量子模 $\widehat{Z}^G$-不变量

Miranda C. N. CHENG abc、*Ioana COMAN* bd、*Davide PASSARO* b 和 *Gabriele SGROI* b

a) *Korteweg-de Vries* 数学研究所，阿姆斯特丹大学，阿姆斯特丹，荷兰b) 物理研究所，阿姆斯特丹大学，阿姆斯特丹，荷兰电子邮箱：*c.n.cheng@uva.nl*，*d.passaro@uva.nl*，*gabrielesgroi94@gmail.com*c) 中央研究院数学研究所，台北，台湾d) 卡弗里宇宙物理与数学研究所，东京大学，柏市，日本电子邮箱：*ioana.coman@ipmu.jp*

arXiv:2304.03934v2 [hep-th] 9 Mar 2024

收稿日期：2023年5月25日，最终稿日期：2024年2月7日；在线发表：2024年3月9日
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2024.018

摘要。我们研究闭三维-流形的 $\widehat{Z}^G$-不变量的量子模性质。预计高深度量子模形式将在一般三维流形和规范群 G中发挥核心作用。特别地，我们猜想，对于其配丛图具有 n 个连接节点且具有定号的配链三维流形，以及秩为 r 的规范群 G，$\widehat{Z}^G$ 与深度为 nr的量子模形式有关。我们证明了这一点对于 $G=$ SU(3)成立，也对于一大类三维流形成立（具有三个例外纤维的弱负Seifert 流形）。我们还研究了同一三维流形的具有不同规范群 G的 $\widehat{Z}^G$-不变量的量子模性之间的关系。我们猜想，对于具有三个例外纤维的负Seifert流形，相关于 $\widehat{Z}^G$ 且具有 $G=$ SU(2) 和SU(3) 的迭代Eichler 积分之间存在递归关系。这使人联想到拟模形式之间的递归结构；对于 SU(N)，拟模形式发挥着Vafa–Witten 不变量的作用。当三维流形进一步为整同调球时，我们证明了该猜想。

关键词： 三维流形；量子不变量；高深度量子模形式；低维拓扑学

*2020*年数学主题分类：57K31；57K16；11F37；11F27

1 引言与总结

1.1 引言

模形式在现代数学和理论物理学中发挥着不可或缺的作用，因为数论、几何、拓扑学、共形场论、弦理论、全息学等诸多领域都需要模形式。随着模形式理论的发展，过去二十年见证了拟模形式理论的发展，其始于具有奠基意义的论文 [20, 21, 70, 73]。与此同时，拟模形式已在数学的诸多领域中得到应用，包括组合学、表示论、拓扑学和数学物理。有关这些应用的部分选例，请参见 [10] 。在物理学中，当物理系统经过适当定义的量子态空间不是紧的时，拟模性往往捕捉到模性性质的细微调整，例如由于谱中存在连续部分而导致的情形。参见 [34]及其中的参考文献。

十多年前，修正模性的概念进一步扩展为量子模形式 [71], 。这一概念最初作为一种宽泛的理念提出，旨在涵盖许多类型迥异的函数。这个扩展后的概念涵盖了 mock

模性（在 [28]的意义下）。另一类属于此范畴的常见函数，作为具体例子，即所谓的假θ函数 [71], ，它们是 q形式的级数

$$\sum_{\vec{n}\in\vec{\mu}+\Lambda}\prod_{i}\operatorname{sgn}(\langle\vec{n},\vec{v}_i\rangle)q^{|\vec{n}|^2/2}$$

对于某些选择 $\vec{v}_i$ 以及 $\vec{\mu}$ 对于给定的格 Λ。粗略地说，量子模形式是这样的函数：其模异常——以函数与其在适当模群作用下的像在有理数附近的差异来衡量——表现得比函数本身更好（参见定义3.11）。尤其是，它们通常并非模形式，因为这些差异（即“余循环”）并不消失。[1] 不过，我们可以认为它们具有某种模行为，因为这些差异出乎意料地具有比函数本身更好的解析性质。尤其是，本文讨论的量子模形式属于所谓的全纯量子模形式 [72], ，它们是在上半平面上的全纯函数，其余循环可在$\mathbb{C}$ 上除去一条半直线后处处定义。一些早期的量子模形式例子源自纽结的量子不变量，以及三维流形的陈–西蒙斯（或 Witten–Reshetikhin–Turaev，WRT）不变量 [55], ，这不禁让我们思考，这类函数还在物理学或拓扑学的哪些领域发挥作用。

在深入探讨本文的具体数学背景之前，基于模形式和拟模形式迄今在二维共形场论（CFT）以及量子引力的全息原理中所发挥的作用，并结合量子模形式的定义性质，我们预计量子模形式在理论物理中将具有以下诠释。

- 二维共形场论和顶点算子代数中更微妙的紫外/红外联系。二维共形场论的配分函数在 S-变换下的对称性$Z(\tau) = Z(-1/\tau)$可以被视为该理论紫外/红外联系的一种体现。在此背景下，q-级数 $\left(\text{如通常所写为 } q := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\right)$ 体现了一种更微妙的紫外/红外联系：尽管高能态的主导行为仍由低温极限决定，但由于余循环不为零，还会产生额外的次主导贡献。

- 对几何求和。当 q级数产生量子模形式时，其傅里叶系数通常可以用圆法表示。圆法的适用性只要求目标函数具有合理或可理解的变换性质，从而将圆法推广用于表示模形式的系数。本例中的 q级数可以表示为某个函数在模群作用下的像之和，并且该和经过适当正则化。例如，参见 [13, 19, 26] 关于假 theta 函数的讨论，以及从 [63], 开始的关于拟模形式的拉德马赫和的大量研究。这种结构在 $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ [36, 37, 38, 56]和 $\mathrm{AdS}_2/\mathrm{CFT}_1$ [33, 45, 62], 背景下 BPS 指标的引力黑洞诠释中发挥了作用，其中对模像的求和被诠释为对不同鞍点几何的求和。我们预期，对于某些扮演 BPS 指标角色的量子模 q级数，其拉德马赫和表达式也具有类似的引力诠释，我们将在第 6 节结合三维指标进一步讨论这一点。

接下来我们将讨论本文中量子模性的具体背景。本文的主要目标是进一步研究量子模性质

[1]如果余循环消失，那么相应的函数将会相当乏味，因为它们在同余子群作用下的行为，恰恰使其只能取有限多个值。

某类 q系列三维流形拓扑不变量。这些不变量概略地记作 Z不变量，有时也称为 q系列不变量或同调块，最近已在M理论中的3d-3d 对应框架下以 [49, 50]的形式被提出。这类新颖的不变量自此成为近年来文献中各种研究的主题。

[23, 24, 25, 29, 30, 31, 32, 41, 42, 44, 48, 59, 61, 64, 65] 中给出了一些例子。简而言之，$\widehat{Z}_b(M_3)$在物理上被定义为三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称量子场论 $T[M_3]$ 的半指标（也称为涡旋配分函数）；该理论是通过将六维 $\mathcal{N}=$ (2,0)超共形场论紧化在闭三维流形 M_3上而得到的。这里， b 标记了使部分超对称性保持不破缺的边界条件的具体选择。话虽如此，由于 $T[M_3]$ 的确切内容通常仍然未知，这一定义的物理并不总能给出在实践中显式计算 $\widehat{Z}_b(M_3)$不变量的方法。另一方面，有人猜想 $\widehat{Z}_b(M_3)$与陈–西蒙斯不变量 CS(M_3) [49]之间存在关系。专门考虑 $b_1(M_3)=0$的情形时，该关系写作

$$\mathrm{CS}(M_3;k)=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2k}}\sum_{a,b}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\mathrm{CS}(a)}S_{ab}^{(A)}\widehat{Z}_b(M_3;\tau)|_{\tau\to\frac{1}{k}}, \tag{1.1}$$

其中，该求和可以理解为遍历阿贝尔平坦联络的模空间在韦伊群作用下的连通分支，或不等价的 Spin^c 结构，而 $S_{ab}^{(A)}$ 是一个具体矩阵，其形式可见于 [25, 46, 49]。这一关系表明， Z- 不变量可以被视为一种函数：它不仅延拓了 WRT 不变量，还通过对 BPS 态的计数诠释对其进行了范畴化。利用上述结果、CS(M_3; k) 的已知表达式，并受到某些已知理论半指标局域化表达式的启发，数学上已经为一类三维流形 M_3 [49]以及 [46]中的纽结补空间提出了 $\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ 不变量的定义。由于六维 $\mathcal{N}=$(2,0) 超共形场论由 ADE 规范群 G标记，我们预期对于所有 ADE 规范群 G，也可以类似地定义 $\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$。事实上，任意单边规范群 G 的数学定义见于 [64], ，它推广了 [49]的定义，而后者对应于 $G=$ SU(2)。关于 $G=$ SU(N) 以及一族无限的塞弗特流形的具体例子，已在 [29]中进行了研究。

对于 $G=$ SU(2)，$\widehat{Z}_{\vec{b}}^{\mathrm{SU}(2)}(M_3)$与量子模形式，特别是假 [16, 17, 25]与假 theta 函数 [25, 27, 65] 已被提出。[2] 一般而言，我们有以下猜想 [25], 它可以追溯到假 theta 函数与三维流形的 WRT 不变量之间的关系 [52, 53, 54, 55]。

一般猜想。$\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ 与某种量子模形式密切相关，适用于任意闭三维流形 M_3、任意 *ADE* 规范群 G以及任意边界条件标签 $\vec{b}$。

例如，考虑 $G=$ SU(2) 和 M_3 一个塞弗特流形；而 $\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ 是量子模形式的线性组合；当 M_3 是具有三个或四个例外纤维的塞弗特流形时，更一般地，它由量子模形式导数的线性组合给出；当 M_3 至少有五个例外纤维时 [17]。为了加深我们对上述猜想现象的理解，本文研究规范群 $\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3$的量子模性，其中 G 秩大于一，尤其是 $G=$ SU(3)。简言之，在这些情形下，相关的量子模形式将是高深度量子模形式。与高深度拟模形式[3] 类似（另见 [1, 2, 4, 7, 12, 15, 18, 51, 57, 58]） ，高深度量子模形式可以递归定义：深度二量子模形式的余循环是深度一或零量子模形式与解析函数相乘所得项的和，依此类推（参见定义 3.12）。在介绍具体结果之前，我们先提及量子模性在此背景下的一种体现。

[2]另请参阅 Cheng M.C.N.、Coman I.、Kucharski P.、Passaro D.、Sgroi G.，即将发表。[3]另请参阅 Zagier D.、Zwegers S.，未发表。

如 [25] 在 Z 关于 G =SU(2) 的不变量的背景下所讨论的，半经典区域中 WRT 不变量的超越级数表达式可以视为以下两个事实的结果：（1）WRT 与不变量之间的关系（1.1），以及（2）该不变量的量子模性。示意而言，当秩一的 Z 是一个向量值量子模形式的分量（见定义 3.11）$z=(z_{b'})$，其权重为 w 且 S-矩阵为 $S^{(q)}$ 时，上述内容导出

$$\begin{aligned}\mathrm{CS}(M_3;k) &= \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2k}}\sum_a \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k \mathrm{CS}(a)} \sum_b S_{ab}^{(A)} \lim_{\tau\to\frac{1}{k}} \widehat{Z}_{\vec{\underline{b}}}^{\mathrm{SU}(2)}(M_3;\tau) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2k}}\sum_a \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k \mathrm{CS}(a)} \sum_b S_{ab}^{(A)} \left(k^w \sum_{b'} S_{bb'}^{(q)} \lim_{\tau\to -k} z_{b'}(\tau) + r_b\left(\frac{1}{k}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

在上述等式的第二行中，括号内的第一项来自 $\widehat{Z}$ 的S变换，而 $r_b\left(\frac{1}{k}\right)$ 是关于 $\frac{1}{k}$ 的渐近微扰级数，用以捕捉非消失的余循环。事实证明，上述等式捕捉了与 M_3 上平坦 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 联络相关的许多复杂结构。首先请注意，涉及 $z_{b'}(-k)$ 的项对应于非阿贝尔平坦联络的鞍点贡献。此外，由于对 a 的求和可解释为对阿贝尔平坦联络的求和，显然，这类三维流形的半经典 WRT 不变量的转阶级数具有这样的特征：只有来自阿贝尔平坦联络的鞍点贡献带有一个微扰级数因子，其形式为 $\mathrm{e}^{-k\mathrm{CS}(a)}\frac{1}{\sqrt{k}}R_a\left(\frac{1}{k}\right)$，其中 R_a 同样是一个微扰级数。当 $\widehat{Z}$ 不变量是深度为 N 的量子模形式时，可以看到上述结构得到了推广。此时最多有 N 类鞍点，其伴随的微扰级数复杂程度各不相同。例如，与之前一样，来自 $\widehat{Z}_b$ 的 S 变换的项不会乘上 $\frac{1}{k}$ 的渐近级数；更一般地，对于 $0\le \ell \le N$，还存在乘以若干个 ℓ 微扰级数乘积的鞍点贡献。同样，我们预期量子模性结构控制着三维流形上平坦联络复杂的拓扑结构，并将在第6节回到这一问题。最后，鉴于顶点代数与 Z 不变量 [24, 25]，之间提出的关系，我们预期，在顶点代数的背景下理解 Z 不变量的量子模性也将大有裨益。

1.2 结果概要

在本节余下部分，我们将简要讨论本文的主要结果。

量子模性

首先，我们对弱负或弱正配链三维流形 $\widehat{Z}_{\vec{b}}^{G}(M_3)$不变量的量子模性质提出如下猜想 M_3，其中我们令 G 为任意 ADE 规范群，而 b 为第 4 节详述的任意允许边界条件（参见（4.4））。正如第 4 节将要说明的，配链三维流形可以用其编码配丛图的配链矩阵 M 来定义。沿用 [25], 的说法，当配链流形的 M^{-1}限制在由“连接顶点”（度至少为 3 的顶点）生成的子空间上时为负定或正定，则称其为弱负或弱正。塞弗特流形总可以实现为只有一个连接顶点的配链流形；在这种情况下，我们将根据唯一连接顶点方向上柱面矩阵的逆矩阵的符号差，简称塞弗特流形为负塞弗特或正塞弗特流形。

我们首先提出以下猜想，对前文概述的一般猜想进行具体化和细化。

猜想 1.1。设 G 为一个秩为 r 的 *ADE*群。对于具有 n 个连接顶点的 M_3 弱负或弱正配链流形，不变量 $\widehat{Z}^G_{\vec{b}}(M_3;\ \tau)$ 与深度至多为 $r\times n$ 的量子模形式相关。

我们还证明了以下特殊情形，其中 $r=2$ 和 $n=1$。

定理 1.2。令 $G=\mathrm{SU}(3)$。对于具有三个例外纤维的负 *Seifert* 流形 M_3 以及所有允许的 $\vec{b}$，不变量 $\widehat{Z}^G_{\vec{b}}(M_3;\ \tau)$ 是深度一和深度二量子模形式之和。

本文通过研究所谓的伴随函数来证明上述结论：$\widehat{Z}^G_{\vec{b}}$，记作 $\check{Z}^G_{\vec{b}}$，它被定义为一个函数，在 $\tau\to\mathbb{Q}$附近具有相同的渐近展开，并满足朴素的 $\tau\mapsto-\tau$ 变换。见定义3.6。我们利用迭代非全纯艾希勒积分构造该函数（参见（3.29）和（3.30）），采用的方法与 [11], 类似，并将这种特定构造方式得到的伴随函数简称为伴随函数。也可以相当直接地将我们的分析改用二变量补全的语言来表述 [14]，而不使用伴随函数。具体而言，在 [14]的语言中，$\widehat{Z}^G_{\vec{b}}$是深度一和深度二伪模形式之和。

在第 6 节中，我们简要讨论猜想 1.1 之外情形下量子模性的可能形式。

一种递归结构

接下来，考虑在固定三维流形 M_3 于 $\widehat{Z}^G(M_3)$ 中的同时更改规范群 G，我们提出以下问题：

Question: Given a three-manifold M_3, are the quantum modular properties of $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(N)}_{\vec{b}}(M_3)$ for different N related?

