_{[n]} - \mathrm{Conf}_{[n]}(\Delta))$
$+ \sum_{i,j} \Delta_{i\bar{j}}$	D_∞
$+ \sum_i \Delta_{i\bar{i}}$	$(\mathrm{J}_{[n]} - \mathrm{J}^\circ_{[n]}) \times \Delta_{[n]}$
$+ \sum_{i,j:\, i \neq j} \Delta_{i\bar{j}}$	D°_∞

2.1 构造 Φ_n^{GW}

使用该　在映射 (2.2) 中，我们有图 1 中的以下映射。这里 π_k,$k = 1, 2, 3$ 是投影

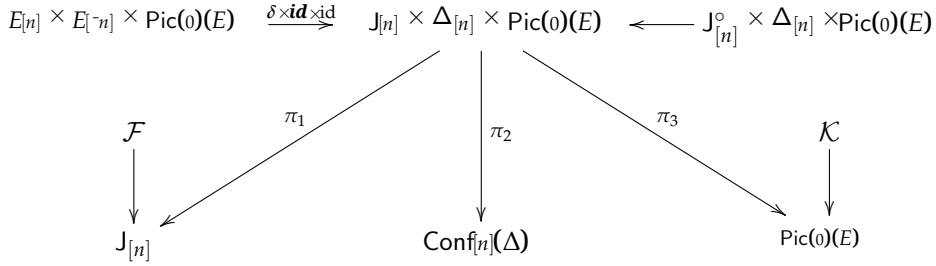

图 1： 空间之间的映射。

分别从 $\mathrm{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]} \times \mathrm{Pic}(0)(E)$ 到其三个分量。层 $\mathcal{F}$、$\mathcal{K}$ 将在后文定义（见（2.7））。

令 $\boxtimes$ 表示向量丛的外张量积。例如，在空间 $\mathrm{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]} \times \mathrm{Pic}^{(0)}(E)$上， $\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3 := \pi_1^*\mathcal{F}_1 \otimes \pi_2^*\mathcal{F}_2 \otimes \pi_3^*\mathcal{F}_3$。

定义 2.1. 通过映射 $\mathrm{c} \mapsto \mathrm{L_c L_0^{-1}}$，将 Pic(0)(E) 与 Pic(0)(J) 等同。令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathrm{J} \times$ Pic(0)(E) 上的庞加莱层，并将其规范化，使得 $\mathcal{P}|_{\{0\}\times \mathrm{Pic}^{(0)}}$(E) 为平凡层。相应地，令 $\mathrm{J}_{[n]} \times$ Pic(0)(E) 上的层 $\mathcal{P}_{[n]}$ 为 $\mathrm{J}_k \times$ Pic(0)(E) 上各庞加莱层的拉回的张量积，其中 $\mathrm{k} \in [\mathrm{n}]$。记

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_\Theta &:= \pi_3^{-1}\Theta \subseteq \mathsf{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]} \times \mathsf{Pic}^{(0)}(E)\,, \\ \boldsymbol{\Delta}_\Theta &:= (\delta \times \boldsymbol{id} \times \mathrm{id})^{-1}\mathsf{D}_\Theta \subseteq E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]} \times \mathsf{Pic}^{(0)}(E)\,. \end{aligned}$$

令 π_{ij} 为到 i、j 分量的乘积的投影。定义以下层

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{[n]} \boxtimes \mathcal{O}_{\Delta_{[n]}}(\pi_{12}^{-1}\mathsf{D})\,, \quad \mathcal{M} = (\delta \times \boldsymbol{id} \times \mathrm{id})^*\mathcal{L}\,. \tag{2.3}$$

注 2.2. 令 $m : J \times \mathrm{Pic}^{(0)}(E) \to J$ 为 $J \cong \mathrm{Pic}^{(0)}(E)$上的加法映射。于是显然有

$$\mathcal{P} \cong \mathcal{O}_{J\times \mathrm{Pic}^{(0)}(E)}(-[0 \times \mathrm{Pic}^{(0)}(E)] - [J \times \Theta] + [\ker m])\,.$$

亚纯截面由上文提到的 Szegö 核给出。

根据定义 2.1 的构造，有 $\mathcal{P}|_{J\times\{c\}} = L_c L_0^{-1}$。由 (2.1) 可直接验证，当 $c \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}\times\{c\}} &\cong \boxtimes_{[n]} L_c L_0^{-1} \boxtimes \mathcal{O}_{\Delta_{[n]}}(\mathsf{D})\,, \\ \mathcal{M}|_{E_{[n]}\times E_{[\bar{n}]}\times\{c\}} &\cong \boxtimes_{[n]} \check{\eta} \boxtimes \boxtimes_{[n]} \eta(\boldsymbol{\Delta})\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

层 $\mathcal{M}$ 随后给出族 $\pi_3 :$ E[n] × E[¯n] ×Pic(0)(E) → Pic(0)(E) 在 Pic(0)(E) 上的数据 $\{\mathcal{M}_c\}_{c\in \mathrm{Pic}^{(0)}}$(E)。文献 [Rai89] 证明，当 $\mathrm{c} \neq 0$ 时，除去标量因子， $\mathcal{M}_c$ 有唯一的亚纯截面：h^0(E[n] × E[¯n], $\mathcal{M}_c$) = 1。它们粘合成如下截面，该截面在除子 $\boldsymbol{\Delta}_\Theta$处有一个简单极点

$$C_{2n} \in H^0(E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]} \times \mathsf{Pic}^{(0)}(E), \mathcal{M}(\boldsymbol{\Delta}_\Theta))\,. \tag{2.5}$$

这个特定截面就是 $\langle \psi(u_1v_1)\ \psi^*(v_1)\ \cdots \psi(u_nv_n)\ \psi^*(v_n)\rangle$ 式 (1.3) 中的量；其具体表达式见下文 (3.5)。我们取它在 $\boldsymbol{\Delta}_\Theta = E[n] \times E[\bar{n}] \times \Theta \cong E[n] \times E[\bar{n}]$处的留数

$$\omega := \mathrm{Res}_{\boldsymbol{\Delta}_\Theta}(C_{2n}) \in H^0(E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]}, \mathcal{M}(\boldsymbol{\Delta}_\Theta)|_{\boldsymbol{\Delta}_\Theta})\,. \tag{2.6}$$

这里我们使用了以下事实：$E_{[n]} \times E_{[\bar{n}]} \times \mathrm{Pic}^{(0)}(E)$ 的典范层是平凡的，并且配备了由 $dz \in H^0(E,K_E)$ 所诱导的自然平凡化。

接下来，我们在图 1 所示的空间上构造层以及它们之间的态射。

- 令 $\mathcal{F}$ 为 J[n 上的如下层]

$$\mathcal{F} := \mathcal{P}_{[n]}(\mathsf{J}_{[n]} \times \Theta)|_{\mathsf{J}_{[n]}\times\Theta}\,. \tag{2.7}$$

再令 $\mathcal{K}$ 为 $\Delta_{[n]}$ 上的典范层。由 (2.4) 可得

$$\left((\delta \times \boldsymbol{id})^{-1}\right)^* \mathcal{M}(\boldsymbol{\Delta}_\Theta)|_{\boldsymbol{\Delta}_\Theta} \cong \mathcal{L}(\mathsf{D}_\Theta)|_{\mathsf{D}_\Theta} \cong (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{K})(\mathsf{D})\,. \tag{2.8}$$

• 令 $\boldsymbol{j}:\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}{}^{-}\mathsf{D}_\infty\to\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}$ 为开嵌入。将伴随应用于

$$(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{K})(\mathsf{D}_\infty)\to\boldsymbol{j}_*\boldsymbol{j}^*(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{K})(\mathsf{D}_\infty),$$

得到一个映射

$$\boldsymbol{j}^*:H^0(\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]},(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{K})(\mathsf{D}_\infty))\hookrightarrow H^0(\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}-\mathsf{D}_\infty,\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{K}). \tag{2.9}$$

• 令 $\pi_1^\circ:\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}{}^{-}\mathsf{D}_\infty\to\mathring{\mathsf{J}}_{[n]}$ 为由开嵌入 $\boldsymbol{j}$ 诱导的投影，并令 $\pi_{1\circ}$。类似地，在记号中使用上标和下标 $\circ$，表示由开嵌入 $\boldsymbol{j}$诱导的拉回构造。

应用相对德拉姆分解，我们得到

$$\pi_{1,\circ}^{-1}\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{G}^\bullet\otimes\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ:=(\Omega^\bullet_{(\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}-\mathsf{D}_\infty)/\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}-\mathsf{D}_\infty}}\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ,d_{\mathrm{dR}}\otimes\mathrm{id}).$$

应用函子 $R^n\pi_{1,*}^\circ(-)$ 和伴随性，得到同构

$$R^n\pi_{1,*}^\circ(\mathcal{G}^\bullet\otimes\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ)\xrightarrow{\cong}R^n\pi_{1,*}^\circ\pi_\circ^{-1}\mathcal{F}^\circ\xrightarrow{\cong}\mathcal{F}^\circ\otimes_{\mathbb{C}}R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{C}.$$

取 $H^0(-)$ 得到一个映射

$$\mathfrak{r}:H^0(\mathsf{J}^\circ_{[n]},R^n\pi_{1,*}^\circ(\mathcal{G}^\bullet\otimes\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ))\to H^0(\mathsf{J}^\circ_{[n]},\mathcal{F}^\circ\otimes_{\mathbb{C}}R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{C}). \tag{2.10}$$

• 标准的谱序列方法给出一个映射

$$\pi_{1,*}^\circ(\mathcal{F}^\circ\boxtimes\mathcal{K})\to R^n\pi_{1,*}^\circ(\mathcal{G}^\bullet\otimes\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ)$$

在取 $H^0(-)$ 后给出一个映射

$$\mathfrak{s}:H^0(\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}-\mathsf{D}_\infty,\mathcal{F}^\circ\boxtimes\mathcal{K})\to H^0(\mathsf{J}^\circ_{[n]},R^n\pi_{1,*}^\circ(\mathcal{G}^\bullet\otimes\pi_{1,\circ}^*\mathcal{F}^\circ)). \tag{2.11}$$

结合（2.8）、（2.9）、（2.11）和（2.10），可得到一个映射

$$\mathfrak{r}\circ\mathfrak{s}\left(\boldsymbol{j}^*((\delta\times\boldsymbol{id})^{-1})^*-\right):H^0(E_{[n]}\times E_{[\bar{n}]},\mathcal{M}(\boldsymbol{\Delta}_\Theta)|_{\boldsymbol{\Delta}_\Theta})\to H^0(\mathsf{J}^\circ_{[n]},\mathcal{F}^\circ\otimes_{\mathbb{C}}R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{C}). \tag{2.12}$$

我们现在如下得到一个上同调类 Φ_n^{GW}。

定义 2.3。类 Φ_n^{GW} 定义为

$$\Phi_n^{\mathrm{GW}}=\mathfrak{r}\circ\mathfrak{s}\left(\boldsymbol{j}^*((\delta\times\boldsymbol{id})^{-1})^*\varpi\right)\in H^0\left(\mathsf{J}^\circ_{[n]},\left(\mathcal{P}^\circ_{[n]}(\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times\Theta)|_{\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times\Theta}\right)\otimes_{\mathbb{C}}R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{C}\right).$$

2.2 构造 γ_n^{GW}

令 $A\in H_1(\Delta)$ 为A-循环类在 Δ 上。令 $A^{\mathrm{GW}}\in H^0(\mathring{\mathsf{J}}_{[n]'}(R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{Z})^*)$ 为由平凡乘积给出的相对同调类。

$$\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times(A\otimes\cdots\otimes A)\subseteq\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times H_n(\Delta_{[n]}),$$

其中，$(A\otimes\cdots\otimes A)$ 在 Künneth 分解下被视为 $H_n(\Delta_{[n]})$ 中的一个元素。

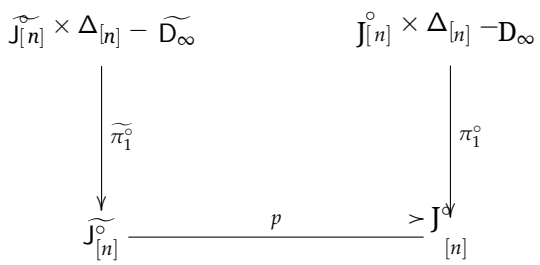

图 2: 提升到$\overset{\circ}{J}_{[n]}$的覆叠。

定义 2.4. 和前面一样，令 $\mathbb{C}^* \to J \cong E$ 为覆盖映射。类似地，令 $p : \overset{\circ}{J}_{[n]} \to \overset{\circ}{J}_{[n]}$ 和 $\widetilde{D}_\infty \to D_\infty$ 为相应的（纤维上的）覆盖映射；并令 $\pi_1^\circ : \overset{\circ}{J}_{[n]} \times \Delta_{[n]} - D_\infty \to \overset{\circ}{J}_{[n]}$ 为提升 $p^*\pi_1^\circ$（见图 2）。对于每个 $(u1, \cdots, u_n) \in \widetilde{\overset{\circ}{J}}_{[n]'}$，定义 γ_n^{GW}为一个圈，其由以下形式的圈的像给出

$$\Gamma_n^{\mathrm{GW}} := \left\{ v \in (\mathbb{C}^*)^n \mid |v_j| = \text{constant for } j \in [n], \text{ subject to } |\frac{u_i v_i}{v_j}|, |\frac{v_i}{u_j v_j}| > 1 \text{ for } i < j \right\}$$

在商映射 $(\mathbb{C}^*)^n \to \Delta_{[n]}$ 下。下方的图 3 展示了相关示意图。

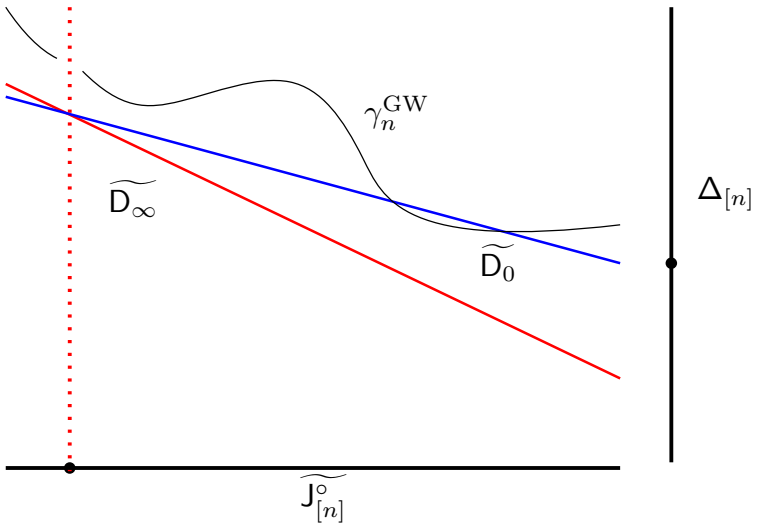

图 3: 构造避开除子 $\widetilde{D}_\infty$ 的圈 γ_n^{GW}（以红色显示）。

由于 γ_n^{GW}是闭的且避开 $\widetilde{D}_\infty$，它给出了 $H^0(\widetilde{\overset{\circ}{J}}_{[n]'}(R^n\widetilde{\pi_1^\circ}_*\mathbb{Z})^*)$ 中的一个循环类，仍沿用记号 γ^{GW} 来表示（滥用记号）。根据构造，它是 $A^{\mathrm{GW}} \in H^0(\overset{\circ}{J}_{[n]'}(R^n\pi_{1,*}^\circ\mathbb{Z})^*)\widetilde{}$ 沿同调中由覆盖映射 $p : \overset{\circ}{J}_{[n]} \to \overset{\circ}{J}_{[n]}$ 诱导的映射的一个提升。

2.3 配对 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$

定义 2.5。类 φ_n^{GW} 定义为

$$\varphi_n^{\mathrm{GW}} := p^*\Phi_n^{\mathrm{GW}} = p^*\circ\mathfrak{r}\circ\mathfrak{s}\left(\boldsymbol{j}^*((\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{id})^{-1})^*\varpi\right)\in H^0\left(\mathsf{J}^\circ_{[n]},\left(\widetilde{\mathcal{P}^\circ_{[n]}}(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta)|_{\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta}\right)\otimes_{\mathbb{C}} R^n\widetilde{\pi^\circ_{1,*}}\mathbb{C}\right).$$

奇异同调与奇异上同调中的配对给出了一个映射

$$\begin{aligned}\left\langle -,-\right\rangle:\quad H^0\left(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}},(R^n\widetilde{\pi^\circ_{1,*}}\mathbb{Z})^*\right)\quad\times\quad & H^0\left(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}},\left(\widetilde{\mathcal{P}^\circ_{[n]}}(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta)|_{\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta}\right)\otimes_{\mathbb{C}} R^n\widetilde{\pi^\circ_{1,*}}\mathbb{C}\right)\\ \to\quad & H^0\left(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}},\widetilde{\mathcal{P}^\circ_{[n]}}(\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta)|_{\widetilde{\mathsf{J}^\circ_{[n]}}\times\Theta}\right).\end{aligned}\tag{2.13}$$

进而得到式 (1.7) 中所需的配对 $\langle\gamma_n^{\mathrm{GW}}、\ \varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$。经过一个称为椭圆补全的自然过程后，该配对事实上下降为 $\mathcal{P}^\circ_{[n]}\ (\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times\Theta)\ |_{\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times\Theta}$ 的光滑截面。详情请参见第 4.3 节，尤其是注 4.13。

将定义 2.5 中的上同调类 φ_n^{GW} 表示为相对全纯 （n,0）-形式，如式 (2.11) 中的 $\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$ 所示，则配对 (2.13) 变为沿 π_1° 的纤维积分：$\mathsf{J}_{[n]}\times\Delta_{[n]}-\mathrm{D}_\infty\to\mathsf{J}^\circ_{[n]}$。为便于实际求值，稍后我们将用 π_1° 替换

$$\mathsf{J}^\circ_{[n]}\times\mathsf{Conf}_{[n]}(\Delta)-|\mathrm{D}|\to\mathsf{J}^\circ_{[n]},$$

随后选择提升 γ_n^{GW}，使其避开整个轨迹 $|\widetilde{\ }\mathrm{D}|=\widetilde{\ }\mathrm{D}_\infty+\widetilde{\ }\mathrm{D}_0$。我们将在命题 3.15 中再次确认，这不会改变配对。因此，(2.13) 相应地变为一个相对构形空间积分。

3 有序A-圈积分的求值

本节将给出第2节中各项构造的具体表达式，并用雅可比 θ 函数显式计算 (1.7)。

3.1 自由费米子的$2n$点函数C_{2n}

我们首先回顾 [BL13] 中一些标准构造，这些构造是计算配对 (1.7) 所必需的。

以线性坐标z而言，线丛 $\mathcal{O}_{\mathrm{Jac}(E)}([\Theta])$ 有一个全纯截面 $\vartheta_{(\frac12,\frac12)}$，它在 Θ 处消失，定义如下：

$$\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z,q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n+\frac12}q^{\frac12(n+\frac12)^2}e^{(n+\frac12)z}.$$

它满足以下自守性

$$\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z+2\pi\mathbf{i}) = \vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z),\quad \vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z+2\pi\mathbf{i}\tau) = -e^{-\pi\mathbf{i}\tau}e^{-z}\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z).\tag{3.1}$$

由雅可比三重乘积公式可得

$$\theta(z) = \frac{\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z,q)}{\partial_z\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z,q)|_{z=0}} = 2\pi\mathbf{i}\frac{\vartheta_{(\frac12,\frac12)}(z,q)}{-2\pi(q^{\frac{1}{24}}(q)_\infty)^3} = (q)_\infty(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}})\prod_{k\geq1}(1-q^ke^z)(1-q^ke^{-z}).\tag{3.2}$$

椭圆曲线上的素形式是由 $\mathcal{O}_{E\times E}([\Delta])$ 给出的截面

$$E(P,Q)=\frac{\vartheta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(P-Q)}{\theta'(0)}=\theta(P-Q)\,. \tag{3.3}$$

令 $\eta\in \mathrm{Pic}(0)(E)$ 及 c 为 $\mathrm{Jac}(E)$ 上相应的平移 $\eta\otimes\kappa^{-1}$。记 $\theta_c: z\mapsto\theta(z+c)$，它是 $L_c=\mathcal{O}_{\mathrm{Jac}}([\Theta-c])$ 的全纯截面。于是，$\theta_c(0)=0$ 当且仅当 $c=0$，即$\eta=\kappa$。Szegö 核是 $(\check{}\eta\boxtimes\eta)(\Delta)$ 的截面，由下式给出

$$S_c(P,Q)=\frac{\theta_c(P-Q)}{\theta_c(0)}\frac{1}{E(P,Q)}\,,\quad c\neq 0\,. \tag{3.4}$$

