离散时间半马尔可夫链非参数估计量的多维渐近正态性

Hiroki Ogata(1)、Luis Iv´an Hern´andez Ru´ız(1)(2) 和KoujiYano(2)(3)(4)

摘要

本文证明了马尔可夫更新链转移概率的非参数估计量具有多维渐近正态性，并将这一结果应用于与相关半马尔可夫链有关的其他非参数估计量。

arXiv:2304.03924v1 [math.ST] 8 Apr 2023

1 引言

对于连续时间情形，Moore–Pyke [14] 研究了一维连续时间马尔可夫更新链转移概率非参数估计量的渐近正态性，随后Gill [6] 将其推广到多维情形。Ouhbi–Limnios [16, 17] 研究了与相关半马尔可夫链有关的其他非参数估计量的渐近正态性。这些估计量的若干统计性质已在 [11, 1, 9, 7, 2, 13, 12, 3], 中研究，并在 [8]中讨论了一些应用。

在离散时间情形下，Barbu–Limnios [4] 已研究了各种非参数估计量的一维渐近正态性。我们的目标是确立底层马尔可夫更新链的转移概率非参数估计量的多维渐近正态性，并提供一种系统且大为简化的方法，用以推导 Barbu–Limnios [4] 的渐近正态性结果。

设 E 为有限状态空间，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表示非负~整数集合。记 $E^{\sim} := E \times E \times \mathbb{N}$。设 $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}(k))_{k\in\mathbb{N}} = (q_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\tilde{E}}$ 为一个元素非负的矩阵序列，满足 $q_{ij}(0) = 0$，其中 i, $j \in E$，且

$$\sum_{j\in E}\sum_{k\in\mathbb{N}} q_{ij}(k) = 1 \quad \text{for all } i \in E. \tag{1.1}$$

(0)本研究得到 RIMS 和 ISM 的支持。(1)京都大学理学研究科。(2)该作者的研究得到 JSPS开放合作联合研究项目资助，项目编号：JPJSBP120209921。(3)大阪大学理学研究科。(4)该作者的研究得到 JSPS科研费资助，项目编号：JP19H01791、JP19K21834 和 21H01002。

马尔可夫更新链是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{i_0})$（$i_0 \in E$）上的取值于 $E \times \mathbb{N}$ 的时间齐次马尔可夫链 $(J, S) = (J_n, S_n)_{n=0}^{\infty}$，其中过程 $(J, X) = (J_n, X_n)_{n=0}^{\infty}$ 由 $J_0 = i_0$, $X_0 := S_0 := 0$ 和 $X_n := S_n - S_{n-1}$（$n \geq 1$）定义，是一个转移概率如下给出的马尔可夫链:

$$\mathbb{P}_{i_0}(J_{n+1} = j,\ X_{n+1} = k \mid J_n = i,\ X_n) = q_{ij}(k) \quad \text{for all } i, j \in E \text{ and } n, k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

（量 $q_{ij}(k)$ 通常称为半马尔可夫核，尽管它描述的是马尔可夫更新链的转移，而不是相关半马尔可夫链的转移。）注意，嵌入马尔可夫链 $J = (J_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一个以 E 为值的马尔可夫链，其转移概率给定为

$$\mathbb{P}_{i_0}(J_{n+1} = j \mid J_n = i) = q_{ij}^J := \sum_{k \in \mathbb{N}} q_{ij}(k) \quad \text{for all } i, j \in E \text{ and } n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

对于 $j \in E$，我们记 $\tau_j = \inf\{n \geq 1 : J_n = j\}$。我们作如下假设:

（A1）嵌入马尔可夫链 J 是不可约的，即对于所有 $i, j \in E$，$\mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) > 0$。

（A2）马尔可夫更新链 (J, S) 是非周期的，即对于所有 $i \in E$，$\{k \in \mathbb{N}\colon \mathbb{P}_i(S_{\tau_i} = k) > 0\}$ 的最大公约数为一。

（A3）马尔可夫更新链 (J, S) 是正常返的，即对于所有 $i \in E$，$\mu_{ii} := \mathbb{E}_i S_{\tau_i} < \infty$。

我们用 (A) 表示上述所有假设均成立。在此情况下，嵌入马尔可夫链 J 存在唯一的不变概率分布 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i \in E}$（参见例如 [15, 定理 1.7.7]），并且还有（参见 [4] 的命题 3.6）:

$$\overline{m} := \sum_{i \in E} \nu_i \mathbb{E}_i S_1 = \mu_{jj} \nu_j \quad \text{for all } j \in E. \tag{1.4}$$

对于 $M \in \mathbb{N}$ 和 $i \in E$，我们定义

$$N(M) := \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq M\} \quad \text{and} \quad N_i(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1} = i\}} \tag{1.5}$$

使得 $N(M) = \sum_{i \in E} N_i(M)$。对于未知量 $\boldsymbol{q}$，我们考虑非参数估计量

$$\widehat{\boldsymbol{q}}(M) = (\widehat{\boldsymbol{q}}(k, M))_{k \in \mathbb{N}} = (\widehat{q}_{ij}(k, M))_{(i,j,k) \in \widetilde{E}} \tag{1.6}$$

其定义为

$$\widehat{q}_{ij}(k, M) := \frac{1}{N_i(M)} \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1} = i,\ J_n = j,\ X_n = k\}} \tag{1.7}$$

因此，对所有 $i \in E$，都有 $\sum_{j \in E} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{q}_{ij}(k, M) = 1$。$\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$ 的强相合性如下所述。

Th定理 1.1（Barbu–Limnios [4,定理 4.1]）。假设条件 (A) 成立。那么

$$\widehat{\boldsymbol{q}}(M) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \boldsymbol{q}, \tag{1.8}$$

或者等价地,

$$\widehat{q}_{ij}(k,M) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} q_{ij}(k) \quad \textit{for all } (i,j,k)\in\widetilde{E}, \tag{1.9}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，对所有初始值 $i_0\in E$ 均成立。

令 $\mathcal{N}(0,v)$ 表示方差为 v 的中心正态分布。一维情形下 $\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$ 的渐近正态性已由下述结果给出。

定理 1.2（Barbu–Limnios [4, 定理 4.2]）。假设 (A) 成立。那么，对任意固定的 $(i,j,k)\in E$，有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{q}_{ij}(k,M)-q_{ij}(k)\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(0,v^{\boldsymbol{q}}(i,j,k)) \tag{1.10}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下 对所有初始值 $i_0\in E$ 均成立，其中渐近方差 $v^{\boldsymbol{q}}(i,j,k)$ 给定为 as

$$v^{\boldsymbol{q}}(i,j,k) := \mu_{ii}q_{ij}(k)(1-q_{ij}(k)). \tag{1.11}$$

下面讨论多维收敛。对于半正定矩阵$V=(V_{ee'})_{e,\ e'\in\widetilde{E}}$，我们用 $\mathcal{N}(0,V)$ 表示中心高斯系统 $Y=(Y_e)_{e\in\widetilde{E}}$的分布，其协方差由 $\mathbb{E}Y_eY_{e'}=V_{ee'}$ 给出，并称 V为 $\mathcal{N}(0,V)$ 的方差矩阵。现在陈述关于$\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$多维渐近正态性的主定理。

定理 1.3. 假设条件 (A) 成立。那么，在乘积空间

$$\mathbb{R}^{\widetilde{E}}=\Big\{\boldsymbol{x}=(x_e)_{e\in\widetilde{E}}=(x_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}} : x_e\in\mathbb{R} \textit{ for } e\in\widetilde{E}\Big\} \tag{1.12}$$

赋予乘积拓扑后，有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{q}}(M)-\boldsymbol{q}\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(\mathbf{0},V^{\boldsymbol{q}}) \tag{1.13}$$