为了阐明这个问题，我们认为回顾以下内容会很有启发性。高深度量子模形式在研究扭曲的四维流形 M_4 上的四维 $\mathcal{N}=4$ 超杨–米尔斯理论的 Vafa–Witten配分函数 $Z^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 时发挥了重要作用。更具体地说，当 $b_2^+(M_4)=1$ 时，不变量 $Z^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 呈现模拟模性质，而相应（混合）模形式的“深度”由规范群 G 的秩决定。模拟模性质尤其意味着，存在 $Z^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 的模补全，记作 $\widetilde{Z}^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$；它是非全纯的，并具有一个规范定义的全纯部分，等于 $Z^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$。尽管 $\widetilde{Z}^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 按模对象的方式变换，它却具有非平凡的 $\bar{\tau}$ 依赖性，这称为其全纯反常。换言之，补全函数 $\widetilde{Z}^G_{\mathrm{VW}}(M_4)$ 对 $\bar{\tau}$ 的依赖性刻画了 Vafa–Witten不变量 $Z^G_{\mathrm{VW}}(M_4)$ 的模拟模性。值得注意的是，当 $G=U(N)$ 时，$\widetilde{Z}^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 的全纯反常由 $G=U(n)$ 下的 $\widetilde{Z}^G_{\mathrm{VW}}(\tau;\ M_4)$ 给出，其中 $0<n<N$。示意而言，猜想指出 [8, 60]

$$\partial_{\bar{\tau}}\widetilde{Z}^{U(N)}_{\mathrm{VW}}\sim\sum_{n_1+n_2=N}n_1n_2\widetilde{Z}^{U(n_1)}_{\mathrm{VW}}\widetilde{Z}^{U(n_2)}_{\mathrm{VW}}. \tag{1.3}$$

上述递归关系，以及更一般地说，此处的拟模性，已从多个角度得到物理解释，包括四维规范理论、二维σ模型 [35], 曲线计数 [60], 和 DT不变量 [3, 5, 6, 7]。粗略地说，从规范理论的角度看，全纯反常的存在与可约联络的存在有关；从 M 理论的角度看，则与将多个 M5膜彼此分离的可能性有关。递归结构（1.3）由此自然得出。这种三维流形不变量的 M5膜起源 $\widehat{Z}^G(\tau;\ M_3)$，

如 [50], 中所详述，这尤其促使我们提出此前提到的量子模性 Z 不变量的递归结构问题。

为了探究这个问题，我们现在聚焦于具有三个例外纤维的负 Seifert 流形，它们对应于含有一个三度连接顶点的配丛图。根据 [24, 25], 中展示的 $\widehat{Z}$ 不变量与顶点算子代数特征之间的关系，我们预期，对于 $G = \mathrm{SU}(r+1)$, $\widehat{Z}^G_{\vec{b}}(M_3)$ 是秩 -r' 假 theta 函数的线性组合，其中 $r' \le r$，相差一个整体有理数次幂 q，并且可能还需加上一个关于 q 和 q^{-1} 的有限多项式。由于本节余下部分的许多陈述在相差一个整体有理数次幂 q并加上一个关于 q 和 q^{-1} 的有限多项式的意义下成立，为了简便起见，我们将引入特殊记号 $\dddot{=}$、$\dddot{\in}$ 等，其中在符号上方添加 …，表示将 $\widehat{Z}$ 替换为 $Cq^{\Delta}\widehat{Z} + f(q)$ 时该关系成立，其中 $C \in \mathbb{C}$、$\Delta \in \mathbb{Q}$、f q $q =$ ( ) $\in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$; 对于 $\check{Z}$，也类似。按照惯例，本文始终记 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$。

更$Z^G_{\vec{b}}(M_3)$具体地说，我们预期函数的线性组合：

$$t^{(0),A_r} = \sum_{\vec{n}\in\vec{\mu}+\Lambda_r} \left(\prod_i \mathrm{sgn}(\langle \vec{n}, \vec{v}_i\rangle) q^{|\vec{n}|^2/2} \right),$$
$$t^{(1),A_r} = \sum_{\vec{n}\in\vec{\mu}+\Lambda_r} \langle \vec{n}, \vec{\sigma}\rangle \left(\prod_i \mathrm{sgn}(\langle \vec{n}, \vec{v}_i\rangle) q^{|\vec{n}|^2/2} \right)$$

对于某些选定的 $\vec{\mu}$、$\vec{v}_i$ 和 $\vec{\sigma}$，以及秩为 r 的格 Λ_r。我们将它们的伴随函数记为 $\check{t}^{(\nu),A_r}$ [14]，并预期这些函数可表示为迭代 Eichler 积分的线性组合。于是，高秩假 theta 函数的一般结构给出如下结果。示意地，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\check{Z}^{\mathrm{SU}(r+1)} \dddot{\in} \mathrm{span}\Big(\big\{(\mathrm{Im}\,\tau)^{\nu_0-3/2}\,\overline{\theta^{\nu_0}}\check{t}^{(\nu_1),A_{r_1}}\check{t}^{(\nu_2),A_{r_2}}\cdots \mid \nu_i\in\{0,1\},\, r\ge 1+r_1+r_2+\cdots\big\}\Big) \tag{1.4}$$

其中 θ^ν 表示 $\theta^\nu_{m,\,r}$ 类型的函数，定义如下。对于 m 为正整数，设 Θ_m 是由列向量 $\theta_m = (\theta_{m,\,r})_{r \bmod 2m}$ 张成的元辛群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的 $2m$ 维韦伊表示，其 θ 函数分量为

$$\theta_{m,r}(\tau, z) := \sum_{\ell\equiv r \bmod 2m} q^{\frac{\ell^2}{4m}} y^\ell, \qquad y := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}. \tag{1.5}$$

对 (1.5) 求导定义了一元 theta 函数 $\theta^\nu_{m,\,r}$: $\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ 对于 $\nu = 0$, 1, 有

$$\theta^\nu_{m,r}(\tau) := \left(\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z}\right)^\nu \theta_{m,r}(\tau, z)\right)\Big|_{z=0}. \tag{1.6}$$

艾希勒积分一元 theta 函数在研究 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}$ 中发挥着重要作用。权为 $w \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$的尖点形式 $g(\tau) = \sum_{n>0} a_g(n)q^n$的艾希勒积分是一个由[4]给出的函数

$$\tilde{g}(\tau) := C(w)\sum_{n>0} a_g(n) n^{1-w} q^n, \tag{1.7}$$

其中 $C(w) = \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_{(w-1)}}{(-2\pi)^{w-1}}$，或者

$$\tilde{g}(\tau) = \int_\tau^{\mathrm{i}\infty} g(z')(-\mathrm{i}(z'-\tau))^{-2+w}\mathrm{d}z',$$

[4]为避免常数不必要地大量增加，我们采用与 [25].中所选不同的艾希勒积分归一化方式。

采用精心选择的围道。特别地，$\theta^1_{m,r}$ 的艾希勒积分与假 theta 函数成正比

$$\tilde{\theta}^1_{m,r} := \sum_{k\equiv r \ (2m)} \operatorname{sgn}(k) q^{k^2/4m}.$$

在本文中，我们聚焦于下一个最简单的非平凡情形，其中 $G = \mathrm{SU}(3)$。我们发现了一种有趣的递归结构，将以元辛群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的魏尔表-示来描述；这些表示是 Θ_m 的子表示。我们用 $\mathrm{Ex}m$ 表示 m 的精确因子群，其中，因子 n 是 m 的精确因子，当且仅当 $\left(n, \ \frac{m}{n}\right) = 1$，而 $\mathrm{Ex}m$ 的群乘法为

$$n * n' := \frac{nn'}{(n,n')^2}.$$

接下来我们考虑一个子群 K，它是 Ex 的m。群 K 标记了 Θ_m 的一个子表示，记作 Θ^{m+K}，我们将在第 4节中对其进行更详细的描述。它具有以下性质：当 $\Theta^{m+K'} \subset \Theta^{m+K}$ 时 $K' \supset K$，特别地，当 $\Theta^{m+K} = \Theta_m$ 时 $K = \{1\}$。一般而言，根据 P^{m+K} 定义于（4.8）和（4.9）中的投影算子，

$$\theta^{m+K}_r(\tau, z) = \sum_{r' \in \mathbb{Z}/2m} P^{m+K}_{r,r'} \theta_{m,r'}(\tau, z). \tag{1.8}$$

我们将记 $\theta^{\nu,\ m+K}_{\ r}$，$\nu = 0,\ 1$，为 $\theta^{\nu}_{m,\ r}$（见（4.11）中的 $\nu = 1$），并记 $\sigma^{m+K} \subset \mathbb{Z}/2m$ 为标记（通过 r）线性无关的 $\theta^{m+K}_r(\tau,\ z)$。类似的记号 $\tilde{\theta}^{\nu,\ m+K}_{\ r}$和 $\left(\theta^{\nu,\ m+K}_{\ r}\right)^*$ 也用于相应艾希勒积分和非全纯艾希勒积分的相同线性组合（1.8）

$$(\theta^{\nu}_{m,r})^*(\tau) := \int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w \, \frac{\overline{\theta^{\nu}_{m,r}(-\bar{w})}}{(-\mathrm{i}(w+\tau))^{3/2-\nu}}$$

~（参见（3.29））， 除一个整体因子外，它是$\theta^{\nu}_{m\text{的}r}$。参见 [25, 第7 节3]， 以了解当前语境下的更多细节。

现在我们解释表示 Θ^{m+K} 在研究 $\widehat{Z}^G$-不变量中的作用。文献 [17, 25] 证明，对于任何具有三个例外纤维的负 Seifert M_3，都存在 ¯唯一的 m 和某个 $K \subset \mathrm{Ex}m$，使得对于所有允许的 b 选择，

$$\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3; \tau) \in \operatorname{span}\left(\left\{\tilde{\theta}^{1,m+K}_r \mid r \in \sigma^{m+K}\right\}\right), \tag{1.9}$$

这意味着

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3; \tau, \bar{\tau}) \in \operatorname{span}\left(\left\{\left(\theta^{1,m+K}_r\right)^* \mid r \in \sigma^{m+K}\right\}\right). \tag{1.10}$$

从现在起，我们将取最大的 K 使得上述结论成立。下面的猜想基于观察，并已对同调球得到证明，它表明 $\widehat{Z}^G$的递归结构实际上比（1.4）所表明的更精细。

¯**猜想 1.3**。 设 M_3 为具有三个例外纤维的负 *Seifert* 流形，并设 b 为边界条件的一种选择。设 m 为唯一的正整数，且 K 为$\mathrm{Ex}m$ 的最大子群，使得

$$\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3; \tau) \stackrel{\cdots}{\in} \operatorname{span}\left(\left\{\tilde{\theta}^{1,m+K}_r \mid r \in \sigma^{m+K}\right\}\right).$$

令 $\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau})$ 为 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(\tau;M_3)$的伴随对象。则其满足

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\big(\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau})+z_{1\mathrm{d}}\big) \dddot{\in} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}\,\tau}}\,\mathrm{span}\Big(\big\{\overline{\theta^{1,m+K}_{r'}}\big(\theta^{\nu}_{m,r''}\big)^{*}\mid \nu=0,1,\, r''\in\mathbb{Z}/2m,\, r'\in\sigma^{m+K}\big\}\Big), \tag{1.11}$$

其中，1d 部分的形式为

$$z_{1\mathrm{d}} \dddot{\in} \mathrm{span}\left(\{(\theta^{\nu}_{m,r})^{*}\mid r\in\mathbb{Z}/2m,\,\nu=0,1\}\right). \tag{1.12}$$

我们看到，同一个韦伊表示 Θ^{m+K} 既支配着 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}(M_3)$ 的结构，也支配着 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}(M_3)$ 的结构。我们将在第 6节讨论它可能的诠释。

此外，当 M_3 是一个同调球时，也就是说，当 $H_1(M_3,\mathbb{Z})$ 是平凡的，它在拓扑上等价于布里斯科恩球 $\Sigma(p_1,p_2,p_3)$，其中各 p_i 互素（4.3）。此时只有一个同调块 $\vec{b}=\vec{b}_0$，并且已知 [25]

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\big(\check{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau})\big) \dddot{=} \overline{\theta^{1,m+K}_{r}}$$

对于 $m=p_1p_2p_3$、$K=\{1,\bar{p}_1,\bar{p}_3,\bar{p}_2\}$、$r=m-\bar{p}_1-\bar{p}_2-\bar{p}_3$，其中 $\bar{p}_i:=m/p_i$。

对于这个（无限彩票计划ite) M_3 族，我们明确证明了该猜想成立，并且我们有 e

定理 1.4. 猜想 1.3 在 M_3 为同调球时成立。

换句话说，在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\check{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau}) \dddot{=} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}\,\tau}}\overline{\theta^{1,m+K}_{r}},\\
&\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\big(\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau})+z_{1\mathrm{d}}\big) \dddot{=} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}\,\tau}}\sum_{r'\in\sigma^{m+K}}\overline{\theta^{1,m+K}_{r'}}B_{r'},
\end{aligned} \tag{1.13}$$

其中，$B_{r'}$ 是 $(\theta^{\nu}_{m,\,r''})^{*}$ 的线性组合，其中 $\nu=0$，1，$r''\in\mathbb{Z}/2m$。特别要注意，尽管 Θ^{m+K} 中只有一个分量似乎在 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}$的量子模性中发挥作用，但其模像也在 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}$中发挥作用。

这里我们用伴随函数的语言表述了递归猜想。和之前一样，上述关于递归关系的分析可以用高深度假 theta 函数的模补全语言来表述 [14]。粗略地说，$\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}$ 的作用将由$\frac{\partial}{\partial w}$来承担，它作用于依赖于（$\tau$，$w$）的二变量补全 $\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}$，并且该补全作为双模形式进行变换。类似的结论也应以自然的方式适用于在 [14] 中定义的补全函数（及其导数）。

2 记号指南

e(x) 简写记号e(x) =e$^{2\pi ix}$.$B_m(x)$ 伯努利多项式，其生成函数为 $\frac{te^{xt}}{e^{t}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$.$\Lambda=\Lambda_{\mathfrak{g}}$ 与单连李代数 $\mathfrak{g}$ 相关的根格。$\Lambda^{\vee}$ 对偶根格。Φ_{s}—单根集合 $\{\vec{\alpha}_i\}_{i=1}^{\mathrm{rankG}}$。

$\Phi_\pm$ 正根和负根的集合。$\vec{\rho}$ 根系 $\vec{\rho}$ 的韦伊向量：$=\frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}\in\Phi_+}\vec{\alpha}$。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 卡当子代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间中的标量积。$|\vec{x}|^2$ 对于 $\vec{x}\in\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$，范数定义为 $|\vec{x}|^2=\langle\vec{x},\ \vec{x}\rangle$。$\{\vec{\omega}_i\}_{i=1}^{\mathrm{rankG}}$满足 $\langle\vec{\omega}_i$、$\vec{\alpha}_j\rangle=\delta_i$、$_j$ 的基本权集合。P^+ 支配积分权的集合。参见(3.1)。对于 $\bar{P}^+$，参见 (3.2)。$\Delta\vec{\omega}$ $\Delta\vec{\omega}$ 中两个基本权之差：$=\vec{\omega}_1-\vec{\omega}_2$ A_2 李代数

.

