arXiv:2304.03920v1 [math.CO] 8 Apr 2023

关于单位周长三角形数量的改进估计

Ritesh Goenka、Kenneth Moore 和 Ethan Patrick White

Abstract. 我们得到了平面上的点所确定的单位周长三角形数量的新上界与下界。对于点集为整数网格的一部分这一特殊情形，我们也得到了改进的界。

1. Introduction

极值几何中的一大类问题可以概括如下。固定一个正整数 k 以及 k中点 $\mathbb{R}^2$元组的某种性质。问题在于，确定 k个 n点组成的 $\mathbb{R}^2$ 点集在单位距离问题中，能有多少″年 1946 [5]。这种形式的问题中，最著名的例子之一是埃尔德什在 [3, §6.2]提出的 [13]。这里，特殊性质是两点之间的距离恰好为一。另一个由 Oppenheim 于 1967年提出、研究甚广的未解问题，是确定能够构成面积为单位值三角形的三元组数量上限。该问题目前已知的最佳上界最近在 [13]中得到了改进。

在这项工作中，我们将重点估计由平面上的 n 个点确定的单位周长三角形的最大数量。Pach 和 Sharir 最早提出了这个问题，并证明了上界为 $O(n^{7/3})$ [9]。随后，他们将上界改进为 $O(n^{16/7})$，并指出，三角格的一部分可确定 $\Omega(n^{1+c/\log\log n})$ 个等边单位周长三角形 [11]。在我们的主定理中，我们改进了这两个估计。

定理 1.1. 由 n 个平面上的点确定的单位周长三角形数量为$O(n^{9/4+\epsilon})$，对所有 $\epsilon > 0$ 均成立，其中隐含常数依赖于 ϵ。此外，存在一组由 n 个平面上的点构成的点集，可确定$\Omega(n^{4/3})$ 个单位周长三角形。

定理 1.1 中的上界由 Pach 和 Sharir 的早期论证 [11] 结合 Sharir 和 Zahl 改进的关联估计 [15]得到。我们的下界构造利用从复空间到点线关联结构的映射，将其转化为一个点集，使得单个点属于 $\Omega(n^{4/3})$ 个单位周长三角形。证明将在第 2 节讨论。

网格和格结构是单位周长三角形问题和单位面积三角形问题的自然候选。单位面积三角形问题中已知的最佳构造是缩放后的整数格的一部分 [6]。Raz、Sharir 和 Shkredov 改进了点集为 $A \times B$、其中 A 和 B 是

等大小凸集 [14]。

我们证明，由 $[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\times[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ 生成的等周长三角形数量超过了此前已知的下界，但远少于定理 1.1给出的当前最佳上界。

定理 1.2。 由 $[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\times[\lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ 生成的等周长三角形的最大数量为 $O\left(n^{3/2+O\left(\frac{1}{\log\log n}\right)}\right)$，且为 $\Omega\left(n^{5/4}\right)$。

定理 1.2的证明将在第 3节讨论。上界由命题3.2 得出，下界由命题3.4得出。下界的关键思想是，整数边长且面积为整数的三角形总能在整数格上实现。

2. Proof of Theorem 1.1

上界。Pach 和 Sharir 的 $O(n^{16/7})$上界背后的思路，是注意到对于一对固定的点 a，$b\in\mathbb{R}^2$，与 a 和 b 构成单位周长三角形的点集是一个以 a，b 为焦点、长轴长度为 $1-|ab|$的椭圆。因此，除一个乘法常数外，由 n 个点构成的单位周长三角形数量，等于 $\binom{n}{2}$ 个椭圆与 n 个点之间的关联数量。

Pach 和 Sharir 使用他们著名的关联上界 [10]来界定这些关联。我们将使用 Sharir 和 Zahl 的关联上界，该上界依赖于以下定义。一个s次数至多为 D 的平面曲线 $F\subset\mathbf{P}\mathbb{R}^{\binom{D+2}{2}}$族是一个维数为 s的代数簇。 [15] 的定理 1.3 指出，属于一个 s维族的 m个点与 n 条代数曲线之间的关联数（其中任意两条曲线都没有共同的不可约分支）为

$$O(m^{\frac{2s}{5s-4}}n^{\frac{5s-6}{5s-4}+\epsilon})+O(m^{2/3}n^{2/3}+m+n), \tag{1}$$