这是椭圆曲线 E 上自由费米子 [Rai89] 的二点函数 $\langle\psi(P)\psi^*(Q)\rangle$，另见附录 B.1。一般而言，式 (1.3) 中自由费米子的 $2n$ 点函数 $\langle\psi(P_1)\psi^*(Q_1)\cdots\psi(P_n)\psi^*(Q_n)\rangle$，其中 $n\geq 2$，由式 (2.5) 给出，其中

$$C_{2n}(P,Q)=\frac{\theta_c(\sum P_i-\sum Q_j)}{\theta_c(0)}\frac{\prod_{i<j}E(P_i,P_j)E(Q_i,Q_j)}{\prod_i E(P_i,Q_i)\cdot\prod_{i<j}E(P_i,Q_j)E(Q_i,P_j)}\,,\quad c\neq 0\,. \tag{3.5}$$

上述量在$c=0\in$Pic(0)(E)处有一个一阶极点。式 (2.6) 中的截面 ϖ 是其在$c=0$处的留数，具体为

$$\varpi=(\theta_c(0)\cdot C_{2n})|_{c=0}=\theta(\sum P_i-\sum Q_j))\cdot\frac{\prod_{i<j}E(P_i,P_j)E(Q_i,Q_j)}{\prod_i E(P_i,Q_i)\cdot\prod_{i<j}E(P_i,Q_j)E(Q_i,P_j)}\,. \tag{3.6}$$

Fay 多割线恒等式（亦称玻色子-费米子对应，参见例如 [Rai89, KNTY88]）给出

$$C_{2n}(P,Q)=\det\left(S_c(P_i,Q_j)\right). \tag{3.7}$$

交替使用加法坐标 $\mathrm{z}_i+\mathrm{w}_i$、$\mathrm{w}j$ 和乘法坐标 $\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i$、$\mathrm{v}j$ 来表示 P_i、$\mathrm{Q}j$，则在映射 $\delta\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}:\mathrm{E[n]}\times\mathrm{E[-n]}\times\mathrm{Pic(0)(E)}\to\mathrm{J[n]}\times\Delta\mathrm{[n]}\times\mathrm{Pic(0)(E)}$ 下，我们有

$$\left((\delta\times\boldsymbol{id}\times\mathrm{id})^{-1}\right)^*C_{2n}=\frac{\theta_c(\prod_i u_i)}{\theta_c(0)}\frac{\prod_{i<j}\theta(\frac{u_iv_i}{u_jv_j})\theta(\frac{v_i}{v_j})}{\prod_i\theta(u_i)\cdot\prod_{i<j}\theta(\frac{u_iv_i}{v_j})\theta(\frac{v_i}{u_jv_j})}\,.$$

由 (3.1) 可直接验证，它在v_i、$i=1$、2、$\cdots$、n中的自守因子确实平凡，这与 (2.8) 一致。

下文在进行识别时，将忽略诸如 $\left((\delta\times\boldsymbol{id}\times\mathrm{id})^{-1}\right)^*$ 这样的繁复记号。

3.2 有序A-圈积分的求值

为便于记号表示，我们引入

$$\varpi=\theta(\sum P_i-\sum Q_j)\cdot\Theta_{2n}(P,Q)\,,\quad \Theta_{2n}(P,Q):=\frac{\prod_{i<j}\theta(P_i,P_j)\theta(Q_i,Q_j)}{\prod_i\theta(P_i,Q_i)\cdot\prod_{i<j}\theta(P_i,Q_j)\theta(Q_i,P_j)}\,. \tag{3.8}$$

定义 3.1。 令 $[n]=(1,2,\cdots,n)$, $[n]=\overline{(\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n})}$。考虑区域

$$\Omega:=\Big\{(u,v)|\bigcap_{\substack{(a,b)\in([n]\cup\overline{[n]})^2\\ a\neq b}}(-1)^{\chi_{ab}}(|x_a|-|x_b|)>0\Big\},\quad x_i:=u_iv_i\,,\ x_{\bar{j}}:=v_j\,, \tag{3.9}$$

其中， χ_{ab} 是在(a,b) 处的函数值

$$\chi:([n]\cup\overline{[n]})^2\setminus\{(a,a)|a\in[n]\cup\overline{[n]}\}\to\{0,1\}\,. \tag{3.10}$$

设 $\gamma_n^\Omega\subseteq\Omega$ 为给定的圈

$$|v_j|=\text{constant for } j\in[n]\,,\quad \text{subject to}\quad |\frac{x_a}{x_b}|^{(-1)^{\chi_{ab}}}>1 \text{ for } a,b\in[n]\cup[\bar{n}]\,. \tag{3.11}$$

定义

$$T_n^\Omega:=[v_1^0\cdots v_n^0]\left(\theta(\prod_k u_k)\,\Theta_{2n}\right)=(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}})^n\int_{\gamma_n^\Omega}\frac{dv_1}{v_1}\cdots\frac{dv_n}{v_n}\,\theta(\prod_k u_k)\,\Theta_{2n}(P,Q)\,. \tag{3.12}$$

在下文中，我们将 $[v^0]:=[v_1^0\cdots v_n^0]$ 记为，以简化记号。

注意，提取 v^0项需要展开傅里叶级数，因此需要选择收敛域 Ω。例如，由附录 A 中的 (A.4) 和 (3.1) 可得

$$\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}=\begin{cases}-\frac{1}{2}-\sum_{k\neq0}\frac{v^k}{1-q^k}\,, & |q|<|v|<1\,,\\ \frac{1}{2}-\sum_{k\neq0}\frac{q^kv^k}{1-q^k}\,, & |1|<|v|<|q|^{-1}\,.\end{cases} \tag{3.13}$$

特别地，v^0 项分别由 $-\frac{1}{2}$ 和 12 给出。这一细微之处给计算区域 (3.9) 中的 $[v^0](\theta(\prod_k u_k)\Theta_{2n})$ 带来了技术上的困难，我们将在本截面中解决这一问题。

根据定义，区域 Ω 和特征函数 χ 彼此确定。我们之后常将它们称为排序。如第2节所述，有

$$\Big\langle\ \gamma_n^\Omega\,,\ \varphi_n^{\mathrm{GW}}\ \Big\rangle=T_n^\Omega\,. \tag{3.14}$$

从计算角度看，这就是在 E 上按照 (3.9) 排序的 A 圈乘积上的纤维积分。

第 2.2 节中循环类 A^{GW} 的提升 γ_n 当然并不唯一。特别值得关注的是由区域[2]确定的那些提升

$$\Omega_{\mathrm{Wick}}:=\Big\{(u,v)\mid|u_1v_1|>|u_2v_2|>\cdots>|u_nv_n|>|v_n|>\cdots>|v_2|>|v_1|\Big\}\,. \tag{3.15}$$

以及 (1.2) 中的区域（见 [EO06，公式 32，公式 34]）

$$\Omega_{\mathrm{GW}}:=\Big\{(u,v)\mid|u_1v_1|>|v_1|>|u_2v_2|>|v_2|>\cdots>|u_nv_n|>|v_n|\Big\}\,. \tag{3.16}$$

[2](3.15) 中的排序，就是应用 Wick 定理将 $2n$ 点函数 C_{2n} 写成二点函数行列式的形式，如 (3.7) 所示时所采用的排序。

相应的 χ-函数满足

$$\chi_{i\bar{j}}^{\mathrm{Wick}} = 0\,, \quad \chi_{i\bar{j}}^{\mathrm{GW}} = \begin{cases} 0\,, & i < j \\ 1\,, & i > j \end{cases} \,. \tag{3.17}$$

我们还将考虑满足以下条件的排序 Ω_{bound}

$$\chi_{i\bar{j}} + \chi_{j\bar{i}} = 1\,, \quad i \neq j\,. \tag{3.18}$$

该条件意味着，对于任意$i \neq j$，$|u_i v_i| > |v_j|$ 当且仅当 $|v_i| > |u_j v_j|$，即$i, \bar{i}$ 绑定在一起。稍后（见命题 3.15）我们将证明，由满足 (3.18) 的排序确定的圈在积分 (3.14) 中都产生相同的结果，并且都与 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \rangle$ 相同。

3.2.1 Fay 多割线恒等式与 Frobenius-Stickelberger 公式

在计算T_n^{Ω}之前，我们需要一些预备结果。

定义 3.2. 对于任意 n ×n 矩阵 M_n（其有 n ≥ 2），令 $M_{n,\check{i}\check{j}}$ 表示元素 $(M_n)^{ij}$的子式，即从 M_n中删除第 i 行和第 j 列后得到的子矩阵。令 Z_n 表示一个 n ×n 矩阵，其第 (i, j) 个元素为 $(Z_n)_{ij} = \frac{\theta'}{\theta}(u_i - v_i - v_j)$。

引理 3.3 (Frobenius-Stickelberger 公式)。 设记号同上，且 $n \geq 2$。那么在任意区域Ω 中，有

$$\theta(\prod_k u_k) \cdot \Theta_{2n} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det Z_{n,\check{i}\check{j}} \right) . \tag{3.19}$$

证明。 Fay 多割线恒等式 (3.7) 给出

$$\theta(c)^{n-1} \cdot \theta(c + \sum_i (P_i - Q_i)) \cdot \Theta_{2n} = \det \left(\left(\frac{\theta(c + P_i - Q_j)}{\theta(P_i - Q_j)} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right) . \tag{3.20}$$

比较(3.20)两边关于 c 的次数 $(n-1)$ 泰勒系数，可得

$$\theta(\prod_k u_k) \cdot \Theta_{2n} = [c^{n-1}] \det \left(\left(\sum_{m \geq 0} \frac{\theta^{(m)}(P_i - Q_j)}{m!\, \theta(P_i - Q_j)} c^m \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right) .$$

将第j列减去第n列，再提取右侧的c系数，其中 $1 \leq j \leq n-1$，可得

$$\theta(\prod_k u_k) \cdot \Theta_{2n} = \det \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 1 \\ & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{u_i v_i}{v_j}\right) - \frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{u_i v_i}{v_n}\right) & 1 \\ & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ n \end{array} .$$

根据行列式对列向量的线性性质及其在交换列时的性质，我们得到

$$\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}=\sum_{\ell=1}^{n}\quad \det\ \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & j & \ell \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_iv_i}{v_j}) & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.21}$$

最后，对上式中的每一项应用克拉默法则计算j列，我们得到（3.19）。

□

上述结果（3.21）通常写成更对称的形式

$$\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}=\det\,\mathcal{Z}_n\,,\quad \mathcal{Z}_n:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_1}) & \cdots & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_n}) \\ & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_nv_n}{v_1}) & \cdots & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_nv_n}{v_n}) \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

定义 3.4。 设记号如上。对于任意非空子集 $J\subseteq[n],$，考虑以下矩阵：该矩阵由将元素 $(\mathcal{Z}_n)^{ij}$、i、$j\in J$ 替换为它们的v^0-系数得到。

$$[v^0]\mathcal{Z}_J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & \cdots & \\ & \vdots & [v^0]\frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_iv_i}{v_j}) & \vdots \\ -1 & & \cdots & \end{pmatrix}\overset{(3.13)}{=}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & \cdots & \\ & \vdots & \frac{1}{2}(-1)^{\chi_{i\bar{j}}} & \vdots \\ -1 & & \cdots & \end{pmatrix},\quad i,j\in J\,. \tag{3.23}$$

定义 3.5. 定义

$$c_J=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{\mathrm{cyl}}(J\cup\{0\})}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\prod_{a=0}^{|J|}([v^0]\mathcal{Z}_J)_{a,\sigma(a)}\,, \tag{3.24}$$

其中，$\mathfrak{S}^{\mathrm{cyl}}(J\cup\{0\})$ 表示阶为 $|J|+1$ 的置换群$\mathfrak{S}(J\cup\{0\})$中的循环子群。对于任意无重复序列$\boldsymbol{K}=(k_r,k_{r-1},\cdots,k_1)$，$1\le r\le n$，定义。

$$\chi_{\boldsymbol{K}}=\sum_{a=1}^{r}\chi_{k_{a+1}\overline{k_a}}\,, \tag{3.25}$$

其中对子指标采用循环次序，例如 $k_{r+1}:=k_1$。

定义 3.5 中的量 c_J 是定义 3.4 中 $\det([v^0]\mathcal{Z}_J)$ 中来自那些属于 $|J|+1$ 阶错排的置换的贡献。它可以具体表示如下。设 $J=(j_r,\cdots,j_1)$ 是长度为 $|J|=r,1\le r\le n$ 的无重复序列，并约定 $j_{r+1}=j_1$。将定义扩展为 χ 使得 $\chi_{0\bar{j}}=0,\chi_{i\bar{0}}=1$，则根据克拉默法则可收集项 $([v^0]\mathcal{Z}_J)_{j_2,\bar{0}}([v^0]\mathcal{Z}_J)_{0,\bar{j}_1}\prod_{a=2}^{r}([v^0]\mathcal{Z}_J)_{j_{a+1},\bar{j}_a}$。由此得到

$$c_J=\sum_J(-1)^{|J|-1}\prod_{a=2}^{r}\frac{1}{2}(-1)^{\chi_{j_{a+1}\bar{j}_a}}=(-\frac{1}{2})^{|J|-1}\sum_J(-1)^{\chi_J-\chi_{j_2\bar{j}_1}}\,. \tag{3.26}$$

其中求和遍及所有底集为 $\boldsymbol{J}$ 的序列。这里我们采用了约定：$\prod_{a=2}^{r}\frac{1}{2}(-1)^{\chi_{j_{a+1}j_a}}=1$ 当且仅当 $r=1$。

引理 3.6。令记号如上，并且$n\geq 2$。令 $Z_{[n]\setminus J}$为从$Z_{[n]}$ 中删除 J 中的行和列所得到的矩阵。则在任意区域 Ω 中，有

$$T_n^{\Omega}=[v^0]\left(\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}\right)=\sum_{J:\emptyset\subsetneq J\subseteq[n]} c_J\cdot[v^0](\det Z_{[n]\setminus J})\,, \tag{3.27}$$

其中约定理解为 $\det Z_{\emptyset}=1$ 。

证明。 根据定义计算 (3.22) 中的行列式，其中对于一个属于$\mathfrak{S}([n]\cup\{0\})$的元素，按照其标准循环分解中包含0 的圈来组织各项。取每一项的 v^0-项，就必然要对每个圈部分取v^0 项。所需结论随即由 (3.24) 得出。

□

例 3.7。 现在利用 (3.21) 和 (3.27) 计算 $n=1,2$的情形。当$n=1$时，我们有

$$T_1^{\Omega}=[v_1^0c^0]\theta_c(0)S_c(P_1-Q_1)=[v_1^0c^0]\frac{\theta_c(u_1)\theta'(0)}{\theta(u_1)}=1\,.$$

当 $n=2$ 时，根据（3.21）可得

$$\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}=\det\begin{pmatrix}\frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_1}) & 1\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_1}) & 1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_2})\\ 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_2})\end{pmatrix}.$$

因此可得

$$[v_1^0v_2^0]\left(\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}\right)=\frac{\theta'}{\theta}(u_2)+(-1)^{1+2}\cdot\frac{1}{2}(-1)^{\chi_{2\bar{1}}}+\frac{\theta'}{\theta}(u_1)+(-1)^{1+2}\cdot\frac{1}{2}(-1)^{\chi_{1\bar{2}}}\,.$$

对于排序 Ω_{Wick}、Ω_{GW}，有

$$T_n^{\Omega_{\mathrm{Wick}}}=\frac{\theta'}{\theta}(u_1)-\frac{1}{2}+\frac{\theta'}{\theta}(u_2)-\frac{1}{2}\,,\quad T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}=\frac{\theta'}{\theta}(u_1)+\frac{1}{2}+\frac{\theta'}{\theta}(u_2)-\frac{1}{2}\,.$$

△

注意，由 θ 的奇偶性和 (3.8) 可知

$$\left(\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}\right)|_{\prod_k u_k=1}=0\,.$$

然而，可能存在这种情况：

$$\left([v^0](\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n})\right)|_{\prod_k u_k=1}\neq 0\,,$$

由于 $[v^0]$ 运算（其取决于排序）与在轨迹 $\prod_k u_k=1$ 处求值不交换。例 3.7 中的$n=2$ 情形给出了这一现象的一个最简单例子。更多讨论见第 4.2.1 节。

3.2.2按序的A-圈积分 复数域$_{2n}$ 的关于分拆的求和表示

式 (3.27) 中的系数cJ 以及引理 3.6 中的行列式都取决于 Ω 中的排序。现在我们研究这些量的性质。首先回顾一些标准概念。

对于每个 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令其循环分解的标准形式为

$$\sigma = (a_1 \cdots a_{\lambda_1})(a_{\lambda_1+1} \cdots a_{\lambda_1+\lambda_2}) \cdots (a_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell-1}+1} \cdots a_{\lambda_1+\cdots+\lambda_\ell}) := \sigma_1 \cdots \sigma_\ell \,, \tag{3.28}$$

具有如下性质：$a_1, a^{\lambda_1+1}, \cdots, a_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell-1}+1}$ 是在相应循环的元素中最大的，并且

$$a_1 < a_{\lambda_1+1} < \cdots < a_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell-1}+1} \,.$$

定义 3.8。 对于置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，令 $\mathrm{des}(\sigma)$、$\mathrm{cdes}(\sigma)$ 分别表示下降集 $\mathrm{Des}(\sigma)$ 和循环下降集 $\mathrm{cDes}(\sigma)$ 的基数

$$\begin{aligned} \mathrm{Des}(\sigma) &:= \{1 \le i \le n-1 |\ \sigma(i) > \sigma(i+1)\} \,, \\ \mathrm{cDes}(\sigma) &:= \{1 \le i \le n \mid \sigma(i) > \sigma([i+1]^{\mathrm{c}})\} \,. \end{aligned}$$

这里 $[i+1]^{\mathrm{c}} := i+1$ 若 $i \le n-1$ 且 $[n+1]^{\mathrm{c}} := 1$。

按照 [BO00]，中的记号，我们用 $\Pi_{[n]}$ 表示 $[n]$ 的所有分拆构成的集合。一个元素 $\pi \in \Pi_{[n]}$ 是由 $[n]$ 的若干互不相交的非空子集组成的无序集合，这些子集称为部分。

$$\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_\ell\} \,. \tag{3.29}$$

类似地，我们用 $\Gamma_{[n]}$ 表示 $[n]$，的所有复合/列表构成的集合，即由子集组成的有序集合。每个合成的形式为 $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_\ell)$，其长度为 $\ell(\gamma) = \ell$。我们记

$$(-1)^\pi = (-1)^\gamma := (-1)^{n-\ell} \,.$$

这些与.....相同

$$(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} = (-1)^{\sum_k(\lambda_k-1)} = (-1)^{n-\ell} \,.$$

令 $\mathrm{S(n,\ \ell)} = \Pi_{[\mathrm{n}],\ell}$ 表示将 $[\mathrm{n}]$ 划分为 ℓ 个互不相交的非空子集所得的划分集合，令 $\mathrm{s(n,\ell)}$ 表示 $\mathfrak{S}_n$ 中含有 ℓ 个循环的置换集合。它们的基数分别为 $\mathrm{S(n,\ \ell)}$、$(-1)^{n-\ell}\mathrm{s(n,\ell)}$，其中 $\mathrm{S(n,\ell)}$、$\mathrm{s(n,\ \ell)}$ 分别是第二类和第一类斯特林数。由此可得

$$|\mathbf{s}(n,\ell)| = \sum_{\pi \in \mathbf{S}(n,\ell)} \prod_{k=1}^{\ell} (-1)^{|\pi_k|-1}(|\pi_k|-1)! \,.$$

此外，

$$\Pi_n = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \mathbf{S}(n,\ell) \,, \quad \Gamma_n = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \mathbf{S}(n,\ell) \rtimes \mathfrak{S}(\ell) \,, \quad \mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \mathbf{s}(n,\ell) \,.$$