W 根系的韦伊群。w(·) 元素 $w\in W$ 的作用。$\ell(w)$ w 的长度。Q(m) Q(m) 的范数：$=\frac{1}{2}|\bar{}\mathrm{m}|^2=\left(3m_1^2+3m_1m_2+m_2^2\right)$，其中 $(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2$ (3.3)。ϱ 简写记号 $\varrho=\left(\vec{s},\vec{k},m,D\right)$，在第 3 节中引入。$\vec{\sigma}$ 简写记号 $\vec{\sigma}=\vec{s}-\frac{m}{D}k$。$F^{(\varrho)}$ 方程 (3.5) 中定义的广义 A_2 假 theta 函数。$F_\nu^{(\varrho)}$对于 $\nu=0$ 定义的部分 theta 函数，见 (3.7) 和 (3.10) 中的 1。$F_{\nu,\boldsymbol{\alpha}}$ 方程 (3.8) 中定义的假 theta 函数分量。$\mathcal{F}_\nu$ $\mathcal{F}_\nu(\boldsymbol{x})=x_2^\nu\mathrm{e}^{-Q(\boldsymbol{x})}$ (3.4)$\mathcal{S}$ 部分 theta 函数 F_ν 的参数 $\boldsymbol{\alpha}$ (3.9) 的集合 (3.11)$\boldsymbol{\alpha}(\tau)$。$\mathcal{S}$ 方程 (3.13) 中定义的集合 $\mathcal{S}$ 的子集。$\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}(\tau)$ 函数 $F(\varrho)_\nu(\tau)$ 的伴随函数。见 (3.26)。M 加权图 (V,E,a) 的邻接矩阵 (4.1)。D 满足 $DM_{v_0}^{-1},_v\in\mathbb{Z}$（其中 $\forall v\in V$）的最小正整数；$m=D^2\left|M_{v_0}^{-1},_{v_0}\right|$。$\vec{b}$ 配链三维流形 M_3 上的广义 Spin^c 结构 (4.4)，用于标记 $T[M_3]$ 的边界条件。$\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ 配链三维流形 M_3 的拓扑不变量 (4.5)。$\check{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ $\widehat{Z}_{\vec{b}}^G(M_3)$ 的伴随函数。将 $\widehat{Z}$ 替换为 $Cq^\Delta\widehat{Z}+f(q)$ 时，$\dddot{=}$, $\ddot{\in}$ 等关系仍成立，其中某个 $C\in\mathbb{C}$, $\Delta\in\mathbb{Q}$, $f(q)\in\mathbb{C}\left[q,q^{-1}\right]$， $\check{Z}$ 也类似。

–

–

– –

3 广义 A_2 假 theta 函数

设 $\Lambda=\Lambda_{A_2}$ 为 A_2 根格， W 为相应的韦伊群，其中 ℓ： $W\to\mathbb{Z}$ 是其长度函数。我们将 $W_+\cong\mathbb{Z}/3$ 表示为由映射 $w\mapsto(-1)^{\ell(w)}$的核给出的 W 的旋转子群。我们还将 $\Phi_{\mathrm{s}}=\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$ 表示为一组单根，将 $\{\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2\}$ 表示为相应的基本权，将 $\Phi_\pm$ 表示为正根及负根的集合，并将彩在线

$$P^+:=\left\{\vec{\lambda}\in\Lambda^\vee\mid\langle\vec{\lambda},\vec{\alpha}\rangle>0\,\forall\vec{\alpha}\in\Phi_+\right\}\tag{3.1}$$

支配积分权的集合，其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是由 A_2 卡当矩阵给出的二次型。对于 $\vec{x}\in\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$，我们定义范数 $|\vec{x}|^2:=\langle\vec{x},\ \vec{x}\rangle$ 如通常一样。我们还将定义

$$\bar{P}^+:=\left\{\vec{\lambda}\in\Lambda^\vee\mid\langle\vec{\lambda},\vec{\alpha}\rangle\geq0\,\forall\vec{\alpha}\in\Phi_+\right\}.\tag{3.2}$$

引入映射将十分方便

$$\mathbb{Z}^2 \to \Lambda, \qquad \mathbf{m} = (m_1, m_2) \mapsto \vec{m} := m_2\vec{\omega}_1 + (3m_1 + m_2)\vec{\omega}_2,$$

相应的范数

$$Q(\mathbf{m}) := \frac{1}{2}|\vec{m}|^2 = \left(3m_1^2 + 3m_1m_2 + m_2^2\right), \tag{3.3}$$

以及定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的以下函数

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{x}) := x_2^\nu \mathrm{e}^{-Q(\mathbf{x})}, \qquad \nu = 0, 1. \tag{3.4}$$

那么，给定根格中的一个向量 $\vec{s}$、一个正整数 m、m 的一个因子 D，以及 $\vec{k} \in \Lambda/D\Lambda$，我们定义广义 A_2 假 theta 函数

$$F^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} \sum_{\substack{\vec{n}\in\Lambda\cap P^+ \\ \vec{n}\in w(\vec{k})+D\Lambda}} \min(n_1, n_2) q^{\frac{1}{2m}|-w(\vec{s})+\frac{m}{D}\vec{n}|^2}, \tag{3.5}$$

其中 ϱ 编码了数据 $(\vec{s},\ \vec{k},\ m,\ D)$。这些 A_2 假 theta 函数的量子模性已在 [11] 中得到研究，并且它们出现在高秩对数顶点代数 log-$\mathcal{V}_{\bar{\Lambda}}(m)$ [43]，总是具有 $D = 1$。

这些广义 A_2 假 theta 函数是以下对象的构件：$Z_b^{\mathrm{SU}(3)}(M_4)$ 不变量，当 M_4 是一个具有三个例外纤维的负 Seifert 流形（4.7）。对其明确的量子模性质的研究将是本节的主题。

在上文以及本文其他地方，除非另有说明，我们使用权基记号。例如，我们用 $(n_1,\ n_2)$ 表示 $\vec{n} := n_1\vec{\omega}_1 + n_1\vec{\omega}_2 \in \Lambda^\vee$。我们还将 $\vec{k}|_i := \langle\vec{k},\ \vec{\alpha}_i\rangle$ 写作 $\vec{k} \in \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$，因此将 $\vec{n}|_i = n_i$ 写作 $\vec{n} = (n_1,\ n_2)$。

3.1 恒等式

我们现在将广义 A_2 假 theta 函数重写为一种形式，使我们能够确定其在模参数 τ 趋近于有理数的极限情况下的渐近行为。类似于 [11] 我们将首先把（3.5）重写为部分theta 函数之和。具体而言，我们有以下引理。

引理 3.1。采用 (3.5)中的记号，我们选择一个代表元 $\vec{k} \in \Lambda/D\Lambda$ 使得 $0 \le \langle k, -\vec{\omega}_i\rangle < D$ 对于 $i = 1,\ 2$，并写作$\vec{s} = \vec{\sigma} + \frac{m}{D}k$。于是有

$$F^{(\varrho)}(\tau) = F_0^{(\varrho)}(m\tau) + DF_1^{(\varrho)}(m\tau), \tag{3.6}$$

其中

$$F_0^{(\varrho)}(\tau) := \frac{D}{m}\sum_{w\in W_+}\sum_{i\in\{1,2\}} w(\vec{s})|_i F_{0,\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}}(\tau), \qquad F_1^{(\varrho)}(\tau) := \sum_{w\in W_+}\sum_{i\in\{1,2\}} F_{1,\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}}(\tau) \tag{3.7}$$

with

$$F_{\nu,\boldsymbol{\alpha}}(\tau) = \left(\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\alpha}+\mathbb{N}_0^2} + (-1)^\nu \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}+\mathbb{N}_0^2}\right) n_2^\nu q^{Q(\mathbf{n})}. \tag{3.8}$$

$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}_w$ 向量根据 $\vec{s}$、k 和韦伊群元素 $w \in W$ 定义

$$\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)} = \left(x + \frac{\Delta w(\vec{\sigma})}{m}, \xi_{w,1} - \frac{w(\vec{\sigma})|_1}{m}\right), \qquad \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)} = \left(1 - x - \frac{\Delta w(\vec{\sigma})}{m}, \xi_{w,2} - \frac{w(\vec{\sigma})|_2}{m}\right) \tag{3.9}$$

其中

$$\xi_{w,i} := \left\lceil -\frac{w(\vec{k})|_i}{D} \right\rceil, \qquad \Delta w(\vec{\sigma}) := \frac{w(\vec{\sigma})|_1 - w(\vec{\sigma})|_2}{3},$$
$$x = \begin{cases} 0 & \text{when } w(\vec{k})|_2 \geq w(\vec{k})|_1, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明见附录B.1。

为便于后文使用，我们还将（3.7）重写如下：

$$F_0^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}} \eta_0(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\alpha}+\mathbb{N}_0^2} q^{Q(\boldsymbol{n})}, \qquad F_1^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}} \eta_1(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\alpha}+\mathbb{N}_0^2} n_2\, q^{Q(\mathbf{n})}, \tag{3.10}$$

其中我们记作

$$\mathcal{S} = \bigcup_{w\in W_+} \{\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(1)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(2)}\}, \tag{3.11}$$

and

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(i)} := \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}, \qquad \eta_0(\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}) = \eta_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(i)}) = \frac{D}{m} w(\vec{s})|_i, \qquad \eta_1(\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}) = -\eta_1(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(i)}) = 1, \tag{3.12}$$

其中 $\mathbf{1} = (1,1)$。我们也将记作

$$\tilde{\mathcal{S}} = \bigcup_{w\in W_+} \{\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}\}, \tag{3.13}$$

以便

$$F_\nu^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}} \eta_\nu(\boldsymbol{\alpha}) F_{\nu,\boldsymbol{\alpha}}.$$

注意，由于 $m\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^2$，$\vec{\sigma} \in \Lambda$，因此 $\Delta w(\vec{\sigma}) = \langle \Delta\vec{\omega},\ w(\vec{\sigma})\rangle \in \mathbb{Z}$，其中我们记

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2).$$

为了研究 $F^{(\varrho)}$ 的径向极限，后文将处理如下形式的函数$\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\alpha}+\mathbb{N}_0^2} \mathcal{F}_\nu(\mathbf{n})$，其中 $\nu = 0,\ \mathbf{1}$ 且 $0 \leq \alpha_i \leq 1$当 $i = 1$时，2。参见（3.4）。因此，以下关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的整数平移影响的结果将很有用。

引理 3.2。设 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (\delta\alpha_1, \delta\alpha_2)$，其中 $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2 \in \mathbb{Z}$。考虑 $F_{\nu,\ \boldsymbol{\alpha}}(\tau)$，其中 $\nu = 0,\ 1$，其定义见(3.7)。那么，$F_{\nu,\ \boldsymbol{\beta}}(\tau) - F_{\nu,\ \boldsymbol{\alpha}}(\tau)$属于一维格点和 $\{\tilde{\theta}^1[\kappa, a], \tilde{\theta}^0[\kappa, a] \mid \kappa, a \in \mathbb{Q}\}$ 的整数线性张成，差一个有限多项式 $p(\tau) \in q^\Delta\mathbb{Z}[q]$，其中

$$\tilde{\theta}^0[\kappa, a](\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n+a| q^{\kappa(n+a)^2}, \qquad \tilde{\theta}^1[\kappa, a](\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n+a) q^{\kappa(n+a)^2}.$$

注意，$\tilde{\theta}^0$ 和 $\tilde{\theta}^1$ 本身是权重为 1/2 分别为 3/2 的 θ 函数的艾希勒积分，差一个有限多项式。见（1.7）。证明见附录B.2。利用上述引理将向量平移整数后，在下一节中我们将考虑满足 $\boldsymbol{\mu} =$（μ_1，μ_2）的向量 $0 \leq \mu_1,\ \mu_2 \leq 1$。

3.2 径向极限

本小节旨在研究从上半平面 $\tau \to \frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$趋近时 $\mathbb{H}$广义 A_2假 theta 函数 $F_{(\varrho)}(\tau)$的径向极限。为此，我们将使用欧拉–麦克劳林求和公式，这一策略也见于 [11]。首先回顾以下渐近展开公式，其源自 [69][5]。

对于 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$，其中 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$，且 $F\colon \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑且快速衰减的 C^∞ 函数，当 $t \to 0^+$ 时，F 的渐近展开为 [69]

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^2} F((\mathbf{n}+\boldsymbol{\mu})t) \sim \frac{\mathcal{I}_F}{t^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^{n-2}}{n!} \int_0^\infty \mathrm{d}x \big(B_n(\mu_1) F^{(n-1,0)}(0,x) + B_n(\mu_2) F^{(0,n-1)}(x,0)\big) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \frac{t^{n_1+n_2-2}}{n_1! n_2!} B_{n_1}(\mu_1) B_{n_2}(\mu_2) F^{(n_1-1,n_2-1)}(0,0), \tag{3.14}$$

其中 $\sim$ 表示两边对任意 $N \in \mathbb{N}$ 而言相差至多 $O(t^N)$ 项，而 $\mathcal{I}_F$ 由下式给出

$$\mathcal{I}_F := \int_0^\infty \int_0^\infty F(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

在上述表达式中，$B_m(x)$是伯努利多项式，其生成函数为 $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^\infty B_n(x)\frac{t^n}{n!}$。这些多项式由生成函数直接导出的一个关键特征是其反射性质

$$B_m(x) = (-1)^m B_m(1-x). \tag{3.15}$$

为了利用（3.14）推导径向极限，我们将进一步改写广义假 theta 函数（3.7），适用于 $\mathrm{Re}\,\tau \in \mathbb{Q}$：对于互素整数 h，k 以及 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，当 $\nu = 0, 1$

$$F_\nu^{(\varrho)}\big(\tfrac{h}{k} + \tfrac{it}{2\pi}\big) = \big(\sqrt{t}\big)^{-\nu} \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}} \eta_\nu(\boldsymbol{\mu}) \sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\big(\tfrac{h}{k} Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\big) \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\frac{1}{k\bar{m}}(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})+\mathbb{Z}^2 \\ k\bar{m}\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}} \mathcal{F}_\nu\big(k\bar{m}\sqrt{t}\boldsymbol{n}\big), \tag{3.16}$$

其中我们定义

$$\delta := (h, m), \qquad \bar{m} := \frac{m}{\delta}, \tag{3.17}$$

且 $\mathcal{F}_\nu(\boldsymbol{x})$ 的定义如（3.4）所示。为说明关于 $\boldsymbol{\ell}$ 的求和是良定义的，注意到对所有 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}$，$m\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^2$。为了推导 $F_{(\varrho)\nu}$ 的渐近展开（见命题 3.5），我们先证明以下引理。

引理 3。 **3.** 设 $\mathcal{S}$，η_ν和 $\bar{m}$ 如 (3.11)、(3.12) 和 (3.17)所示。则对于 $\nu = 0$,1

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}} \eta_\nu(\boldsymbol{\mu}) \sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\big(\tfrac{h}{k} Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\big) = 0.$$

请参见附录 B.3 以了解证明。

[5]要正确应用 [69] 中的公式，重要的是本文中记作 ϱ 的平移向量必须满足 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$。

引理 3.4. 给定 $w \in W_+$

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\{\boldsymbol{\mu}_w^{(1)},\boldsymbol{\mu}_w^{(2)}\}} \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} B_n\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q\left(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu}\right)\right) = 0$$

对于任意奇正整数 n。

证明见附录B.4 。

在建立上述引理之后，利用方程（3.14）和（3.16），我们现在可以证明以下渐近公式。

命题 3.5. 对于 $\nu = 0,1$，$\frac{h}{k}$ 附近的渐近极限为

$$\begin{aligned} F_\nu^{(\varrho)}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right) \sim & -2\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu}) \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right)\left(\sum_{\substack{n>1\\ n\equiv\nu(2)}} \frac{(k\bar{m})^{n-2}\,t^{\frac{n-2-\nu}{2}}}{n!}\right. \\ & \times \int_0^\infty \mathrm{d}x \left(B_n\left(\frac{\ell_2+\mu_2}{k\bar{m}}\right)\mathcal{F}_\nu^{(0,n-1)}(x,0) + B_n\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right)\right. \\ & \left.\left.\times\, \mathcal{F}_\nu^{(n-1,0)}(0,x)\right) - \sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2\\ n_1\equiv n_2+\nu(\mathrm{mod}\,2)}} \frac{(k\bar{m})^{n_1+n_2-2}\,t^{\frac{n_1+n_2-2-\nu}{2}}}{n_1!n_2!}\right. \\ & \left.\times\, B_{n_1}\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right)B_{n_2}\left(\frac{\ell_2+\mu_2}{k\bar{m}}\right)\mathcal{F}_\nu^{(n_1-1,n_2-1)}(\mathbf{0})\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

证明。在（3.16）中，取 $\boldsymbol{\ell}$ 的求和范围为 $0 \le \ell_1,\ \ell_2 < k\bar{m}$，并将欧拉–麦克劳林求和公式（3.14）应用于 $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^2} F\left(\left(\mathbf{n}+\boldsymbol{\mu}'\right)t'\right)$，其中

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu}}{k\bar{m}}, \qquad t' = k\bar{m}\sqrt{t}, \qquad F(\boldsymbol{x}) = \mathcal{F}_\nu(\boldsymbol{x}).$$

首先请注意，潜在发散的 $\boldsymbol{\ell}$-和 $\boldsymbol{\mu}$-无关项 $\mathcal{I}_F/t^2$ 实际上因引理3.3而消失。其次，注意伯努利多项式的反射性质（3.15）导出了恒等式

$$\begin{aligned} &\sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right)B_n\left(\frac{\ell_i+\mu_i}{k\bar{m}}\right) \\ &\quad = (-1)^n \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}-\boldsymbol{\mu})\right)B_n\left(\frac{\ell_i+1-\mu_i}{k\bar{m}}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

对于 $i = 1,2$ 和

$$\begin{aligned} &\sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right)B_{n_1}\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right)B_{n_2}\left(\frac{\ell_2+\mu_2}{k\bar{m}}\right) \\ &\quad = (-1)^{n_1+n_2} \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}-\boldsymbol{\mu})\right) \\ &\qquad \times B_{n_1}\left(\frac{\ell_1+1-\mu_1}{k\bar{m}}\right)B_{n_2}\left(\frac{\ell_2+1-\mu_2}{k\bar{m}}\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中，我们将关于 $\boldsymbol{\ell}$ 的求和移至 $-\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}(k\bar{m}-1)$中。由（3.12）和（3.13），由于 $\boldsymbol{\mu}\tilde{}$和 $\bar{\boldsymbol{\mu}}:=\mathbf{1}-\boldsymbol{\mu}$ 在 $\mathcal{S}$ 中成对出现，我们可以将求和折叠为关于 $\mathcal{S}$的求和。此外，