对于所有初始值 $i_0\in E$，在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下成立，其中渐近方差矩阵 $V^{\boldsymbol{q}}=(V^{\boldsymbol{q}}_{ee'})_{e,\ e'\in\widetilde{E}}$ 由下式给出

$$V^{\boldsymbol{q}}_{(i,j,k)(i',j',k')}=\mu_{ii}1_{\{i=i'\}}q_{ij}(k)\big(1_{\{j=j',\ k=k'\}}-q_{i'j'}(k')\big)\,. \tag{1.14}$$

注意到 $V^{\boldsymbol{q}}{}_{(i,\ j,\ k)(i,\ j,\ k)}=v^{\boldsymbol{q}}(i,j,k)$，我们可以直接由定理 1.3 得到定理 1.2 的结论。

考虑与 (J,S) 相关联的半马尔可夫链 $Z=(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其定义为时间变换过程 $Z_k:=J_{N(k)}$，其中 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $N(k):=\max\{n\in\mathbb{N}:S_n\le k\}$。注意到 $Z_0=J_0$。我们设

$$P_{ij}(k):=\mathbb{P}_i(Z_k=j), \tag{1.15}$$

并称 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}(k))_{k\in\mathbb{N}}=(P_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$ 为半马尔可夫链 Z的分布矩阵序列。

设 $E=U\cup D$ 是有限状态空间 E 的一个非平凡划分，并记

$$T_D=\inf\{k\in\mathbb{N}:Z_k\in D\}. \tag{1.16}$$

我们定义

$$R_i(k)=\mathbb{P}_i(T_D>k)\quad \text{for } i\in U, \tag{1.17}$$

并称 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}(k))_{k\in\mathbb{N}}=(R_i(k))_{(i,k)\in U\times\mathbb{N}}$ 为可靠性向量序列。

作为定理 1.3 的应用，我们将把一维情形下关于分布矩阵序列 $\boldsymbol{P}$ 和可靠性向量序列 $\boldsymbol{R}$ 的某些估计量 $\boldsymbol{P}(M)$ 和 $\boldsymbol{R}(M)$ 的渐近正态性结果推广到多维情形。

本文结构如下。第 2 节证明关于 $\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$ 渐近正态性的定理 1.3。第 3 节讨论矩阵卷积逆。第 4 节和第 5 节分别讨论估计量 $\boldsymbol{P}(M)$ 和$\backsim\boldsymbol{R}(M)$ 的渐近正态性。附录中，我们根据多维情形的结果推导一维情形渐近正态性的渐近方差。

2 转移概率的估计

我们用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示 $\mathbb{R}^E$ 中的内积：对于 $\boldsymbol{a}=(a_e)_{e\in\widetilde{E}}$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_e)_{e\in\widetilde{E}}$，定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=\sum_{e\in\widetilde{E}}a_eb_e. \tag{2.1}$$

我们记

$$\mathbb{R}_0^{\widetilde{E}}:=\left\{\boldsymbol{x}=(x_e)_{e\in\widetilde{E}}\in\mathbb{R}^{\widetilde{E}}:x_e=0 \text{ for all but finite } e\in\widetilde{E}\right\} \tag{2.2}$$

众所周知（参见例如 [10, 定理 4.29]），对于取值于 $\mathbb{R}^E$ 的过程，在 $\mathbb{R}^E$ 上依分布收敛，即

$$\boldsymbol{X}(M)=(X_e(M))_{e\in\widetilde{E}}\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\boldsymbol{X}=(X_e)_{e\in\widetilde{E}}, \tag{2.3}$$

等价于有限维分布收敛，即

$$(X_e(M))_{e\in I}\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}(X_e)_{e\in I} \tag{2.4}$$

对于 E 的所有有限子集 I。根据 Cramér–Wold 装置，这种收敛可归结为以下收敛

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}(M)\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X} \tag{2.5}$$

对所有常数 $\boldsymbol{a}=(a_e)_{e\in\widetilde{E}}\in\mathbb{R}_0^E$。

下面我们来证明主定理。

定理 1.3 的证明。为了得到所需的收敛

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(M) := \sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}(M) - \boldsymbol{q}) \xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V^{\boldsymbol{q}}), \tag{2.6}$$

只需证明收敛

$$\boldsymbol{a}\cdot\widetilde{\boldsymbol{q}}(M) \xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{a}\cdot V^{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}) \tag{2.7}$$

~对所有常数 $\boldsymbol{a}=(a_e)_{e\in\widetilde{E}}\in\mathbb{R}_0^E$均成立，其中我们定义

$$\boldsymbol{a}\cdot V^{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a} := \sum_{e,e'\in\widetilde{E}} a_e V^{\boldsymbol{q}}_{ee'} a_{e'}. \tag{2.8}$$

我们可以表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\widetilde{\boldsymbol{q}}(M) = \boldsymbol{A}(M)\cdot\boldsymbol{Y}(M) \tag{2.9}$$

若令 $\boldsymbol{A}(M)=(A_e(M))_{e\in\widetilde{E}}$和 $\boldsymbol{Y}(M)=(Y_e(M))_{e\in\widetilde{E}}$为

$$A_{(i,j,k)}(M) := a_{(i,j,k)}\frac{\sqrt{MN(M)}}{N_i(M)}, \tag{2.10}$$

$$Y_{(i,j,k)}(M) := \frac{1}{\sqrt{N(M)}}\sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i\}}\left(1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}} - q_{ij}(k)\right). \tag{2.11}$$

由 (1.4) 以及 [4], 中的命题 3.7 和 3.8 可知

$$\frac{N_i(M)}{M} \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{\mu_{ii}}, \quad \frac{N(M)}{M} \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{\overline{m}}, \tag{2.12}$$

因此我们得到

$$A_{(i,j,k)}(M) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} a_{(i,j,k)}\frac{\mu_{ii}}{\sqrt{\overline{m}}}. \tag{2.13}$$

~根据斯卢茨基定理，对所有常数 $\boldsymbol{a}=(a_e)_{e\in\widetilde{E}}\in\mathbb{R}_0^E$，收敛 (2.7) 可归结为以下收敛

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{Y}(M) \xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{b}\cdot V^{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}) \tag{2.14}$$

~对所有常数 $\boldsymbol{b}=(b_e)_{e\in\widetilde{E}}\in\mathbb{R}_0^E$，其中根据 (1.4),

$$V^{\boldsymbol{Y}}_{ee'} := \frac{\overline{m}}{\mu_{ii}\mu_{i'i'}}V^{\boldsymbol{q}}_{ee'} = \nu_i 1_{\{i=i'\}}q_{ij}(k)\left(1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{i'j'}(k')\right). \tag{2.15}$$

对于 $e=(i,j,k)$ 和 $e'=(i',j',k')$。根据事实 $N(M)/M_{\mathrm{a}} \xrightarrow[M\to\infty]{\cdot\cdot} 1/\overline{m} > 0^{\mathrm{s}}$，收敛 (2.14) 可化简为收敛

$$Z(M) := \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{n=1}^{M}\xi_n \xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{b}\cdot V^{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}), \tag{2.16}$$

其中

$$\xi_n := \sum_{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}} b_e 1_{\{J_{n-1}=i\}}\big(1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}} - q_{ij}(k)\big)\,. \tag{2.17}$$

我们应用鞅中心极限定理（例如，参见 [5]中的定理 8.2.8）来证明（2.16）。对于 $n\in\mathbb{N}$，令$\mathcal{F}_n = \sigma(J_l, X_l;\ l\le n)$。于是可知，$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$是相对于滤过$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$的鞅差，因为

$$\mathbb{E}_{i_0}[\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}} b_e 1_{\{J_{n-1}=i\}}\mathbb{E}_{i_0}\big[1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}} - q_{ij}(k)\big|\,\mathcal{F}_{n-1}\big] = 0. \tag{2.18}$$

由于$|\xi_n|\le\sum_e|b_e|<\infty$，显然

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}\mathbb{E}_{i_0}\Big[\xi_n^2\ ;\ |\xi_n|>\varepsilon\sqrt{M}\Big] \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{for all } \varepsilon>0. \tag{2.19}$$