其中 $\epsilon>0$ 是任意的，上述隐含常数取决于 ϵ 以及与曲线族相关的若干参数。

所有椭圆构成一个 5 维族。椭圆的集合包括 $\binom{n}{2}$ 我们构造的椭圆都满足这样一个性质：焦点之间的距离与长轴长度之和为 1。这个性质可以表示为椭圆系数的一个代数约束，因此我们的椭圆集合构成一个 4 维族。将数值代入 (1) 即可得到定理 1.1中给出的上界。

下界。 我们的构造可以概括为以下四个步骤。

(1) 构造一个由 n 条直线和 n 个点组成的构型，其中有 $\Omega(n^{4/3})$ 个点-直线关联，且这些点和直线位于 $\mathbb{R}^2$ 中。通过适当的平移，我们可以假设任意两条直线（不一定不同）都不是关于原点互为反射的，并且所有点都在上半平面内。(2) 现在将 $\mathbb{R}^2$ 认作 $\mathbb{C}$，并应用映射 $z\mapsto z^2$。这 n 条直线将映射为焦点位于原点的抛物线。(3) 应用映射 $z\mapsto\frac{z}{1+|z|}$。现在，(2) 中的所有抛物线都映射为一条焦点位于原点且与单位圆相切的椭圆。注意，所有由一条这样的椭圆的两个焦点和椭圆上的一个点构成的三角形

的周长恰好为 2。

(4) 此时，我们有 n 个点和 n 个椭圆，它们之间有 $\Omega(n^{4/3})$ 个点-椭圆关联。接下来，我们将原点以及每个椭圆的第二焦点加入点集。新增点总数至多为 $2n+1$ 个，因此可得到 $\Omega(n^{4/3})$ 个周长恰为 2 的三角形。

剩下需要证明上述步骤 (2) 和 (3) 中的结论。我们将通过两个引理来证明。

引理 2.1. 设 $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 由 $f_1(z) = z^2$ 定义。那么，不经过原点的直线在 f_1 下的像是一条焦点位于原点的抛物线。

证明. 任何一条不经过原点的直线都可以参数化为

$$\ell(t) = re^{i\theta}(1+it), \tag{2}$$

其中，$re^{i\theta}$ 是直线上距离原点最近的点。$\ell(t)$ 在映射 f_1 下的像是曲线

$$\gamma_1(t) = r^2 e^{2i\theta}\left(1 - t^2 + 2it\right).$$

我们将证明，γ_1 上的每个点到原点和直线的距离相等 e

$$\ell_D(t) = 2r^2 e^{2i\theta}(1+it). \tag{3}$$

任取 $t_0 \in \mathbb{R}$。$\gamma_1(t_0)$ 到原点的距离为 $r^2(1+t_0^2)$。另一方面，我们计算得到

$$|\ell_D(t) - \gamma_1(t_0)| = r^2\left|1 + t_0^2 + 2i(t - t_0)\right|,$$

当 $t = t_0$ 时，该值达到最小，与到原点的距离相同。因此，γ_1 是一条准线为 ℓ_D、焦点位于原点的抛物线。□

应用映射 $z \mapsto z^2$ 到 $\mathbb{C}$ 后，我们的关联结构变为一族 n抛物线和 n 点，具有 $\Omega(n^{4/3})$ 个关联。所有点都位于上半平面这一条件保证应用 f_1后这些点仍然互不相同。此外，由于任意两条直线都不关于原点互为反射，(3) 中所有准线也互不相同。

引理 2.2。 设 $f_2 : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ 由 $f_2(z) = \frac{z}{1+|z|}$ 定义。那么，焦点位于原点的抛物线的像是一个椭圆，其一个焦点位于原点，并与单位圆相切。

证明。 由旋转对称性，只需验证引理对准线为 $\ell_D(t) = 2r^2(1+it)$ 的抛物线成立，即 (3)，其中 $\theta = 0$。我们将证明另一个焦点是 $q = -\frac{1}{1+r^2}$，并验证到两个焦点的距离之和为常数。与 ℓ_D 对应的抛物线的像为

$$\gamma_2(t) = \frac{r^2(1+it)^2}{1 + r^2(1+t^2)}.$$

经过简短计算可得

$$\begin{aligned}|\gamma_2(t)-q| &= \frac{1}{(1+r^2(1+t^2))(1+r^2)}\left|r^2(1+it)^2(1+r^2)+1+r^2(1+t^2)\right| \\ &= \frac{1}{(1+r^2(1+t^2))(1+r^2)}\left|1+r^2+ir^2t\right|^2 \\ &= \frac{(1+r^2)^2+r^4t^2}{(1+r^2(1+t^2))(1+r^2)}.\end{aligned}$$