来自 $\eta_\nu(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = (-1)^\nu \eta_\nu(\boldsymbol{\mu})$，上述恒等式意味着，除非满足 $n_1 + n_2 \equiv \nu(2)$，(3.18) 第二行中的各项才可能非零。同样，($n \equiv \nu 2$) 时， $n = 1$ 在 $\nu = 1$ 时的潜在发散项为零。为证明这一点，我们先注意到 $\mathcal{F}_1^{(0,0)}(x,\ 0) = \mathcal{F}_1(x,\ 0) = 0$ 因此我们只需证明

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x \mathcal{F}_1(0,x) \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\bar{\mathcal{S}}} \eta_\nu(\boldsymbol{\mu}) \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right) B_1\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right) \\ = \int_0^\infty \mathrm{d}x \mathcal{F}_1(0,x) \sum_{w\in W_+} \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\{\boldsymbol{\mu}_w^{(1)},\boldsymbol{\mu}_w^{(2)}\}} \sum_{0\le\ell_1,\ell_2<k\bar{m}} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right) B_1\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right) = 0,\end{aligned}$$

由引理可知3.4。 ■

3.3 伴随函数

在确立了函数 $F_{(\varrho)\nu}$ 在 $\tau \to \frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$ 极限下的渐近展开后，本小节将证明，某些由广义互补误差函数构成的函数 $\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}(\tau)$ 是它们的伴随函数，即它们具有相容的渐近行为。

$\widehat{\ }$ $\check{}$ **定义 3.6**。如果两个定义在上半平面上的函数 F 和 F 在有理数附近的渐近展开满足以下条件，我们就称它们互为伴随函数。

$$\widehat{F}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right) \sim \sum_{m\ge0} a_{h,k}(m)t^m,$$

and

$$\check{F}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right) \sim \sum_{m\ge0} a_{-h,k}(m)(-t)^m,$$

对于所有满足 $k > 0$ 的互素整数 h、 k 。

重要的是，给定上半平面上的一个函数，其伴随函数绝非唯一；伴随函数的定义不受添加在所有有理数处都消失的函数的影响。

确立 广义 A_2 假 theta 函数的伴随函数时，我们对 $\nu = 0,$ 定义 1

$$\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}(\tau) := \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}} \eta_\nu(\boldsymbol{\mu}) \left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2} g_\nu(n_1,n_2) + \sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2} g_\nu(-n_1,n_2) \right), \tag{3.21}$$

其中

$$\begin{aligned} g_\nu(n_1,n_2) := q^{-Q(\boldsymbol{n})} \Big(& n_2^\nu M_2^*\left(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\right) \\ & + \delta_{\nu,1}\frac{\mathrm{e}^{-\pi v(3n_1+2n_2)^2}}{2\pi\sqrt{v}} M^*\left(\sqrt{3v}n_1\right) \Big) \end{aligned} \tag{3.22}$$

且 v:=Im τ，并证明，将 $F_{(\varrho)\nu}$的渐近展开写作

$$F_\nu^{(\varrho)}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right) \sim \sum_{m\ge0} a_{h,k}^{(\nu)}(m)t^m,$$

我们有如下命题。

命题 3.7。 $\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}(\tau)$ 如方程 (3.21) 是 F 的伴随量$_{(\varrho)\nu}(\tau)$，其在极限 $\tau=\frac{h}{k}+\mathrm{i}_{2\pi}^{t}$, $t\to 0^+$ 下的渐近展开满足

$$\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right)\sim\sum_{m\geq 0}a_{-h,k}^{(\nu)}(m)\,(-t)^m.$$

为证明该命题，定义以下函数并证明引理 3.8 中的恒等式将很有帮助。对于 $\nu=0,\ 1$，令函数 $\mathcal{G}_\nu,\ \tilde{\mathcal{G}}_\nu\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{G}_\nu(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^\nu M_2^*\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}(2x_1+x_2)}{\sqrt{2\pi}},\frac{x_2}{\sqrt{2\pi}}\right)\mathrm{e}^{Q(\boldsymbol{x})}=\tilde{\mathcal{G}}_\nu(-x_1,x_2),$$

其中，函数 $M_2,\ M_2^*$ 分别在方程（A.3）和（A.4）中定义，遵循[4]。以下与 $\mathcal{F}_\nu$ 的关系已在 [11, 第 7]节中建立。

引理 3.8。 对于 $\nu=0,\ 1$ 以下恒等式对 $n\in\mathbb{N}$, $n\equiv\nu+1\,(2)$成立：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\mathcal{F}_\nu^{(0,n)}(x,0)&=(-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\int_0^\infty \mathrm{d}x\big(\mathcal{G}_\nu^{(0,n)}+\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(0,n)}\big)(x,0),\\ \int_0^\infty \mathrm{d}x\mathcal{F}_\nu^{(n,0)}(0,x)&=(-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\int_0^\infty \mathrm{d}x\big(\mathcal{G}_\nu^{(n,0)}+(-1)^\nu\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(n,0)}\big)(0,x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathrm{e}^{\frac{3y^2}{4}}\right]_{y=0}\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{F}_\nu^{(\boldsymbol{n})}(\mathbf{0})=(-1)^{\lfloor\frac{n_1+n_2}{2}\rfloor}\big(\mathcal{G}_\nu^{(\boldsymbol{n})}(\mathbf{0})+(-1)^{n_1+1}\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(\boldsymbol{n})}(\mathbf{0})\big)$$

对于 $n_1+n_2\equiv\nu\,(2)$。

现在我们可以证明命题 3.7。如前所述，我们可以将 $\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}(\tau)$ 在 $\mathrm{Re}\,\tau\in\mathbb{Q}$ 时重新表示为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right)=\big(\sqrt{t}\big)^{-\nu}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2}\Bigg(&\mathrm{e}\left(-\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right)\\ &\times\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\frac{1}{k\bar{m}}(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})+\mathbb{Z}^2\\ k\bar{m}\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}}\mathcal{G}'_\nu\left(k\bar{m}\sqrt{t}\boldsymbol{n}\right)+\mathrm{e}\left(-\frac{h}{k}Q(-1+\mu_1-\ell_1,\mu_2+\ell_2)\right)\\ &\times\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\frac{1}{k\bar{m}}(\boldsymbol{\ell}+(1-\mu_1,\mu_2))+\mathbb{Z}^2\\ k\bar{m}\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}}\tilde{\mathcal{G}}'_\nu\big(k\bar{m}\sqrt{t}\boldsymbol{n}\big)\Bigg),\end{aligned}\tag{3.23}$$

其中

$$\mathcal{G}'_\nu(x_1,x_2)=\mathcal{G}_\nu(x_1,x_2)+\delta_{\nu,1}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\frac{3}{2}x_1^2+3x_1x_2+x_2^2)}M^*\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}}x_1\right).\tag{3.24}$$

将（3.14）应用于（3.23），由引理 3.3 可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}\left(\frac{h}{k}+\frac{\mathrm{i}t}{2\pi}\right)\sim 2\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu})\sum_{0\leq\ell_1,\ell_2<k\bar{m}}&\mathrm{e}\left(-\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\mu})\right)\Bigg(-\sum_{\substack{n>1\\ n\equiv\nu(2)}}\frac{(k\bar{m})^{n-2}\,t^{\frac{n-2-\nu}{2}}}{n!}\\ &\times\left[B_n\left(\frac{\ell_2+\mu_2}{k\bar{m}}\right)\int_0^\infty\mathrm{d}x\big(\mathcal{G}_\nu^{(0,n-1)}+\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(0,n-1)}\big)(x,0)\right.\end{aligned}$$

$$+ B_n\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right)\int_0^\infty \mathrm{d}x\big(\mathcal{G}_\nu^{(n-1,0)}+(-1)^\nu\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(n-1,0)}\big)(0,x)\Big]$$
$$+ \sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2\\ n_1\equiv n_2+\nu(\mathrm{mod}2)}} \frac{(k\bar{m})^{n_1+n_2-2}\,t^{\frac{n_1+n_2-2-\nu}{2}}}{n_1!n_2!}B_{n_1}\left(\frac{\ell_1+\mu_1}{k\bar{m}}\right)$$
$$\times B_{n_2}\left(\frac{\ell_2+\mu_2}{k\bar{m}}\right)\big(\mathcal{G}_\nu^{(n_1-1,n_2-1)}-(-1)^{n_1+1}\tilde{\mathcal{G}}_\nu^{(n_1-1,n_2-1)}\big)(\mathbf{0})\big) \quad (3.25)$$

对 $\nu=0$成立，其中我们还使用了(3.19)–(3.20)来确定来自 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\mu}}$的贡献。对于 $\nu=1$，需要将(3.24)中的附加项考虑在内。正如 [11, 第 7], 节中详细说明的那样，这些项对渐近展开的贡献由于引理 3.4而消失。

同样，结合命题 3.5 和引理 3.8，并再次运用引理 3.4，将其与（3.25）进行比较可知，命题3.7成立。

3.4 艾希勒积分

在本小节中，我们将广义 A_2 假 theta 函数 $F^{(\rho)}$的伴随函数与某些艾希勒积分联系起来。更确切地说，我们将证明，命题 $\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}$3.7 中的伴随函数是命题 3.10所给出的艾希勒积分，至多相差引理 3.9中指定的一维积分。

为证明这一点，对于 $\nu=0$，1，我们首先定义如下函数

$$\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}(\tau):=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu})\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}q^{-Q(\mathbf{n})}\left[\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z}\right)^\nu\right.$$
$$\left.\times\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu n_2 z}M_2\left(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}\left(n_2-\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{v}\right)\right)\right)\right]_{z=0} \quad (3.26)$$

与伴随函数密切相关 $\mathbb{E}_\nu^{*(\varrho)}$。更准确地说，它们的差可用一维误差函数表示（见（A.1））， 如下:

引理 3.9。

$$\mathbb{E}_\nu^{(\rho)}(\tau)=\mathbb{E}_\nu^{*(\rho)}(\tau)+\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu})X_\nu(\boldsymbol{\mu}),$$

其中 X_ν 由下式给出

$$X_0(\boldsymbol{\mu})=\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}+\sum_{\boldsymbol{n}\in(1,1)-\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(\mu_1,1-\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}\right)$$
$$\times\big(\delta_{n_1,0}(1-\delta_{n_2,0})M\big(2\sqrt{v}n_2\big)+\delta_{n_2,0}(1-\delta_{n_1,0})M\big(2\sqrt{3v}n_1\big)-\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,0}\big)q^{-Q(\boldsymbol{n})}$$
$$=\begin{cases}(-1)^{\mu_1}\big(\sum_{k=\mu_2+\mathbb{N}_0}-\sum_{k=1-\mu_2+\mathbb{N}_0}\big)M\big(2\sqrt{v}k\big)q^{-k^2}, & \mu_1\in\{0,1\}\not\ni\mu_2,\\ (-1)^{\mu_2}\big(\sum_{k=\mu_1+\mathbb{N}_0}-\sum_{k=1-\mu_1+\mathbb{N}_0}\big)M\big(2\sqrt{3v}k\big)q^{-3k^2}, & \mu_1\notin\{0,1\}\ni\mu_2,\\ (-1)^{\mu_1+\mu_2+1}, & \mu_1\in\{0,1\}\ni\mu_2,\\ 0, & \mu_1\notin\{0,1\}\not\ni\mu_2\end{cases}$$

适用于 $\nu=0$ 和

$$X_1(\boldsymbol{\mu})=\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(1,1)-\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)-\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}+\sum_{\boldsymbol{n}\in(\mu_1,1-\mu_2)-\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}\right)$$

$$\times \delta_{n_1,0}\left(n_2 M\left(2\sqrt{v}n_2\right)+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\mathrm{e}^{-4\pi n_2^2 v}\right)q^{-n_2^2}$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\mu_1}\left(\sum_{k\in\mu_2+\mathbb{N}_0^2}+\sum_{k\in 1-\mu_2+\mathbb{N}_0^2}\right)\\ \quad\times\left(kM\left(2\sqrt{v}k\right)+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\mathrm{e}^{-4\pi k^2 v}\right)q^{-k^2}, & \mu_1\in\{0,1\},\\ 0, & \mu_1\notin\{0,1\}\end{cases}$$

适用于 $\nu=1$。

证明见附录B.5。注意，在第3.3节中，我们使用了 $\mathbb{E}_\nu^{*(\rho)}$来应用欧拉–麦克劳林公式，因为 $g_\nu(n_1,\ n_2)$ 在（3.22）中作为 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 关于（n_1，n_2）的函数是连续的，这与 $\mathbb{E}_\nu^{(\rho)}$中的对应函数不同；因此，这两个函数的差异恰恰来自 n_1 和 n_2 至少有一个为零的情形。此外，由 [73]

$$M(x\sqrt{v})=\mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{2}}q^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}x^2 w}{2}}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w+\tau)}}\mathrm{d}w$$

我们看到 $X_\nu(\boldsymbol{\mu})$ 可以写成秩一 θ 函数的非全纯艾希勒积分（1.6）的线性组合，因此

$$\mathbb{E}_\nu^{(\rho)}=\mathbb{E}_\nu^{*(\rho)}+z_{1\mathrm{d}}$$

采用（1.12）中的记号。

最后，通过仔细重写秩二广义互补误差函数中的积分 M_2，这些积分出现在 $\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}$的定义中，我们得到 companion 与艾希勒积分之间的如下关系，详见附录B.6。

命题 3.10。

$$\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}(\tau)=\sum_{w\in W^+}\mathbb{E}_{\nu,w}^{(\varrho)}(\tau),$$

其中

$$\mathbb{E}_{\nu,w}^{(\varrho)}(\tau):=\frac{\sqrt{3}}{4\pi^\nu}\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\Theta_{\nu,w}^{(\varrho)}(\mathbf{z})}{(-\mathrm{i}(z_1+\tau))^{1/2}(-\mathrm{i}(z_2+\tau))^{\nu+1/2}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1 \tag{3.27}$$

and

$$\Theta_{\nu,w}^{(\varrho)}(\mathbf{z})=(m)^{2\nu-3}\left(3D\Delta w(\vec{s})\right)^{1-\nu}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m\delta+\langle\vec{\rho},w(\vec{\sigma})\rangle}\left(\frac{z_1}{m}\right)\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\langle\Delta\vec{\omega},w(\vec{\sigma})\rangle}\left(\frac{3z_2}{m}\right) \tag{3.28}$$

可表示为一维格的两个 θ 函数乘积之和 $s.$

结合引理 3.9和恒等式 (A.2)，我们证明了广义 A_2 假θ函数的伴随函数可用秩为二和秩为一的 θ 函数的艾希勒积分表示。

3.5 量子模性

本小节回顾上一小节讨论的艾希勒积分与量子模形式之间的关系。

为了定义量子模形式，我们首先回顾斜杠算子的熟悉定义，ˆ作用于紧化上半平面 $\mathbb{H}:=\mathbb{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{\mathrm{i}\infty\}$ 上的（向量值）函数。

给定 $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 和 n维乘子 χ，对应于 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，即群同态 $\Gamma \to GL_n(\mathbb{C})$，并且对于每个 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$，我们定义斜杠算子 $|_{\chi,\, k}\gamma$ 作用于 $f = (f_r) : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^n$ 的方式如下：

$$f|_{k,\chi}\gamma(\tau) := f(\gamma\tau)\chi(\gamma)(c\tau + d)^{-k},$$

其中我们照常记作 $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$。

定义 3.11（实解析向量值量子模形式）。函数 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^n$，若对每个 $\gamma \in \Gamma$，向量值函数、余循环[6]，则称其为权重为 $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$、乘子为 χ、对应于 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的（向量值）量子模形式。

$$h_\gamma(\tau) := f(\tau) - f|_{k,\chi}\gamma(\tau)$$

可延拓至 $\mathbb{R}$ 的一个开子集，并且在该处为实解析函数。我们将此类形式构成的向量空间记为 $Q_k(\Gamma, \chi)$。

定义 3.12（向量值高深度量子模形式，参见 [12]）。函数$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^n$ 若对每个 $\gamma \in \Gamma$，称其为深度为 $N \in \mathbb{N}$、权重为 $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$、乘子为 χ、对应于 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2()$ 的量子模形式。

$$h_\gamma := f - f|_{k,\chi}\gamma \in \bigoplus_j Q_{k_j}^{N_j}(\Gamma, \chi_j)\mathcal{O}(R),$$