现在只需证明

$$F(M) := \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}\mathbb{E}_{i_0}\big[\xi_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\big] \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \boldsymbol{b}\cdot V^{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}. \tag{2.20}$$

展开平方项，得到

$$F(M) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}\sum_{\substack{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}\\ e'=(i',j',k')\in\widetilde{E}}} b_e b_{e'} 1_{\{J_{n-1}=i\}}1_{\{i=i'\}}E_{ee'}(n) \tag{2.21}$$

其中，对于 $i=i'$,

$$\begin{aligned}
E_{ee'}(n) :=& \mathbb{E}_{i_0}\Big[\big(1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}} - q_{ij}(k)\big)\big(1_{\{J_n=j',\ X_n=k'\}} - q_{i'j'}(k')\big)\ \Big|\ \mathcal{F}_{n-1}\Big] && (2.22)\\
=& \mathbb{E}_{i_0}\Big[1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}}1_{\{J_n=j',\ X_n=k'\}}\ \Big|\ \mathcal{F}_{n-1}\Big] - q_{ij}(k)q_{i'j'}(k') && (2.23)\\
=& \mathbb{E}_{i_0}\Big[1_{\{J_n=j,\ X_n=k\}}\ \Big|\ \mathcal{F}_{n-1}\Big]\,1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{ij}(k)q_{i'j'}(k') && (2.24)\\
=& q_{ij}(k)\big(1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{i'j'}(k')\big)\,. && (2.25)
\end{aligned}$$

利用遍历定理中的结论（例如，参见 [15]中的定理 1.10.2）：

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}1_{\{J_{n-1}=i\}} \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \nu_i, \tag{2.26}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
F(M) =& \sum_{\substack{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}\\ e'=(i',j',k')\in\widetilde{E}}} b_e b_{e'}\left(\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}1_{\{J_{n-1}=i\}}\right)1_{\{i=i'\}}q_{ij}(k)\big(1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{i'j'}(k')\big) && (2.27)\\
\xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}}& \sum_{\substack{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}\\ e'=(i',j',k')\in\widetilde{E}}} b_e b_{e'}\nu_i q_{ij}(k)\big(1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{i'j'}(k')\big) = \boldsymbol{b}\cdot V^{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}. && (2.28)
\end{aligned}$$

证明现已完成。 □

3 矩阵卷积逆的估计

对于两个矩阵序列 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}(k))_{k\in\mathbb{N}}=(A_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}(k))_{k\in\mathbb{N}}=(B_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$，我们将 $\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{B}$的矩阵卷积定义为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=((\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})(k))_{k\in\mathbb{N}}=((\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$，其中

$$(\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})(k):=\sum_{l=0}^{k}\boldsymbol{A}(l)\boldsymbol{B}(k-l), \tag{3.1}$$

或者等价地,

$$(\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})_{ij}(k):=\sum_{l=0}^{k}\sum_{u\in E}A_{iu}(l)B_{uj}(k-l). \tag{3.2}$$

将 $\boldsymbol{\delta I}=(\boldsymbol{\delta I}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ 定义为

$$\boldsymbol{\delta I}(k)=\begin{cases}\boldsymbol{I} & \text{for } k=0\\ \boldsymbol{0} & \text{for } k\geq 1,\end{cases} \tag{3.3}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 和 0 分别表示单位矩阵和零矩阵，因此 $\boldsymbol{\delta I}$ 是矩阵卷积的单位元:

$$\boldsymbol{\delta I}*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}*\boldsymbol{\delta I}=\boldsymbol{A}. \tag{3.4}$$

我们用 $\boldsymbol{A}^{(n)}$表示 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重矩阵卷积，即 $\boldsymbol{A}^{(0)}=\boldsymbol{\delta I}$，且当 $n\geq 1$时，$\boldsymbol{A}^{(n)}=\boldsymbol{A}*\boldsymbol{A}^{(n-1)}$。对于任意满足在$n>k$时，$\boldsymbol{A}^{(n)}(k)=\boldsymbol{0}$的矩阵值序列 $\boldsymbol{A}$，我们可以定义

$$(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A})^{(-1)}:=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(n)}, \tag{3.5}$$

它是 $\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A}$ 关于矩阵卷积的逆:

$$(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A})^{(-1)}*(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A})*(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{A})^{(-1)}=\boldsymbol{\delta I} \tag{3.6}$$

（参见 [4] 的命题 3.4）。

注意，转移概率的 n 重矩阵卷积（记作 $\boldsymbol{q}^{(n)}=(\boldsymbol{q}^{(n)}(k))_{k\in\mathbb{N}}=(q_{ij}^{(n)}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$）满足

$$\mathbb{P}_i(J_n=j,\ S_n=k)=q_{ij}^{(n)}(k). \tag{3.7}$$

根据假设 $\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0}$，显然，当 $n>k$ 时，$\boldsymbol{q}^{(n)}(k)=\boldsymbol{0}$，因此矩阵卷积逆

$$\boldsymbol{\psi}:=(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q})^{(-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{q}^{(n)} \tag{3.8}$$

是定义良好的 已定义。由于 $(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q})*\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}*(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\delta I}$，我们得到更新方程

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\delta I}+\boldsymbol{q}*\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\delta I}+\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{q}. \tag{3.9}$$

对于式 (1.6) 中引入的估计量 $\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$ 及其 n 重矩阵卷积 $\widehat{\boldsymbol{q}}^{(n)}(M)$，矩阵卷积的逆

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M):=(\boldsymbol{\delta I}-\widehat{\boldsymbol{q}}(M))^{(-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{\boldsymbol{q}}^{(n)}(M) \tag{3.10}$$

是定义良好的，并满足更新方程

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)=\boldsymbol{\delta I}+\widehat{\boldsymbol{q}}(M)*\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)=\boldsymbol{\delta I}+\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)*\widehat{\boldsymbol{q}}(M). \tag{3.11}$$

$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)$ 的强相合性如下所示。

Th定理 3.1（Barbu–Limnios [4,定理 4.4]）。假设 (A) 成立，则

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)\xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}}\boldsymbol{\psi}, \tag{3.12}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 所有初始值 $i_0\in E$ 下。

$\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)=(\psi_{ij}(k,M))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$的一维渐近正态性已如下得到。

定理 3.2（Barbu–Limnios [4, 定理 4.5]）。假设 (A) 成立。那么，对于~任意固定的 $(i,j,k)\in E$，有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\psi}_{ij}(k,M)-\psi_{ij}(k)\Big)\xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}}\mathcal{N}(0,v^{\boldsymbol{\psi}}(i,j,k)) \tag{3.13}$$

对于所有初始值 $i_0\in E$，在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 条件下成立，其中渐近方差 $v^{\boldsymbol{\psi}}(i,j,k)$ 给出如下：

$$v^{\boldsymbol{\psi}}(i,j,k):=\sum_{\widetilde{i}\in E}\mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}}\left\{\sum_{\widetilde{j}\in E}\left[(\psi_{i\widetilde{i}}*\psi_{\widetilde{j}j})^2*q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}\right](k)-\left[\sum_{\widetilde{j}\in E}(\psi_{i\widetilde{i}}*q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}*\psi_{\widetilde{j}j})(k)\right]^2\right\}. \tag{3.14}$$

作为定理 1.3 的一个推论，我们将定理 3.2 推广到多维情形。定义矩阵序列 $\overline{\boldsymbol{q}}=(\overline{q}_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$和 $\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}=(q_{ij}^{\widetilde{i}}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$，其中 $\widetilde{i}\in E$，如下：

$$\overline{q}_{ij}(k)=\mu_{ii}q_{ij}(k),\quad q_{ij}^{\widetilde{i}}(k)=1_{\{i=\widetilde{i}\}}q_{ij}(k), \tag{3.15}$$