现在我们定义一些函数和级数，它们将用于计算 $\theta(\prod_k u_k)\Theta_{2n}$ 的有序 A-圈积分。

定义 3.9。 令 $\mathrm{QE} = \mathbb{C}[\mathbb{G}_2, \mathbb{G}_4, \mathbb{G}_6][\{\theta^{(k)}_{\theta}\}_{k\ge 1}]$ 为分次环，其中 $\theta_{(k)\,\theta}$ 的分次为k，而 $\mathbb{G}_a$ 的分次为a。次数为m 的元素$f \in$QE 称为首项权为m的混合权拟椭圆函数；若f 是次数为m的齐次元素，则称其具有纯权。

注释 3.10。 QE 环与零指标准雅可比形式环相关，详见 [EZ85、Lib09]。

定义 3.11。对于满足 $0 \le a \le b$ 的非负整数b ，定义形式级数

$$g_{b,a}(u) := \left((-1)^a (\frac{1}{2})^b + (-1)^b \sum_{k>0} \frac{q^{(b-a)k} u^k}{(1-q^k)^b} + (-1)^b \sum_{k<0} \frac{q^{(b-a)k} u^k}{(1-q^k)^b} \right) . \tag{3.30}$$

我们采用约定：$g_{0,0} = 1$。

定理 3.12. 对每个 $0 \le a \le b$，以下陈述均成立。

i). 级数 $g_{b,a}(u)$ 在区域 $|q|^a < |u| < |q|^{a-b}$中局部绝对收敛，因此在那里定义了一个全纯函数。它解析延拓为 $\mathbb{C}^*$ 上的亚纯函数，其可能的极点仅位于 $u = q^m, m \in \mathbb{Z}$。

ii). 解析延拓满足

$$g_{b,a} \in \mathbb{C}\Big[\{ \frac{\theta^{(k)}}{\theta} \}_{0 \le k \le b+1} \Big] .$$

特别地，$g_{b,a}$ 是一个具有混合权的拟椭圆函数，其首项权为 $b+1$。此外，对于固定的 b，$g_{b,a}$ 的首项部分与 a 无关。

证明。 参见附录 A.2。 □

例 3.13。 最简单的例子如下（参见（3.13））

$$g_{1,0} = g_{1,1} = \frac{\theta'}{\theta} .$$

下文中，提到$g_{b,a}(u)$ 时，除非另有说明，均指其在区域$1 < |u| < |q|^{-1}$ 中的解析延拓。

引理 3.14。 设记号同上，且 $n \ge 1$。则有

$$\begin{aligned} [v^0] \det Z_n &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_k g_{|\sigma_k|, \chi_{\sigma_k}} (\prod_{i \in \sigma_k} u_i) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi_{[n]}} (-1)^{\pi} \prod_k \frac{1}{|\pi_k|} \sum_{\tau_k \in \mathfrak{S}(\pi_k)} g_{|\pi_k|, \chi_{\tau_k}} (\prod_{i \in \pi_k} u_i) , \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{S}(\pi_k)$ 是集合 π_k 的置换群。特别地，有

$$\begin{aligned} [v^0] \det Z_n &= \sum_{\pi \in \Pi_{[n]}} (-1)^{\pi} \prod_k \frac{1}{|\pi_k|} \sum_{\tau_k \in \mathfrak{S}(\pi_k)} g_{|\pi_k|, 0} (\prod_{i \in \pi_k} u_i) \quad \text{in} \quad \Omega_{\mathrm{Wick}} , \\ &= \sum_{\pi \in \Pi_{[n]}} (-1)^{\pi} \prod_k \frac{1}{|\pi_k|} \sum_{\tau_k \in \mathfrak{S}(\pi_k)} g_{|\pi_k|, \mathrm{cdes}(\tau_k)} (\prod_{i \in \pi_k} u_i) \quad \text{in} \quad \Omega_{\mathrm{GW}} . \end{aligned}$$

证明。 根据定义，有

$$\det Z_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} (Z_n)_{1,\sigma(1)} \cdots (Z_n)_{n,\sigma(n)} .$$

接着，我们在区域 Ω 中展开 $\overset{\theta'}{\theta}\left({}^{u_{i_{v_i v^j}}}\right)$。利用 (3.13)，通过直接计算可得

$$[v^0]\ \det Z_n = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \prod_k g_{|\sigma_k|,\chi_{\sigma_k}} (\prod_{i\in\sigma_k} u_i)\,.$$

对于划分 $\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_\ell\}$ in Π_n，考虑在块 π_k 内置换元素所得的循环，$k = 1, 2, \cdots, \ell$，即可恢复集合 $\mathfrak{S}_n$：对于块 $\pi_k = \{b1, \cdots, b_m\}$，置换 $\tau_k \in \mathfrak{S}(\pi_k)$ 给出第k个循环 $\sigma_k = (\tau_k(b_1)\ \cdots \tau_k(b_m))$。由于元素 $b1, \cdots, b_m$互不相同，因此有 $\chi_{\sigma_k} = \chi_{\tau_k}$。于是，与块 $\pi_k = \{b1, \cdots, b_m\}$ 相对应的贡献为

$$\frac{1}{|\pi_k|} \sum_{\tau_k\in\mathfrak{S}(\pi_k)} g_{|\pi_k|,\chi_{\tau_k}} (\prod_{i\in\pi_k} u_i)\,.$$

因子 $1/|\pi_k|$ 源于以下事实：彼此相差一个循环置换的不同置换 $\tau \in \mathfrak{S}(\pi_k)$ 会产生同一个循环 $(\tau(b_1)\ \cdots \tau(b_m))$。

对于区域 Ω_{GW}, $\chi^{\mathrm{GW}}_{ij} = 1$，当且仅当 $i > j$ 时，$i \neq j$，因此 $\chi_{\tau_k} = \mathrm{cdes}(\tau_k)$。

对于区域 Ω_{Wick}, $\chi^{\mathrm{Wick}}_{ij} = 0$ 中的任意 $i \neq j$，因此 $\chi_{\tau_k} = 0$。结论随即得证。 □

命题 3.15。沿用上述记号。

i). T_n^{Ω}仅取决于数值集合 $\chi_{i\bar{j}}$，其中 $i \neq j$。

ii). 对于定义 *2.4* 中的圈 γ_n^{GW}，相应的配对 $\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$ 与（$\langle \gamma^{\Omega_{\mathrm{GW}}} n\,,\ \varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$的解析延拓）一致。

iii). 有

$$\left\langle \gamma_n^{\Omega_{\mathrm{bound}}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle = \left\langle \gamma_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}},\ \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle. \tag{3.31}$$

证明。 i). 根据 (3.26)，引理 3.6 的 (3.27) 中的 cJ 仅取决于数值集合 $\chi_{i\bar{j}}$，其中 $i \neq j$。对于量 χ_{τ_k} 亦然，因此当 $|\pi_k| > 1$时，引理 3.14 中的 $g_{|\pi_k|,\chi_{\tau_k}}$ 也是如此。在情形 $|\pi_k| = 1$ 下，设 $\pi_k = \{i\}$，则有 $g_{|\pi_k|,\chi_{\tau_k}} = \overset{\theta'}{\theta}(u_i)$。在解析延拓的意义下，这同样与 $\chi_{i\bar{i}}$ 无关。综合以上各点，即得 (i)。

ii). 圈 γ_n^{GW}满足 $\chi_{i\bar{j}} = 1$，$i \neq j$，当且仅当 $i > j$。所需的结论随即由 (i) 得出。

iii). 量 $\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}$ 在由对称群 $\mathfrak{S}_n$ 中的转置诱导的以下作用下保持不变。

$$(u_i v_i, v_i, u_j v_j, v_j) \mapsto (u_j v_j, v_j, u_i v_i, v_i)\,, \tag{3.32}$$

因此，通过对有界对 $(i, \bar{i})$的全体 $\mathfrak{S}_n$ 作用。除去这样的置换外，总可以假设对于满足（3.18）的 Ω_{bound}，其特征函数 χ 满足以下条件：$\chi_{i\bar{j}} = 1$，$i \neq j$ 当且仅当 $i > j$。等式（3.31）随后由 (i) 得出。

□

⁀**定义 3.16.** 考虑扩展集合 $[n] := [n] \cup \{0\}$ 以及 χ_{ab} 的扩展特征函数，满足

$$\chi_{0\bar{i}} = 0\,,\quad \chi_{i\bar{0}} = 1\,,\quad \forall\, i \in [n]\,,$$

加入额外变量 $u_0 v_0, v_0$。对于 $\pi_k \subseteq [n],$，我们定义

$$G_{\pi_k} = \sum_{\tau_k \in \mathfrak{S}(\pi_k)} g_{|\pi_k|, \chi_{\tau_k}} (\prod_{i \in \pi_k} u_i) .$$

对于任意划分 $\pi = \{\pi_1, \cdots, \pi_\ell\}$，记

$$\frac{1}{|\pi|} G_\pi = \prod_k \frac{1}{|\pi_k|} G_{\pi_k} .$$

由 (3.13)、定义 3.11 和例 3.7，得到

$$G^{\mathrm{Wick}}_{\{1\}} = G^{\mathrm{GW}}_{\{1\}} = g_{1,0} = \frac{\theta'}{\theta}, \quad T^{\Omega}_1 = 1 . \tag{3.33}$$

约定 3.17. 我们采用以下约定

$$(-1)^{\pi_k} \frac{1}{|\pi_k|} G_{\pi_k} = 1, \ T^{\Omega}_{\pi_k} = 0 \ \text{ for } \pi_k = \emptyset \subseteq [n], \quad (-1)^S \frac{1}{|S|} G_S = 0 \ \text{ for } S = \{0\} .$$

定理 3.18. 设记号如上，且 $n \geq 1$。那么在约定 *3.17* 下，有

$$T^{\Omega}_n = [v^0] \left(\theta(\prod_k u_k) \cdot \Theta_{2n} \right) = 2^2 \cdot [u^0_0] \left(\sum_{\pi \in \Pi^*_{\widetilde{[n]}}} \frac{(-1)^\pi}{|\pi|} G_\pi \right) , \tag{3.34}$$

其中，$\Pi^*_{\widetilde{[}n]}$ 表示 $\widetilde{[}n]$ 的划分集合，其中单元素 $\{0\}$ 不是一个块。特别地，T^{Ω}_n 是一个混合权拟椭圆函数，其首项权为 $n-1$，且其首项部分与排序无关。

证明. 对于 $n \geq 2$，结合引理 3.6 和引理 3.14，得到

$$[v^0] \left(\theta(\prod_k u_k) \cdot \Theta_{2n} \right) = \sum_{J : \emptyset \subsetneq J \subseteq [n]} c_J \sum_{\pi \in \Pi_{[n] \setminus J}} \frac{(-1)^\pi}{|\pi|} G_\pi . \tag{3.35}$$

根据定义 3.4 和约定 3.17，这对$n = 1$ 情形同样成立。注意，在c_J的求值中，$[v^0] \mathcal{Z}_J$ 中的对角元无关紧要。重复引理 3.14 证明中的推理，我们有

$$c_J = 2^2 \cdot [u^0_0] \left(\frac{(-1)^J}{|J|+1} G_{J \cup \{0\}} \right) , \quad J \neq \emptyset . \tag{3.36}$$

结合　　这些结果，我们得到（3.34）。关于拟椭圆性的断言由定理 3.12 得出。

□

根据约定 3.17，我们可以并且将使用定理 3.18 中的范围 $\Pi^*_{\widetilde{[}n]}$ 替换为 $\Pi_{\widetilde{[n]}}$。注意，在（3.34）中的划分 π 的各块内，运算 $[u^0_0]$ 仅对包含 0 的块产生作用。

注 3.19。推导（3.36）时的推理表明，如果应用克拉默法则计算 $\det Z_{[n] \cup \{0\}}$，那么与引理 3.14 中一样，有

$$T^{\Omega}_n = 2^2 \cdot [u^0_0][v^0] \left(\det Z_{[n] \cup \{0\}} - \frac{\theta'}{\theta}(u_0) \det Z_{[n]} \right) .$$

这解释了 $\Pi^*_{\widetilde{[}n]}$ 在 (3.34) 中的组合结构。

定理 3.18 展示了T_n^{Ω}的混合权重结构：(3.35) 中的每个加项都有首项权 $[n]-|J|$。我们通过考察以下例子来说明这一点。

例 3.20。考虑与例 3.7 类似的$n=3$ 情形。由引理 3.3 可得

$$\begin{aligned}&\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}\\ =\ &\det\begin{pmatrix}\frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_2}) & 1\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_2}) & 1\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_2}) & 1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_1}) & 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_3})\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_1}) & 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_3})\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_1}) & 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_3})\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_2}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_3})\\ 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_2}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_3})\\ 1 & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_2}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_3})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

直接计算可得引理 3.6 中的结果

$$\begin{aligned}[v^0]\begin{pmatrix}\frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_1v_1}{v_2}) & 1\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_2v_2}{v_2}) & 1\\ \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_1}) & \frac{\theta'}{\theta}(\frac{u_3v_3}{v_2}) & 1\end{pmatrix} &= \frac{\theta'}{\theta}(u_1)\frac{\theta'}{\theta}(u_2)-g_{2,\chi_{1\bar2}+\chi_{2\bar1}}(u_1u_2)\\ &- \frac{1}{2}(-1)^{\chi_{3\bar2}}\frac{\theta'}{\theta}(u_1)-\frac{1}{2}(-1)^{\chi_{3\bar1}}\frac{\theta'}{\theta}(u_2)\\ &+ (\frac{1}{2})^2(-1)^{\chi_{1\bar2}+\chi_{3\bar1}}+(\frac{1}{2})^2(-1)^{\chi_{2\bar1}+\chi_{3\bar2}}.\end{aligned}$$

由此得到（对子指标采用循环标记）

$$\begin{aligned}T_n^{\Omega}=[v^0]\left(\theta(\prod_k u_k)\cdot\Theta_{2n}\right) &= \sum_{i<j}(\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)-g_{2,\chi_{i\bar j}+\chi_{j\bar i}}(u_iu_j))\\ &- \frac{1}{2}\sum_i\sum_{\{j,k\}}\delta_{ijk}((-1)^{\chi_{j\bar k}}+(-1)^{\chi_{k\bar j}})\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\\ &+ (\frac{1}{2})^2\sum_{\{i,j,k\}}\delta_{ijk}(-1)^{\chi_{i\bar j}+\chi_{k\bar i}},\end{aligned}$$

其中 $\delta_{ijk}=1$ 当且仅当i、j、k 互不相同时成立。

利用 (A.13) 和附录 A.2 中的结果，可得

$$\begin{aligned}g_{2,1}(u) &= -(\frac{1}{2})^2+\frac{B_2}{2}-(\frac{\theta''}{2\theta}(u)+\mathbb{G}_2),\\ g_{2,0}(u) &= \frac{1}{2}+g_{2,1}(u)+\frac{\theta'}{\theta}(u)-\frac{1}{2},\\ g_{2,2}(u) &= \frac{1}{2}+g_{2,1}(u)-\frac{\theta'}{\theta}(u)-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中$B_2=1/6$ 是第二伯努利数。这表明T_n^{Ω}是一个拟椭圆函数，其首项与排序的选择无关，且由下式给出

$$T_3^{\mathrm{lead}}=\sum_{i<j}(\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)+\frac{\theta''}{2\theta}(u_iu_j)+\mathbb{G}_2). \tag{3.37}$$

对于排序 Ω_{GW}，有

$$\chi_{j\bar k}+\chi_{k\bar j}=1,\quad ((\frac{1}{2})^2-\frac{B_2}{2})\cdot 3+(\frac{1}{2})^2\sum_{\{i,j,k\}}\delta_{ijk}(-1)^{\chi_{i\bar j}+\chi_{k\bar i}}=0,$$

因此

$$T_3^{\rm lead}=T_3^{\Omega_{\rm GW}}\,.$$

另一方面，由 (1.5) 可见，三点函数 T_3 给出

$$T_3=\sum_{1\le i\neq j\le 3}\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_iu_j)-\sum_{1\le i\le 3}\frac{\theta''}{\theta}(u_i)+\theta'''(1)\,. \tag{3.38}$$

注意，θ'/θ 与魏尔斯特拉斯 ζ 函数通过

$$\frac{\theta'}{\theta}(z)=\zeta(z)-2\mathbb{G}_2z\,,\quad \frac{\theta''}{\theta}=(\frac{\theta'}{\theta})'+(\frac{\theta'}{\theta})^2\,.$$

以下魏尔斯特拉斯 ζ 函数和 $\wp$ 函数的加法公式很有用

$$\frac{\theta'}{\theta}(z+w)=\frac{\theta'}{\theta}(z)+\frac{\theta'}{\theta}(w)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\,,\quad \wp(z+w)=-\wp(z)-\wp(w)+\frac{1}{4}(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)})^2\,.$$

它们导出

$$(\zeta(z_1)+\zeta(z_2)+\zeta(z_3))^2=\wp(z_1)+\wp(z_2)+\wp(z_3)\,,\quad z_1+z_2+z_3=0\,. \tag{3.39}$$

加法公式也给出

$$\begin{aligned}\frac{\theta''}{\theta}(u_iu_j)&=-\frac{\theta''}{\theta}(u_i)-\frac{\theta''}{\theta}(u_j)-6\mathbb{G}_2+(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2+(\frac{\theta'}{\theta}(u_j))^2\\&\quad+(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2+(\frac{\theta'}{\theta}(u_j))^2+2\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)+(\frac{\theta'}{\theta}(u_i)+\frac{\theta'}{\theta}(u_j))\frac{\wp'(u_i)-\wp'(u_j)}{\wp(u_i)-\wp(u_j)}\,,\\\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_iu_j)&=(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2+\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)+\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\cdot\frac{1}{2}\frac{\wp'(u_i)-\wp'(u_j)}{\wp(u_i)-\wp(u_j)}\,.\end{aligned}$$

由此可得，

$$\begin{aligned}T_3^{\rm lead}&=-\sum_{1\le i\le 3}\frac{\theta''}{\theta}(u_i)+2\sum_i(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2+2\sum_{i<j}\frac{\theta'}{\theta}(u_i))\frac{\theta'}{\theta}(u_j)\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\frac{\theta'}{\theta}(u_i)+\frac{\theta'}{\theta}(u_j))\frac{\wp'(u_i)-\wp'(u_j)}{\wp(u_i)-\wp(u_j)}-6\mathbb{G}_2\,,\\T_3&=2\sum_i(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2+2\sum_{i<j}\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)+\frac{1}{2}\sum_{i<j}(\frac{\theta'}{\theta}(u_i)+\frac{\theta'}{\theta}(u_j))\frac{\wp'(u_i)-\wp'(u_j)}{\wp(u_i)-\wp(u_j)}\\&\quad-\sum_{1\le i\le 3}\frac{\theta''}{\theta}(u_i)+\theta'''(1)\,.\end{aligned}$$

由 (A.2) 可知 $\theta'''(1)=-6\mathbb{G}_2$，因此得到

$$T_3^{\rm lead}=T_3\,.$$

此外，由 (3.39) 可验证，$T_3|_{u_1u_2u_3=1}=0$ 如下。利用奇偶性可知，在这个除子上

$$T_3|_{u_1u_2u_3=1}=-\sum_{i\neq j}\frac{\theta'}{\theta}(u_i)\frac{\theta'}{\theta}(u_j)-\sum_i\frac{\theta''}{\theta}(u_i)+\theta'''(1)\,.$$

根据上面的加法公式 (3.39)，这可简化为

$$\begin{aligned} T_3|_{u_1u_2u_3=1} &= \sum_i (\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2 - \sum_i \wp(u_i) - \sum_i \frac{\theta''}{\theta}(u_i) + \theta'''(1) \\ &= \sum_i (\frac{\theta'}{\theta}(u_i))^2 - \sum_i (-(\frac{\theta'}{\theta}(u_i))' - 2\mathbb{G}_2) - \sum_i \frac{\theta''}{\theta}(u_i) + \theta'''(1) \\ &= \theta'''(1) + 6\mathbb{G}_2 = 0\,. \end{aligned}$$

△

注释 3.21。 与对微分多项式之v^0项的"玻色"计算 [BBBM17, GM20, LZ21] 相比,

$$\wp(z) + 2\mathbb{G}_2 = \sum_{k\neq 0} \frac{ku^k}{1-q^k}\,,$$

这里的 v^0-项的"费米子"求值要简单得多。原因是 $\frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{u}{v_iv^j}\right)$ 中的次数至多为一，并且在式（3.13）给出的 θ'/θ 的求和项分子中没有其他 k 因子，不像上面的分子 ku^k 中的 k 。