其中 j遍历一个有限集合，$k_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$、$N_j \in \mathbb{N}$满足 $\max(N_j) = N - 1$，χ_j为乘子，$\mathcal{O}(R)$ 是 $R \subset \mathbb{R}$ 上的实解析函数空间，其中包含 $\mathbb{R}$的一个开子集。我们还记 $Q_k^1(\Gamma, \chi) = Q_k(\Gamma, \chi)$，$Q_k^0(\Gamma, \chi) = 1$，并且 $Q_k^N(\Gamma, \chi)$ 表示权重为 k、深度为 N、具有 n 维乘子 χ 的 Γ上的量子模形式空间。

艾希勒积分与量子模形式

众所周知，（全纯和非全纯）艾希勒积分提供了量子模形式的例子。我们定义下面两个向量值函数

$$f^*(\tau) := \int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w \frac{\overline{f(-\bar{w})}}{(-\mathrm{i}(w+\tau))^{2-k}}, \qquad r_{f,\frac{d}{c}}(x) := \int_{\frac{d}{c}}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w \frac{\overline{f(-\bar{w})}}{(-\mathrm{i}(w+x))^{2-k}}, \tag{3.29}$$

对于 f 一个具有乘子 χ 的向量值尖点形式，以及 $\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$。我们称 f^* 为尖点形式 f的非全纯艾希勒积分。容易验证，$r_{f,\,\frac{d}{c}}$是 $\mathbb{R}$上的实解析函数，它刻画了 f^*的模性误差：

$$(f^* - f^*|_{2-k,\bar{\chi}}\gamma)(\tau) = r_{f,\frac{d}{c}}(\tau)$$

对于 $\gamma \in \Gamma$，其中 $\bar{\chi}$ 是共轭乘子 $\bar{\chi}(\gamma) = \chi(\gamma)$。因此，我们有 $f^* \in Q_{2-k}(\Gamma, \bar{\chi})$。类似地，对于 $f_i\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{n_i}$，$i = 1, 2$ 一对权为 k_i、乘子系统为 χ_i 的向量值尖点形式（或当权为 $1/2$ 时的模形式），我们定义如下的矩阵值（取值于 $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$）函数：

$$(f_1, f_2)^*(\tau) := \int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w_1 \int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w_2 \frac{\overline{f_1(-\bar{w}_1) f_2(-\bar{w}_2)}}{(-\mathrm{i}(w_1+\tau))^{2-k_1}(-\mathrm{i}(w_2+\tau))^{2-k_2}} \tag{3.30}$$

[6]“余循环”这一术语源于通过艾希勒–志村同构 [39, 66] 将 $h_\gamma(\tau)$ 解释为艾希勒上同调。

and

$$r_{f_1,f_2,\frac{d}{c}}(x) := \int_{\frac{d}{c}}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}w_1 \int_{w_1}^{\frac{d}{c}} \mathrm{d}w_2 \, \frac{\overline{f_1(-\bar{w}_1)f_2(-\bar{w}_2)}}{(-\mathrm{i}(w_1+x))^{2-k_1}(-\mathrm{i}(w_2+x))^{2-k_2}}.$$

函数 $(f_1, f_2)^*$ 通常被称为非全纯双重艾希勒积分，或更一般地称为迭代非全纯艾希勒积分。

可以证明，对于 $\gamma \in \Gamma$,

$$((f_1,f_2)^* - (f_1,f_2)^*|_{4-k_1-k_2,\bar{\chi}_1,\bar{\chi}_2}\gamma)(\tau) = r_{f_1,f_2,\frac{d}{c}}(\tau) + I_{f_1}(\tau) r_{f_2,\frac{d}{c}}(\tau),$$

其中斜杠算子对各分量的作用方式如下。记 $I_{i,\,j} := (f_{1,\,i},\ f_{2,\,j})^*$ 为向量值模形式 f_1 和 f_2各分量的非全纯双重艾希勒积分。于是

$$(I|_{k,\bar{\chi}_1,\bar{\chi}_2}\gamma)_{i,j}(\tau) := (c\tau+d)^{-k} \sum_{i'=1}^{n_1}\sum_{j'=1}^{n_2} I_{i',j'}(\gamma\tau)\overline{(\chi_1(\gamma))_{i',i}(\chi_2(\gamma))_{j',j}}.$$

我们有 $r_{f_1,\,f_2,\,\frac{d}{c}}(\tau) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\})$，且 $r_{f_1,\,f_2,\,\frac{d}{c}}(\tau) \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$，若二者 f_i均为尖点形式 [11]。由上可知，$(f_1,\ f_2)^*$是一个取值于 $\mathbb{C}^{n_1\times n_2}$ 且乘子为 $\bar{\chi}$ 的向量值深度二量子模形式，其乘子由下式给出

$$(\bar{\chi}(\gamma))_{(i,j),(i',j')} = \overline{(\chi_1(\gamma))_{i',i}(\chi_2(\gamma))_{j',j}}.$$

在这篇 论文中，我们主要会遇到具有实系数的模形式，它们满足

$$\overline{f(-\bar{\tau})} = f(\tau),$$

并且我们经常会利用这一性质，直接在被积函数中写作 $f(\tau)$。

上述双重艾希勒积分的量子模性质 $(f_1,\ f_2)^*$，结合命题 $F^{(\rho)}$ 3.7 中给出的伴随式形式、引理 3.9 中将其重写为一维部分的形式，以及命题 3.10 中所示的与双重艾希勒积分的关系，导出以下结果。

定理 3.13。 在 A_2 中定义的广义假 *theta* 函数 (3.5) 是，除整体乘以 q 的有理数次幂以及可能加上 q 和 q^{-1}中的有限多项式外，为深度二量子模形式之和。

4 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}$ 的性质

本节将转向我们研究的主要对象：$\widehat{Z}^G_{\vec{b}}(M_3)$，针对 $G = \mathrm{SU}(3)$ 以及最简单且有趣的 M_3选择，即具有三个例外纤维的负 Seifert 流形。在第4.1节中，我们将说明如何以广义 A_2 假 theta 函数 $F^{(\rho)}$ 为构件将它们组装起来。结合上一节确立的后者量子模性的结果，我们得到了定理1.2 和 1.13。虽然我们尚未证明猜想1.3，但通过在第5节研究大量例子，我们为该猜想提供了证据。

4.1 拓扑学

配链三维流形 M_3 可定义为与其配丛图相关联的圆盘丛经拼接后所得空间的边界。配丛图是一种加权图（V， E， a），这里取平面树形图且不含环。权重 $a(v)$ 表示与顶点 $v \in V$对应的圆盘丛的欧拉数。当两个顶点 v 和 v'之间有边相连时，就进行拼接。加权图（V， E， a）的数据等价于图（V， E， a）的邻接矩阵或配链矩阵 M的数据，其元素为

$$M_{v,v'} = \begin{cases} a(v) & \text{if} \quad v = v', \\ 1 & \text{if} \quad v \neq v', v \text{ and } v' \text{ are connected}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.1}$$

塞弗特流形是此类配链三维流形的例子。一个塞弗特流形

$$M_3 = \left(b; \left\{\frac{q_i}{p_i}\right\}_{i=1}^{n}\right)$$

具有塞弗特不变量 $(q_1, p_1) \ldots, (q_n, p_n)$的流形由一个具有唯一连接顶点 v_0 的星形配丛图指定，从该顶点延伸出 n 条支链，它们表示 M_3的例外纤维。如前所述，根据 $M^{-1}_{v_0,v_0}$的符号，我们称 M_3 为负/正塞弗特流形。在第 i条支链上，顶点 $v_k^{(i)}$ 和相应的权重 $a_k^{(i)}$ 由连分数展开给出

$$\frac{q_i}{p_i} = -\cfrac{1}{a_1^{(i)} - \cfrac{1}{a_2^{(i)} - \cfrac{1}{a_3^{(i)} - \cdots}}}, \tag{4.2}$$

而 $a(v_0) = b$ 且轨形欧拉数 $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$ 由下式给出

$$b = \mathrm{e} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{p_i}.$$

查看 [24, 附录 A]以了解Seifert 数据与配丛图之间更多有用的关系。

对于这样的流形，定义 D为满足以下条件的最小正整数$DM^{-1}_{v_0,\,v} \in \mathbb{Z}$对于所有 $v \in V$，并令$m = D^2 \left|M^{-1}_{v_0,\,v_0}\right|$。[7]布里斯科恩球面 $M_3 = \Sigma(p_1,\ p_2,\ p_3)$是这方面的例子，它们具有平凡的整数同调，并由三个互素整数 p_1， p_2， p_3通过定义方程确定

$$\Sigma(p_1, p_2, p_3) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3} = 0\right\} \cap S^5. \tag{4.3}$$

指定配丛图的 Seifert 数据与整数 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 之间存在如下关系

$$b + \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{p_i} = -\frac{1}{p_1 p_2 p_3}.$$

对于满足 $|\det(M)| = 1$ 的布里斯科恩球面，我们有 $D = 1$ 和 $m = \left|M^{-1}_{v_0,\,v_0}\right|$。

[7]惯例比较： m 本文中的记法对应于 mD 中的 [24]。

对于弱负定柱面三维流形 M_3，我们按以下方式定义任意 ADE 规范群 G 的 $\widehat{Z}^G$-不变量，其中我们主要沿用 [24]中的相同记号。特别地，对于给定的单边李群 G 和配丛图（V， E， a），我们令 Λ 为根格，并且

$$\Gamma_{M,G} := M\mathbb{Z}^{\otimes|Z|} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda.$$

对于 $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\otimes|Z|} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$，我们将其范数定义为：在沿顶点的方向上由柱面矩阵的逆矩阵给出，而在根格方向上由卡当矩阵给出：

$$||\vec{x}||^2 := \sum_{v,v'\in V} M^{-1}_{v,v'}\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{v'}\rangle.$$

定义 4.1（高秩 Z 不变量 [24, 29, 64]）。设 G 为单边李群，M_3 为配链矩阵为 M的弱负配链三维流形。设 b 为该流形上的广义 Spin^{c}结构，其表示为

$$\vec{\underline{b}} \in \left(\mathbb{Z}^{|V|} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda + \vec{\underline{b}}_0\right)/\Gamma_{M,G}, \tag{4.4}$$

其中$\vec{b}_{0,v} = \deg(v)\vec{\rho}$.

我们定义

$$\widehat{Z}^G_{\vec{\underline{b}}}(M_3;\tau) := C^G(q)\int_{\mathcal{C}} d\vec{\underline{\xi}} \left(\prod_{v\in V}\Delta(\vec{\xi}_v)^{2-\deg v}\right) \times \sum_{w\in W}\sum_{\vec{\underline{\ell}}\in\Gamma_{M,G}+w(\vec{\underline{b}})} q^{-\frac{1}{2}||\vec{\underline{\ell}}||^2}\left(\prod_{v'\in V} \mathrm{e}^{\langle \vec{\ell}_{v'},\vec{\xi}_{v'}\rangle}\right), \tag{4.5}$$

其中，W表示 G 的根格的韦伊群，$w(\vec{b})$ 表示对角作用 $w(\vec{\underline{b}}) = (w(\vec{b}_v), w(\vec{b}_{v'}), \dots)$，积分测度为

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{\underline{\xi}} := \text{p.v.}\int \prod_{v\in V}\prod_{i=1}^{\text{rank}G}\frac{\mathrm{d}z_{i,v}}{2\pi \mathrm{i} z_{i,v}},$$

其中，$\mathcal{C}$ 由$z_{i,v}$平面内唯一圆周上的柯西主值积分给出。令 π_M 为 M 的正特征值个数，σ_M 为 M的符号差，根据 [64],

$$C^G(q) = (-1)^{|\Phi_+|\pi_M} q^{\frac{3\sigma_M - \mathrm{Tr}M}{2}|\vec{\rho}|^2},$$

其中，Φ_+ 是 G 的一组正根，$\vec{\rho}$ 是 G的一个韦伊向量。最后，Δ是韦伊行列式。

如 [24], 中所示，Z三条例外纤维的负 Seifert 流形的 -不变量以及 G =SU(3) 可以表示为广义 A_2假 theta 函数（3.5）的组合，具体如下。给定 $\vec{b}$以及 $\hat{}$ 的一个选取$w = (w_1, w_2, w_3) \in W^{\otimes 3}$，以下两个陈述之一成立。要么不存在任何根向量 $\vec{}$使得 ℓ_0

$$\vec{\underline{b}} - \left(\vec{\ell}_0, w_1(\vec{\rho}), w_2(\vec{\rho}), w_3(\vec{\rho})\right) \in M\mathbb{Z}^{|V|} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \tag{4.6}$$

或者存在唯一的 $\vec{k}_{\hat{w}} \in \Lambda/D\Lambda$，使得当且仅当 $\vec{k}_{\hat{w}} = \vec{\ell_0}/D\Lambda$ 时，(4.6) 成立。

现在，令 $\mathcal{W}_{\vec{b}} \subseteq W^{\otimes 3}$ 为由所有使后者成立的 $\hat{w}$ 构成的子集。对于 $\hat{w} \in \mathcal{W}_{\vec{b}}$，令

$$\vec{s}_{\hat{w}} = D \sum_{v_i \in \{v_1, v_2, v_3\}} M^{-1}_{v_0, v_i} w_i(\vec{\rho}).$$

上述内容定义了 $\vec{\sigma}_{\hat{w}} \in \Lambda / m\Lambda$ via

$$\vec{s}_{\hat{w}} = \vec{\sigma}_{\hat{w}} + \frac{m}{D} \vec{k}_{\hat{w}}.$$

$\widehat{\ }$ Z-不变量随后给出为

$$\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3; \tau) = C(q) \sum_{\hat{w} \in \mathcal{W}_{\vec{b}}} (-1)^{\ell(\hat{w})} F^{(\rho_{\hat{w}})}(\tau), \tag{4.7}$$

其中 $\ell(\hat{w}) := \sum_{i=1}^{3} \ell(w_i)$ 是 Weyl 长度总和，$\rho_{\hat{w}} = \left(\vec{\sigma}_{\hat{w}},\ \vec{k}_{\hat{w}},\ m,\ D\right)$ 指定函数 $F_{(\rho_{\hat{w}})}(\tau)$ 来自公式（3.5），以及

$$C(q) = (-1)^{\pi_M} q^{3\sigma_M - \mathrm{Tr} M + \delta_M}, \qquad \delta_M = \sum_{v \in V_1} \left(\frac{\left(M^{-1}_{v_0, v}\right)^2}{M^{-1}_{v_0, v_0}} - M^{-1}_{v, v} \right),$$

其中 π_M 和 σ_M 分别表示邻接矩阵的正特征值个数和符号差 M。额外的因子 q^{δ_M} 来源于沿着对应于度数小于三的“非连接点”顶点的方向进行积分（4.5） v 。

4.2 伴随函数

本小节将汇总目前为止得到的结果，并推导具有三个例外纤维的负 Seifert M_3 流形上 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 的伴随函数形式，随后再进一步专门讨论布里斯科恩球面的情形。

结合 1) (4.7)，以广义 A_2 假 theta 函数 $\widehat{F}_{(\varrho)}$ 表示的表达式；2) 引理 3.2 和 (3.6)，将 $F^{(\varrho)}$ 分解为各分量；3) 命题 3.7，各分量的伴随函数；以及 4) 命题 3.10 和引理 3.9，伴随函数的迭代非全纯艾希勒积分表达式，最终得到如下结果。

命题 4.2。对于具有三个例外纤维的负 *Seifert* 流形 M_3，秩为二的同调块 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 的伴随函数 $\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$，除可能存在的一维部分外，由以下非全纯双重艾希勒积分给出

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3; \tau, \bar{\tau}) = z_{\mathrm{1d}} + \frac{D}{m} C(q^{-1}) \sum_{\hat{w} \in \mathcal{W}_{\vec{b}}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \sum_{\nu = 0,1} \frac{\sqrt{3}}{4\pi^{\nu}} \left(\frac{3\Delta \vec{s}_{\hat{w}}}{m} \right)^{1-\nu} \times \sum_{w \in W^+} \sum_{\delta \in \mathbb{Z}/2} \left(\vartheta'_{w, \hat{w}, \delta}, \vartheta^{1-\nu}_{w, \hat{w}, \delta} \right)^*(\tau),$$

其中，非全纯双重艾希勒积分是 θ 函数的

$$\vartheta'_{w, \hat{w}, \delta}(\tau) = \theta^1_{m, m\delta + \langle \vec{\rho}, w(\vec{\sigma}_{\hat{w}}) \rangle}(\tau), \qquad \vartheta^{1-\nu}_{w, \hat{w}, \delta}(\tau) = \theta^{1-\nu}_{m, m\delta + \langle \Delta\vec{\omega}, w(\vec{\sigma}_{\hat{w}}) \rangle}(3\tau).$$