并定义矩阵序列 $\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}=(\delta_e^{\widetilde{e}})_{e\in\widetilde{E}}$，其中 $\widetilde{e}\in\widetilde{E}$，如下：

$$\delta_e^{\widetilde{e}}=1_{\{e=\widetilde{e}\}} \tag{3.16}$$

~对于 $e=(i,j,k)\in E$。对于两个矩阵序列 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们将它们的张量积~ ~ $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$定义为 $E\times E$-矩阵 $(A_eB_{e'})_{e,\ e'\in\widetilde{E}}$。

定理 3.3. 假设 (A) 成立。则有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)-\boldsymbol{\psi}\Big)\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\mathcal{N}(\mathbf{0},V^{\boldsymbol{\psi}}) \tag{3.17}$$

对于所有初始值 $i_0\in E$，在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，其中渐近方差矩阵 $V^{\boldsymbol{\psi}}=(V^{\boldsymbol{\psi}}_{ee'})_{e,\ e'\in\widetilde{E}}$ 给出如下

$$V^{\boldsymbol{\psi}}=\sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}}\overline{q}_{\widetilde{e}}\big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}*\boldsymbol{\psi}\big)^{\otimes 2}-\sum_{\widetilde{i}\in E}\mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}}\Big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}*\boldsymbol{\psi}\Big)^{\otimes 2}. \tag{3.18}$$

证明。下文中，我们有时省略估计量中的 M，例如用 $\widehat{\boldsymbol{q}}$ 表示 $\widehat{\boldsymbol{q}}(M)$。

由更新方程 (3.9) 和 (3.11)，可得

$$\boldsymbol{\delta I}=\Big(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q}\Big)*\boldsymbol{\psi}=\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\Big(\boldsymbol{\delta I}-\widehat{\boldsymbol{q}}\Big), \tag{3.19}$$

因此可得

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}=&\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{\delta I}*\boldsymbol{\psi} &(3.20)\\ =&\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\Big(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q}\Big)*\boldsymbol{\psi}-\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\Big(\boldsymbol{\delta I}-\widehat{\boldsymbol{q}}\Big)*\boldsymbol{\psi} &(3.21)\\ =&\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\Big(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}\Big)*\boldsymbol{\psi}, &(3.22)\end{aligned}$$

由此得到恒等式

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}\Big)=\boldsymbol{\psi}*\Big\{\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}\Big)\Big\}*\boldsymbol{\psi}+\Big(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}\Big)*\Big\{\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}\Big)\Big\}*\boldsymbol{\psi}. \tag{3.23}$$

由强相合性 (3.12)、渐近正态性 (1.13) 以及斯卢茨基定理，可得

$$\Big(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}\Big)*\Big\{\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}\Big)\Big\}*\boldsymbol{\psi}\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\mathbf{0}. \tag{3.24}$$

因此，根据渐近正态性 (1.13) 和斯卢茨基定理，我们得到

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}\Big)\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}*\boldsymbol{\psi}, \tag{3.25}$$

其中 $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}\overset{\mathrm{d}}{=}\mathcal{N}(\mathbf{0},V^{\boldsymbol{q}})$。由于 $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}$ 是中心高斯系统，我们可知 $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{\psi}}:=\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}*\boldsymbol{\psi}$ 也是如此。$\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{\psi}}$ 的渐近方差矩阵 $V^{\boldsymbol{\psi}}$ 为

$$\begin{aligned}V^{\boldsymbol{\psi}}=&\mathbb{E}\Big[(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}*\boldsymbol{\psi})\otimes(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}*\boldsymbol{\psi})\Big] &(3.26)\\ =&\sum_{\widetilde{e},\widetilde{e}'\in\widetilde{E}}\mathbb{E}[Z^{\boldsymbol{q}}_{\widetilde{e}}Z^{\boldsymbol{q}}_{\widetilde{e}'}]\big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}*\boldsymbol{\psi}\big)\otimes\Big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}'}*\boldsymbol{\psi}\Big) &(3.27)\\ =&\sum_{\widetilde{e},\widetilde{e}'\in\widetilde{E}}V^{\boldsymbol{q}}_{\widetilde{e}\widetilde{e}'}\big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}*\boldsymbol{\psi}\big)\otimes\Big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}'}*\boldsymbol{\psi}\Big) &(3.28)\\ =&\sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}}\overline{q}_{\widetilde{e}}\big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}*\boldsymbol{\psi}\big)^{\otimes 2}-\sum_{\widetilde{i}\in E}\mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}}\Big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}*\boldsymbol{\psi}\Big)^{\otimes 2}. &(3.29)\end{aligned}$$

证明完毕。 □

4 分布矩阵序列的估计

令 $\mathcal{M}$ 表示所有随机矩阵序列 $\boldsymbol{A}=(A_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$ 的集合，并令

$$\mathcal{D}=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}:\lim_{K\to\infty}\sum_{j\in E}\sum_{k\le K}A_{ij}(k)\text{ exists in }L^2\text{ for all }i\in E\right\}. \tag{4.1}$$

我们定义线性算子 $\mathcal{S}\colon\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ 如下:

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{A})_{ij}(k):=\lim_{K\to\infty}1_{\{i=j\}}\sum_{j'\in E}\sum_{k<k'\le K}A_{ij'}(k')\quad\text{in }L^2 \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{S}\boldsymbol{A}=((\mathcal{S}\boldsymbol{A})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$。

对于半马尔可夫链 $Z_k=J_{N(k)}$，其 $N(k)=\max\{n\in\mathbb{N}:S_n\le k\}$，分布矩阵序列 $\boldsymbol{P}=(P_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$已给出如下:

$$P_{ij}(k):=\mathbb{P}_i(Z_k=j)=\mathbb{P}_i(Z_k=j,\ X_1>k)+\mathbb{P}_i(Z_k=j,\ X_1\le k). \tag{4.3}$$

注意到

$$\mathbb{P}_i(Z_k=j,\ X_1>k)=1_{\{i=j\}}\mathbb{P}_i(X_1>k)=1_{\{i=j\}}\sum_{j'\in E}\sum_{k'>k}q_{ij'}(k')=(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_{ij}(k) \tag{4.4}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(Z_k=j,\ X_1\le k)&=\sum_{j'\in E}\sum_{k'\le k}\mathbb{P}_i(Z_k=j,\ J_1=j',\ X_1=k') &(4.5)\\&=\sum_{j'\in E}\sum_{k'\le k}q_{ij'}(k')\mathbb{P}_{j'}(Z_{k-k'}=j) &(4.6)\\&=\sum_{j'\in E}\sum_{k'\le k}q_{ij'}(k')P_{j'j}(k-k')=(\boldsymbol{q}*\boldsymbol{P})_{ij}(k). &(4.7)\end{aligned}$$

因此我们得到更新方程

$$\boldsymbol{P}=\mathcal{S}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}*\boldsymbol{P}, \tag{4.8}$$

可求解为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q})^{(-1)}*\mathcal{S}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\boldsymbol{q}. \tag{4.9}$$

我们将分布矩阵序列的估计量定义为

$$\widehat{\boldsymbol{P}}(M):=\widehat{\boldsymbol{\psi}}(M)*\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}}(M). \tag{4.10}$$

$\widehat{\ }\ \boldsymbol{P}(M)$的强相合性如下所示。

Th定理 4.1（Barbu–Limnios [4,定理 4.6]）。假设条件（A）成立。那么

$$\widehat{\boldsymbol{P}}(M) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \boldsymbol{P}, \tag{4.11}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，对所有初始值 $i_0 \in E$均成立。

$\widehat{\boldsymbol{P}}(M) = (P_{ij}(k,M))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$在一维情形下的渐近正态性已得到如下结果。