3.3 递归结构

基于 (1.5)，关于F_n 的更多公式和递归结构已被发现，并且组合性质和模性质（例如全纯反常方程）得到了研究，参见例如，[Pix08、Zag16]。例如，可以引入一个新变量z_0 ，最终将其设为零。根据克拉默法则，(1.5)中的行列式公式 $\det M_n$ 等价于递推关系 [Zag16]

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\theta^{(n-i)}}{\theta}(z_0+z_1+\cdots+z_i) \det M_i(z_0,z_1,\cdots,z_{i-1}) = 0\,,\quad n\geq 1\,,\quad \det M_0() = 1\,.$$

经过对称化后，得到

$$\sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{n-|I|}\theta^{(n-|I|)}\left(\sum_{i\in I} z_i\right)\cdot F_{|I|}(\{z_i\}_{i\in I}) = 0\,,\quad n\geq 1\,,\quad F_0() = 1\,. \tag{3.40}$$

递推关系（3.40）直接转化为

$$\sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{n-|I|}\frac{\theta^{(n-|I|)}}{\theta}\left(\sum_{i\in I} z_i\right)\cdot T_{|I|}(\{z_i\}_{i\in I}) = 0\,,\quad n\geq 1\,,\quad \frac{T_0()}{\theta()} := 1\,, \theta^{(n)}() := \theta^{(n)}(0)\,. \tag{3.41}$$

后者又等价于以下针对 T_n [BO00 的组合表达式，公式 7.7]

$$T_n = \sum_{\gamma\in\Gamma_{[n]}} (-1)^{\gamma}\theta^{(|\gamma_1|)}(0)\prod_{k=2}^{\ell}\frac{\theta^{(|\gamma_k|)}}{\theta}\Big(\sum_{i\in\gamma_1\cup\gamma_2\cdots\cup\gamma_{k-1}} z_i\Big)\,. \tag{3.42}$$

事实上，令 $\gamma'\in\Gamma_I$和 $\gamma = (\gamma', [n]\setminus I)$。根据该恒等式

$$(-1)^{\gamma'}(-1)^{n-|I|-1} = (-1)^{\gamma}\,,$$

我们立即看到，(3.42) 的右侧满足 (3.41)。另一个方向则由递推关系解的唯一性得出。

定理 3.18 中关于T_n^{Ω}的分划求和公式与（3.42）非常相似。在这种情况下，T_n^{Ω}的递推关系类似于（3.41），并由下式给出

$$T_n^{\Omega} = \sum_{I:\emptyset\subsetneq I\subsetneq[n]} (-1)^{|I|-1}\frac{1}{|I|} G_I \cdot T^{\Omega}_{[n]-I}\,.$$

化简后，得到

$$\sum_{I:\, I\subseteq[n]} \frac{(-1)^{|I|}}{|I|} G_I \cdot T^{\Omega}_{[n]-I} = 0\,, \tag{3.43}$$

其中使用了约定 3.17。

4 GW 生成级数的更精细结构

我们已将定理 3.18 中的组合量G_π 与雅可比 theta 函数联系起来。在本节中，我们将基于即将推导出的更具体表达式，研究这些组合量的更精细结构。本节的重点是$T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$，我们将证明它与（1.6）中的 GW 生成级数$T_n$ 一致。

4.1 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$的纯权结构

定义 4.1。定义

$$H_n(z) := -(n-1)!\cdot[c^{n-1}]\left(\frac{1}{2}\frac{1-e^{-c}}{1+e^{-c}} + \frac{1}{2}\frac{e^{c}+1}{e^{c}-1} - S(z,c)\right), \tag{4.1}$$

其中（本质上这就是 Szegö 核 (3.4)）

$$S(z,c) = \frac{\theta'(0)\theta(z+c)}{\theta(z)\theta(c)}\,. \tag{4.2}$$

我们有如下结果。

引理 4.2。 对于 $n \geq 1$，以下陈述成立。

i）。有且仅有
一项。

$$H_n(z) = -(1-2^n)\frac{B_n}{n} - \frac{B_n}{n} + (n-1)!\cdot[c^{n-1}]S(z,c)\,,$$

其中 B_n 是伯努利数：$B_1 = -\frac{1}{2}$，$B_2 = \frac{1}{6}$，⋯。 –

ii). 在区域 Ω_{GW} 中，有

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} G_n^{\mathrm{GW}} = H_n\,. \tag{4.3}$$

证明。 i). 回顾伯努利数的生成级数

$$\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}B_m = \frac{t}{e^t-1}\,,\quad \frac{1}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} = \frac{1}{t} + \sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{4.4}$$

另请考虑欧拉多项式的生成级数 $A_m(x)$,$m \geq 0$ (例如参见 [Bon12])

$$\sum_{m\geq 0} \frac{t^m}{m!} A_m(x) = \frac{x-1}{x-e^{(x-1)t}}\,.$$

将x 替换为 -1，我们看到

$$\sum_{m\geq 0} A_m(-1)\frac{t^m}{m!} = \frac{2}{1+e^{-2t}} = \frac{2}{e^{-2t}-1} - \frac{4}{e^{-4t}-1}\,.$$

这给出

$$\frac{1}{2}\frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{n\geq 2} (\frac{1}{2})^n A_{n-1}(-1)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad A_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}(2^n-4^n)\frac{B_n}{n}\,, \quad n\geq 1\,. \tag{4.5}$$

由 (4.1) 可得

$$H_n(z) = -(n-1)!\cdot[c^{n-1}]\left(\sum_{n\geq 2}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^n A_{n-1}(-1)\frac{c^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n}\frac{c^{n-1}}{(n-1)!} - S(z,c)\right)\,.$$

结合这些结果，即完成证明。

ii).对于情形 $n = 1$，由 (3.33) 和 (A.13) 可得

$$G_1^{\mathrm{GW}}(z) = \frac{\theta'}{\theta} = [c^0](S(z,c)) = H_1(z)\,.$$

因此，我们只需考虑$n \geq 2$ 的情形。首先，我们来化简 $G_n^{\mathrm{GW}}(z)$。回忆一下，循环下降数的生成级数 $A_{(\mathbf{c})n}(x)$ 与欧拉多项式 A_{n-1}（作为下降数的生成级数）之间的关系由 [Bon12] 给出

$$A_n^{(\mathrm{c})}(x) = nxA_{n-1}(x)\,, \quad n\geq 2\,.$$

因此，我们看到对于$n \geq 2$

$$\begin{aligned} G_n^{\mathrm{GW}}(u) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left((-1)^{\mathrm{cdes}(\sigma)}(\frac{1}{2})^n + (-1)^n\sum_{k\neq 0}\frac{q^{(n-\mathrm{cdes}(\sigma))k}}{(1-q^k)^n}u^k\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left((-1)^{\mathrm{cdes}(\sigma)}(\frac{1}{2})^n + \sum_{k\neq 0}\frac{q^{-k\cdot\mathrm{cdes}(\sigma)}}{(1-q^{-k})^n}u^k\right) \\ &= -n(\frac{1}{2})^n A_{n-1}(-1) + \sum_{k\neq 0}\frac{nq^{-k}A_{n-1}(q^{-k})}{(1-q^{-k})^n}u^k\,. \end{aligned}$$

由命题 A.3 可得，接下来有

$$G_n^{\mathrm{GW}}(u) = (-1)^n n\left((\frac{1}{2})^n(-1)^{n-1}A_{n-1}(-1) + \frac{B_n}{n} - (n-1)!\cdot[w^{n-1}]S(z,w)\right)\,.$$

该结论现可由 (i) 中给出的 H_n 的表达式得出。

□

由 (A.12) 得，对于 $n \geq 1$

$$\begin{aligned}(n-1)!\cdot[c^{n-1}]S(z,c) &= \frac{1}{n}\boldsymbol{B}_n(\mathcal{E}_1^*,\mathcal{E}_2^*,\cdots,\mathcal{E}_n^*)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{a+2b=n}\binom{n}{a}\boldsymbol{B}_a((\ln\theta)',\cdots,(\ln\theta)^{(a)})\cdot 2\mathbb{G}_{2b}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{a+2b=n}\binom{n}{a}\frac{\theta^{(a)}}{\theta}\cdot 2\mathbb{G}_{2b}\,,\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中$\boldsymbol{B}_n$ 是完全贝尔多项式。根据定义 (3.9)，这是一个纯权$n \geq 1$拟椭圆函数。我们先前在定理 3.18 中提到，T_n^{Ω}是一个混合权拟椭圆函数，其首项权为$n-1$。对于区域 $\Omega_{\rm GW}$，所得积分$T^{\Omega_{\rm GW}}{}_n$ 特别有趣，关于其纯权结构，我们有如下结果。

定理 4.3. 令$\boldsymbol{B}_{J}$，$J \subseteq [n]$ 为关于以下变量的完全贝尔多项式

$$\mathcal{E}_a^* = (\ln\theta)^{(a)}(\prod_{j\in J}u_j) + 2\mathbb{G}_a\,,\quad a\geq 1\,,\tag{4.7}$$

其中，对于正奇整数 a，$\mathbb{G}_a$ 设为零；对于正偶整数，它是以下艾森斯坦求和

$$\mathbb{G}_a = \frac{1}{2}\cdot(a-1)!\cdot\sum_{\lambda\in\Lambda_\tau-\{(0,0)\}}^{e}\frac{1}{\lambda^a}\,.\tag{4.8}$$

Then

$$T_n^{\Omega_{\rm GW}} = \sum_{j\in[n]}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|}\,,\quad \frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|} := \prod_k\frac{\boldsymbol{B}_{\pi_k}}{|\pi_k|}\,,\tag{4.9}$$

其中我们采用如下约定

$$\frac{1}{|\pi_k|}\boldsymbol{B}_{\pi_k} = 1 \quad \text{for} \quad \pi_k = \emptyset\,.$$

特别地，T_n^{Ω}是一个纯权为 $n-1$的拟椭圆函数。

证明。 利用 (A.12)，我们可以将引理 4.2 (i) 写为

$$H_{\pi_k} = \frac{\boldsymbol{B}_{\pi_k}}{|\pi_k|} - \frac{B_{|\pi_k|}}{|\pi_k|} + (2^{|\pi_k|}-1)\frac{B_{|\pi_k|}}{|\pi_k|}\,,$$

其中，$\boldsymbol{B}^{\pi_k}$ 是一个纯权为 $|\pi_k|$的拟椭圆函数。结合引理 3.14、引理 4.2 和定理 3.18，我们有

$$T_n^{\Omega_{\rm GW}} = 2^2\cdot[u_0^0]\sum_{\pi\in\Pi^*_{[n]}}H_\pi\,,\quad H_\pi := \prod_k H_{\pi_k}\,.\tag{4.10}$$

根据引理 4.2 (ii) 的证明或 (A.9) 中的计算，我们看到在 (3.36) 中

$$c_{\pi_k} = 4[u_0^0]H_{\pi_k}\,,\quad [u_0^0]H_{\pi_k} = (2^{|\pi_k|}-1)\frac{B_{|\pi_k|}}{|\pi_k|} \quad \text{if} \quad 0\in\pi_k\,.$$

继续讨论 (4.10)。对于任意划分$\pi = \{\pi_1,\cdots,\pi_\ell\}\in\Pi_{[n]}$，我们考虑其复合/列表的集合 Γ_π，该集合由形如 $\gamma = (\pi'、\ \pi''、\ \pi''')$ 的有序集合组成，其中 π'

是一个单元素（仅由 π 的一个部分组成），另外两个可以为空，在这种情况下，下面的贡献定义为 1。于是我们可以将 (4.10) 重写为

$$T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}} = 2^2 \sum_{\pi\in\Pi_{[n]}} \sum_{\gamma\in\Gamma_\pi} \left(\prod_{k:\,\pi_k\in\pi'} (2^{|\widetilde{\pi_k}|}-1)\frac{B_{|\widetilde{\pi_k}|}}{|\widetilde{\pi_k}|} \cdot \prod_{k:\,\pi_k\in\pi''} (2^{|\pi_k|}-2)\frac{B_{|\pi_k|}}{|\pi_k|} \cdot \prod_{k:\,\pi_k\in\pi'''} \frac{\boldsymbol{B}_{\pi_k}}{|\pi_k|} \right), \tag{4.11}$$

其中 $\widetilde{\pi_k} := \pi_k \cup \{0\}$。由于拟椭圆函数 $\boldsymbol{B}_n/n$ 具有纯权 n，上面的每一项都具有纯权

$$w(\pi''') := \sum_{k:\,\pi_k\in\pi'''} |\pi_k|\,.$$

固定 π'''，考虑 (4.11) 中 $\prod_{k:\,\pi_k\in\pi'''} \boldsymbol{B}_{|\pi_k|}^{\pi_k}$ 的系数。它由下式给出

$$\kappa_{\pi'''} := 2^2 \sum_{\rho\in\Pi_{[n]}\setminus(\cup_{k:\,\pi_k\in\pi'''}\pi_k)} \sum_{\gamma\in\Gamma_\rho} \left(\prod_{k:\,\rho_k\in\rho'} (2^{|\widetilde{\rho_k}|}-1)\frac{B_{|\widetilde{\rho_k}|}}{|\widetilde{\rho_k}|} \cdot \prod_{k:\,\rho_k\in\rho''} (2^{|\rho_k|}-2)\frac{B_{|\rho_k|}}{|\rho_k|} \right),$$

其中 $\gamma = (\rho', \rho'') \in \Gamma_\rho$ 是一个合成，且 ρ' 是一个单元素。同样，若 ρ''为空，则关于 ρ'' 的乘积为 1。注意，这个量仅取决于 $\rho_k \in \rho$ 的基数，并且仅当 ρ' 中的那个为奇数基数、ρ''中的那些为偶数基数时，它才可能非零。因此

$$\kappa_{\pi'''} = 2^2 \sum_{\rho\in\Pi_{[n]}\setminus(\cup_{k:\,\pi_k\in\pi'''}\pi_k)}{}' \left(\prod_{k:\,\rho_k\in\rho'} (2^{|\widetilde{\rho_k}|}-1)\frac{B_{|\widetilde{\rho_k}|}}{|\widetilde{\rho_k}|} \cdot \prod_{k:\,\rho_k\in\rho''} (2^{|\rho_k|}-2)\frac{B_{|\rho_k|}}{|\rho_k|} \right), \tag{4.12}$$

其中 $\sum'$ 取遍所有分拆构成的集合，这些分拆中除一个（记作 ρ_*）以外的所有块都具有偶数基数，并且$\rho' = \{\rho_*\}$。

现在我们来简化系数 $\kappa_{\pi'''}$。令

$$m = n + 1 - w(\pi''') = |\widetilde{[n]} \setminus (\cup_{k:\,\pi_k\in\pi'''}\pi_k)|\,.$$

根据构造，m 是一个偶正整数。记

$$x_i = (2^i-2)\frac{B_i}{i}, \quad y_i = (2^i-1)B_i\,, \quad i \ge 2\,.$$

然后将 (4.12) 中的集合划分改写为整数分拆，并使用贝尔多项式的按分拆求和公式，我们得到。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\kappa_{\pi'''} &= \sum_{\sum_{k=1}^\ell \lambda_k = n-w} \frac{\ell}{\ell!}\binom{n-w}{\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell}\frac{y_{\lambda_1+1}}{\lambda_1+1}\prod_{k\ge2} x_{\lambda_k} \\
&= \sum_{\substack{\sum_{k=1}^\ell \lambda_k = n+1-w \\ \lambda_k\ge2}} \frac{\ell}{\ell!}\frac{1}{n+1-w}\binom{n+1-w}{\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell} y_{\lambda_1}\prod_{k\ge2} x_{\lambda_k} \\
&= \sum_{\substack{\sum_{k=1}^\ell \lambda_k = n+1-w \\ \lambda_k\ge2}} \frac{\ell}{\ell!\,\ell}\frac{1}{n+1-w}\binom{n+1-w}{\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell}[\varepsilon^1]\prod_{k\ge1}(x_{\lambda_k}+\varepsilon y_{\lambda_k}) \\
&= \frac{1}{n+1-w}\sum_\ell [\varepsilon^1]\boldsymbol{B}_{n+1-w,\ell}(x+\varepsilon y) \\
&= \frac{1}{n+1-w}[\varepsilon^1]\boldsymbol{B}_{n+1-w}(x+\varepsilon y)\,.
\end{aligned}$$

定义

$$f(t;\varepsilon)=\sum_{i\geq 2}(x_i+\varepsilon y_i)\frac{t^i}{i!}=f_0(t)+\varepsilon f_1(t)\,.$$

根据集合划分版本的法阿·迪·布鲁诺公式，对于$m\ \geq 2$，我们有

$$e^{-f}(e^f)^{(m)}|_{t=0}=\boldsymbol{B}_m(x+\varepsilon y)\,.$$

注意到$f_0|_{t=0}=f_1|_{t=0}=0$，因此我们有

$$\begin{aligned}\kappa_{\pi'''}=\frac{4}{m}[\varepsilon^1]\boldsymbol{B}_m(x+\varepsilon y) &= \frac{4}{m}[\varepsilon^1]\left(e^{-f}(e^f)^{(m)}|_{t=0}\right)\\ &= \frac{4}{m}\left(-f_1e^{-f_0}(e^{f_0})^{(m)}|_{t=0}+e^{-f_0}(f_1e^{f_0})^{(m)}|_{t=0}\right)\\ &= \frac{4}{m}(f_1e^{f_0})^{(m)}|_{t=0}\,.\end{aligned}$$

直接计算表明，

$$f_0=\ln\frac{t(e^t+1)}{2(e^t-1)}=\ln(\frac{t}{2}+\frac{t}{e^t-1})\,,\quad f_1=\frac{t}{2}-\frac{t}{e^t+1}\,,$$

因此

$$e^{f_0}f_1=\frac{t^2}{4}\,.$$

这说明

$$\kappa_{\pi'''}=\begin{cases}1\,, & w(\pi''')=n-1\,,\\ 0\,, & w(\pi''')\neq n-1\,.\end{cases}$$

证明至此完成。

□

完全贝尔多项式$\boldsymbol{B}_m$本身可以组合地解释为对$[m]$的所有划分求和。(4.9) 中的划分的划分结构具有一些有趣的组合性质，稍后我们将看到，例如$T^{\Omega_{\mathrm{GW}_n}}$的椭圆变换性质。

4.2 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}_n}}$的拟椭圆性与拟模性

拟椭圆函数$f\ \in \mathrm{QE}$若在椭圆变换$z\ \mapsto z\ +\lambda,\lambda\in\Lambda_\tau$下保持不变，则称其为椭圆函数。若其每个权为$m$的分量$f_m$均满足下式，则称其为模函数。

$$f_m(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^m f_m(z,\tau)\,,\quad \forall\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,.$$

一般而言，在$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$的模变换下，$f\ \in$QE在 [KZ95]的意义下仅为拟模函数。例如，$\mathbb{G}_4,\mathbb{G}_6$均为模函数，而$\mathrm{G}_2$为拟模函数。

利用雅可比 theta 函数 θ 与魏尔斯特拉斯椭圆函数之间的关系，可以直接验证

$$\mathcal{E}_2^*=(\frac{\theta'}{\theta})'+2\mathbb{G}_2=-\wp(z)\,.\tag{4.13}$$

由此可知，式 (4.7) 中给出的所有函数 $\mathcal{E}^*{}_m$、$m \geq 2$都是椭圆且模的。然而， $\mathcal{E}_1^*$既不是椭圆函数，也不是模函数：

$$\mathcal{E}_1^* = \frac{\theta'}{\theta} = \zeta(z) - 2z\mathbb{G}_2\,, \quad \mathcal{E}_1^*(qu) = \mathcal{E}_1^*(u) - 1\,. \tag{4.14}$$

利用定理 4.3 中的 (4.9)，可以非常精确地描述$T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$ 在椭圆变换和模变换下的行为。现在，我们利用完全贝尔多项式满足的以下二项式型关系，推导它的一些性质

$$\boldsymbol{B}_n(x+y) = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} \boldsymbol{B}_a(x)\boldsymbol{B}_b(y)\,. \tag{4.15}$$

回想一下，根据命题 3.15，或者更具体地说，根据 (4.9)， $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$在对$u_i, i = 1,2,\cdots,n$的 $\mathfrak{S}_n$ 作用下保持不变。因此，只需讨论$T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$ 在椭圆变换$u_1 \mapsto qu_1$下的行为。

推论 4.4. 沿用上述记号。对于 $n \geq 1$，有

$$T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}(qu_1,\cdots,u_n) = T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}(u_1,\cdots,u_n) + \sum_{I:\varnothing\subsetneq I\subseteq[n]\setminus\{1\}} (-1)^I T_{n-|I|}(u_1 u_I,\cdots,\check{u_i},\cdots)\,,$$