注意，上述内容与第3.5节所讨论的非全纯双重艾希勒积分的量子模性质相结合，立即得到定理 1.2。

魏尔表示

由 $\theta^{\nu}_{m} = (\theta^{\nu}_{m,r})$ 是 $\nu = 0$ 的向量值模形式这一事实，根据第 3.5 节中的讨论，我们可以看出，除去某些一维部分后，$\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 是深度为二的向量值量子模形式分量的线性组合。接下来，我们将考察 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3)$ 与 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 的量子模性质之间的递归结构，或者等价地，考察 $\check{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3)$ 与 $\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 之间的递归结构。为此，我们需要更仔细地考察元辛群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ 的底层表示。基于这一目的，我们将引入由一个正整数 m和其精确因子群 Ex_m 的一个子群 K 所确定的特定韦伊表示，如第 1 节所述。

对这样的群 K 我们关联了 Θ_m (1.6), 将其记作 Θ^{m+K}，具体如下。首先利用以下事实：与 S-矩阵和 T-矩阵对易的 Θ_m 矩阵空间由 [22]

$$\Omega_m(n)_{r,r'} = \begin{cases} 1 & \text{if } r \equiv -r' \bmod 2n \text{ and } r \equiv r' \bmod 2m/n, \\ 0 & \text{otherwise, } r, r' \in \mathbb{Z}/2m \end{cases}$$

对于 $n|m$。注意，$\Omega_m(n)$和 $\Omega_m(n')$ 对于每一对因子 n 和 n'都可交换。例如，$\Omega(1) = \mathbf{1}_m$ 是大小为 $2m \times 2m$ 的单位矩阵。

现在定义相应的投影算子。

$$P^{\pm}_m(n) := (\mathbf{1}_m \pm \Omega_m(n))/2, \qquad n \in \mathrm{Ex}_m, \tag{4.8}$$

满足 $\left(P^{\pm}_m(n)\right)^2 = P^{\pm}_m(n)$】【。

由于在我们的应用中，我们主要关注涉及

$$\theta^1_{m,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial z} \theta_{m,r}(\tau, z)|_{z=0},$$

具有性质 $\theta^1_{m,\,r} = -\theta^1_{m,\,-r}$，或 $P^-_m(m)\theta^1_m = \theta^1_m$，从现在起我们将重点关注满足 $m \notin K$ 的子群 K，并定义投影算子

$$P^{m+K} = \left(\prod_{n \in K} P^+_m(n) \right) P^-_m(m), \tag{4.9}$$

使用 [25] 的记号。当 K 极大，即 $\mathrm{Ex}_m = K \cup (m * K)$ 时，Θ^{m+K}: $P^{m+K}\Theta_m$ $\widetilde{{}_2\,\mathbb{Z}}$ m = 在 为无平方因子时给出 SL ( ) 的不可约表示。一般而言，$\Theta^{m+K,\,\mathrm{irred}} := P^{m+K,\,\mathrm{irred}}\Theta_m$，其中 K 极大且

$$P^{m+K,\mathrm{irred}} := \left(\prod_{n \in K} P^+_m(n) \right) \left(\prod_{f^2|m} \left(\mathbf{1}_m - \frac{1}{f} \Omega_m(f) \right) \right) P^-_m(m) \tag{4.10}$$

是不可约的 [67, 68]。

利用上述内容，我们引入以下记号

$$\theta^{1,m+K}_r := \sum_{r' \in \mathbb{Z}/2m} P^{m+K}_{r,r'} \theta^1_{m,r'}, \tag{4.11}$$

将在下文中广泛使用。

接下来，我们将重点关注 M_3 这些同调球流形，以证明定理1.4。首先，我们简化命题 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3)$ 中给出的伴随函数表达式，适用于这些情形。4.2 。

引理 4.3。 对于布里斯科恩球面 $\Sigma(p_1,p_2,p_3)$，有

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau}) = z_{1\mathrm{d}} + \frac{|W|}{2m}C(q^{-1}) \sum_{\hat{w}\in W^{\otimes 3}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \times \sum_{\nu=0,1} \frac{\sqrt{3}}{4\pi^{\nu}} \left(\frac{3\Delta\vec{s}_{\hat{w}}}{m}\right)^{1-\nu} \sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2} \left(\vartheta'_{\hat{w},\delta}, \vartheta^{1-\nu}_{\hat{w},\delta}\right)^*(\tau),$$

其中，非全纯双重艾希勒积分来自 θ 函数

$$\vartheta'_{\hat{w},\delta}(\tau) = \theta^1_{m,m\delta+\langle\vec{\rho},\vec{\sigma}_{\hat{w}}\rangle}(\tau), \qquad \vartheta^{1-\nu}_{\hat{w},\delta}(\tau) = \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\langle\Delta\vec{\omega},\vec{\sigma}_{\hat{w}}\rangle}(3\tau),$$

对于 $m = p_1p_2p_3$, $\bar{p}_i = m/p_i$ 和

$$\vec{\sigma}_{\hat{w}} = \vec{s}_{\hat{w}} = -\sum_{i=1}^{3} \bar{p}_i w_i(\vec{\rho}).$$

该引理的证明见附录B.7。[8]

已知，具有三个例外纤维的布里斯科恩球面的 SU(2) 伴随对象由 [25]给出

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau}) \doteq \left(\theta^{1,m+K}_r\right)^*$$

至多相差一个整体的 q 有理数次幂（并且在 $M_3 = \Sigma$（2，3，5）的情况下加上一个关于 q^{-1} 的有限多项式），其中

$$m = p_1p_2p_3, \qquad K = \{1,\bar{p}_1,\bar{p}_2,\bar{p}_3\}, \tag{4.12}$$

以及 $r = m - \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \bar{p}_3$。对于 SU(3) 伴随对象，我们有以下非全纯双重艾希勒积分。

命题4.4。 对于布里斯科恩球面 $\Sigma(p_1,p_2,p_3)$，使用与引理 4.3和 (4.12)中的相同记号，我们有

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau,\bar{\tau}) = z_{1d} + \frac{3\sqrt{3}}{2m}C(q^{-1}) \sum_{\nu=0,1} \pi^{-\nu} \sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2} \sum_{r\in\mathcal{R}} \left(\frac{r}{m}\right)^{1-\nu} \left(\vartheta'_{r,\delta}, \vartheta^{1-\nu}_{r,\delta}\right)^*(\tau),$$

其中，非全纯双重艾希勒积分是关于 θ 函数的

$$\vartheta'_{r,\delta}(\tau) = 4\theta^{1,m+K}_{m\delta+\sum_i \bar{p}_i c_i^{(r)}}(\tau), \qquad \vartheta^{1-\nu}_{r,\delta}(\tau) = \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+r}(3\tau).$$

在上述内容中， $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}/2m$ 由

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$$

and

$$\mathcal{R}_0 = \{0\}, \qquad \mathcal{R}_1 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1\}, \qquad \mathcal{R}_2 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1+\bar{p}_2, \bar{p}_1-\bar{p}_2\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1+\bar{p}_2-\bar{p}_3, -\bar{p}_1-\bar{p}_2+\bar{p}_3\},$$

其中，我们用$\mathbf{P}^+$ 表示(p_1,p_2,p_3)的偶排列群。对于每个 $r\in\mathcal{R}$，我们令 $c_i^{(r)} := 2 - |r_i|$，如果 $r = \sum_i r_i\bar{p}_i$。

[8]关于一维非全纯艾希勒积分 z_{1d}，我们还指出，当所有 $\vec{\sigma}_{\hat{w}}$ 满足 $0 \le \langle\vec{\sigma}_w\ \vec{\omega}_i\rangle \le m$ X_ν 3 9 $Z^{\mathrm{SU}(3)}$ M_3 M_3 =·，引理中来自 的不同贡献 {v?}。对 ˆ Σ () 的贡献对于 $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ 相互抵消。

由上可知（1.13）成立，特别地，定理 1.4 成立。也就是说，除可能的一维项外，同一个 $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{Z})$ 表示 Θ^{m+K} 不仅支配 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}$，也支配 SU(3) 量子模性。注意，当所有 p_i 均为无平方因子时，底层表示 Θ^{m+K} 是不可约的。此外，当 $2^2 \nmid m$ 时，可以将命题 $\theta^{1,\ldots,r}{}^{m+K}$ 中的 4.4 替换为不可约表示 $\Theta^{m+K,\ \mathrm{irred}}$（参见（4.10））。上述命题的证明见附录B.8。

5 个示例

本节将详细介绍 $\widehat{Z}$ 第4节讨论的不变量的结构。我们还将证明，第4 节针对同调球所证明的递归结构，也存在于具有三个例外纤维的其他非球形负 Seifert 流形中。特别是，我们将显式计算其底层的 $SL_2(\mathbb{Z})$ 韦伊表示。

5.1 示例：$M\left(-1;\ 1/4,\ 3/5,\ -1/7\right)$

我们从球面 Seifert 流形开始$X = M\left(-1,\ 1/4,\ 3/5,\ 1/7\right) \cong \Sigma(4,\ 5,\ 7)$。为确定配链矩阵 M，我们计算 Seifert 数据的连分数展开（4.2）。由

$$\frac{3}{5} = \cfrac{-1}{-2 - \cfrac{1}{-3}},$$

我们有

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

相应的配丛图有一个连接顶点，与三条支链相连。由于 X 是同调球，邻接矩阵 M 是幺模的，因此唯一不等价的广义 Spin^c 结构为

$$\vec{b}_0 = (\vec{\rho}, -\vec{\rho}, -\vec{\rho}, -\vec{\rho}, \vec{0}).$$

幺模性还导出参数 $D = 1$ 和 $m = -M^{-1}_{v_0,\ v_0} = 140$。

由于 X 是球面 Seifert 流形，条件 (4.6) 总是成立，因此 $\mathcal{W}_{\vec{b}}$ 在方程 (4.7) 中等于 $W^{\otimes 3}$。因为

$$(-1)^{\ell(w\hat{w})} F^{\varrho_{w\hat{w}}}(\tau) = (-1)^{\ell(\hat{w})} F^{\varrho_{\hat{w}}}(\tau),$$

其中 $w\hat{}w = (ww_1,\ ww_2,\ ww_3)$，我们可以将 ($\mathcal{W}_{\vec{b}}$中关于 4.7) 的求和简化为对 w 的代表元求和，这些代表元属于 $W^{\otimes 3}/W$ 的共轭类

$$\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau) = |W|\, C(q) \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}/W} (-1)^{\ell(\hat{w})} F^{(\rho_{\hat{w}})}(\tau).$$

对于该流形，我们可以选择代表元 $\hat{}w$ 使得 $\vec{s}_{\hat{w}} = (s_1, s_2)$ 的分量为$s_i \in \{1, \ldots, m\}$。这些参数及其对应的 Weyl 总长度 $(-1)^{\ell(\hat{w})}$ 在（4.7）中汇总于表 1。

$\vec{s}_{\hat{w}}=(s_1,\ s_2)\ ,\ \ (-1)^{\ell(\hat{w})}=1$		
(43, 103)	(103, 43)	(43, 43)
(27, 111)	(27, 51)	(111, 27)
(51, 27)	(43, 19)	(19, 43)
(27, 27)	(13, 118)	(13, 58)
(1, 82)	(61, 22)	(1, 22)
(13, 34)	(118, 13)	(58, 13)
(22, 61)	(82, 1)	(22, 1)
(34, 13)	(27, 6)	(6, 27)
	(13, 13)	

$\vec{s}_{\hat{w}}=(s_1,s_2),(-1)^{\ell(\hat{w})}=-1$		
(83, 83)	(83, 23)	(23, 83)
(47, 71)	(71, 47)	(33, 78)
(41, 62)	(41, 2)	(78, 33)
(62, 41)	(2, 41)	

表 1。$\vec{s}_{\hat{w}}$及其奇偶性$(-1)^{\ell(\hat{w})}$对于 $W^{\otimes 3}/W$的 36 个不等价代表元，对于 $M_3=M\big(-1;\ 14,35,\frac{1}{7}\big)$。

由于 $D=1$且我们可以令 $\vec{k}_{\hat{w}}=\vec{0}$，因此 $\vec{\sigma}_{\hat{w}}=\vec{s}_{\hat{w}}$，由此，方程（中的不变量为

$$C(q)\sum_{\hat{w}\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}(-1)^{\ell(\hat{w})}F^{(\varrho_{\hat{w}})}(\tau)=6q^{26}-12q^{37}-12q^{43}-12q^{49}+\mathcal{O}\big(q^{50}\big).$$

对于每个 $\vec{s}$，我们随后可以计算集合 $\mathcal{S}$ (3.13)。这些值汇总于表 2 中。作为一个选定的例子，考虑 $(s_1,s_2)=(83,83)$，它们对应于 $\hat{w}=(aba,aba,aba)$，其中 $a,\ b$ 是如（B.1）中所给出的 Weyl 群元素。利用方程（3.9），我们发现集合 $\mathcal{S}$包含。

$\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}$	$\boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}$
$\big(0,-\frac{83}{140}\big)$	$\big(1,-\frac{83}{140}\big)$
$\big(\frac{83}{140},-\frac{83}{140}\big)$	$\big(\frac{57}{140},\frac{83}{70}\big)$
$\big(-\frac{83}{140},\frac{83}{70}\big)$	$\big(\frac{223}{140},-\frac{83}{140}\big)$.

关于$\boldsymbol{\alpha}$的所有选择$\vec{s}$均汇总于表 2。

对于 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}$，令 $\boldsymbol{\beta}$为满足 $\boldsymbol{\alpha}\equiv\boldsymbol{\beta}\ (\mathbb{Z}^2)$ 以及 $\beta_1,\ \beta_2\in[0,1)$ 。引理 3.2证明了将广义 A_2 假 theta 函数拆分为一维贡献和二维贡献

$$F_\nu^{1\mathrm{D}}(\tau):=\sum_{w\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}(-1)^{\ell(\hat{w})}F_\nu^{(\varrho_{\hat{w}}),1D}(\tau),\qquad F_\nu^{(\varrho),1\mathrm{D}}(\tau):=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\alpha})\big(F_{\nu,\boldsymbol{\alpha}}^{(\varrho)}(\tau)-F_{\nu,\boldsymbol{\beta}}^{(\varrho)}(\tau)\big),$$
$$F_\nu^{2\mathrm{D}}(\tau):=\sum_{w\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}(-1)^{\ell(\hat{w})}F_\nu^{(\varrho_{\hat{w}}),2\mathrm{D}}(\tau),\qquad F_\nu^{(\varrho),2\mathrm{D}}(\tau):=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\alpha})F_{\nu,\boldsymbol{\beta}}^{(\varrho)}(\tau).$$

对于 X，这种分解给出

$$\begin{aligned}\tilde{F}&=-\frac{9}{14}q^4-\frac{18}{35}q^5-\frac{33}{35}q^7-\frac{81}{70}q^8-\frac{57}{35}q^{10}-\frac{39}{35}q^{13}-\frac{81}{35}q^{14}\\&\quad-\frac{261}{70}q^{16}-\frac{3}{35}q^{19}+\frac{123}{35}q^{22}+\frac{69}{35}q^{25},\\C(q)F_0^{1\mathrm{D}}(m\tau)&=-\tilde{F}-\frac{99}{35}q^{26}-\frac{141}{35}q^{28}+\frac{18}{7}q^{37}+\frac{39}{35}q^{40}+\frac{81}{35}q^{41}+\mathcal{O}\big(q^{42}\big),\\C(q)F_0^{2\mathrm{D}}(m\tau)&=\tilde{F}+\frac{447}{70}q^{26}+\frac{141}{35}q^{28}-\frac{309}{35}q^{37}-\frac{39}{35}q^{40}-\frac{81}{35}q^{41}+\mathcal{O}\big(q^{42}\big),\end{aligned}$$

$$C(q)F_1^{1\mathrm{D}}(m\tau)=\tilde{F}+\frac{99}{35}q^{26}+\frac{141}{35}q^{28}-\frac{18}{7}q^{37}-\frac{39}{35}q^{40}-\frac{81}{35}q^{41}+\mathcal{O}\big(q^{42}\big),$$
$$C(q)F_1^{2\mathrm{D}}(m\tau)=-\tilde{F}-\frac{27}{70}q^{26}-\frac{141}{35}q^{28}-\frac{111}{35}q^{37}+\frac{39}{35}q^{40}+\frac{81}{35}q^{41}+\mathcal{O}\big(q^{42}\big).$$

此处的一维贡献是

$$C(q)\big(F_0^{1\mathrm{D}}(m\tau)+F_1^{1\mathrm{D}}(m\tau)\big)=6q^{109}-6q^{113}-6q^{121}-6q^{131}+6q^{157}+\mathcal{O}\big(q^{160}\big)$$

且总和 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(X)$ 具有整数系数

$$\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\underline{\vec{b}}}(X;\tau)=-6q^{26}+12q^{37}+12q^{43}+12q^{49}+\mathcal{O}\big(q^{50}\big).$$