因此，到我们提出的焦点的距离之和为

$$\begin{aligned}|\gamma_2(t)-q|+|\gamma_2(t)| &= \frac{(1+r^2)^2+r^4t^2}{(1+r^2(1+t^2))(1+r^2)}+\frac{r^2\,(1+t^2)}{1+r^2(1+t^2)} \\ &= \frac{(1+2r^2)(1+r^2(1+t^2))}{(1+r^2(1+t^2))(1+r^2)} = \frac{1+2r^2}{1+r^2}.\end{aligned}$$

由于不依赖于 t，距离是常数，因此 γ_2 描述一个椭圆。显然， γ_2 完全位于单位圆盘内；并且当 $|t|\to\infty$ 时，我们有$\gamma_2(t)\to -1$，所以相切条件也成立。□

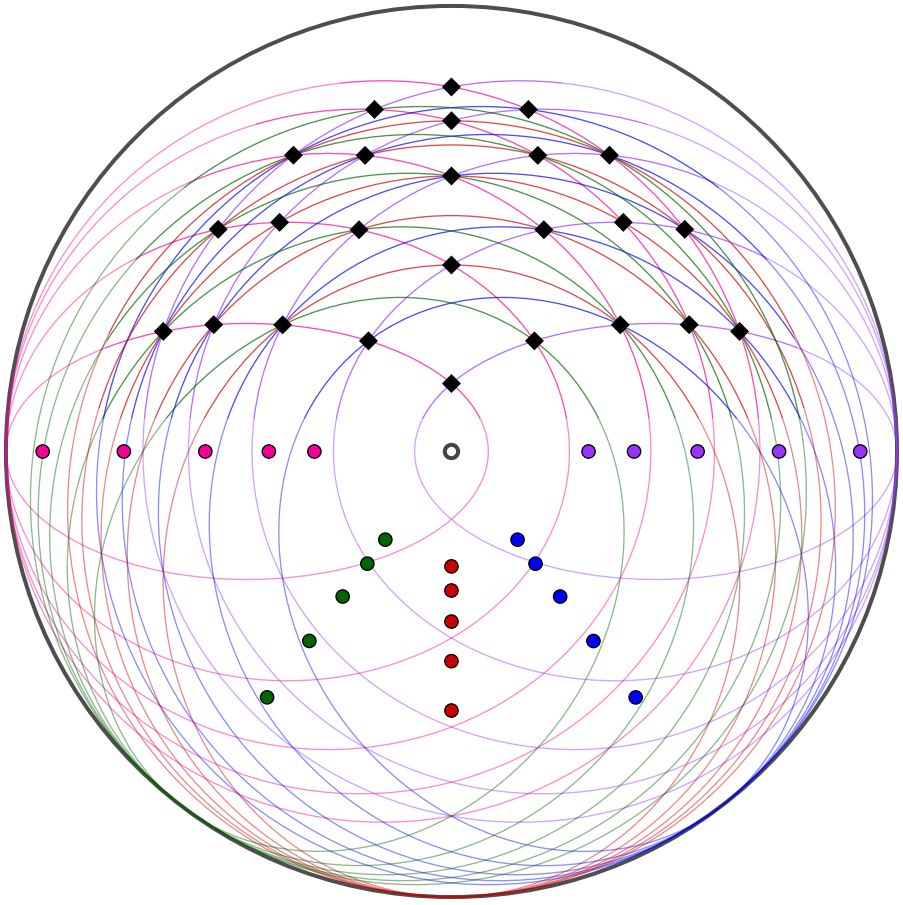


FIGURE 1. 一个由 51 点构型组成、形成 95 个单位周长三角形的构型。

一个焦点位于原点且与单位圆相切的椭圆具有这样的性质：由两个焦点和椭圆上一点构成的任意三角形，其周长恰好为 2。通过这个第二映射，我们得到 n 个椭圆和 n 个点，它们产生 $\Omega(n^{4/3})$ 个点-曲线关联。将原点以及每个椭圆的第二焦点加入点集，这些第二焦点的数量为 n，因此点集中的点总数至多为 $2n+1$。这个点集确定了 $\Omega(n^{4/3})$ 个周长恰好为 2 的三角形。