定理 4.2（Barbu–Limnios [4, 定理 4.7]）。假设 **(A)** 成立。那么，对于任意固定的 $(i, j, k) \in E$，有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{P}_{ij}(k,M) - P_{ij}(k)\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(0, v^{\boldsymbol{P}}(i,j,k)) \tag{4.12}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 之 于所有初始值 $i_0 \in E$，其中渐近方差 $v^{\boldsymbol{P}}(i,j,k)$ 定义为

$$\begin{aligned} v^{\boldsymbol{P}}(i,j,k) := \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Bigg\{ & \sum_{\widetilde{j}\in E} \left[\left(C^{ij}_{\widetilde{i}\widetilde{j}} - 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \Psi_{ij} \right)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \right](k) \\ & - \left[\sum_{\widetilde{j}\in E} C^{ij}_{\widetilde{i}\widetilde{j}} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} - 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \psi_{ij} * H_j \right]^2 (k) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中

$$\Psi_{ij}(k) = \sum_{k'\le k} \psi_{ij}(k'), \quad H_j(k) = \sum_{j'\in E} \sum_{k'\le k} q_{jj'}(k') \tag{4.14}$$

and

$$C^{ij}_{\widetilde{i}\widetilde{j}} = \psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j} * (1 - H_j). \tag{4.15}$$

我们将定理 4.2 推广到多维情形，作为定理 1.3 的一个推论。

定理 4.3. 假设条件 **(A)** 成立，则有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{P}}(M) - \boldsymbol{P}\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V^{\boldsymbol{P}}) \tag{4.16}$$

对于所有初始值 $i_0 \in E$，在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，其中渐近方差矩阵 $V^{\boldsymbol{P}} = (V^{\boldsymbol{P}}_{ee'})_{e,\, e'\in\widetilde{E}}$ 给出如下

$$\begin{aligned} V^{\boldsymbol{P}} = & \sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} \big)^{\otimes 2} \\ & - \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} \Big)^{\otimes 2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

我们需要以下引理。

引理 4.4. 设 $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}} = (Z_e^{\boldsymbol{q}})_{e\in\widetilde{E}} = (Z_{ij}^{\boldsymbol{q}}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V^{\boldsymbol{q}})$。那么

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{j\in E} \sum_{k\le K} Z_{ij}^{\boldsymbol{q}}(k) = 0 \quad in\ L^2 \tag{4.18}$$

对所有 $i \in E$ 均成立。因此，有 $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}} \in \mathcal{D}$ 且

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}})_{ij}(k) = -1_{\{i=j\}} \sum_{j'\in E} \sum_{k'\le k} Z_{ij'}^{\boldsymbol{q}}(k') \tag{4.19}$$

~对所有 $(i,j,k) \in E$ 均成立。

证明。展开平方项，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{j\in E}\sum_{k\le K} Z_{ij}^{\boldsymbol{q}}(k)\right)^2 =& \sum_{j\in E}\sum_{k\le K}\sum_{j'\in E}\sum_{k'\le K} V_{(i,j,k)(i,j',k')} && (4.20)\\
=& \mu_{ii}\sum_{j\in E}\sum_{k\le K} q_{ij}(k) \sum_{j'\in E}\sum_{k'\le K}\left(1_{\{j=j',\ k=k'\}} - q_{ij'}(k')\right) && (4.21)\\
=& \mu_{ii}\sum_{j\in E}\sum_{k\le K} q_{ij}(k)\left(1 - \sum_{j'\in E}\sum_{k'\le K} q_{ij'}(k')\right) && (4.22)\\
\le& \mu_{ii}\sum_{j\in E}\sum_{k\in\mathbb{N}} q_{ij}(k) \sum_{j'\in E}\sum_{k'>K} q_{ij'}(k') \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0 && (4.23)
\end{aligned}$$

根据控制收敛定理。 □

我们还需要下面这个引理。

引理 4.5. 假设（A）成立。则有

$$\left(\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q}),\ \mathcal{S}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q})\right) \underset{M\to\infty}{\overset{\mathrm{d}}{\to}} \left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}},\ \mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}\right) \tag{4.24}$$

在乘积拓扑中。

证明。令 $\widetilde{\boldsymbol{q}} := \sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q})$，则根据渐近正态性 (1.13)，$\widetilde{\boldsymbol{q}} \underset{M\to\infty}{\overset{\mathrm{d}}{\longrightarrow}} \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}$。只需证明

$$\boldsymbol{a}\cdot\widetilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}\cdot\mathcal{S}\widetilde{\boldsymbol{q}} \underset{M\to\infty}{\overset{\mathrm{d}}{\to}} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}\cdot\mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}} \tag{4.25}$$

~对所有常数 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_0^E$。由于

$$\begin{aligned}
\sum_{j'\in E}\sum_{k'\in\mathbb{N}} \widetilde{q}_{ij'}(k') =& \sqrt{M}\sum_{j'\in E}\sum_{k'\in\mathbb{N}} \widehat{q}_{ij'}(k') - \sqrt{M}\sum_{j'\in E}\sum_{k'\in\mathbb{N}} q_{ij'}(k') && (4.26)\\
=& \sqrt{M}\cdot 1 - \sqrt{M}\cdot 1 = 0, && (4.27)
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\widetilde{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{b}\cdot\mathcal{S}\widetilde{\boldsymbol{q}} =& \sum_{e\in\widetilde{E}} a_e\widetilde{q}_e + \sum_{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}} b_e 1_{\{i=j\}} \sum_{j'\in E}\sum_{k'>k} \widetilde{q}_{ij'}(k') && (4.28)\\
=& \sum_{e\in\widetilde{E}} a_e\widetilde{q}_e - \sum_{e=(i,j,k)\in E} b_e 1_{\{i=j\}} \sum_{j'\in E}\sum_{k'\le k} \widetilde{q}_{ij'}(k') && (4.29)\\
\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}& \sum_{e\in\widetilde{E}} a_e Z_e^{\boldsymbol{q}} - \sum_{e=(i,j,k)\in\widetilde{E}} b_e 1_{\{i=j\}} \sum_{j'\in E}\sum_{k'\le k} Z_{ij'}^{\boldsymbol{q}}(k') && (4.30)\\
=& \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{b}\cdot\mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}, && (4.31)
\end{aligned}$$

其中，(4.30) 是将 (4.18) 应用于有限和得到的，而 (4.31) 则由 (4.19) 得到。证明完毕。 □

下面证明定理 4.3。

定理 4.3 的证明。由 (3.23) 和 (3.24)，可得

$$\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi}*\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q})*\boldsymbol{\psi}+o(1), \tag{4.32}$$

其中，下文中的 $o(1)$ 表示一个随 $M\to\infty$ 而在分布意义下趋于零的误差项。因此我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{P}}-\boldsymbol{P}) =& \sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}*\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\boldsymbol{q}) && (4.33)\\
=& \sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi})*\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}}+\sqrt{M}\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}) && (4.34)\\
=& \sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}-\boldsymbol{\psi})*\mathcal{S}\boldsymbol{q}+o(1)+\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}) && (4.35)\\
=& \boldsymbol{\psi}*\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q})*\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q})+o(1). && (4.36)
\end{aligned}$$

由渐近正态性 (1.13) 和斯卢茨基定理，可得

$$\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{P}}-\boldsymbol{P}) \xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}} \boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}*\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\psi}*\mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}. \tag{4.37}$$

其余证明与定理 3.3 的证明相同。 □

5 可靠性向量序列的估计

回顾一下，划分 $E=U\cup D$ 和可靠性向量序列 $\boldsymbol{R}$ 已在引言末尾介绍。

令 $\widetilde{U}:=U\times U\times\mathbb{N}$，并令 $\boldsymbol{q}_{UU}=((q_{UU})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{U}}$ 表示 $\boldsymbol{q}$ 在 $\widetilde{U}$ 上的限制，即：

$$(q_{UU})_{ij}(k) := q_{ij}(k) \quad \text{for } (i,j,k)\in\widetilde{U}. \tag{5.1}$$