二维贡献的伴随函数 $F^{2\mathrm{D}\nu}(m\tau)$ 是双重艾希勒积分，其被使用引理4.2 计算的被积函数包含

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\hat{w}\in W^{\otimes 3}}(-1)^{\ell(\hat{w})}\Theta^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,e}(\mathbf{z})=&\big(63\theta^1_{140,63}+7\theta^1_{140,7}\big)\theta^{1,140+K}_{23}+\big(15\theta^1_{140,15}+55\theta^1_{140,55}\big)\theta^{1,140+K}_{1}\\&-\big(7\theta^1_{140,133}+63\theta^1_{140,77}\big)\theta^{1,140+K}_{37}\\&+\big(8\theta^1_{140,132}+48\theta^1_{140,48}+8\theta^1_{140,8}+48\theta^1_{140,92}\big)\,\theta^{1,140+K}_{118}\\&+\big(27\theta^1_{140,113}+13\theta^1_{140,127}+83\theta^1_{140,57}+43\theta^1_{140,97}\big)\,\theta^{1,140+K}_{57}\\&+\big(20\theta^1_{140,120}+20\theta^1_{140,20}\big)\theta^{1,140+K}_{6}\\&-\big(28\theta^1_{140,112}+28\theta^1_{140,28}\big)\,\theta^{1,140+K}_{2}\\&+\big(15\theta^1_{140,125}+55\theta^1_{140,85}\big)\theta^{1,140+K}_{29}\\&+35\theta^1_{140,105}\theta^{1,140+K}_{9}-35\theta^1_{140,35}\theta^{1,140+K}_{19}\\&-\big(13\theta^1_{140,13}+27\theta^1_{140,27}+43\theta^1_{140,43}+83\theta^1_{140,83}\big)\,\theta^{1,140+K}_{13}\end{aligned}\tag{5.1}$$

使用简写记号

$$\theta^1_{m,r}\theta^{1,140+K}_{r'}\equiv\theta^1_{m,r}\,(3z_2)\,\theta^{1,140+K}_{r'}\,(z_1)\,,$$

类似地

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\hat{w}\in W^{\otimes 3}}(-1)^{\ell(\hat{w})}\Theta^{(\varrho_{\hat{w}})}_{1,e}(\mathbf{z})=&\big(\theta^0_{140,63}+\theta^0_{140,7}\big)\theta^{1,140+K}_{23}+\big(\theta^0_{140,15}+\theta^0_{140,55}\big)\theta^{1,140+K}_{1}\\&-\big(\theta^0_{140,0}-\theta^0_{140,140}\big)\theta^{1,140+K}_{26}+\big(\theta^0_{140,133}+\theta^0_{140,77}\big)\theta^{1,140+K}_{37}\\&-\big(\theta^0_{140,132}-\theta^0_{140,48}-\theta^0_{140,8}+\theta^0_{140,92}\big)\,\theta^{1,140+K}_{22}\\&-\theta^0_{140,105}\theta^{1,140+K}_{9}-\big(\theta^0_{140,113}+\theta^0_{140,127}+\theta^0_{140,57}\\&+\theta^0_{140,97}\big)\,\theta^{1,140+K}_{57}-\theta^0_{140,35}\theta^{1,140+K}_{19}\\&-\big(\theta^0_{140,120}-\theta^0_{140,20}\big)\theta^{1,140+K}_{6}+\big(\theta^0_{140,112}-\theta^0_{140,2}\big)\theta^{1,140+K}_{2}\\&-\big(\theta^0_{140,125}+\theta^0_{140,85}\big)\theta^{1,140+K}_{29}\\&-\big(\theta^0_{140,13}+\theta^0_{140,27}+\theta^0_{140,43}+\theta^0_{140,83}\big)\,\theta^{1,140+K}_{13},\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中 $\theta^0_{m,\ r}\theta^{1}_{,\ r'}{}^{140+K}\equiv\theta^0_{m,\ r}\ (3z_2)\ \theta^{1}_{,\ r'}{}^{140+K}\ (z_1)$ 以及
$K=\{1,p_1p_2,p_1p_3,p_2p_3\}=\{1,20,28,35\}$。这个例子清楚地展现了命题4.4中描述的递归结构。

5.2 示例： $M\left(-1;\ 15,\ 12,\ \frac{1}{4}\right)$

考虑塞弗特流形 $X = M\left(-1;\ 15,\ 12,\ \frac{1}{4}\right)$，其配链矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

其中 $\det(M) = 2$，$D = 1$ 以及 $m = 20$。由于现在 $|\det M| > 1$，$\mathcal{W}_{\vec{b}}$（参见 (4.7)）通常将是 $W^{\otimes 3}$ 的真子集。

流形 X 具有两种不等价的广义 Spin^c 结构：平凡结构 $\vec{b}_0$ 和 $\vec{b}_1 = ((1,-2),(1,1),(-1,2),(-3,3))$.

为简单起见，我们着重研究 b_0。使用上文所述的相同方法，我们可以计算出 $\vec{s}$ 集合、$\widehat{Z}$ 不变量以及伴随函数 $\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}(\tau)$。$\vec{s}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 参数汇总于表3。总和 (4.7) 为

$$\begin{aligned}
&\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau) = C(q)\sum_{\hat{w}\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}(-1)^{\ell(\hat{w})}F^{(\varrho_{\hat{w}})}(q) = -6q + 12q^2 - 12q^4 + 6q^5 + 6q^7 + \mathcal{O}\left(q^{10}\right),\\
&C(q)\left(F_0^{1\mathrm{D}}(m\tau) + F_1^{1\mathrm{D}}(m\tau)\right) = -12q^{16} + 12q^{20} + 12q^{22} - 12q^{34} - 12q^{38} + \mathcal{O}\left(q^{40}\right),\\
&C(q)F_0^{2\mathrm{D}}(m\tau) = -6q + 12q^2 - 12q^4 + 6q^5 + 6q^7 + \mathcal{O}\left(q^{10}\right),\\
&C(q)F_1^{2\mathrm{D}}(m\tau) = \mathcal{O}\left(q^{500}\right),
\end{aligned}$$

而伴随对象的双重艾希勒积分形式的被积函数是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{80}\sum_{\hat{w}\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(\hat{w})}\Theta_{0,w}^{(\varrho_{\hat{w}})}(\mathbf{z}) = {}& \left(\theta^1_{20,1} + \theta^1_{20,9}\right)\theta_{11}^{1,20+4} - \theta^1_{20,5}\theta_7^{1,20+4}\\
&- \left(\theta^1_{20,11} + \theta^1_{20,19}\right)\theta_1^{1,20+4} + 2\theta^1_{20,10}\left(\theta_8^{1,20+4} + \theta_{12}^{1,20+4}\right)\\
&- \theta^1_{20,15}\theta_5^{1,20+4} - 2\left(\theta^1_{20,6} + \theta^1_{20,14}\right)\left(\theta_4^{1,20+4} + \theta_{16}^{1,20+4}\right) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{\hat{w}\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}\sum_{w\in W}\Theta_{1,w}^{(\varrho_{\hat{w}})}(\mathbf{z}) = 0.$$

伴随项 $\mathbb{E}_1^{2D}$ 以及 F_1^{2D} 按其计算的阶数 $\left(\mathcal{O}\left(q^{500}\right)\right)$ 的消失，是 $F_1^{2D} = 0$ 的必要（但不充分）条件。在方程（5.3）中，我们采用了方程（5.1）和（5.2中的相同简写记号。对于这两种情况，魏尔表示由集合 $K = \{1,4\}$ 标记，该集合与秩一不变量 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}}$（$X$；$\tau$）[25]相同。此外，在该求和中我们还发现了 $\theta^{1,\ 20+4}_{1,\ 1}$ 和 $\theta^{1,\ 20+4}_{1,\ 11}$ 这些项在秩一不变量中也有所发现。

5.3 示例： $M\left(-2;\ 12,12,\frac{3}{4}\right)$

令人惊讶的是，对于某些流形，广义的 A_2 假 theta函数的二维贡献之和在我们能够计算到的阶上消失。其中一个例子是塞弗特流形 $X = M\left(-2;\ 12、12、\ \frac{3}{4}\right)$，其 $\det(M) = 4$，$D = 1$，$m = 4$ 以及 $K = \{1\}$。方程（3.9）给出 $\boldsymbol{\alpha}$ 表4 中的以及

$$\begin{aligned}
&C(q)\sum_{\hat{w}\in\mathcal{W}_{\vec{b}}}(-1)F^{(\varrho_{\hat{w}})}(q) = -36q^{-1} + 36q^1 - 36q^{10} + 36q^{14} + \mathcal{O}\left(q^{20}\right),\\
&C(q)F_0^{2\mathrm{D}}(m\tau) = C(q)F_1^{2\mathrm{D}}(m\tau) = \mathcal{O}\left(q^{500}\right),
\end{aligned}$$

对于 $\vec{b}=(-\vec{\rho},\vec{\rho},\vec{\rho},\vec{\rho})$。这里，递归结构尤其容易识别，因为

$$\frac{1}{36}\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}}(M_3;\tau)=q^{-4}+\frac{q^{21/2}}{2}\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}_{\vec{b}^{\mathrm{SU}(2)}}(M_3;\tau)+\mathcal{O}\big(q^{500}\big),$$

其中，$\vec{b}^{\mathrm{SU}(2)}=(-\vec{\rho}\,',\ \vec{\rho}\,',\ \vec{\rho}\,',\ \vec{\rho}\,')$，其中 $\vec{\rho}\,'$ 是 A_1 根格的韦伊向量。

5.4 更多示例

以上各小节已非常详细地展示，塞弗特流形的 $\widehat{Z}$不变量（包括尚未证明猜想1.3 的非球面流形）在不同秩之间呈现递推关系。尤其是，对 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(2)}$ 和 $\widehat{Z}^{\mathrm{SU}(3)}$ 的伴随函数进行了细致分析。

在下表中，我们为这一现象提供了进一步的证据。我们将示例分成若干组。在每一组中，数据组织如下：其中，σ^{m+K} 是给出 r 的集合

Seifert data	σ^{m+K}
m, D	$\sigma^{m+K}_{A_1}$
$m+K$	$\sigma^{m+K}_{A_2}$ or $\bar{\sigma}^{m+K}_{A_2}$

不等价的 $\theta^{1,\ r}{}^{m+K}$（4.11），$\sigma^{m+K}_{A_1}$ 是 σ^{m+K} 的最小子集，使得（1.9）和（1.10）在 σ^{m+K} 替换为 $\sigma^{m+K}_{A_1}$ 时，对于边界条件的所有不等价选择也成立 $\vec{b}$。类似地，$\sigma^{m+K}_{A_2}$ 是 σ^{m+K} 的最小子集，使得（1.11）在 σ^{m+K} 替换为 $\sigma^{m+K}_{A_1}$ 时，对于边界条件的所有不等价选择也成立$\vec{b}$。注意，在我们研究的所有情形中都有 $\sigma^{m+K}\subset\sigma^{m+K}_{A_2}\subset\sigma^{m+K}_{A_1}$。

6 讨论

本文继续研究 $\widehat{Z}^G$-不变量的量子模性质，并将分析扩展至高秩情形 G。本文的结果和猜想引出了许多后续研究问题和开放问题，其中一些我们希望能在未来报告，现列举如下。

- 猜想1.1是合理的。从秩 4.1 不变量的定义出发，直接沿所有非连接点顶点张成的方向进行围道积分后，剩余围道积分的被积函数中会留下一个秩为 r Z 的格点和。在弱负/正情形下，格的符号差纯粹为正/负。特别地，在弱负情形下，我们得到一个秩为 $N=r\times n$ 的假 theta 类函数（及其导数）之和。明确证明它们的量子模性应该很有意思。同样，在弱正情形下，我们预期会得到一个与高深度拟模形式非常接近的对象，不过目前我们 N 还没有为这些情形定义 $\widehat{Z}$-不变量的通用方法。

- 超越猜想 1.1，分析以下情形下$\sim Z$-不变量的量子模性将非常有趣：配链流形既非弱负定也非弱正定，换言之，当连接顶点所张成的空间的符号差为（k，$N-k$）时，其中 $k\neq 0$。为此，推广广义误差函数 [4, 14] 以同时涵盖“假”方向和“模”方向，应该会很有意思。

- 如引言中所述，拉德马赫和表达式在许多方面都很有趣，而且通常可用于我们在此研究的这类全纯量子模形式。系统地发展拉德马赫和会很有意义。

$(-2; 1/2,\ 1/2,\ 3/5)$	$\sigma^{40} = \{1, -, 39\}$
$40,\ 4$	$\sigma^{40}_{A_1} = \{28, 32, 38\}$
40	$\bar{\sigma}^{40}_{A_2} = \{5, 10, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 35\}$
$(-1; 1/2,\ 1/3,\ 1/8)$	$\sigma^{24+8} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16\}$
$24,\ 1$	$\sigma^{24+8}_{A_1} = \{1, 7\}$
$24 + 8$	$\sigma^{24+8}_{A_2} = \{1, 2, 7, 10\}$
$(-1; 1/2,\ 1/7,\ 2/7)$	$\sigma^{14+7} = \{1, 3, 5, 7\}$
$14,\ 1$	$\sigma^{14+7}_{A_1} = \{3\}$
$14 + 7$	$\sigma^{14+7}_{A_2} = \{1, 3, 5\}$
$(-1; 1/4,\ 1/7,\ 4/7)$	$\sigma^{28+7} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 21\}$
$28,\ 1$	$\sigma^{28+7}_{A_1} = \{13, 21\}$
$28 + 7$	$\sigma^{28+7}_{A_2} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 21\}$
$(-1; 1/3,\ 1/5,\ 2/5)$	$\sigma^{15+5} = \{1, 2, 4, 5, 7, 10\}$
$15,\ 1$	$\sigma^{15+5}_{A_1} = \{4\}$
$15 + 5$	$\sigma^{15+5}_{A_2} = \{1, 2, 4, 7\}$
$(-1; 1/3,\ 1/3,\ 1/4)$	$\sigma^{12+3} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$
$12,\ 1$	$\sigma^{12+3}_{A_1} = \{1, 9\}$
$12 + 3$	$\bar{\sigma}^{12+3}_{A_2} = \{4, 7, 8, 10, 11\}$
$(-2; 1/2,\ 1/2,\ 12/13)$	$\sigma^{52} = \{1, -, 51\}$
$52,\ 2$	$\sigma^{52}_{A_1} = \{24, 28, 50\}$
52	$\sigma^{52}_{A_2} = \{2, 4, 9, 11, 15, 17, 22, 24, 28, 30, 35, 37, 41, 43, 48, 50\}$
$(-1; 1/3,\ 1/11,\ 6/11)$	$\sigma^{33} = \{1, -, 32\}$
$33,\ 1$	$\sigma^{33}_{A_1} = \{16, 22, 28\}$
33	$\bar{\sigma}^{33}_{A_2} = \{3, 4, 6, 7, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 26, 27, 29, 30\}$
$(-2; 1/2,\ 2/3,\ 2/3)$	$\sigma^{6+3} = \{1, 3\}$
$6,\ 1$	$\sigma^{6+3}_{A_1} = \{1, 3\}$
$6 + 3$	$\sigma^{6+3}_{A_2} = \{1, 3\}$
$(-2; 1/2,\ 1/2,\ 8/9)$	$\sigma^{36} = \{1, -, 35\}$
$36,\ 2$	$\sigma^{36}_{A_1} = \{16, 20, 34\}$
36	$\sigma^{36}_{A_2} = \{2, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 16, 20, 22, 23, 25, 29, 31, 32, 34\}$
$(-2; 1/2,\ 1/2,\ 4/5)$	$\sigma^{20} = \{1, -, 19\}$
$20,\ 2$	$\sigma^{20}_{A_1} = \{8, 12, 18\}$
20	$\bar{\sigma}^{20}_{A_2} = \{5, 10, 15\}$
$(-2; 1/2,\ 2/3,\ 3/4)$	$\sigma^{12+4} = \{1, 2, 4, 5, 8\}$
$12,\ 1$	$\sigma^{12+4}_{A_1} = \{1, 5\}$
$12 + 4$	$\sigma^{12+4}_{A_2} = \{1, 4, 5, 8\}$
$(-1; 1/2,\ 1/3,\ 1/9)$	$\sigma^{18+9} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$18,\ 1$	$\sigma^{18+9}_{A_1} = \{1, 5\}$
$18 + 9$	$\sigma^{18+9}_{A_2} = \{1, 5, 7\}$