其中，记号$\check{}u_i$ 表示省略了自变量 $u_i i \in I$。

证明. 利用 (4.15)，可知对于$n \geq 1$，有

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{B}_n(\mathcal{E}_1^*,\cdots,\mathcal{E}_n^*)}{n}(qu) &= \frac{\boldsymbol{B}_n(\mathcal{E}_1^*-1,\cdots,\mathcal{E}_n^*)}{n}(u) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\boldsymbol{B}_a(-1,\cdots,0)(u)\cdot\boldsymbol{B}_{n-a}(\mathcal{E}_1^*,\cdots,\mathcal{E}_n^*)(u) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}(-1)^a\cdot\boldsymbol{B}_{n-a}(\mathcal{E}_1^*,\cdots,\mathcal{E}_n^*)(u)\,.
\end{aligned}$$

化简后得到

$$\frac{\boldsymbol{B}_n}{n}(qu) = \frac{\boldsymbol{B}_n}{n}(u) + \sum_{a=1}^{n-1}\binom{n-1}{a}(-1)^a\frac{\boldsymbol{B}_{n-a}}{n-a}(u) + \frac{(-1)^n}{n}\,, \quad n \geq 1\,. \tag{4.16}$$

由（4.9）可得

$$\begin{aligned}
& T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}(qu_1,\cdots,u_n) \\
=\ & \sum_{j=1}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|}(qu_1,\cdots,u_n) + \sum_{j\neq 1}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|}(qu_1,\cdots,u_n) \\
=\ & \sum_{j=1}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|}(u_1,\cdots,u_n) + \sum_{j\neq 1}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\prod_{k:\,k\neq *}\frac{\boldsymbol{B}_{\pi_k}}{|\pi_k|}(u_1,\cdots,u_n)\cdot\frac{\boldsymbol{B}_{\pi_*}}{|\pi_*|}(qu_1,\cdots,u_n)\,,
\end{aligned}$$

其中， π_* 是划分 π 中包含 1 的块。回想一下，$\boldsymbol{B}_{\,|\pi_k|}^{\,\pi_k}$ 的变量是$u^{\pi_k} =$ —

$\prod_{i\in\pi_k} u_i$。将 (4.16) 代入上式，我们得到

$$\begin{aligned} & T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}(qu_1,\cdots,u_n) - T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}(u_1,\cdots,u_n) \\ = & \sum_{j\neq 1}\sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}}\prod_{k:\,k\neq *}\frac{\boldsymbol{B}_{\pi_k}}{|\pi_k|}(u_1,\cdots,u_n)\cdot\left(\sum_{a=1}^{|\pi_*|-1}\binom{|\pi_*|-1}{a}(-1)^a\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_*|-a}}{|\pi_*|-a}(u_{\pi_*})+\frac{(-1)^{|\pi_*|}}{|\pi_*|}\right) \\ = & \sum_{I:\,\varnothing\subsetneq I\subseteq[n]\setminus\{1\}}(-1)^I T_{n-|I|}(u_1u_I,\cdots,\check{u}_i,\cdots), \end{aligned}$$

这里第二个等式源于组合解释，其中基数为a 的集合对应于集合I。

□

注 4.5. 关于$\boldsymbol{B}_n$ 拟椭圆性的结果 (4.16) 也可以根据 Szegö 核$S(z,c)$的拟椭圆性推导得出。事实上，由 (3.1) 和 (4.2) 可得

$$S(z+2\pi\mathbf{i}\tau,c) = e^{-c}S(z,c).$$

这给出

$$\begin{aligned} (m-1)!\cdot[c^{m-1}]S(z+2\pi\mathbf{i}\tau,c) &= (m-1)!\cdot[c^m]\left(e^{-c}\cdot cS(z,c)\right) \\ &= (m-1)!\left(\sum_{a+b=m,\,a\geq 1}[c^a](cS(z,c))\frac{(-1)^b}{b!}+\frac{(-1)^m}{m!}\right). \end{aligned}$$

由(A.12)中给出的关系 $\boldsymbol{B}_m = (m-1)!\cdot[c^{m-1}]S(z,c)$,$m\geq 1$，我们得到(4.16)。注意，由于只出现带有$m\geq 1$ 的项，我们可以将$S(z,c)$ 替换为以下关于c的正则函数

$$S^{\mathrm{reg}}(z,c) = S(z,c) - \frac{1}{c}.$$

由此得到

$$\frac{\boldsymbol{B}_m}{m} = \partial_c^{m-1}S^{\mathrm{reg}}(z,0). \tag{4.17}$$

还可以通过拟模形式 $\mathbb{G}_2$ 在 $\mathcal{E}_m^*$ 中的出现情况，追踪其依赖关系。我们采用以下规则来衡量 (4.14) 中体现的拟模性。

$$\partial_{\mathbb{G}_2}\mathcal{E}_1^* = -2z,\quad \partial_{\mathbb{G}_2}\mathcal{E}_m^* = 0,\ m\geq 2. \tag{4.18}$$

这带来了以下模异常结构的另一种证明，该结构已[3] 在 [Pix08 的引理 4.2 中得到证明。2] 使用行列式公式 (1.5)。

推论 4.6。对于任意 $n\geq 1$，有

$$\partial_{\mathbb{G}_2}T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}} = -2\sum_{i<j}(z_i+z_j)T_{n-1}^{\mathrm{GW}}(z_i+z_j,\cdots,\check{z}_i,\cdots\check{z}_j,\cdots).$$

证明。由 (4.18) 和定理 A.1 (iii)，或完全贝尔多项式的组合解释 (A.12)，我们看到

$$\partial_{\mathbb{G}_2}\boldsymbol{B}_m = -2z\cdot m\cdot\boldsymbol{B}_{m-1},\quad m\geq 1.$$

[3]这也可由 [LZ23、定理 3.1],推出，定理 1.2 得到了保证。

因此，当 $|\pi_k| \geq 2$ 有

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbb{G}_2}\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|}}{|\pi_k|}(\sum_{i\in\pi_k} z_i) &= -2\sum_{i\in\pi_k} z_i\cdot(|\pi_k|-1)\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|-1}}{|\pi_k|-1}(\sum_{i\in\pi_k} z_i)\\ &= -2\sum_{i\in\pi_k} z_i\cdot\sum_{i'\in\pi_k:\, i'\neq i}\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|-1}}{|\pi_k|-1}(\sum_{i\in\pi_k} z_i)\,.\end{aligned}$$

上面的每一项 $\sum_{i'\in\pi_k:i'\neq i}\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|-1}}{|\pi_k|-1}(\sum_{i\in\pi_k} z_i)$ 都对应于这样一种贡献：先将 π_k 中的两个元素 i, i' 合并成一个元素，再对所得新集合的所有划分求和。由此可知，对于 $|\pi_k| \geq 2$

$$\partial_{\mathbb{G}_2}\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|}}{|\pi_k|}(\cdots, z_i, \cdots, z_{i'}, \cdots) = -2\sum_{\{i,i'\}\subseteq\pi_k}(z_i+z_{i'})\frac{\boldsymbol{B}_{|\pi_k|-1}}{|\pi_k|-1}(z_i+z_{i'}, \cdots, \check{z}_i, \cdots, \check{z}_{i'}, \cdots)\,.$$

当 $|\pi_k| = 1$ 时，该贡献是集合 $\{z_i + z_j\}$所对应贡献 1 的 $-2z_i$ 倍，其中 $j \in [n] \setminus \cup_k \pi_k$ 取自 (4.9)。综合以上结果，即得所需结论。

□

4.2.1 T_n 与 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}n}$ 之间的关系：差分方程与奇异行为

(1.6) 中的 GW 生成级数 T_n 满足以下若干性质。具体而言，有 $T_1 = 1$，且

- 差分方程 [BO00，定理 8.1，推论 10.2]

$$\begin{aligned}T_n(qu_1, \cdots, u_n) &= T_n(u_1, \cdots, u_n)\\ &\quad + \sum_{I=\{i_1,\cdots,i_s\}\subseteq[n]\setminus\{1\}}(-1)^{|I|}T_{n-|I|}(u_1u_I, \cdots, \check{u}_{i_1}, \cdots, \check{u}_{i_s}, \cdots)\,,\end{aligned} \tag{4.19}$$

  其中，诸如 $\check{}u^{i_1}$ 这样的记号表示省略了变量u^{i_1}。此外，T_n 在u_i、$\mathfrak{S}_n$ 作用下的$i = 1$、2、$\cdots$、n上是对称的。

- 奇异行为 [BO00，定理 11.1，方程 11.2，方程 11.3]

$$T_n(u_1, \cdots, u_n) = \frac{T_{n-1}(u_2, \cdots, u_n)}{u_1 - 1} + \text{regular terms}\,,\quad u_1 \to 1\,, \tag{4.20}$$

  并且$T_n(u1$、$\cdots$、$un)$ 在除子$u_1u_2\cdots u_k = 1$、$k \geq 2$上是正则的。

另见 [Oko01，命题 1、命题 2、定理 5、定理 6]，其中给出了这些性质的表示论证明。

从递归求解该系统的角度来看，差分方程和奇异行为将函数T_n 确定到一个常数，而该常数则由消失条件[BO00，定理 11.2、定理 11.3、方程 11.3]唯一确定。

$$T_n|_{u_1\cdots u_n=1} = 0\,,\quad n \geq 2\,. \tag{4.21}$$

我们现在给出如下证明：$T_n = T^{\Omega_{\mathrm{GW}}n}$

命题 4.7。 采用上述记号。我们有

$$T_n = T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}}.$$

证明。 注意，除了消失条件 (4.21) 外，还可以通过施加条件递归确定常数序列：要求 $T_n, n \geq 1$ 是纯权拟椭圆函数。该条件已在定理 4.3 中得到确立。因此，要验证 $T_n = T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$，只需证明 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$ 满足 (4.19) 、 (4.20)。

差分方程 (4.19) 正是推论 4.4 中给出的 $\mathrm{T}^{\Omega_{\mathrm{GW}}}\mathrm{n}$ 的拟椭圆性。现在证明条件 (4.20)。由 (A.12), $\mathrm{B}_m(\mathrm{u})$ 是关于 $^{\theta}(\mathrm{a})_{\theta}$ 的多项式，因此由 (4.9) 可知，T_n 的奇点至多是在除子 $\mathrm{u}_I := \prod_{i\in I}\mathrm{u}_i = 1, \mathrm{I} \subsetneq [\mathrm{n}]$ 上的简单极点。公式 (4.9) 还给出了 T_n 在 $\mathrm{u}_i = 1$ 上所需的简单极点结构 (4.20)。对于任意满足 $|\mathrm{I}| > 1$ 的除子 $\mathrm{u}_I = 1, \mathrm{I} \subsetneq [\mathrm{n}]$，(4.9) 中可能沿该除子出现奇点的项来自 $\mathrm{B}_I/|\mathrm{I}|$。根据 (A.9)，它在 $\mathrm{u}_I = 1$ 上是正则的。

□

注 4.8. 正如 [BO00，第 10 节，定理 11.2] 所示，利用表达式 (1.5) 中 F_n ([BO00，方程 7.7]) 的递归结构，一旦满足 (4.19)，消失条件 (4.21) 实际上蕴含 (4.20)。此外，(4.21) 可以弱化为

$$T_n|_{u_1\cdots u_n=1} \text{ is regular}, \quad \text{or} \quad T_n|_{u_1\cdots u_n=1} \to 0 \text{ as } u_1 \to 1. \tag{4.22}$$

对 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$ 的公式 (4.9) 应用同样的推理，要验证 $T_n = T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$，只需证明 (4.19) 以及 (4.21)、(4.22) 中的任意一个。应当可以基于求和公式 (4.9) 中的分拆，以类似于 [BO00，定理 11.3], 中推理的方式证明 (4.21) 或 (4.22)，正如我们在例 3.20 中所做的那样。

We c最后证明主要结果定理 1.2，现为方便起见重述如下 .

定理 4.9。沿用上述记号，设J[n] 上的线性坐标分别为 $z_1, \cdots, z_n$，且 $q = e^{2\pi \mathrm{i}\tau}$。则有

$$T_n(z_1, \cdots, z_n; q) = \left\langle \gamma_n^{\mathrm{GW}}, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \right\rangle. \tag{4.23}$$

证明。 这由引理 3.15、定理 4.3 和命题 4.7 得出。 □

4.2.2 T_n 与 $T^{\Omega_{\mathrm{Wick}}}{}_n$ 的关系

许多结果，例如复数域$_{2n}$的行列式公式(3.7) 的推导，在排序 Ω_{Wick} 而非 Ω_{GW} 的情形下表述起来更为方便，参见例如 [Oko01，定理 1]。因此，我们现在将 $T^{\Omega_{\mathrm{Wick}}}{}_n$ 与 $T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n = T_n$ 联系起来。

与（1.3）相比，其中

$$T_n = \langle \boldsymbol{T}_n \rangle = [v^0] \langle \psi(u_1 v_1)\psi^*(v_1)\cdots\psi(u_n v_n)\psi^*(v_n)\rangle, \qquad (u, v) \in \Omega_{\mathrm{GW}},$$

关联函数 $T^{\Omega_{\mathrm{Wick}}}{}_n$ 定义为 $\langle \boldsymbol{T}^{\mathrm{Wick}} \rangle$，其中

$$\boldsymbol{T}_n^{\mathrm{Wick}} = [v^0]\left(\psi(u_1 v_1)\cdots\psi(u_n v_n)\psi^*(v_n)\cdots\psi^*(v_1)\right), \quad (u, v) \in \Omega_{\mathrm{Wick}}.$$

注意，$[\boldsymbol{T}(u_i),\boldsymbol{T}(uj)]=0$，这与命题 3.15 中提到的 T_n 的 $\mathfrak{S}_n$ 对称性一致。

类似于 [Oko01，第3节.2.2], 我们可以通过在相应算子 $\boldsymbol{T}_n$、$\boldsymbol{T}_n^{\mathrm{Wick}}$的层面证明以下关系，将 T_n 与 $T^{\Omega_{\mathrm{Wick}}}{}_n$ 联系起来。

命题 4.10。 设记号如上。则有

$$\boldsymbol{T}_{[n]}^{\mathrm{Wick}}=\sum_{\pi\in\Pi_{[n]}}\prod_{k=1}^{\ell}(-1)^{\pi_k}\boldsymbol{T}_{\pi_k}(\prod_{i\in\pi_k}u_i)\,.$$

证明。 我们通过数学归纳法证明这一点。通过直接计算很容易验证，

$$[\boldsymbol{T}(u),\psi^*(v)]=-\psi^*(\frac{v}{u})\,,\quad [v^0]\psi(u_jv_j)\psi^*(\frac{v_j}{u_i})=\boldsymbol{T}(u_iu_j)\,.\tag{4.24}$$

基于这些，可以证明$n=2$ 情形下的结论，即

$$\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{Wick}}=\boldsymbol{T}(u_1)\boldsymbol{T}(u_2)-\boldsymbol{T}(u_1u_2)\,.$$

现在假设该陈述对第 $\leq n$ 种情形成立。现在证明该陈述对第$n+1$ 种情形成立。

根据定义，有

$$\boldsymbol{T}_{[n+1]}^{\mathrm{Wick}}=[v^0]\left(\psi(u_1v_1)\boldsymbol{T}^{(A)}_{[n+1]\setminus\{1\}}\psi^*(v_1)\right)\,.$$

由归纳假设可得，

$$\boldsymbol{T}_{[n+1]}^{\mathrm{Wick}}=[v^0]\left(\psi(u_1v_1)\sum_{\pi\in\Pi_{[n+1]\setminus\{1\}}}\prod_{k=1}^{\ell}(-1)^{\pi_k}\boldsymbol{T}_{\pi_k}\psi^*(v_1)\right)\,.$$

根据上述对易关系 (4.24) 中的第一个关系（参见 [Oko01，方程 3.11]），可得

$$\boldsymbol{T}(x_m)\cdots\boldsymbol{T}(x_1)\psi_s^*=\sum_{I\subseteq[m]}(-1)^{|I|}\prod_{i\in I}x_i^s\cdot\psi_s^*\prod_{i\notin I}\boldsymbol{T}(x_i)\,.$$

代入此式，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{[n+1]}^{\mathrm{Wick}}&=[v^0]\sum_{r,s}\psi_r\psi_s^*(u_1v_1)^{-r}v_1^{-s}\sum_{\pi\in\Pi_{[n+1]\setminus\{1\}}}(-1)^{\pi}\prod_{K\subseteq[\ell]}(-1)^{|K|}(\prod_{k\in K}u_{\pi_k})^s\prod_{k\notin K}\boldsymbol{T}_{\pi_k}\\&=\sum_{\pi\in\Pi_{[n+1]\setminus\{1\}}}(-1)^{\pi}\prod_{K\subseteq[\ell]}(-1)^{|K|}\boldsymbol{T}(u_1\prod_{k\in K}u_{\pi_k})\prod_{k\notin K}\boldsymbol{T}_{\pi_k}\\&=\sum_{\pi'\in\Pi_{[n+1]}}(-1)^{\pi'}\boldsymbol{T}_{\pi'}\,.\end{aligned}$$

至此，归纳证明完成。 □

命题 4.10 中关系的逆关系可如下获得。定义 e

$$\mu:\Pi_{[n]}\to\mathbb{R}\,,\quad \pi\mapsto(-1)^{\pi}\prod_k(|\pi_k|-1)!\,.$$

那么由定理 4.13，得出 \(\mathrm{T}_n\) 与 \(\mathrm{T}^{\mathrm{Wick}}_n\) 之间的关系：

在按细化关系排序的偏序集 $\Pi_{[n]}$ 上的莫比乌斯反演公式，我们有

$$(-1)^{n-1}\boldsymbol{T}_n=\sum_{\pi\in\Pi_{[n]}}\mu(\pi)\boldsymbol{T}_{\pi}^{\mathrm{Wick}}\,.$$

4.3 T_n的椭圆和模完备化

我们现在按照第4.2节中的讨论，讨论椭圆曲线的椭圆补全 $T_n = T^{\Omega_{\mathrm{GW}}}{}_n$ 。椭圆函数理论中的标准事实（例如， [EZ85]）表明，$\mathcal{E}_1^*$ 的椭圆与模补全由[4]给出

$$\widehat{\mathcal{E}_1^*} = \frac{\widehat{\theta}'}{\widehat{\theta}} = \frac{\theta'}{\theta} + \boldsymbol{A}\,, \quad \widehat{\theta} = e^{-2\pi \frac{(\mathrm{im}(z/2\pi\mathbf{i}))^2}{\mathrm{im}\,\tau}}\theta\,, \quad \boldsymbol{A}(z) = \frac{\mathrm{im}\,(z/2\pi\mathbf{i})}{\mathrm{im}\,\tau}\,.$$

利用集合划分的含义

$$\boldsymbol{B}_m(\widehat{\mathcal{E}_1^*}, \mathcal{E}_2^*, \cdots, \mathcal{E}_m^*) = \sum_{a=0}^{m} \binom{m}{a} \boldsymbol{B}_{n-a}(0, \mathcal{E}_2^*, \cdots, \mathcal{E}_m^*) \cdot \boldsymbol{B}_a(\widehat{\mathcal{E}_1^*}, 0, \cdots, 0)\,,$$

我们看到，椭圆与模补全 $\boldsymbol{B}_m$ 是通过将集合 $[m]$ 的分拆中 1-块的贡献$\mathcal{E}_1^*$替换为 $\widehat{\mathcal{E}}_1^*$而从 $\boldsymbol{B}_m$ 得到的。在其生成级数的层面上，由 (A.12) 可知，椭圆与模补全对应于将 $\theta(z)$ 全部替换$\widehat{\theta}$为(z) ，从而将 $S(z,c)$ 替换为

$$\widehat{S}(z,c) = e^{\boldsymbol{A}c} S(z,c)\,. \tag{4.25}$$

4.3.1 基于分划求和公式的完备化

我们有如下类似于推论 4.4 中 (4.16) 的关系。

推论 4.11。对于 $n \geq 1$，椭圆与模补全 T_n 由下式给出

$$\widehat{T}_n = \sum_{j\in[n]} \sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}} \prod_k \frac{1}{|\pi_k|} \sum_{\pi_k = \pi_k' \sqcup \pi_k''} \boldsymbol{B}_{\pi_k'}(u_{\pi_k}) \boldsymbol{A}^{|\pi_k''|}(u_{\pi_k})\,, \tag{4.26}$$