在图1中，我们展示了这一构造的一个实例，其中 $n = 25$，共有 95 个单位周长三角形。“方形”点是缩放后的 $f_2 \circ f_1$ 网格的 5×5 映像，椭圆是 5 组平行线的映像，而圆点是椭圆的焦点。

注2.3。映射$z \mapsto \sqrt{z}$ 还可以产生有趣的点—圆锥曲线关联构型。仿照引理2.1的证明，可以证明该映射将每条直线映为等轴双曲线的一段弧。

3. Grid Construction

现在我们来估计网格 $[\lfloor\sqrt{n}\rfloor] \times [\lfloor\sqrt{n}\rfloor]$ 中单位周长三角形的数量。下文将使用以下记号和术语。令$\mathbf{d}(n)$表示 n的正因数个数。凡提及三角形，均假设其非退化。若一个三角形可以使其顶点位于整数格 $\mathbb{Z}^2$上，则称它为**格点三角形** 。此外，若一个三角形的边长和面积均为整数，则称其为**海伦三角形** 。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $H(n)$表示周长为 n的不全等海伦三角形的数量。

引理3.1. 对于 $p > 0$，周长为 p 的非全等格点三角形的数量为$O\left(p^{1+O\left(\frac{1}{\log\log p}\right)}\right)$。

证明。 格点三角形任意一条边的距离平方都是正整数。我们可以假设周长 p 至少由一个格点三角形实现。设 $a_i\sqrt{d_i}$ 是一个周长为 p的三角形的边长，其中 $i = 1,2,3$；对于$i = 1, 2,3$， $a_i, d_i \in \mathbb{N}$ 和 d_i 均为无平方因子自然数。设$b_i\sqrt{e_i}$ 是另一个周长同为 p的三角形的边长。一个经典结论表明，所有无平方因子自然数的平方根构成的集合在有理数域上线性无关 [1, 4]。因此，由于

$$a_1\sqrt{d_1} + a_2\sqrt{d_2} + a_3\sqrt{d_3} = b_1\sqrt{e_1} + b_2\sqrt{e_2} + b_3\sqrt{e_3}, \tag{4}$$

我们必有 $\{d_1, d_2, d_3\} = \{e_1, e_2, e_3\}$。注意，如果 d_i对于 $i = 1, 2,3$ 两两不同，那么 (4) 只有在 $\{a_i\sqrt{d_i}\}_{i=1}^3 = \{b_i\sqrt{e_i}\}_{i=1}^3$时才成立，也就是说，周长为$p$的三角形唯一。类似地，如果 $d_1 = d_2 \neq d_3$ ，那么不妨设 $d_1 = e_1 = e_2$且 $d_3 = e_3$。这意味着 $a_3 = b_3$ 且 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$。由于 $a_1 + a_2 < p$，满足 (b_1, b_2, b_3) 的解的数量少于 (4) 。

最后，我们考虑最有趣的情形： $\{d_1\} = \{d_1, d_2, d_3\} = \{e_1, e_2, e_3\}$。令 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = m$。根据皮克定理， [12], 格点三角形的面积是半整数。对于某个 $k \in \mathbb{N}$，令 $k/2$ 为边长为 $\{b_i\sqrt{e_i}\}_{i=1}^3$的三角形的面积。根据海伦公式，我们有

$$d_1^2 m(m - 2b_1)(m - 2b_2)(m - 2b_3) = 4k^2. \tag{5}$$

由（5），我们看到 $d_1 m$ 是偶数。我们将把（5）视为一个丢番图方程，并对固定的 $0 < b_1 < m/2$，给出解的数量上界。令 $x = b_2 - b_3$并令 $c = d_1^2 m(m - 2b_1)/4 \in \mathbb{N}$。方程（5）变为

$$k^2 + cx^2 = cb_1^2. \tag{6}$$

上述方程的每个整数解（k，x）至多唯一确定一个周长为 p的三角形。根据 [16, 定理 2]，方程（6）的整数解数量至多为 $24\mathbf{d}(64b_1^2c^2)$。由于$b_1\sqrt{d_1} < p/2$ 且 $c < d_1 p^2/4$，我们得出 $64b_1^2c^2 < p^8$。根据 [7, 定理 1]，有

$$\log \mathbf{d}(64b_1^2c^2) \leq \frac{2\log p^8}{\log\log p^8},$$

由此可得 $24\mathbf{d}(64b_1^2c^2) = O(p^{16/\log\log p})$。由于 b_1 的可选项少于 p 个，因此得证所述上界。□