令 $\boldsymbol{q}_{UU}^{(n)}=((q_{UU}^{(n)})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{U}}$表示 $\boldsymbol{q}_{UU}$的 n重矩阵卷积，它满足 es

$$\mathbb{P}_i(J_n=j,\ S_n=k,\ T_D>k)=(q_{UU}^{(n)})_{ij}(k). \tag{5.2}$$

我们将 $\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q}_{UU}$ 的矩阵卷积逆记为

$$\boldsymbol{\psi}_{UU}:=(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q}_{UU})^{(-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{q}_{UU}^{(n)}. \tag{5.3}$$

注意，对于 $n\geq 2$， $\boldsymbol{q}_{UU}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{UU}$ 分别不同于 $\boldsymbol{q}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 在 $\widetilde{U}$ 上的限制。

可靠性向量序列 $\boldsymbol{R}=(R_i(k))_{(i,k)\in U\times\mathbb{N}}$ 已给出如下

$$R_i(k):=\mathbb{P}_i(T_D>k)=\mathbb{P}_i(T_D>k,\ X_1>k)+\mathbb{P}_i(T_D>k,\ X_1\leq k). \tag{5.4}$$

注意

$$\mathbb{P}_i(T_D>k,\ X_1>k)=\mathbb{P}_i(X_1>k)=(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_{ii}(k)=((\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U)_i(k), \tag{5.5}$$

其中，对于矩阵序列 $\boldsymbol{A}=(A_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{E}}$，我们将 $\boldsymbol{A}_U=((\boldsymbol{A}_U)_i(k))_{(i,k)\in U\times\mathbb{N}}:=(A_{ii}(k))_{(i,k)\in U\times\mathbb{N}}$ 记为，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(T_D>k,\ X_1\leq k)&=\sum_{j'\in U}\sum_{k'\leq k}\mathbb{P}_i(T_D>k,\ J_1=j',\ X_1=k') &(5.6)\\ &=\sum_{j'\in U}\sum_{k'\leq k}q_{ij'}(k')\mathbb{P}_{j'}(T_D>k-k') &(5.7)\\ &=\sum_{j'\in U}\sum_{k'\leq k}q_{ij'}(k')R_{j'}(k-k')=(\boldsymbol{q}_{UU}*\boldsymbol{R})_i(k). &(5.8)\end{aligned}$$

由此得到更新方程

$$\boldsymbol{R}=(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U+\boldsymbol{q}_{UU}*\boldsymbol{R}, \tag{5.9}$$

其解为

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{\delta I}-\boldsymbol{q}_{UU})^{(-1)}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U=\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U. \tag{5.10}$$

~定义 $\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}=((\widehat{q}_{UU})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{U}}$为 $(\widehat{q}_{UU})_{ij}(k):=\widehat{q}_{ij}(k)$，其中 $(i,j,k)\in U$且

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}:=(\boldsymbol{\delta I}-\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU})^{(-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}^{(n)}, \tag{5.11}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}^{(n)}=((\widehat{q}_{UU}^{(n)})_{ij}(k))_{(i,j,k)\in\widetilde{U}}$表示 $\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}$ 的 n 重矩阵卷积。引入可靠性向量序列的估计量如下

$$\widehat{\boldsymbol{R}}:=\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}*(\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}})_U. \tag{5.12}$$

^关于 $\boldsymbol{R}$ 的强相合性如下所述。

Th定理 5.1（Barbu–Limnios [4,定理 5.1]）。假设条件 (A) 成立。那么

$$\widehat{\boldsymbol{R}} \xrightarrow[M\to\infty]{\text{a.s.}} \boldsymbol{R}, \tag{5.13}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，对所有初始值 $i_0 \in U$均成立。

$\widehat{\boldsymbol{R}} = (R_i(k,M))_{(i,k)\in U\times\mathbb{N}}$ 的一维渐近正态性如下，这纠正了 Barbu–Limnios [4,定理 5.1]中的错误陈述。

定理 5.2. 假设 (A) 成立。那么，对于任意固定的 $(i,k) \in U \times \mathbb{N}$，有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{R}_i(k,M) - R_i(k)\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(0, v^{\boldsymbol{R}}(i,k)) \tag{5.14}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 下，对所有初始值 $i_0 \in U$均成立，其中渐近方差 $v^{\boldsymbol{R}}(i,k)$ 给定为

$$\begin{aligned} v^{\boldsymbol{R}}(i,k) := \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Bigg\{ & \sum_{\widetilde{j}\in U} \Big[\Big(D^i_{\widetilde{i}\widetilde{j}} - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}} \Big)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \Big] (k) \\ & - \sum_{\widetilde{j}\in U} \Big[D^i_{\widetilde{i}\widetilde{j}} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} - (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * H_{\widetilde{i}} \Big]^2 (k) \Bigg\} \\ & + \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in D} \Big[\big((\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k) - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}} \big)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \Big] (k), \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中

$$(\Psi_{UU})_{ij}(k) = \sum_{k'\le k} (\psi_{UU})_{ij}(k') \tag{5.16}$$

and

$$D^i_{\widetilde{i}\widetilde{j}} = \sum_{j\in U} (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * (\psi_{UU})_{\widetilde{j}j} * (1 - H_j). \tag{5.17}$$

令我们 将定理 5.2 推广到多维情形，作为定理 1.3 的一个推论 .

定理 5.3. 假设条件 (A) 成立，则有

$$\sqrt{M}\Big(\widehat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R}\Big) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{d}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V^{\boldsymbol{R}}) \tag{5.18}$$

在 $\mathbb{P}_{i_0}$ 对所有初始值 $i_0 \in U$均成立，其中渐近方差矩阵 $V^{\boldsymbol{R}} = (V^{\boldsymbol{R}}_{ee'})_{e,\, e'\in U\times\mathbb{N}}$ 表示为

$$\begin{aligned} V^{\boldsymbol{R}} = & \sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{U}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U + \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U \big)^{\otimes 2} \\ & - \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}_{UU} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U + \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U \Big)^{\otimes 2} \\ & + \sum_{\widetilde{e}\in U\times D\times\mathbb{N}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U \big)^{\otimes 2}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

证明。根据与 (3.23) 和 (3.24) 相同的论证，我们有

$$\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}-\boldsymbol{\psi}_{UU})=\boldsymbol{\psi}_{UU}*\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}-\boldsymbol{q}_{UU})*\boldsymbol{\psi}_{UU}+o(1). \tag{5.20}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{R})=&\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}*(\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}})_U-\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U) &(5.21)\\ =&\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}-\boldsymbol{\psi}_{UU})*(\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{q}})_U+\sqrt{M}\boldsymbol{\psi}_U*(\mathcal{S}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}))_U &(5.22)\\ =&\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{UU}-\boldsymbol{\psi}_{UU})*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U+o(1)+\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}))_U &(5.23)\\ =&\boldsymbol{\psi}_{UU}*\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}_{UU}-\boldsymbol{q}_{UU})*\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U\\ &+\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}))_U+o(1). &(5.24)\end{aligned}$$

根据渐近正态性 (1.13) 和斯卢茨基定理，我们得到

$$\sqrt{M}(\widehat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{R})\xrightarrow[M\to\infty]{\mathrm{d}}\boldsymbol{\psi}_{UU}*\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}}_{UU}*\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U+\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{q}})_U. \tag{5.25}$$