其中，记号 $\pi_k = \pi' k \sqcup \pi'' k$ 表示将 π_k 分解为两个互不相交且可能为空的子集 $\pi' k$， $\pi'' k$。

证明。 由二项式恒等式 (4.15)，我们有

$$\boldsymbol{B}_{\pi_k}(u_{\pi_k}) = \sum_{\gamma=(\pi_k',\pi_k'')\in\Gamma_\pi} \boldsymbol{B}_{\pi_k'}(u_{\pi_k}) \boldsymbol{A}^{|\pi_k''|}(u_{\pi_k})\,,$$

其中， γ 是由 π 与两个可能为空的块合成而成。将其代入定理 4.3 中的式 (4.9)，即可得到所需的结论。

□

4.3.2 复数域$_{2n}$ 的正则化积分

我们已在定理 4.9 中证明，枚举生成级数 T_n 与有序的 A-圈积分重合

$$T_n^{\Omega_{\mathrm{GW}}} = \left\langle\, \gamma_n^{\mathrm{GW}}\,,\, \varphi_n^{\mathrm{GW}} \,\right\rangle = \int_{A_{[n]}\subseteq\Omega_{\mathrm{GW}}} \varpi\,, \quad \varpi = \theta(u_{[n]}) \cdot \Theta_{2n}\,.$$

[4]参见 [LZ23，第 2.4] 条注释，其中研究了该函数及其在进行正则化积分时的相关性；另请参见附录B.1 中的注释 B.1，了解关于其在关联函数中出现的相关讨论。

此后，为了记号简便，在进行积分时，我们省略典范丛的平凡化 $\bigwedge_{nk=1} dz_k$ 以及体积形式的记号。

在 [LZ21, LZ23], 中引入的正则化积分概念已被证明与有序的 A 圈积分密切相关，因此可以推广到当前情形。事实上，令（参见 [EO06, 第 3.3 节.1]）

$$D_{ij} = \left\{ (w_1, \cdots, w_n) \mid w_i - w_j + \sum_{k \in K} z_k - \sum_{\ell \in L} z_\ell \in \Lambda_\tau \text{ for some } K \subseteq [n], L \subseteq [n] \right\}, \tag{4.27}$$

以及 $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$。与 [LZ21, 引理 2.35], 中关于超平面配置除子的讨论类似，可以找到一种一致的极点阶数约化方法，并定义正则化积分；而 [LZ21, 命题 2.27] 则可直接推广。 [LZ21, 引理 3.27] 中构造的（依赖于 u 的）积分区域在其边界上没有极点，这一构造同样 $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ 适用于当前情形。我们还通过添加关于 $\mathcal{J}_n$ θ函数的亚纯有理函数（其极点至多沿着 D 出现），扩充了由椭圆函数、拟椭圆函数和近椭圆函数构成的环 $\mathcal{J}_n, \mathcal{J}_n, \mathcal{J}_n$ 。

在下文中，我们假设 $1 < |u_i| \ll |q|^{-1}, 1 \le i \le n$ ，并考虑下列与 Ω_{GW} 兼容的区域（参见[EO06, 第3节.3.1]）

$$\left\{ (u, v) \mid |q| < |\prod_{k \in K} u_k^{\pm 1} \cdot \frac{v_i}{v_j}| < 1 \text{ for } i > j \right\}, \tag{4.28}$$

其中 K 是 $[n]$ 的任意子集。由于 ϖ 具有单极点结构，我们得到以下结果，它将有序的 A-圈积分与 ϖ 的正则化积分联系起来。这与 [LZ21, 引理 3.26 、引理 3.37] 以及 [LZ23, 引理 A.5] 类似。

引理4.12。有

$$⨍_{E_{[n]}} \varpi = \int_{A_{[n]}} \varpi + \sum_{J:\, J \neq \emptyset} (2\pi \mathbf{i})^{|J|} \sum_{\mathfrak{r}_J} \kappa_{J, \mathfrak{r}_J} \cdot \left(\int_{A_{[n]-J}} R^J_{\mathfrak{r}_J} \right)^{\prec} \varpi, \tag{4.29}$$

其中

- $\prec$ 是按大小逆序排列，如 $\int_{A_{[n]}} = \int_{A_n} \cdots \int_{A_2} \int_{A_1}$ 中所示。
- $J = (j_1, \cdots, j_\ell)$ 是一个无重复序列：$j_1 \prec j_2 \prec \cdots \prec j_\ell$，其基数为 $|J| = \ell$。
- $\mathfrak{r}_J = (\mathfrak{r}_{j_1}, \cdots, \mathfrak{r}_{j_\ell})$ 满足 $j_a \prec \mathfrak{r}_{j_a}, \mathfrak{r}_{j_a} \in [n]$ 对于 $a = 1, 2, \cdots, \ell$.
- $\kappa_{J, \mathfrak{r}_J}$ 是关于生成元 $A(z_i), i \in J$ 的次数为 $|J|$ 的多项式。
- 记 $R(i)\, j$ 为 w_i 处关于 $\in D_{ij}$ 的留数之和，其中 D_{ij} 定义于 (4.27)。那么 $R_{J\mathfrak{r}_J} = R(j_\ell)_{\mathfrak{r}_{j_\ell}} \circ \cdots \circ R(j_1)_{\mathfrak{r}_{j_1}}$，而记号 $\left(\int_{A_{[n]-J}} R_{J\mathfrak{r}_J} \right)^{\prec}$ 表示按照排序 $\prec$ 排列的算子。

证明。 证明与 [LZ23，引理 A 5] 中的证明类似。我们使用 $\mathbb{C}$ 上的线性坐标 w ，其体积形式为 $\mathrm{vol} = \mathrm{i}2\mathrm{im}\ \tau dw \wedge dw$。对于任意几乎椭圆函数 $\Psi = \sum_k \Psi_k (w\ \tau^{i-}{}_{\tau-\tau}{}^{i} w)^k$,

由 [LZ21 引理 3.26] 可得

$$\begin{aligned}
&\fint_{E_i}\Psi\\
=\;&\sum_k\frac{1}{k+1}\int_A\Psi_k+2\pi\mathbf{i}\sum_k\frac{1}{k+1}\sum_r R_r^{(i)}\left((\frac{\overline{w}_i-w_i}{\overline{\tau}-\tau})^{k+1}\Psi_k\right)\\
=\;&\sum_k\frac{1}{k+1}\int_A\Psi_k+2\pi\mathbf{i}\sum_k\frac{1}{k+1}\sum_r R_r^{(i)}\left((\frac{\overline{w}_i-\overline{w}_r+\overline{w}_r-w_r+w_r-w_i}{\overline{\tau}-\tau})^{k+1}\Psi_k\right)\\
=\;&\sum_k\frac{1}{k+1}\int_A\Psi_k+2\pi\mathbf{i}\sum_k\frac{1}{k+1}\sum_{\ell:0\le\ell\le k+1}\binom{k+1}{\ell}(\frac{1}{\overline{\tau}-\tau})^{\ell}\sum_r(\frac{\overline{w}_r-w_r}{\overline{\tau}-\tau})^{k+1-\ell}R_r^{(i)}\left((w_r-w_i)^{\ell}\Psi_k\right).
\end{aligned}$$

这里在最后一个等式中，我们使用了对任意亚纯函数 $(wf)=0$ 的 $\mathrm{Res}_{w=0}$。现在假设 Ψ 至多有简单极点，则有

$$\fint_{E_i}\Psi\;=\;\sum_k\frac{1}{k+1}\int_A\Psi_k+2\pi\mathbf{i}\sum_k\frac{1}{k+1}\sum_r(\frac{\overline{w}_r-w_r}{\overline{\tau}-\tau})^{k+1}R_r^{(i)}(\Psi_k).$$

根据 [LZ21], 的结果， ω 的迭代正则化积分（易于验证其至多有简单极点）是几乎椭圆的，且至多有简单极点。接着，将 ω 的迭代正则化积分展开为迭代 A-圈积分和迭代留数运算。(4.27) 中除子 D 的结构表明，$\kappa_J,\mathfrak{r}_J$ 具有所需的多项式结构。

□

我们在命题 3.15 中已经看到，$\int_{A[n]\subseteq\Omega_{\mathrm{bound}}}\omega$ 在置换$(z1,\cdots,zn)$下保持不变。这与其作为迭代 A-圈积分的表述相符：这种不变性源于积分中对积分变量作如 (3.32) 所示的变换，以及 ω 在该变换下的不变性。根据 [LZ21], ，对于此类排序，取其平均值可得到一个纯权为$n-1$的拟椭圆函数，因此每个单独排序的 A-圈积分本身也具有这一性质。附录 B.2 给出了一个计算示例。此外，其椭圆与模补全由正则化积分 $\fint_{E[n]}\omega$ 给出。$\kappa_J,\mathfrak{r}_J$ 的结构与第 4.3 节中的讨论一致：对于一个有界排序，椭圆与模异常均通过 θ'/θ 进入，并通过添加$\boldsymbol{A}$ 中的项予以消除（$\boldsymbol{Y}=1/\mathrm{im}\tau$中不存在更高阶项）。

注 4.13. 根据其自守性，推论 4.11 中的椭圆与模补全 T_n 由 (2.13) 下降为 $\mathcal{P}^{\circ}_{[n]}(\mathsf{J}^{\circ}_{[n]}\times\Theta)|_{\mathsf{J}^{\circ}_{[n]}\times\Theta}$ 上的光滑截面。此外，奇点结构 (4.20) 表明，它仅沿 $\sum_{j=1}^n 0\times\mathsf{J}_{[n]\setminus\{j\}}$ 有一阶极点；这里回顾一下，0 表示雅可比簇 J 上由原点给出的除子。综上可得

$$\begin{aligned}
&\text{elliptic completion of }\left\langle\gamma_n^{\mathrm{GW}},\varphi_n^{\mathrm{GW}}\right\rangle\\
=\;&\fint_{E_{[n]}}\Phi_n^{\mathrm{GW}}\;\in\;\Gamma\left(\mathsf{J}_{[n]},\mathcal{C}^{\infty}\otimes\left(\mathcal{P}_{[n]}(\mathsf{J}_{[n]}\times\Theta)|_{\mathsf{J}_{[n]}\times\Theta}\right)(\sum_{j=1}^n 0\times\mathsf{J}_{[n]\setminus\{j\}})\right).
\end{aligned}$$

类似于有序的 A-圈积分 $\langle\gamma_n^{\mathrm{GW}},\varphi_n^{\mathrm{GW}}\rangle$，正则化积分 $\fint_{E_{[n]}}\Phi_n^{\mathrm{GW}}$（以及一般意义上的正则化积分 [LZ21] ）也有一种纯上同调表述。详细内容将在后续工作中给出。

关于可能与分层相关的推测

定理 4.3 中的按分拆求和结构给出

$$(q)_\infty F_n = \sum_{j\in[n]} \left(\frac{1}{\theta(z_{[n]})} \cdot \sum_{\pi\in\Pi_{[n]\setminus\{j\}}} \frac{\boldsymbol{B}_\pi}{|\pi|} \right) . \tag{4.30}$$

这种结构似乎亟待进一步的几何解释。对$n = 3$ 情形的一些实验（见附录 B.2）表明，这种结构不同于由有序A-圈积分和正则化积分所给出的自然分层，相关内容见 [LZ21、LZ23]。目前，我们还无法为（4.30）提供简洁的几何解释。

在最后这一部分，受 [Tot96、Get99]中的讨论启发，我们将从配置空间的分层角度，对定理 4.3 中按分拆求和的结构作一些关于其几何诠释的推测。

我们先介绍一些构造。对于每个非空标记集S 和 $\pi \in \Pi_S$，定义

$$\mathrm{Conf}_\pi(E) = \left\{ (p_a)_{a\in S} \mid p_a = p_b \text{ if and only if } \exists\, \pi_k \in \pi \text{ such that } a, b \in \pi_k \right\} .$$

再令 δ_S 表示$E_S = \prod_{a\in S} E_a$中的小对角线:

$$\delta_S = \left\{ (p_a)_{a\in S} \in \prod_{a\in S} E_a \mid p_a = p_b \text{ for } a, b \in S \right\} .$$

那么，$\mathrm{Conf}_\pi(E)$ 的闭包满足 $\mathrm{Conf}_\pi(E) \cong \overline{\prod_{\pi_k\in\pi} \delta_{\pi_k}}$。此外，还存在如下分层

$$E_S = \bigsqcup_{\pi\in\Pi_S} \mathrm{Conf}_\pi(E) , \quad E_S = \bigcup_{\pi\in\Pi_S} \overline{\mathrm{Conf}_\pi(E)} . \tag{4.31}$$

现在，对于 $n \geq 1$ 和 $j \in [n],$，我们定义态射

$$\begin{aligned} f_j : E_{[n]} &\to E_{[n]\setminus\{j\}} , \\ (p_1, \cdots, p_n) &\mapsto (p_1, \cdots, p_{j-1}, \check{p}_j, p_{j+1}, \cdots, p_n) . \end{aligned} \tag{4.32}$$

考虑 f 遵循将多变量准椭圆函数分配给小对角线的规则

$$\mathfrak{R} : \quad \delta_I \subseteq E_I \mapsto \partial_c^{(|I|-1)}|_{c=0} S^{\mathrm{reg}}(z_I, c) = \frac{\boldsymbol{B}_{|I|}}{|I|}(z_I) \text{ for } |I| \geq 1 . \tag{4.33}$$

扩展 $\mathfrak{R}$，使其将小对角线上的运算 $\bigcup$、$\prod$映射到拟椭圆函数环上的运算 $+$、$\cdot$。然后由 (4.32)、(4.31) 中的第二个分层、(4.33) 和 (4.30)，我们看到

$$\theta(z_{[n]})(q)_\infty F_n = \mathfrak{R} \left(\sum_{j\in[n]} f_j(E_{[n]}) \right) . \tag{4.34}$$

我们希望在未来的工作中，沿着 [Kri94、Tot96、Get99、BL11] 的思路，借助混合霍奇结构的语言进一步研究这一结构，并采用 [OP06a] 中 GW/Hurwitz 对应提供的输入。

有序A圈积分的拟椭圆性

在这一部分中，我们将首先回顾雅可比 theta 函数的一些基本性质，然后给出定理3.12的证明。

A.1 椭圆函数与拟椭圆函数基础

我们回顾一些关于艾森斯坦级数和雅可比形式的基本事实，主要参照 [EZ85]。对于正整数k，定义艾森斯坦级数

$$\mathbb{G}_k = \frac{1}{2}\cdot(k-1)!\cdot\sum_{\lambda\in\Lambda_\tau-\{(0,0)\}}^{e}\frac{1}{\lambda^k}\,. \tag{A.1}$$

当k 为奇数时，按照惯例将其定义为零。当$k = 2$时，使用艾森斯坦求和规则 $\sum^e$ （先沿 $2\pi\mathbf{i}$ 方向求和，再沿 $2\pi\mathbf{i}\tau$ 方向求和，见 Λ_τ）来处理非绝对收敛问题。

雅可比 theta 函数 θ 满足

$$\theta(z) = z\exp\Big(\sum_{k\geq 1}-2\mathbb{G}_{2k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\Big)\,. \tag{A.2}$$

特别地，有如下洛朗展开

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{1}{z}+\sum_{k\geq 1}-2\mathbb{G}_{2k}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{1}{z}+\sum_{\lambda\in\Lambda_\tau-\{(0,0)\}}^{e}\Big(\frac{1}{z+\lambda}-\frac{1}{\lambda}\Big)\,. \tag{A.3}$$

另一方面，利用 θ 的雅可比三重积恒等式，可得傅里叶展开（$u = e^z$）

$$\begin{aligned}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} &= -\frac{1}{2}-\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1}q^{nk}u^n+\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}q^{nk}u^{-n}\\ &= -\frac{1}{2}-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1-q^n}u^n+\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{1-q^n}u^{-n}\\ &= -\frac{1}{2}-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{1-q^n}u^n\,,\quad |q|<|u|<1\,.\end{aligned} \tag{A.4}$$

因此，对于 $m\geq 2$

$$(\ln\theta)^{(m)} = -\left(\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1}n^{m-1}q^{nk}u^n+\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}(-1)^m n^{m-1}q^{nk}u^{-n}\right) = -\sum_{n\neq 0}\frac{n^{m-1}u^n}{(1-q^n)}\,,\quad |q|<|u|<1\,.$$

根据集合划分版本的法阿·迪·布鲁诺公式，有

$$\frac{\theta^{(n)}}{\theta} = \boldsymbol{B}_n\big((\ln\theta)',(\ln\theta)'',\cdots,(\ln\theta)^{(n)}\big) = \sum_{\ell=0}^{n}\boldsymbol{B}_{n,\ell}\big((\ln\theta)',(\ln\theta)'',\cdots,(\ln\theta)^{(n-\ell+1)}\big)\,, \tag{A.5}$$

其中$\boldsymbol{B}_{n、\ell}$ 是贝尔多项式，而$\boldsymbol{B}_n = \sum_{\ell=0}^{n}\boldsymbol{B}_{n、\ell}$ 是完全贝尔多项式。它们中的每一个都是纯权为n的拟椭圆函数。这些量可以用由 [魏76]定义的艾森斯坦-克罗内克级数表示。

$$\mathcal{E}_m(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_\tau}^{e}\frac{1}{(z+\lambda)^m}\,. \tag{A.6}$$

由此可得

$$\partial_z \mathcal{E}_m = -m\mathcal{E}_{m+1}\,, \quad \mathcal{E}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(\ln\theta)^{(m)}\,, \quad m \geq 1\,. \tag{A.7}$$

我们现在汇集一些关于Szegö核的有用性质，这些性质来自 [Zag91]（另见 [BL11、GM20]）。

定理 A.1 ([扎格91])。设

$$S(z,w) = \frac{\theta'(0)\theta(z+w)}{\theta(z)\theta(w)}\,. \tag{A.8}$$

然后，它满足以下性质。

i). 它是定义在不定格 $A^{1,1}$ 上的 *theta* 级数的解析延拓：

$$S(z,w) = \frac{u}{u-1} + \frac{1}{v-1} - \sum_{m,n\geq 1}(u^m v^n - u^{-m}v^{-n})q^{mn}\,, \quad |uq|<1\,, |vq^{-1}|>1\,,$$

其中 $u = e^z$,$v = e^w$。或者，

$$-S(z,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{u^n}{1-vq^n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{v^n}{1-uq^n}\,, \quad |q|<|u|, |v|<1\,.$$

ii). 其傅里叶展开满足

$$S(z,w) = \frac{1}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} + \frac{1}{2}\frac{e^w+1}{e^w-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d|n}(e^{(dz+\frac{n}{d}w)} - e^{-(dz+\frac{n}{d}w)})q^n\,.$$

iii). 有

$$S(z,w) = \frac{1}{w}\exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{w^m}{m!}\left((-1)^{m-1}(m-1)!\,\mathcal{E}_m(z) + 2\mathbb{G}_m\right)\right)\,.$$

定理 A.1 (iii) 在获得优美的 Laurent 级数展开时尤其有用。其推导如下。有

$$\mathcal{E}_1(z+w) = \sum_{m\geq 0}\partial_z^m \mathcal{E}_1(z)\frac{w^m}{m!} = \sum_{m\geq 0}(-1)^m m!\,\mathcal{E}_{m+1}(z)\frac{w^m}{m!}\,.$$

由 (A.7) 可得

$$\frac{\theta(z+w)}{\theta(z)} = \exp\left(\sum_{m\geq 0}(-1)^m m!\,\mathcal{E}_{m+1}(z)\frac{w^{m+1}}{(m+1)!}\right)\,.$$

结合 (A.2)，即可得到定理 A.1 (iii)。这一恒等式应与定理 A.1 (ii) 中给出的 m 阶关于 w 的 $S(z,w)$ 的 Laurent 系数进行比较

$$m!\cdot[w^m]S(z,w) = -\delta_{m,0}\sum_{k\geq 1}u^k + \frac{B_{m+1}}{m+1} - \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}n^m q^{nk}(u^k + (-1)^{m+1}u^{-k})\,, \quad m\geq 0\,. \tag{A.9}$$

上述 Laurent 系数是关于z的准椭圆函数。更具体地，令

$$\mathcal{E}_m^*(z) = (-1)^{m-1}(m-1)!\,\mathcal{E}_m(z) + 2\mathbb{G}_m = (\ln\theta)^{(m)} + 2\mathbb{G}_m\,, \quad m\geq 1\,. \tag{A.10}$$