以下命题给出了定理1.2中所述网格内等周长三角形数量的上界。

命题 3.2。对于 $n \in \mathbb{N}$，在 $[n]\times[n]$ 中顶点取值且周长固定为 $p \in \mathbb{R}_{>0}$ 的三角形数量为 $O\left(n^{3+O(\frac{1}{\log\log n})}\right)$。

证明。注意，由于所有三角形都包含在包围整个网格的正方形内，我们可以假设 $p < 4n$。根据引理 3.1，周长为 p 的非全等格点三角形的数量为 $O\left(p^{1+O(\frac{1}{\log\log p})}\right) = O\left(n^{1+O(\frac{1}{\log\log n})}\right)$。设 $\Delta = ABC$ 是这些全等类中的一个三角形。点 A 至多有 $|[n]\times[n]| = n^2$ 种选择。固定一个点 $A = (x_A, y_A)$。那么，点 B 的坐标 (x, y) 满足

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = |AB|^2 < 2n^2,$$

其中 $|AB|$ 表示边 AB 的长度。根据 Jacobi 两平方定理 [2, 第 9 节1]（另见 [16, 定理 2]），上述方程的整数解 (x, y) 的数量不超过 $4\mathbf{d}(|AB|^2) = O\left(n^{O(\frac{1}{\log\log n})}\right)$，因此点 B 至多有同样多种选择。对于每一对固定的点 A 和 B，至多有两个格点 C 使得三角形 ABC 与 Δ 全等。因此，顶点位于 $[n]\times[n]$ 且周长为 p 的三角形总数至多为

$$O\left(n^{1+O\left(\frac{1}{\log\log n}\right)}\right)\cdot n^2 \cdot O\left(n^{O\left(\frac{1}{\log\log n}\right)}\right)\cdot 2 = O\left(n^{3+O\left(\frac{1}{\log\log n}\right)}\right).$$

□

我们现在证明，在 $[n]\times[n]$ 中存在 $\Omega(n^{5/2})$ 个周长相同的三角形。我们的第一步是找出海伦三角形数量的下界。我们预计，引理 3.3 的估计至少对于某些特殊周长可以得到改进。

引理 3.3。对于 $k \in \mathbb{N}$，有 $H(2(2k-1)^2) = \Omega(k)$。

证明。令 $k \in \mathbb{N}$和 $p = 2(2k-1)^2$。设 Δ为一条边长为 a，b，c、周长为 p的三角形。Δ的半周长 s等于 $(2k-1)^2$。Δ是海伦三角形的条件等价于

$$s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{7}$$

是完全平方数，并且 a， b， $c \in \mathbb{N}$ 都严格小于 s。注意，如果 (7) 是完全平方数，那么 $(s-a)$、$(s-b)$ 和 $(s-c)$ 都是完全平方数。此外，注意

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s.$$

因此，方程的任一整数解 (x, y, z)

$$x^2+y^2+z^2 = s = (2k-1)^2,$$

其中 $xyz \neq 0$ 对应于边长为 $(s-x^2)$、$(s-y^2)$ 和 $(s-z^2)$ 的海伦三角形。考虑变量的符号和排列后，我们得到估计

$$\begin{aligned} 3! \cdot H(p) &\geq |\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = s \text{ and } x,y,z > 0\}|, \\ &= \frac{1}{2^3}|\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = s \text{ and } xyz \neq 0\}|, \\ &\geq \frac{1}{2^3}\left(|\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = s\}| - 3 \cdot |\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2+y^2 = s\}|\right) \quad (8) \end{aligned}$$

注意，$s \equiv 1 \pmod 8$，因为它是奇数的平方。由 Hurwitz 的一个观察，并经 Olds 验证 [8]，可得

$$|\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = s\}| \geq 6\sqrt{s} = \Omega(k). \quad (9)$$

此外，根据 Jacobi 两平方定理 [2, 第 9 节。1]，

$$|\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2+y^2 = s\}| \leq 4\mathbf{d}(s) = O\left(s^{O\left(\frac{1}{\log\log s}\right)}\right) = O\left(k^{O\left(\frac{1}{\log\log k}\right)}\right). \quad (10)$$