通过与定理 3.3 的证明相同的论证，我们得到 (5.18)，其渐近协方差矩阵为

$$\begin{aligned}V^{\boldsymbol{R}}=&\sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}}\overline{q}_{\widetilde{e}}\big(\boldsymbol{\psi}_{UU}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}_{UU}*\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U+\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)^{\otimes2}\\ &-\sum_{\widetilde{i}\in E}\mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}}\Big(\boldsymbol{\psi}_{UU}*\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}_{UU}*\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U+\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U\Big)^{\otimes2},\end{aligned} \tag{5.26}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}_{UU}$ 表示 $\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}$ 在 U上的限制。由于我们很容易看出

$$\boldsymbol{\psi}_{UU}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}_{UU}*\boldsymbol{\psi}_{UU}=\mathbf{0}\quad\text{for }\widetilde{e}\notin\widetilde{U}, \tag{5.27}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U=\mathbf{0}\quad\text{for }\widetilde{e}\in D\times E\times\mathbb{N} \tag{5.28}$$

and

$$\boldsymbol{\psi}_{UU}*\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}_{UU}*\boldsymbol{\psi}_{UU}=\boldsymbol{\psi}_{UU}*(\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U=\mathbf{0}\quad\text{for }\widetilde{i}\in D, \tag{5.29}$$

我们得到 (5.19)。 □

附录：渐近方差的计算

6.1 矩阵卷积逆的渐近方差

让我们验证，对于 $e=e'=(i,j,k)$，(3.18) 中的 $V^{\psi}_{ee'}\in\widetilde{E}$ 与 (3.14) 中的 $v^{\psi}(i,j,k)$ 一致。令

$$V^1:=\sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}}\overline{q}_{\widetilde{e}}\big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}}*\boldsymbol{\psi}\big)^{\otimes2},\quad V^2:=\sum_{\widetilde{i}\in E}\mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}}\Big(\boldsymbol{\psi}*\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}*\boldsymbol{\psi}\Big)^{\otimes2}, \tag{6.1}$$

从而 $V^{\boldsymbol{\psi}} = V^1 - V^2$。对于 V^1_{ee}，我们有

$$V^1_{ee} = \sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big[\big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi} \big)_e \big]^2 = \sum_{\widetilde{e}=(\widetilde{i},\widetilde{j},\widetilde{k})\in\widetilde{E}} q_{\widetilde{e}} \Big[(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j})(k - \widetilde{k}) \Big]^2 \tag{6.2}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in E} \sum_{\widetilde{k}\in\mathbb{N}} q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(\widetilde{k}) \Big[(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j})(k - \widetilde{k}) \Big]^2 \tag{6.3}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in E} \Big[(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j})^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \Big] (k). \tag{6.4}$$

对于 V^2_{ee}，我们有

$$V^2_{ee} = \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Big[\Big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi} \Big)_e \Big]^2 = \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \left[\sum_{\widetilde{j}\in E} \Big(\psi_{i\widetilde{i}} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} * \psi_{\widetilde{j}j} \Big) (k) \right]^2 . \tag{6.5}$$

因此，我们得到 $V^{\psi}_{ee} = v^{\boldsymbol{\psi}}(i,j,k)$。

6.2 分布矩阵序列的渐近方差

~我们来验证，式 (4.17) 中的 $V^{\boldsymbol{P}}_{ee'}$ 对于 $e = e' = (i,j,k) \in E$ 与式 (4.13) 中的 $v^{\boldsymbol{P}}(i,j,k)$ 相同。设

$$V^1 := \sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{E}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} \big)^{\otimes 2}, \tag{6.6}$$

$$V^2 := \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} \Big)^{\otimes 2}, \tag{6.7}$$

因此 $V^{\boldsymbol{P}} = V^1 - V^2$。由于

$$\big(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} \big)_e = \sum_{k''\in\mathbb{N}:\ \widetilde{k}\le k''\le k} \Big(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j} \Big) (k'' - \widetilde{k}) \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{jj'}(k') \tag{6.8}$$

$$= \sum_{k''\in\mathbb{N}:\ \widetilde{k}\le k''\le k} \Big(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j} \Big) (k'' - \widetilde{k}) \cdot (1 - H_j(k - k'')) \tag{6.9}$$

$$= \Big(\psi_{i\widetilde{i}} * \psi_{\widetilde{j}j} * (1 - H_j) \Big) (k - \widetilde{k}) = C^{ij}_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(k - \widetilde{k}) \tag{6.10}$$

and

$$\big(\boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} \big)_e = 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \sum_{k'\le k} \psi_{i\widetilde{i}}(k') 1_{\{k'>k-\widetilde{k}\ge 0\}} \tag{6.11}$$

$$= 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \Big(\Psi_{ij}(k) - \Psi_{ij}(k - \widetilde{k}) \Big) 1_{\{\widetilde{k}\le k\}}, \tag{6.12}$$

我们有

$$V_{ee}^{1} = \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in E} \sum_{\widetilde{k}\in\mathbb{N}} q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(\widetilde{k}) \left[\left(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} \right)_e + \left(\boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} \right)_e \right]^2 \tag{6.13}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in E} \left[\left(C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} + 1_{\{\widetilde{i}=j\}} (\Psi_{ij}(k) - \Psi_{ij}) \right)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \right](k). \tag{6.14}$$

由于

$$\left(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} \right)_e = \sum_{\widetilde{j}\in E} \sum_{k''\in\mathbb{N}} \left(\psi_{i\widetilde{i}} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} * \psi_{\widetilde{j}j} \right)(k'') \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{jj'}(k') \tag{6.15}$$

$$= \sum_{\widetilde{j}\in E} \left[\psi_{i\widetilde{i}} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} * \psi_{\widetilde{j}j} * (1 - H_j) \right](k) \tag{6.16}$$

$$= \sum_{\widetilde{j}\in E} \left[C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \right](k) \tag{6.17}$$

and

$$\left(\boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} \right)_e = 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \sum_{k''\le k} \psi_{i\widetilde{i}}(k'') \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{jj'}(k') \tag{6.18}$$

$$= 1_{\{\widetilde{i}=j\}} [\psi_{ij} * (1 - H_j)](k), \tag{6.19}$$

我们有

$$V_{ee}^{2} = \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \left[\left(\boldsymbol{\psi} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q} \right)_e + \left(\boldsymbol{\psi} * \mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}} \right)_e \right]^2, \tag{6.20}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in E} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in E} C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} + 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \psi_{ij} * (1 - H_j) \right)^2 \right](k). \tag{6.21}$$

由于 $\psi_{ij} * 1 = \Psi_{ij}$、$\sum_{\widetilde{j}\in E} q_{i\widetilde{j}} * 1 = 1$ 和 $\sum_{\widetilde{j}\in E} \Psi_{ij} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} = \psi_{ij} * H_{\widetilde{i}}$，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{\widetilde{j}\in E} \left[\left(C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} + 1_{\{\widetilde{i}=j\}} (\Psi_{ij}(k) - \Psi_{ij}) \right)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \right](k) \\ &- \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in E} C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} + 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \psi_{ij} * (1 - H_j) \right)^2 \right](k) \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\widetilde{j}\in E} \left[\left(C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} - 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \Psi_{ij} \right)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} \right](k) \\ &- \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in E} C_{\widetilde{i}\widetilde{j}}^{ij} * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}} - 1_{\{\widetilde{i}=j\}} \psi_{ij} * H_j \right)^2 \right](k). \end{aligned} \tag{6.23}$$

因此我们得到 $V_{ee}^{\boldsymbol{P}} = v^{\boldsymbol{P}}(i, j, k)$。

6.3 可靠性向量序列的渐近方差

我们来检验，(5.19) 中针对 $e = e' = (i,k)$ 的 $V^{\boldsymbol{R}}_{ee'} \in U \times \mathbb{N}$ 与 (5.15) 中的 $v^{\boldsymbol{R}}(i,k)$ 一致。令

$$V^1 := \sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{U}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U + \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)^{\otimes 2}, \tag{6.24}$$

$$V^2 := \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \Big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{q}^{\widetilde{i}}_{UU} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U + \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U\Big)^{\otimes 2}, \tag{6.25}$$

$$V^3 := \sum_{\widetilde{e}\in U\times D\times\mathbb{N}} \overline{q}_{\widetilde{e}} \big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)^{\otimes 2}, \tag{6.26}$$