由 (A.1) 和 (A.6) 可得

$$\mathcal{E}_m^* := (-1)^{m-1}(m-1)!\left(\frac{1}{z^m}+\sum_{\lambda\in\Lambda_\tau-\{(0,0)\}}(\frac{1}{(z+\lambda)^m}+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{\lambda^m})\right),\quad m\geq 1. \tag{A.11}$$

此外，由定理 A.1 (iii)、完全 Bell 多项式 (4.15) 满足的二项式型关系以及 (A.5)，可得

$$\begin{aligned} m!\cdot[w^m]S(z,w) &= \frac{1}{m+1}\boldsymbol{B}_{m+1}(\mathcal{E}_1^*,\mathcal{E}_2^*,\cdots,\mathcal{E}_{m+1}^*)\\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{a+2b=m+1}\binom{m+1}{a}\boldsymbol{B}_a((\ln\theta)',\cdots,(\ln\theta)^{(a)})\cdot 2\mathbb{G}_{2b}\\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{a+2b=m+1}\binom{m+1}{a}\frac{\theta^{(a)}}{\theta}\cdot 2\mathbb{G}_{2b}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

其中采用约定 $2\mathbb{G}_0=1$。

例 A.2. 考虑 $m=0,\ 1$ 项，可得

$$\mathcal{E}_1^*=\frac{\theta'}{\theta}=-(\frac{1}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{u^k}{1-q^k}),\quad \frac{1}{2}\mathcal{E}_2^*+\frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^*)^2=\frac{\theta''}{2\theta}+\mathbb{G}_2=\frac{1}{12}-\sum_{k\neq 0}\frac{q^ku^k}{(1-q^k)^2}. \tag{A.13}$$

A.2 定理 3.12 的证明

基于附录 A.1 中回顾的结果，我们现在建立一些结果，这些结果将引出定理 3.12 的证明，且似乎具有独立的研究价值。

命题 A.3. 定义

$$\mathcal{A}_{m+1}(u)=\sum_{k\neq 0}\frac{q^kA_m(q^k)}{(1-q^k)^{m+1}}u^k, \tag{A.14}$$

其中 A_m 是欧拉多项式：$A_0=A_1=1,\ A_2=x+1,\ \cdots$。那么对于 $m\geq 1,\ \mathcal{A}_{m+1}(u)$ 在区域 $|q|<|u|<1$内绝对收敛。此外，有

$$\mathcal{A}_{m+1}(u)=\frac{B_{m+1}}{m+1}-m!\cdot[w^m]S(z,w)\in\mathbb{C}\Big[\{\frac{\theta^{(k)}}{\theta}\}_{0\leq k\leq m+1}\Big]. \tag{A.15}$$

证明。 根据定义，有

$$\mathcal{A}_{m+1}(u)=\sum_{k\geq 1}\frac{q^kA_m(q^k)}{(1-q^k)^{m+1}}u^k+(-1)^{m+1}\sum_{k\geq 1}\frac{q^{(m+1)k-k}A_m(q^{-k})}{(1-q^k)^{m+1}}u^{-k}. \tag{A.16}$$

当 $m\geq 1$ 时，有 $\deg A_m=m-1$。与几何级数比较可知，其在区域 $|q|<|u|<|q^{-1}|$ 中绝对收敛，特别是在区域 $|q|<|u|<1$ 中。使用由 [Bon12] 给出的 $A_m(x)$ 的生成级数。

$$\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}A_m(x)=\frac{x-1}{x-e^{(x-1)t}},$$

可以看出

$$A_m(\frac{1}{x})=x^{1-m}A_m(x),\quad m\geq 1.$$

由此可得

$$\mathcal{A}_m(u)=\sum_{k\geq 1}\frac{q^kA_m(q^k)}{(1-q^k)^{m+1}}u^k+(-1)^{m+1}\sum_{k\geq 1}\frac{q^kA_m(q^k)}{(1-q^k)^{m+1}}u^{-k},\quad m\geq 1.$$

应用经典恒等式

$$\sum_{\ell\geq 1}\ell^m x^\ell=\frac{xA_m(x)}{(1-x)^{m+1}},$$

可得到

$$\mathcal{A}_{m+1}(u)=\sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1}\ell^m q^{k\ell}u^k+(-1)^{m+1}\sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1}\ell^m q^{k\ell}u^{-k},\quad m\geq 1.$$

利用附录 A.1 中的关系式 (A.9)、(A.12)，有

$$m!\cdot[w^m]S(z,w)=-\delta_{m,0}\sum_{k\geq 1}u^k+\frac{B_{m+1}}{m+1}-\sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1}\ell^m q^{k\ell}(u^k+(-1)^{m+1}u^{-k})\in\mathbb{C}\Big[\{\frac{\theta^{(k)}}{\theta}\}_{0\leq k\leq m+1}\Big].$$

综上，我们得到（A.15）。

□

例 A.4. 当 $m=0$ 时，有

$$\mathcal{A}_1(u)=\sum_{k\neq 0}\frac{q^ku^k}{1-q^k}=\sum_{k\geq 1}\frac{q^ku^k}{1-q^k}-\sum_{k\geq 1}\frac{u^{-k}}{1-q^k}$$

其在区域 $1<|u|<|q|^{-1}$ 中收敛。由 (A.4) 可得

$$\mathcal{A}_1(u)=-\frac{1}{2}-\frac{\theta'}{\theta}(qu),\quad 1<|u|<|q|^{-1}.$$

右侧可以利用其拟椭圆性，从区域 $1<|u|<|q|^{-1}$ 解析延拓至区域$|q|<|u|<|q|^{-1}$,$u\neq 1$。事实上，由 θ 的自守性 (3.1) 可得

$$\frac{\theta'}{\theta}(u)=\frac{\theta'}{\theta}(qu)+1,\quad |q|<|u|<1,\tag{A.17}$$

~因此，$\mathcal{A}_1(u)$ 的解析延拓 $\mathcal{A}_1(u)$ 满足

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1(u)=\frac{1}{2}-\frac{\theta'}{\theta}(u)=1+\sum_{k\neq 0}\frac{u^k}{1-q^k},\quad |q|<|u|<1.\tag{A.18}$$

注意，此处也可以使用奇偶性来代替拟椭圆性。

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1(u)=-\frac{1}{2}+\frac{\theta'}{\theta}(u^{-1}),\quad |q|<|u|<1$$

以获得相同的结果。 △

定理 *3.12* 的证明。 回顾定义 3.30，可知

$$g_{b,a}(u)=(-1)^a(\frac{1}{2})^b+\sum_{k\geq 1}\frac{q^{ka}u^k}{(1-q^k)^b}+\sum_{k\geq 1}(-1)^b\frac{q^{k(b-a)}u^{-k}}{(1-q^k)^b}.$$

考虑 $b = 1$ 的情形，由 (A.4) 可得

$$g_{1,0}(u) = -\frac{\theta'}{\theta}(u) - \frac{1}{2}, \quad |q| < |u| < 1.$$

这里的 $g^{1,1}(u) = \mathcal{A}_1(u)$ 已在例 A.4 中讨论。因此，我们只需证明 $b \geq 2$ 的情形。

i). 这可由与几何级数的比较得出。特别地，每个级数 $g_{b,a}$ 在区域 $|q| < |u| < 1$ 内绝对收敛。

ii). 忽略 $g_{b,a}$ 中的常数项不会改变结论。为方便起见，我们这样处理，并聚焦于其余部分，记为 $f_{b,a}$。回顾弗罗贝尼乌斯公式 [Bon12]

$$A_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell!\, S(n,\ell)(x-1)^{n-\ell}, \quad n \geq 1.$$

我们看到

$$\frac{q^k A_n(q^k)}{(1-q^k)^{n+1}} = \sum_{\ell=1}^{n} S(n,\ell)(-1)^{n-\ell} \frac{q^k}{(1-q^k)^{\ell+1}}, \quad n \geq 1.$$

由斯特林反演公式，得到

$$(-1)^n \frac{q^k}{(1-q^k)^{n+1}} = \sum_{\ell=1}^{n} s(n,\ell)(-1)^{\ell} \frac{q^k A_\ell(q^k)}{(1-q^k)^{\ell+1}}, \quad n \geq 1.$$

因此，有

$$f_{n,1}(u) = \sum_{k \neq 0} \frac{q^k}{(1-q^k)^{n+1}} u^k = (-1)^n \sum_{\ell=1}^{n} s(n,\ell)(-1)^{\ell} \mathcal{A}_{\ell+1}, \quad n \geq 1. \tag{A.19}$$

由命题 A.3 可知，对任意 $n \geq 2$

$$f_{n,1}(u) \in \mathbb{C}\Big[\{\frac{\theta^{(k)}}{\theta}(u)\}_{0 \leq k \leq n+1}\Big], \quad |q| < |u| < 1. \tag{A.20}$$

利用拟椭圆性，我们得到 $f_{n,1}$ 在任意环域 $|q^{m+1}| < |u| < |q^m|, m \in \mathbb{Z}$ 上的解析延拓 $\widetilde{f}_{n,1}$ of $f_{n,1}$

现在考虑 $f_{b,a}$，其中 $0 \leq a < b$。若 u 满足 $|q| < |u| < 1$，则 $q^{a-1}u$ 满足

$$|q^a| < |q^{a-1}u| < |q^{a-1}|.$$

利用 (A.20) 和 (A.17)，我们得到

$$f_{b,a}(u) = \widetilde{f}_{b,1}(q^{a-1}u) \in \mathbb{C}\Big[\{\frac{\theta^{(k)}}{\theta}(q^{a-1}u)\}_{0 \leq k \leq b+1}\Big] = \mathbb{C}\Big[\{\frac{\theta^{(k)}}{\theta}(u)\}_{0 \leq k \leq b+1}\Big], \quad |q| < |u| < 1.$$

由 (A.5) 和 (A.17) 可知，$\theta_{(k)}\,\theta\,(u)$ 是纯权为 k 的拟椭圆函数；一般而言，$\theta_{(k)}\,\theta\,(q^{a-1}u)$ 是混合权拟椭圆函数，其首项权为 k。此外，它与 $\theta_{(k)}\,\theta\,(u)$具有相同的首项。

—

考虑最后一种情形，其中 $2 \leq a = b$，此时函数 $f_{b,a}$ 在区域 $1 < |u| < |q|^{-1}$内绝对收敛。例 A.4 中的同样推理仍然适用。证明完毕。

□

B n点函数的求值

在这一部分中，我们将给出二维手征共形场论和 GW理论中n点函数的一些计算。许多步骤都高度依赖于准椭圆函数之间的非平凡恒等式，例如例 3.20 中的恒等式。

B.1 自由玻色子和自由费米子的二点函数

我们用拟椭圆函数计算径向/时间排序和正规排序下算子的二点关联函数。我们主要遵循 [KNTY88, DJM00] 中的阐述。

自由手征玻色子

考虑由 $a_n, n \in \mathbb{Z}$ 生成的海森堡代数，其中

$$[a_m, a_n] := a_m a_n - a_n a_m = m\delta_{m+n,0}\,.$$

再引入算子 x_0，使得 $[a_0, x_0] = \mathbf{1}$。手征玻色子场定义为以下生成级数

$$\phi(u) = x_0 + a_0 \ln u + \sum_{n\neq 0} a_n \frac{u^{-n}}{-n}\,.$$

流场定义为

$$J(u) = u\partial_u \phi = a_0 + \sum_{n\neq 0} a_n u^{-n}\,.$$

引入算子的正规乘积

$$:a_m a_n: := \begin{cases} a_m a_n\,, & n \geq m \\ a_n a_m\,, & n < m\,. \end{cases}$$

哈密顿量 H 定义为正规乘积

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} :a_{-k}a_k: := \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} a_{-k}a_k + \frac{1}{2}\sum_{k\leq -1} a_k a_{-k}\,.$$

算子 $H - \frac{1}{24}$ 可视为对朴素定义的乘积进行ζ正则化 t

$$\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} a_{-k}a_k = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} :a_{-k}a_k: + \frac{1}{2}\sum_{k\leq -1}[a_{-k}, a_k] = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} :a_{-k}a_k: + \frac{1}{2}\sum_{k\leq -1} -k = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} :a_{-k}a_k: + \frac{1}{2}\zeta(-1)\,.$$

也就是说，形式上 $\frac{1}{2}\zeta(-1)$ 就是真空能量

$$\frac{1}{2}\zeta(-1) =^{\text{formally}} \frac{1}{2}\lim_{\frac{v}{u}\to 1}\sum_{k\geq 1} k(\frac{v}{u})^k =^{\text{formally}} \frac{1}{2}\lim_{\frac{v}{u}\to 1}\frac{\frac{v}{u}}{(1-\frac{v}{u})^2}\,.$$

更几何地说，上文 $H - \frac{1}{24}$ 中的额外项 $-\frac{1}{24}$ 源于映射 $z \mapsto u = e^z$ 所导致的射影联络变化。哈密顿量 H 满足

$$[a_n, H] = n a_n\,. \tag{B.1}$$

二点关联函数定义为通常的玻色子福克空间上的如下迹

$$\langle a_\ell a_k\rangle := \mathrm{Tr}\,(q^{H-\frac{1}{24}}a_\ell a_k)\,.$$

可以使用 (B.1) 如下确定它们。我们有

$$\mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}a_\ell a_k) = \mathrm{Tr}(a_k q^{H-\frac{1}{24}}a_\ell) = \mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}+k}a_k a_\ell)\,.$$

另一方面,

$$\mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}a_\ell a_k) - \mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}a_k a_\ell) = \mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}\cdot \ell\delta_{\ell+k})\,.$$

结合这两者，我们得到

$$\mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}a_\ell a_k) = \begin{cases} \frac{\ell}{1-q^{-k}}\delta_{k+\ell}\mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}) & \ell\neq 0\,,\\ 0\,, & \ell = 0\,,\end{cases} \tag{B.2}$$

其中配分函数 $\mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}})$ 可直接计算得

$$\langle \mathbf{1}\rangle = \mathrm{Tr}(q^{H-\frac{1}{24}}) = \left(q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\right)^{-1}\,.$$

注释 B.1. 称为动量的一个$_0$,谱为 $\mathbb{R}$。此谱对关联函数/特征的贡献为

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}2\pi\mathbf{i}\tau p^2}e^{\frac{1}{2}\overline{2\pi\mathbf{i}\tau}p^2}e^{pz}e^{p\bar{z}}dp\,.$$

这给出了额外因子 $(\mathrm{im}\ \tau)^{-\frac{1}{2}}$to $\langle\mathbf{1}\rangle$以及 $e^{-2\pi\,(\mathrm{im}z)^2/\mathrm{im}\tau}$to θ_0。谱的这一贡献是n点函数中模异常和椭圆异常的来源。

由 (B.2) 可知，径向序/时间序乘积[5] $J(u)J(v)$，$|u|>|v|$ 的二点函数为

$$\langle J(u)J(v)\rangle = \sum_{k,\ell}u^{-\ell}v^{-k}\langle a_\ell a_k\rangle = \sum_{k\neq 0}\frac{kq^k}{1-q^k}(\frac{v}{u})^{-k} = \wp(\frac{v}{u}) + 2\mathbb{G}_2\,. \tag{B.3}$$

作为比较，正规序乘积的二点函数是

$$\langle :J(u)J(v):\rangle = \sum_{k,\ell}u^{-\ell}v^{-k}\langle :a_\ell a_k:\rangle = \sum_{k\geq 0}\frac{kq^k}{1-q^k}(\frac{v}{u})^{-k} + \sum_{k<0}\frac{-kq^{-k}}{1-q^{-k}}(\frac{v}{u})^{-k}\,. \tag{B.4}$$

那么差异就是复数域真空期望值

$$\langle J(u)J(v)\rangle - \langle :J(u)J(v):\rangle = -\sum_{k<0}k(\frac{v}{u})^{-k} = \sum_{k\geq 1}k(\frac{v}{u})^{k} = \frac{\frac{v}{u}}{(1-\frac{v}{u})^2}\,. \tag{B.5}$$

[5]有 $u = e^{2\pi\mathbf{i}(\sigma-\mathrm{i}t)}$，其中$t,\sigma$是时空的时间和空间方向的坐标。也可以使用 $\tilde{u} = e^{2\pi\mathbf{i}(\sigma+\mathrm{i}t)}$作为坐标，同时将 $a_n u^{-n}$改为 $a_n \tilde{u}^{-n}$，使得时间排序由 $|\tilde{u}|<|\tilde{v}|$给出。

在区域 $|q| < |\frac{v}{u}| < 1$中， $\wp(\frac{v}{u}) + 2G_2$在$\frac{v}{u}=1$处的奇点由下式体现（回顾（A.4））

$$\begin{aligned}\wp + 2G_2 &= \sum_{k\geq 1}\frac{k(\frac{v}{u})^k}{1-q^k} - \sum_{k\geq 1}\frac{k(\frac{v}{u})^{-k}}{1-q^{-k}} \\ &= \sum_{k\geq 1}k(\frac{v}{u})^k + \sum_{k\geq 1}\frac{k(\frac{v}{u})^k}{1-q^k} + \sum_{k\geq 1}\frac{kq^k(\frac{v}{u})^{-k}}{1-q^k}\,,\end{aligned}$$

其中最后两项之和在$\frac{v}{u}=1$附近是正则的。因此，差值 (B.5) 由径向排序的关联函数 (B.3) 的奇异部分给出，使正规排序的关联函数 (B.4) 正则，但不再是椭圆的。用加法坐标z表示，有

$$\frac{\frac{v}{u}}{(1-\frac{v}{u})^2} = -1 + \frac{1}{1-e^{w-z}} = -1 - \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}(w-z)^{n-1}\,.$$

自由手征费米子

可以将同样的分析应用于费米子 $\psi(u), \psi^*(v)$ ，其模生成克利福德代数。在此情况下，径向排序乘积 $\psi(u)\psi^*(v), |u| > |v|$的关联函数给出 Szegö 核 $S_c(u,v)$。

具体细节如下。这些模态满足

$$\{\psi_r, \psi_s^*\} = \psi_r\psi_s^* + \psi_s^*\psi_r = \delta_{r+s}\,.$$

费米子场是

$$\psi(u) = \sum_r \psi_r u^{-r}\,, \quad \psi^*(v) = \sum_s \psi_s^* v^{-s}\,.$$

移位哈密顿量

$$H - \frac{1}{24} = \sum_r r : \psi_{-r}\psi_r^* : -\frac{1}{24}$$

是其ζ正则化版本的

$$\sum_r r\psi_{-r}\psi_r^* = \sum_r r : \psi_{-r}\psi_r^* : + \sum_{r<0} r = \sum_r r : \psi_{-r}\psi_r^* : + \frac{1}{2}\zeta(-1)\,,$$

当 r、$s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$时，有

$$[H, \psi_r] = -r\psi_r\,, \quad [H, \psi_r^*] = -r\psi_r^*\,. \tag{B.6}$$

根据定义，

$$\psi(u)\psi^*(v) = \sum_{r,s}\psi_r\psi_s^* u^{-r}v^{-s}\,, \quad :\psi(u)\psi^*(v): = \sum_{r,s:\,s>0}\psi_r\psi_s^* u^{-r}v^{-s} - \sum_{r,s:\,s<0}\psi_s^*\psi_r u^{-r}v^{-s}\,.$$

由此可得

$$\begin{aligned}:\psi^*(v)\psi(u): &= -:\psi(u)\psi^*(v): \\ \psi(u)\psi^*(v) &= :\psi(u)\psi^*(v): + \sum_{s<0}(\frac{v}{u})^{-s}\mathbf{1}\,, \quad |\frac{v}{u}| < 1\,, \\ \psi^*(v)\psi(u) &= :\psi^*(v)\psi(u): + \sum_{s>0}(\frac{v}{u})^{-s}\mathbf{1}\,, \quad |\frac{u}{v}| < 1\,.\end{aligned}$$

这些差异是形式分布[6]

$$\begin{aligned}\psi(u)\psi^*(v) - :\psi(u)\psi^*(v): &= \sum_{r,s:\, s<0} \delta_{r+s} u^{-r} v^{-s} = \sum_{s<0} (\frac{v}{u})^{-s}\mathbf{1}\,,\\ \psi(u)\psi^*(v) - \psi^*(v)\psi(u) &= \delta_{u,v} := \sum_{s<0} (\frac{v}{u})^{-s}\mathbf{1} + \sum_{s>0} (\frac{v}{u})^{-s}\mathbf{1}\,.\end{aligned}$$