最后，将估计式 (9) 和 (10) 代入 (8) 即得所需结果。 □

命题 3.4。 对于 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\Omega(n^{\frac{5}{2}})$ 个顶点位于 $[n] \times [n]$ 且周长相同的三角形。

证明。设 $n \geq 400$。令 $k = \lfloor \sqrt{n/20} \rfloor$，使得 $p = 2(2k-1)^2 \leq n/50$。由引理 3.3 可得 $H(p) = \Omega(k) = \Omega(\sqrt{n})$。令 Δ 为周长为 p的海伦三角形。由 [17, 定理 1] 可知，Δ 是一个格点三角形。此外，任何这样的构形都可以包在一个边平行于坐标轴、边长为 $p/2 \leq n/100$的格点正方形内。该包围正方形的左下顶点至少有 $(n-n/100)^2$种选择。因此，周长为 p 且顶点位于 $[n] \times [n]$ 中的三角形数量至少为

$$H(p)(n-n/100)^2 = \Omega(\sqrt{n})\Omega(n^2) = \Omega(n^{\frac{5}{2}}).$$

□

Acknowledgments

作者谨向 Michael Bennett、Jozsef Solymosi 和 Joshua Zahl 致谢，感谢他们在准备本文期间提供的宝贵讨论。

References

[1] I. Boreico，《我最喜欢的问题：根式的线性无关性》，《哈佛学院数学评论》2(1) (2008) 87–93。[2] J. M. Borwein, P. B. Borwein，《圆周率与算术-几何平均》，Wiley，纽约，1987。MR0877728[3]P. Brass, W. Moser, J. Pach，《离散几何中的研究问题》，Springer，纽约，2005。MR2163782[4] R. Carr, C. O'Sullivan，关于根的线性无关性，《国际数论杂志》5(1) (2009) 161–171。MR2499028[5] P. Erd˝os，关于 n 点的距离集，《美国数学月刊》53 (1946) 248–250。MR0015796[6] P. Erd˝os, G. Purdy，几何中的一些极值问题，《组合理论杂志》A辑 10 (1971) 246–252。MR0275288[7] J.-L. Nicolas, G. Robin，关于 N 的因数个数的显式上界，《加拿大数学通报》26(4) (1983) 485–492。MR0716590[8] C. D. Olds，关于表示， $N_3（n^2）$，《美国数学会通报》47 (1941) 499–503。MR0004262[9] J. Pach, M. Sharir，平面中的重复角及相关问题，《组合理论杂志》A辑 59 (1992) 12–22。MR1141318[10] J. Pach, M. Sharir，点与曲线之间的关联数，《组合、概率与计算》7 (1998) 121–127。MR1611057[11] J. Pach, M. Sharir，几何关联，载于《迈向几何图理论》，《当代数学》342，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2004，第185–223页。MR2065264[12] G. Pick，《数论中的几何问题》，Sitzungber. Lotos（布拉格）19 (1899) 311–319。[13] O.E. Raz, M. Sharir，平面内单位面积三角形的数量：主题与变化，《组合论》37 (2017) 1221–1240。MR3759915[14] O.E. Raz, M. Sharir, I.D. Shkredov，关于平面凸网格确定的单位面积三角形的数量，《计算几何》62 (2017) 25–33。MR3603773[15] M. Sharir, J. Zahl，将代数曲线切分为伪线段及其应用，《组合理论杂志》A辑 150 (2017) 1–35。MR3645567[16] V. Shelestunova，二次曲线与曲面上整点数量的上界，博士论文，滑铁卢大学，加拿大安大略省，2010。[17] P. Yiu，海伦三角形是格点三角形，《美国数学月刊》108 (2001) 261–263。MR1834709
Department of Mathematics, University of British Columbia, Room 121, 1984 MathematicsRoad, Vancouver, BC, Canada V6T 1Z2电子邮箱：rgoenka@math.ubc.ca
Department of Mathematics, University of British Columbia, Room 121, 1984 Mathematics Road, Vancouver, BC, Canada V6T 1Z2电子邮箱：kjmoore@math.ubc.ca
Department of Mathematics, University of British Columbia, Room 121, 1984 Mathematics Road, Vancouver, BC, Canada V6T 1Z2电子邮箱：epwhite@math.ubc.ca