因此 $V^{\boldsymbol{R}} = V^1 - V^2 + V^3$。由于

$$\big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U\big)_e \tag{6.27}$$

$$= \sum_{j\in U} \sum_{k''\in\mathbb{N}:\ \widetilde{k}\le k''\le k} \Big((\boldsymbol{\psi}_{UU})_{i\widetilde{i}} * (\boldsymbol{\psi}_{UU})_{\widetilde{j}j}\Big)(k''-\widetilde{k}) \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{jj'}(k') \tag{6.28}$$

$$= \sum_{j\in U} \Big((\boldsymbol{\psi}_{UU})_{i\widetilde{i}} * (\boldsymbol{\psi}_{UU})_{\widetilde{j}j} * (1-H_j)\Big)(k-\widetilde{k}) = D^i_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(k-\widetilde{k}) \tag{6.29}$$

and

$$\big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)_e = \sum_{k'\le k} (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k') 1_{\{k'>k-\widetilde{k}\ge 0\}} \tag{6.30}$$

$$= \Big((\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k) - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k-\widetilde{k})\Big) 1_{\{\widetilde{k}\le k\}}, \tag{6.31}$$

我们有

$$V^1_{ee} = \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in U} \sum_{\widetilde{k}\in\mathbb{N}} q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(\widetilde{k}) \big[\big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U\big)_e + \big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)_e\big]^2 \tag{6.32}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in U} \Big[\Big(D^i_{\widetilde{i}\widetilde{j}} + (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k) - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}\Big)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}\Big](k) \tag{6.33}$$

and

$$V^3_{ee} = \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in D} \sum_{\widetilde{k}\in\mathbb{N}} q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}(\widetilde{k}) \big[\big(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{\delta}^{\widetilde{e}})_U\big)_e\big]^2, \tag{6.34}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{i}\widetilde{i}} \sum_{\widetilde{j}\in D} \Big[\big((\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k) - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}\big)^2 * q_{\widetilde{i}\widetilde{j}}\Big](k). \tag{6.35}$$

由于

$$\left(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{q}_{UU}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U\right)_e \tag{6.36}$$

$$= \sum_{\widetilde{j}\in U} \sum_{k''\in\mathbb{N}} \sum_{j\in U} \left((\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * q_{\widetilde{ij}} * (\psi_{UU})_{\widetilde{j}j}\right)(k'') \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{jj'}(k') \tag{6.37}$$

$$= \sum_{\widetilde{j}\in U} \left[(\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * q_{\widetilde{ij}} * (\psi_{UU})_{\widetilde{j}j} * (1 - H_j)\right](k) \tag{6.38}$$

$$= \sum_{\widetilde{j}\in U} \left[D^i_{\widetilde{ij}} * q_{\widetilde{ij}}\right](k) \tag{6.39}$$

and

$$\left(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U\right)_e = \sum_{k''\le k} (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k'') \sum_{j'\in E} \sum_{k'>k-k''} q_{\widetilde{i}j'}(k') \tag{6.40}$$

$$= [(\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * (1 - H_{\widetilde{i}})](k), \tag{6.41}$$

我们有

$$V^2_{ee} = \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{ii}} \left[\left(\boldsymbol{\psi}_{UU} * \boldsymbol{q}_{UU}^{\widetilde{i}} * \boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q})_U\right)_e + \left(\boldsymbol{\psi}_{UU} * (\mathcal{S}\boldsymbol{q}^{\widetilde{i}})_U\right)_e\right]^2 \tag{6.42}$$

$$= \sum_{\widetilde{i}\in U} \mu_{\widetilde{ii}} \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in U} D^i_{\widetilde{ij}} * q_{\widetilde{ij}} + (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * (1 - H_{\widetilde{i}})\right)^2\right](k). \tag{6.43}$$

由于 $(\psi_{UU})_{ij} * 1 = (\Psi_{UU})_{ij}$, $\sum_{\widetilde{j}\in E} q_{i\widetilde{j}} * 1 = 1$ 且 $\sum_{\widetilde{j}\in E} (\Psi_{UU})_{ij} * q_{\widetilde{ij}} = (\psi_{UU})_{ij} * H_{\widetilde{i}}$, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{\widetilde{j}\in U} \left[\left(D^i_{\widetilde{ij}} + (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}(k) - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}\right)^2 * q_{\widetilde{ij}}\right](k) \\ &- \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in U} D^i_{\widetilde{ij}} * q_{\widetilde{ij}} + (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * (1 - H_{\widetilde{i}})\right)^2\right](k) \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\widetilde{j}\in U} \left[\left(D^i_{\widetilde{ij}} - (\Psi_{UU})_{i\widetilde{i}}\right)^2 * q_{\widetilde{ij}}\right](k) \\ &- \left[\left(\sum_{\widetilde{j}\in U} D^i_{\widetilde{ij}} * q_{\widetilde{ij}} - (\psi_{UU})_{i\widetilde{i}} * H_{\widetilde{i}}\right)^2\right](k). \end{aligned} \tag{6.45}$$

因此得到 $V^{\boldsymbol{R}}_{ee} = v^{\boldsymbol{R}}(i,k)$。

参考文献

[1] M. G. Akritas 和 G. G. Roussas。《斯堪的纳维亚统计学杂志》7(2):73–79，1980年，题为《连续时间半马尔可夫过程中的渐近推断》。

[2] E . E. Alvarez . 窗口删失半马尔可夫过程中的平滑非参数估计 -马尔可夫过程。J. Statist. Plann. Inference, 131(2):209–229, 2005.[3] C. Ayhar, V. S. Barbu, F. Mokhtari, 和 S. Rahmani。关于连续时间半马尔可夫过程若干核估计量的渐近性质。J. Nonparametr. Stat., 34(2):299–318, 2022.[4] V. S. Barbu 和 N. Limnios。半马尔可夫链与隐半马尔可夫模型及其应用——在可靠性和DNA分析中的应用。统计学讲义，第191卷。Springer，纽约，2008年。[5] R. Durrett。概率论——理论与例子。剑桥大学出版社，剑桥，第五版，2019年。[6] R. D. Gill。基于马尔可夫更新过程删失观测的非参数估计。Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 53(1):97–116, 1980年。[7] P. E. Greenwood 和 W. Wefelmeyer。半马尔可夫过程的经验估计量。Math. Methods Statist., 5(3):299–315, 1996.[8] N. Heutte 和 C. Huber-Carol。含删失生活质量数据的半马尔可夫模型。载于《生活质量研究的统计方法：设计、测量与分析》，第207–218页。Springer US，波士顿，马萨诸塞州，2002年。[9] R. H¨opfner。连续时间马尔可夫链的渐近推断。Probab. Theory Related Fields, 77(4):537–550, 1988.[10] O. Kallenberg。现代概率基础。Springer-Verlag，纽约，第二版，2002年。[11] S. W. Lagakos、C. J. Sommer 和 M. Zelen。部分删失数据的半马尔可夫模型。Biometrika, 65(2):311–317, 1978.[12] N. Limnios。Borel状态空间上半马尔可夫过程平稳分布的估计。Statist. Probab. Lett., 76(14):1536–1542, 2006.[13] N. Limnios、B. Ouhbi 和 A. Sadek。半马尔可夫过程平稳分布的经验估计量。Comm. Statist. Theory Methods, 34(4):987–995, 2005.[14] E. H. Moore 和 R. Pyke。马尔可夫更新过程转移分布的估计。Ann. Inst. Statist. Math., 20:411–424, 1968.[15] J. R. Norris。马尔可夫链。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[16] B. Ouhbi 和 N. Limnios。基于风险率函数的半马尔可夫过程非参数估计。Stat. Inference Stoch. Process., 2(2):151–173 (2000), 1999.[17] B. Ouhbi 和 N. Limnios。半马尔可夫过程的非参数可靠性估计。第109卷，第155–165页。2003年。C. R. Rao 80岁诞辰纪念文集，第三部分。