与自由手征玻色子情形中的推理类似，利用 (B.6) 可得

$$\langle \psi_r \psi_s^* \rangle = \frac{q^s}{1+q^s}\delta_{r+s}\,, \quad \langle \psi_s^* \psi_r \rangle = \frac{q^r}{1+q^r}\delta_{r+s}\,, \tag{B.7}$$

除以配分函数 $\langle \mathbf{1} \rangle$ 进行归一化后。由此可得

$$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle = \sum_{r,s} \frac{q^s}{1+q^s}\delta_{r+s} u^{-r} v^{-s} = \sum_s \frac{q^s}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{-s}\,, \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}\langle :\psi(u)\psi^*(v): \rangle &= \sum_{s>0} \frac{q^s}{1+q^s}\delta_{r+s} u^{-r} v^{-s} - \sum_{s<0} \frac{q^{-s}}{1+q^{-s}}\delta_{r+s} u^{-r} v^{-s}\\ &= -\sum_{s>0} \frac{q^s}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{s} + \sum_{s>0} \frac{q^s}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{-s}\,.\end{aligned} \tag{B.9}$$

差值即为 $\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle$ 的“奇异部分”，它也是真空期望值，

$$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle - \langle :\psi(u)\psi^*(v): \rangle = \sum_{s>0} (\frac{v}{u})^{s}\,,$$

于是关联函数 $\langle : \psi(u)\psi^*(v) : \rangle = -\langle : \psi^*(v)\psi(u) : \rangle$ 在各处均无奇异性。这就是径向有序乘积，Wick 定理便于在其中表述

$$C_{2n} = \langle \psi(u_1)\cdots\psi(u_n)\psi^*(v_n)\cdots\psi^*(v_1) \rangle = \det(\langle \psi(u_i)\psi^*(v_j) \rangle)\,.$$

令 $s = n + \delta, \delta \in (0,1)$。那么由 (B.8)，$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle$ 的傅里叶级数在区域 $|q| < |\frac{v}{u}| < 1$ 内收敛

$$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle = \sum_s \frac{q^s}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{-s} = \sum_{s>0} \frac{1}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{s} + \sum_{s>0} \frac{q^s}{1+q^s}(\frac{v}{u})^{-s}\,.$$

由定理 A.1 (i)，可得 Szegö 核

$$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle = (\frac{v}{u})^{1-\delta} \sum_n \frac{(\frac{v}{u})^n}{1-q^n e^c} = -(\frac{v}{u})^{1-\delta} S_c(w-z)\,, \tag{B.10}$$

其中

$$e^c = -q^{1-\delta} = e^{2\pi \mathbf{i}(\frac{1}{2} + (1-\delta)\tau)}\,, \quad c \neq 0\,.$$

当 $\delta = \frac{1}{2}$ 时，这可简化为

$$\langle \psi(u)\psi^*(v) \rangle = -(\frac{v}{u})^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_c(\frac{v}{u})}{\theta_c(0)} \frac{\theta'(0)}{\theta(\frac{v}{u})} = -(\frac{v}{u})^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(c+w-z)}{\vartheta_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(c)} \frac{\theta'(0)}{\theta(\frac{v}{u})} = -\frac{\vartheta_{(0,0)}(\frac{v}{u})}{\vartheta_{(0,0)}(0)} \frac{\theta'(0)}{\theta(\frac{v}{u})}\,.$$

特别地，利用 $\vartheta(0,0)$、$\vartheta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的奇偶性，即可得到所需关系（参见 [Oko01，公式 3.9]）

$$[v^0]\langle \psi(uv)\psi^*(v) \rangle = -\frac{\vartheta_{(0,0)}(\frac{1}{u})}{\vartheta_{(0,0)}(0)} \frac{\theta'(0)}{\theta(\frac{1}{u})} = \frac{\vartheta_{(0,0)}(u)}{\vartheta_{(0,0)}(0)} \frac{\theta'(0)}{\theta(u)} = \frac{\vartheta_{(0,0)}(u)}{\theta(u)}\,. \tag{B.11}$$

[6] 在 [Oko01] 中，第 3.3.2 节和（3.11）中假设，在解析延拓之后，δ_u，v 被设为零算子。这同样适用于函数方程 $\theta(u^{-1}) = -\theta(u)$ 的傅里叶展开。然而，在推导命题 4.10 的（4.24）等计算中，当该分布与其他形式分布相乘时，并未将其视为零。

B.2 有序A圈积分与$n = 3$ 情形的正则化积分

在本部分中，我们计算有序的A-圈积分和正则化积分的值。

$$\theta(\prod_k u_k)\Theta_{2n} = \frac{\theta(\prod_k u_k)}{\prod_k \theta(u_k)}\Phi, \quad \Phi := \frac{\prod_{i<j}\theta(\frac{u_i v_i}{u_j v_j}\theta(\frac{v_i}{v_j})}{\prod_{i<j}\theta(\frac{u_i v_i}{v_j}\theta(\frac{v_i}{u_j v_j})}$$

对于$n = 3$ 情形，使用 [LZ21、LZ23]中发展的技术。再次地，我们使用加法坐标z 和乘法坐标$u = e^z$，二者可互换。

在继续之前，下面的留数可直接验证，我们将反复使用它们

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{v_i=u_i^{-1}v_j}\left(\frac{\theta(\frac{u_i v_i}{u_j v_j})\theta(\frac{v_i}{v_j})}{\theta(\frac{u_i v_i}{v_j})\theta(\frac{v_i}{u_j v_j})}\right) &= -\frac{1}{S_{ij}} \\
\mathrm{Res}_{v_i=u_j v_j}\left(\frac{\theta(\frac{u_i v_i}{u_j v_j})\theta(\frac{v_i}{v_j})}{\theta(\frac{u_i v_i}{v_j})\theta(\frac{v_i}{u_j v_j})}\right) &= \frac{1}{S_{ij}}, \qquad S_{ij} := \left(\frac{\theta'(1)\theta(u_i u_j)}{\theta(u_i)\theta(u_j)}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

定义拟椭圆函数

$$Z(z) = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \zeta(z) - 2\mathrm{G}_2 z\,. \tag{B.13}$$

其椭圆与模补全为 $\widehat{Z}(z) = Z(z) + \boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}(z) = \mathrm{im}_z\mathrm{im}\,\tau$。 ——

记R^i_j 为$w_i \in D^{ij}$处留数之和，其中D^{ij} 定义于（4.27）中。根据 [LZ23], 中给出的留数公式，我们有

$$\int_{E_{[n]}}\Phi = R^2_3R^1_2\Phi\left(\widehat{Z}(\frac{v_1}{v_3})\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3}) - \frac{1}{2}\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})^2\right) + R^2_3R^1_3\Phi\left(\widehat{Z}(\frac{v_1}{v_3})\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})\right).$$

and

$$\int_{A_{[n]}}\Phi = R^2_3R^1_2\Phi\left(Z(\frac{v_1}{v_3})Z(\frac{v_2}{v_3}) - \frac{1}{2}Z(\frac{v_2}{v_3})^2 - \frac{1}{2}Z(\frac{v_2}{v_3})\right) + R^2_3R^1_3\Phi\left(Z(\frac{v_1}{v_3})Z(\frac{v_2}{v_3})\right).$$

利用 (B.12)、(A.3) 和 (B.13) 进行直接计算可得

$$
\begin{aligned}
R_3^2R_2^1\Phi\left(\widehat{Z}(\frac{v_1}{v_3})\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})\right) &= \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(-\widehat{Z}(u_3)\widehat{Z}(u_1u_3)+\widehat{Z}(u_2)\widehat{Z}(u_1u_2)\\
&\qquad -\widehat{Z}(u_1)\widehat{Z}(u_1u_2)+\widehat{Z}(u_3)\widehat{Z}(u_2u_3))\\
&\quad -\frac{1}{S_{12}}\frac{\theta(\frac{1}{u_1})\theta(\frac{u_2}{u_3})}{\theta(\frac{1}{u_1u_3})\theta(u_2)}\widehat{Z}(\frac{1}{u_1})+\frac{1}{S_{12}}\frac{\theta(\frac{u_1}{u_3})\theta(\frac{1}{u_2})}{\theta(u_1)\theta(\frac{1}{u_2u_3})}\widehat{Z}(\frac{1}{u_2}),\\
R_3^2R_2^1\Phi\left(-\frac{1}{2}\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})^2\right) &= \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\frac{1}{2}\widehat{Z}(u_1u_3)^2-\frac{1}{2}\widehat{Z}(\frac{1}{u_2})^2+\frac{1}{2}\widehat{Z}(\frac{1}{u_1u_2})^2-\frac{1}{2}\widehat{Z}(u_3)^2)\\
&\quad -\frac{1}{S_{12}}(-\frac{1}{2})\frac{\theta(\frac{1}{u_1})\theta(\frac{u_2}{u_3})}{\theta(\frac{1}{u_1u_3})\theta(u_2)}(Z(\frac{1}{u_1})+Z(\frac{u_2}{u_3})-Z(\frac{1}{u_1u_3})-Z(u_2))\\
&\quad +\frac{1}{S_{12}}(-\frac{1}{2})\frac{\theta(\frac{u_1u_2}{u_3})}{\theta(u_1u_2)\theta(\frac{1}{u_3})},\\
R_3^2R_2^1\Phi\left(-\frac{1}{2}\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})\right) &= \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\frac{1}{2}Z(u_1u_3)-\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_2})+\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_1u_2})-\frac{1}{2}Z(u_3))\\
&\quad -\frac{1}{S_{12}}(-\frac{1}{2})\frac{\theta(\frac{1}{u_1})\theta(\frac{u_2}{u_3})}{\theta(\frac{1}{u_1u_3})\theta(u_2)},\\
R_3^2R_3^1\Phi\left(\widehat{Z}(\frac{v_1}{v_3})\widehat{Z}(\frac{v_2}{v_3})\right) &= \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\widehat{Z}(u_1)\widehat{Z}(u_1u_2)+\widehat{Z}(u_1)\widehat{Z}(u_3)+\widehat{Z}(u_3)\widehat{Z}(u_1u_3)+\widehat{Z}(u_2)\widehat{Z}(u_3))\\
&\quad -\frac{1}{S_{13}}\frac{\theta(u_1)\theta(\frac{u_2}{u_3})}{\theta(u_1u_2)\theta(\frac{1}{u_3})}\widehat{Z}(\frac{1}{u_1}).
\end{aligned}
$$

有序 复数域-圈积分中出现的相应项，可通过将上述表达式中的 Z 替换为 Z得到。请注意，在每次积分中，选取关于其余变量的椭圆函数作为积分常数时存在歧义。这些积分常数会改变上述各个单独的项，但根据全局留数定理，不会影响总和。

计算 c^1 Fay 恒等式 (3.20) 在 $n=2$ 时得到的是

$$
\begin{aligned}
Z(\frac{1}{u_1})+Z(\frac{u_2}{u_3})-Z(\frac{1}{u_1u_3})-Z(u_2) &= \theta(\frac{u_2}{u_1u_3})\frac{1}{\theta(\frac{1}{u_1})\theta(\frac{u_2}{u_3})}\frac{\theta(u_3)\theta(u_1u_2)}{\theta(u_2)\theta(u_1u_3)},\\
\frac{1}{2}Z(u_1u_3)-\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_2})+\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_1u_2})-\frac{1}{2}Z(u_3) &= \frac{1}{2}\frac{\theta(u_1u_2u_3)\theta(\frac{1}{u_1})\theta(\frac{u_3}{u_2})}{\theta(u_2)\theta(u_3)\theta(u_1u_3)\theta(\frac{1}{u_1u_2})}.
\end{aligned}
$$

计算Fay 恒等式 (3.20) 的 $Q_i\to 0$ 极限，对于 $n=2$，得到

$$
\wp(z_1)-\wp(z_2)=-\frac{\theta(z_1+z_2)\theta(z_1-z_2)}{\theta(z_1)^2\theta(z_2)^2}
$$

因此

$$
-\frac{1}{2}\frac{\theta(u_1)\theta(u_3)\theta(\frac{u_2}{u_1u_3})}{\theta(u_2)\theta(u_1u_3)^2}+\frac{1}{2}\frac{\theta(u_1)\theta(u_2)\theta(\frac{u_1u_2}{u_3})}{\theta(u_3)\theta(u_1u_2)^2}=\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}\frac{1}{2}\left(\wp(u_2)-\wp(u_1u_3)+\wp(u_3)-\wp(u_1u_2)\right).
$$

利用这些恒等式进行化简，我们得到 $R_3^2R_2^1(\Phi(-\frac{1}{2}Z(\frac{v_2}{v_3}))=0$ 正如应有的情形，因为$\int_{A[n]}\Phi$ 具有纯权 0，而上面的项是唯一具有负权的项。另一个

项为

$$
\begin{aligned}
& R_3^2 R_2^1(\Phi Z_1 Z_2) \\
= \;& \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(-Z(u_3)Z(u_1u_3)+Z(u_2)Z(u_1u_2)-Z(u_1)Z(u_1u_2)+Z(u_3)Z(u_2u_3)) \\
& +\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}Z_1\left(Z_{21}-Z_2-Z_{13}+Z_3\right)-\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}Z_2\left(Z_{12}-Z_1-Z_{23}+Z_3\right) \\
= \;& \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}\left(-Z_3Z_{13}+Z_3Z_{23}-Z_1Z_{13}+Z_1Z_3+Z_2Z_{23}-Z_2Z_3\right), \qquad \text{(B.14)} \\
& R_3^2 R_2^1(\Phi(-\frac{1}{2}Z_2^2)) \\
= \;& \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\frac{1}{2}Z(u_1u_3)^2-\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_2})^2+\frac{1}{2}Z(\frac{1}{u_1u_2})^2-\frac{1}{2}Z(u_3)^2) \\
& +\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}\frac{1}{2}\left(\wp(u_2)-\wp(u_1u_3)+\wp(u_3)-\wp(u_1u_2)\right)) \\
= \;& \overset{(3.39)}{=}\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_1u_3)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_1u_2)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_2u_3)+Z_2Z_3-Z_2Z_{23}-Z_3Z_{23}), \qquad \text{(B.15)} \\
& R_3^2 R_3^1(\Phi Z_1 Z_2) \\
= \;& \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(Z(u_1)Z(u_1u_2)+Z(u_1)Z(u_3)+Z(u_3)Z(u_1u_3)+Z(u_2)Z(u_3)) \\
& -\frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}Z_1\left(Z_{21}-Z_2-Z_{13}+Z_3\right) \\
= \;& \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}\left(Z(u_3)Z(u_1u_3)+Z(u_2)Z(u_3)+Z(u_1)Z(u_2)+Z(u_1)Z(u_1u_3)\right). \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

这里我们使用了简写记号，即 $Z_k = Z(u_k)$、$Z_{k\ell} = Z(u_k u_\ell)$。将所有这些项放在一起，我们得到

$$
\int_{A_{[n]}} \Phi = \frac{\prod\theta(u_i)}{\theta(\prod u_i)}(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_1u_3)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_1u_2)+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2(u_2u_3)+Z_1Z_3+Z_2Z_3+Z_3Z_1).
$$

根据 (A.12) 和 (A.13)，这与结果 (3.37) 及定理 4.3 相符。类似地，正则化积分以与上述类似的形式组合而成，并且是上述有序A-圈积分的椭圆补全。

参考文献

[BBBM17] J. Böhm、K. Bringmann、A. Buchholz 和 H. Markwig，椭圆曲线的热带镜像对称，Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)，**732** (2017)，211–246。[BL13] C. Birkenhake 和 H. Lange，复阿贝尔簇，第**302**卷，Springer Science & Business Media，2013。[BL11] F. Brown 和 A. Levin，多重椭圆多对数，arXiv:1110.6917 [math.NT]。

[BO00] S. Bloch 和 A. Okounkov，《无穷楔表示的特征》，Advances in Mathematics **149**（2000），1–60。

[Bon12] M. Bóna，《排列组合学》，第二版，Discrete Mathematics and Its Applications（博卡拉顿），CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2012年。Richard Stanley 作序。[Dij95] R. Dijkgraaf，《镜像对称与椭圆曲线》，《曲线模空间》（泰瑟尔岛，1994年），数学进展，第129卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1995年，第149–163页。[DJM00] T. Miwa、E. Date 和 M. Jimbo，《孤子：微分方程、对称性与无限维代数》，剑桥大学出版社。[EO06] A. Eskin 和 A. Okounkov，《枕套与拟模形式》。载于：Ginzburg V.（编），《代数几何与数论》。数学进展，第253卷。Birkhäuser Boston。[EZ85] M. Eicher 和 D. Zagier，《雅可比形式理论》，数学进展第55卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1985年。[GM20] E. Goujard 和 M. Möller，《类费曼图的计数：拟模性与 Siegel–Veech权》，J. Eur. Math. Soc.，22（2020年），第2期，第365–412页。[Get99] E. Getzler，《构形空间上的混合霍奇模的消解》。杜克数学杂志。96(1)：175–203（1999年）。[KNTY88] N .Kawamoto、Y. Namikawa、A. Tsuchiya 和 Y. Yamada，《黎曼曲面上共形场论的几何实现》，Commun. Math. Phys. 116，247–308（1988年）。[Kri94] I. Kriz，《构形空间的有理同伦型》。数学年刊139，第2期（1994年）：227–237。[KZ95] M. Kaneko 和 D. Zagier，《广义雅可比θ函数与拟模形式》，《曲线模空间》（泰瑟尔岛，1994年），数学进展，第129卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1995年，第165–172页。[Li11] S. Li，《椭圆曲线上的BCOV理论与高亏格镜像对称》，arXiv:1112.4063[math.QA]。[Li12] S. Li，《费曼图积分与几乎模形式》，Commun. Number Theory Phys.，6（2012年），129–157。[Li16] S. Li，《顶点代数与量子主方程》，J. Differential Geom. 123（3），2023年，461–521。[LZ21] S. Li 和 J. Zhou，《黎曼曲面上的正则化积分与模形式》，Commun. Math. Phys. 388（2021年），1403–1474。[LZ23] S. Li 和 J. Zhou，《椭圆曲线上的正则化积分与全纯反常方程》，Commun. Math. Phys. 401（2023年），613–645。[Lib09] A. Libgober，《椭圆属、实代数簇与准雅可比形式》，arXiv:0904.1026[math.AG]。

[Mil03] A. Milas, 《形式微分算子、顶点算子代数与 ζ值 II》, Journal of Pure and Applied Algebra. 183, 191–244（2003年）。[Oko01] A. Okounkov, 《无穷楔积与随机分拆》。Sel. math., New ser. 7, 57（2001年）。[OP06a] A. Okounkov 和 R. Pandharipande, 《格罗莫夫-维滕理论、赫尔维茨理论与完备循环》, Ann. of Math. (2) 163（2006年）, 第2期, 517–560。[OP06b] A. Okounkov 和 R. Pandharipande, 《$\mathbb{P}^1$的等变格罗莫夫-维滕理论》, Ann. of Math. (2) 163（2006年）, 第2期, 561–605。[Pas88] M. Passare, 《亚纯流的一种演算》, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 卷32（1988年）, 37–56。[Pix08] A. Pixton, 《椭圆曲线的格罗莫夫-维滕理论与拟模形式》。学士论文。普林斯顿大学。2008年。[Rai89] A. Raina, 《法伊三割线恒等式与共形场论》, Commun. Math. Phys. 122, 625–641（1989年）。[RY09] M. Roth 和 N. Yui, 《椭圆曲线的镜像对称：B模型（玻色子）计数》, 预印本。[Tot96] B. Totaro, 《代数簇的构形空间》, Topology, 卷35, 第4期, 1996年10月, 第1057–1067页。[Wei76] A. Weil, 《依据 Eisenstein 和 Kronecker 的椭圆函数》, Ergebnisse der Mathematik bind 88, Springer（1976年）。[Zag91] D. Zagier, 《模形式的周期与雅可比 theta 函数》, Inventiones mathematicae 104（1991年）, 第1期, 449–465。[Zag16] , 《分拆、拟模形式与布洛赫–奥孔科夫定理》, The Ramanujan Journal 41（2016年）, 第1–3期, 345–368。[Zho23] , 《黎曼曲面构形空间上的正则化积分与上同调配对》, arXiv:2305.12362 [math.AG]。

丘成桐数学科学中心，清华大学，北京 100084，中华人民共和国 电子邮箱：
jzhou2018@mail.tsinghua.edu.cn