$(-1; 1/2,\ 1/5,\ 1/5)$	$\sigma^{10+5} = \{1, 3, 5\}$
$10,\ 1$	$\sigma^{10+5}_{A_1} = \{1, 5\}$
$10 + 5$	$\sigma^{10+5}_{A_2} = \{1, 3, 5\}$
$(-1; 1/2,\ 2/5,\ 1/15)$	$\sigma^{30+15} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
$30,\ 1$	$\sigma^{30+15}_{A_1} = \{7, 11\}$
$30 + 15$	$\sigma^{30+15}_{A_2} = \{1, 5, 7, 11\}$
$(-1; 1/2,\ 1/11,\ 4/11)$	$\sigma^{22} = \{1, -, 21\}$
$22,\ 1$	$\sigma^{22}_{A_1} = \{7, 11, 15\}$
22	$\sigma^{22}_{A_2} = \{3, 5, 7, 11, 15, 17, 19\}$
$(-2; 1/2,\ 1/2,\ 6/7)$	$\sigma^{28} = \{1, -, 27\}$
$28,\ 2$	$\sigma^{28}_{A_1} = \{12, 16, 26\}$
28	$\bar{\sigma}^{28}_{A_2} = \{1, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 27\}$
$(-1; 1/2,\ 1/4,\ 1/5)$	$\sigma^{20+4} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 16\}$
$20,\ 1$	$\sigma^{20+4}_{A_1} = \{1, 11\}$
$20 + 4$	$\sigma^{20+4}_{A_2} = \{1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 16\}$
$(-2; 1/2,\ 1/3,\ 1/2)$	$\sigma^{24} = \{1, -, 23\}$
$24,\ 4$	$\sigma^{24}_{A_1} = \{16, 20, 22\}$
24	$\bar{\sigma}^{24}_{A_2} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$

一般量子模形式的技巧。从场论一侧的物理角度来看，我们希望比较三维理论 $T[M_3]$，的 $S^2 \times S^1$ 超共形指标；猜想它们与 Z 有关，关系如下：

$$I^G(\tau) \sim \sum_b \widehat{Z}^G_b(\tau)\widehat{Z}^G_b(-\tau),$$

并对来自不同引力解的鞍点贡献求和。正如 [25], 中所论证的，定义 $\widehat{Z}^G_b(M_3; -\tau)$ 并将其等同于 $\widehat{Z}^G_b(-M_3; \tau)$ 是很有诱惑力的。在引力一侧，尽管我们尚未得到超引力解的完整目录，但最近在 [9] $\mathrm{AdS}_4 \times S^7$ 背景下描述的解令人鼓舞地呈现出这样的几何形式，或许可以与不同的拉德马赫贡献相匹配。

- 通常，$\widehat{Z}$-不变量有着截然不同的表达方式，例如通过沿纽结进行手术而非管状拼接来实现 M_3 [32, 40, 41, 46, 64], ，或者通过其他方式表达对数顶点代数的特征 [24], ，从而得到有趣的 q-级数恒等式。迄今为止，对量子模性的分析主要依赖于其与格点 theta 函数的联系；如果也能通过这些其他表达方式直接分析模性，将会非常有趣，因为它们与数学中迥异的领域相关，并将带来不同的应用。

- 以更具体的方式理解我们所观察到的递归关系的性质，将会非常有趣。我们可以考虑以下探索方向。1）研究高秩情形下的递归，以便更全面地理解递归结构。2）我们已经提到过它与高秩 Vafa–Witten理论中结构的类比（1.3）。为三维情形发展出类似的诠释将会很有帮助。3）除了几何上的 M理论视角之外，Vafa–Witten 递归还可以根据高秩规范群的可约联络得到诠释。从 SL($N, \mathbb{C}$) 陈–西蒙斯视角来看，我们相信这将会很有启发性

研究（1.2）的高秩/高深度类比，由此我们应能够明确看到低秩平坦联络所发挥的作用。将其与类似于 [47]的复苏分析进行比较也很有意义。尤其有趣的是，看看这对于 [25] 中将韦伊表示的轨道视为对应于 M_3上的非阿贝尔 SU(2) 平坦联络，或相关地对应于不同的威尔逊线插入 [50]的提议意味着什么。

- 根据假模猜想 [25]及其高秩推广，猜想 1.3 和定理 1.4 中所报告的递推关系应当以完全类似的方式对 $-M_3$的方向翻转对应对象 M_3成立。计算 $\hat{Z}^G(-M_3)$ 的高秩情形 G 并进行验证，将会很有意思。

特殊函数

在本附录中，我们汇总了正文中所使用的特殊函数的定义，以及它们所满足的性质和关系。关于记号，我们始终使用 $q := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$，其中 $\tau \in \mathbb{H}$ 和 $v := \mathrm{Im}\ \tau$。这些函数

$$E(u) := 2\int_0^u \mathrm{e}^{-\pi w^2}\mathrm{d}w, \qquad u \in \mathbb{R}$$

and

$$M(u) := \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{\mathbb{R}-iu} \mathrm{e}^{-\pi w^2 - 2\pi \mathrm{i} u w} w^{-1}\mathrm{d}w, \qquad u \neq 0 \tag{A.1}$$

与误差函数和互补误差函数密切相关。 $M(u)$ 的一种有用重写是 [73]

$$M(x\sqrt{v}) = \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{2}} q^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i} x^2 w}{2}}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w+\tau)}}\mathrm{d}w. \tag{A.2}$$

它们满足关系式

$$M(u) = E(u) - \mathrm{sgn}(u),$$

其中

$$\mathrm{sgn}(u) := \begin{cases} 1 & \text{if } u > 0, \\ -1 & \text{if } u < 0, \\ 0 & \text{if } u = 0. \end{cases}$$

我们还定义

$$M^*(u) = E(u) - \mathrm{sgn}^*(u),$$

其中

$$\mathrm{sgn}^*(x) := \mathrm{sgn}(x) \quad \text{if} \quad x \neq 0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{sgn}^*(0) := 1.$$

广义误差函数 E_2: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$E_2(\kappa; \mathbf{u}) = E_2(\kappa; u_1, u_2) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{sgn}(w_1)\mathrm{sgn}(w_2 + \kappa w_1)\mathrm{e}^{-\pi\left((w_1-u_1)^2+(w_2-u_2)^2\right)}\mathrm{d}w_1\mathrm{d}w_2.$$

对于 $u_2,\ u_1-\kappa u_2\neq 0$，广义互补误差函数是

$$M_2(\kappa;\mathbf{u})=M_2(\kappa;u_1,u_2):=-\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}-\mathrm{i}u_2}\int_{\mathbb{R}-\mathrm{i}u_1}\frac{\mathrm{e}^{-\pi w_1^2-\pi w_2^2-2\pi\mathrm{i}(u_1w_1+u_2w_2)}}{w_2(w_1-\kappa w_2)}\mathrm{d}w_1\mathrm{d}w_2. \tag{A.3}$$

这些函数满足以下关系

$$\begin{aligned}M_2(\kappa;\mathbf{u})&=E_2(\kappa;u_1,u_2)+\mathrm{sgn}(u_1-\kappa u_2)\mathrm{sgn}(u_2)\\&\quad-\mathrm{sgn}(u_2)E(u_1)-\mathrm{sgn}(u_1-\kappa u_2)E\left(\frac{\kappa u_1+u_2}{\sqrt{1+\kappa^2}}\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}M_2^*(\kappa;u_1,u_2)&:=\mathrm{sgn}^*(u_1-\kappa u_2)\mathrm{sgn}^*(u_2)+E_2(\kappa;u_1,u_2)\\&\quad-\mathrm{sgn}^*(u_2)E(u_1)-\mathrm{sgn}^*(u_1-\kappa u_2)E\left(\frac{\kappa u_1+u_2}{\sqrt{1+\kappa^2}}\right).\end{aligned} \tag{A.4}$$

函数 $M_2(\kappa;\mathbf{u})$ [4]的导数满足以下恒等式:

$$\begin{aligned}M_2^{(0,1)}(\kappa;\mathbf{u})&=\frac{2}{\sqrt{1+\kappa^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi(u_2+\kappa u_1)^2}{1+\kappa^2}}M\left(\frac{u_1-\kappa u_2}{\sqrt{1+\kappa^2}}\right),\\M_2^{(1,0)}(\kappa;\mathbf{u})&=2\mathrm{e}^{-\pi u_1^2}M(u_2)+\frac{2\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi(u_2+\kappa u_1)^2}{1+\kappa^2}}M\left(\frac{u_1-\kappa u_2}{\sqrt{1+\kappa^2}}\right).\end{aligned}$$

误差函数补函数作为 θ 函数的积分

设 $\theta_i(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{w})$ 为以下 θ 函数

$$\begin{aligned}\theta_1(\boldsymbol{\mu};\mathbf{w})&=\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}(2n_1+n_2)n_2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(3(2n_1+n_2)^2w_1+n_2^2w_2\right)},\\\theta_2(\boldsymbol{\mu};\mathbf{w})&=\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}(3n_1+2n_2)n_1\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left((3n_1+2n_2)^2w_1+3n_1^2w_2\right)},\\\theta_3(\boldsymbol{\mu};\mathbf{w})&=\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}(2n_1+n_2)\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(3(2n_1+n_2)^2w_1+n_2^2w_2\right)},\\\theta_4(\boldsymbol{\mu};\mathbf{w})&=\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}(3n_1+2n_2)\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left((3n_1+2n_2)^2w_1+3n_1^2w_2\right)},\\\theta_5(\boldsymbol{\mu};\mathbf{w})&=\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}n_1\,\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left((3n_1+2n_2)^2w_1+3n_1^2w_2\right)}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

我们可以将误差函数余函数重写为 $M_2(\kappa,\mathbf{u})$，由方程 A.3) 可得，如同 [11]

$$\begin{aligned}&M_2\left(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\right)\\&\quad=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2n_1+n_2)n_2q^{Q(\boldsymbol{n})}\int_{-\overline{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{2}(2n_1+n_2)^2w_1}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}n_2^2w_2}{2}}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_2+\tau)}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1\\&\quad\quad-\frac{\sqrt{3}}{2}(3n_1+2n_2)n_1q^{Q(\boldsymbol{n})}\int_{-\overline{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}(3n_1+2n_2)^2w_1}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}n_1^2w_2}{2}}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_2+\tau)}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1,\end{aligned}$$

借此

$$\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2} M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\theta_1(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w})+\theta_2(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w})}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}\sqrt{-\mathrm{i}(w_2+\tau)}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1$$

and

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(M_2\left(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}\left(n_2-\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{v}\right)\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n_2 z}\right)\right]_{z=0}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}(2n_1+n_2)\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}(2n_1+n_2)^2w_1}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi n_2^2 w_2}{2}}}{(-\mathrm{i}(w_2+\tau))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1$$
$$- \frac{\sqrt{3}}{4\pi}(3n_1+2n_2)\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(3n_1+2n_2)^2w_1}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi n_1^2 w_2}{2}}}{(-\mathrm{i}(w_2+\tau))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1$$
$$- \frac{\sqrt{3}n_1}{4\pi}\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(3n_1+2n_2)^2w_1}}{(-(w_1+\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi n_1^2 w_2}{2}}}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_2+\tau)}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1,$$

这意味着

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}^2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(M_2\left(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}\left(n_2-\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{v}\right)\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n_2 z}\right)\right]_{z=0}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{2\theta_3(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w})-\theta_4(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w})}{\sqrt{-\mathrm{i}(w_1+\tau)}(-\mathrm{i}(w_2+\tau))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int_{-\bar\tau}^{\mathrm{i}\infty}\int_{w_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\theta_5(\boldsymbol{\mu},\mathbf{w})}{(-\mathrm{i}(w_1+\tau))^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\mathrm{i}(w_2+\tau)}}\mathrm{d}w_2\mathrm{d}w_1.$$

B 证明

B.1 引理3.1 的证明

令 $a,b\in W$ 为韦伊群元素，其在根 $\vec{k}=\sum_{i=1,2}k_i^r\vec{\alpha}_i$ 上的作用为搭配生物酶素 天天爱彩票怎么

$$a\colon\ \vec{k}\mapsto(k_2^r-k_1^r)\vec{\alpha}_1+k_2^r\vec{\alpha}_2,\qquad b\colon\ \vec{k}\mapsto k_1^r\vec{\alpha}_1+(k_1^r-k_2^r)\vec{\alpha}_2. \tag{B.1}$$

它们表示关于与单根正交的平面的反射，分别对应 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$。根据这些，我们有 $W=\{\mathbf{1},a,b,ab,ba,aba=bab\}$ 和 $W_+=\{\mathbf{1},ab,ba\}$。

由 $0\le\langle\vec{k},\vec{\omega}_i\rangle$，对于 $i=1,2$，我们得出三元组 $\vec{k}$、$a(\vec{k})$ 和 $b(\vec{k})$ 中至少有一个属于 $\bar{P}^+$。利用恒等式

$$(-1)^{\ell(w')}F^{(\varrho')}(\tau)=F^{(\varrho)}(\tau)$$

对于 $\varrho=(\vec{s},\vec{k},m,D)$ 和 $\varrho'=(w'(\vec{s})\ w'(\vec{k})\ m,D)$，从现在起，不失一般性地假设 $\vec{k}\in\bar{P}^+$。

在对 $\vec{n}$ （3.5）中的求和中，记 $\vec{n}=D\vec{m}+w(\vec{k})$ 为 $\vec{m}\in\Lambda$。我们有

$$\vec{m}+w(\vec{k})\in\bar{P}^+\quad\Leftrightarrow\quad m_i\ge\xi_{w,i},\quad i=1,2,$$

其中 $\xi_{w,\ i}$ 定义为

$$\xi_{w,i} := \left\lceil -\frac{w(\vec{k})|_i}{D} \right\rceil.$$

由于 $0 \le \langle \vec{k}, \vec{\omega}_i \rangle < D$，我们有

$$\left| \left(w(\vec{k})|_1 - w(\vec{k})|_2 \right) \right| \le \max(2k_1 + k_2, k_1 + 2k_2) < 3D,$$

因此 $|\xi_{w,1} - \xi_{w,2}| \le 3$。函数 $\min(n_i)$ 可表示为

$$\min\left(Dm_i + w(\vec{k})|_i\right) = \begin{cases} Dm_i + w(\vec{k})|_i, & \text{for } m_i < m_j,\ i,j \in \{1,2\}, \\ Dn + \min(w(\vec{k})|_i), & \text{for } m_1 = m_2 = n. \end{cases}$$

对于给定的 w，将式（3.5）中的和写作 $F^{(\varrho)} = \sum_w (-1)^{\ell(w)} F_w^{(\varrho)}$。下面我们分两种情况讨论 $F_w^{(\varrho)}$。

- 情况 1：$w(\vec{k})|_2 \ge w(\vec{k})|_1$。在
这种情况下 $\xi_{w,1} \ge \xi_{w,2}$ 以及

$$F_w^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{\substack{m_2 \ge m_1 \ge \xi_{w,1} \\ m_1 \equiv m_2 (\mathrm{mod}\, 3)}} \left(Dm_1 + w(\vec{k})|_1\right) q^{p_{w,\vec{m}}} + \sum_{\substack{m_1 > m_2 \ge \xi_{w,2} \\ m_1 \equiv m_2 (\mathrm{mod}\, 3)}} \left(Dm_2 + w(\vec{k})|_2\right) q^{p_{w,\vec{m}}},$$

其中 $p_{w,\vec{m}} = \frac{1}{2m}| - w(\vec{\sigma}) + m(\vec{m})|^2$。通过如下方式重新定义上式中的求和指标

$$(n_1, n_2) := \begin{cases} \left(\frac{1}{3}(m_1 - m_2), m_2\right), & m_1 > m_2, \\ \left(\frac{1}{3}(m_2 - m_1), m_1\right), & m_2 \ge m_1, \end{cases}$$

and 将求和范围分别平移 $\xi_{w,1}$ 以及 $\xi_{w,2}$、$F_{(\varrho)w}(\tau)$ 后，可以改写为

$$\begin{aligned} F_w^{(\varrho)}(q) = \sum_{n_1, n_2 \ge 0} & \left(D(n_2 + \xi_{w,1}) + w(\vec{k})|_1\right) q^{p_{w,(n_2+\xi_{w,1}, 3n_1+n_2+\xi_{w,1})}} \\ & + \left(D(n_2 + \xi_{w,2}) + w(\vec{k})|_2\right) q^{p_{w,(3n_1+3+n_2+\xi_{w,2}, n_2+\xi_{w,2})}}. \end{aligned}$$

随后引入二次型

$$Q(\boldsymbol{n}) := Q(n_1, n_2) = \frac{1}{2}|(n_2, 3n_1 + n_2)|^2 = \left(3n_1^2 + 3n_1 n_2 + n_2^2\right),$$

我们可以用这种记法来表示函数 $F_w^{(\varrho)}(q)$

$$F_w^{(\varrho)}(q) = \sum_{i=1,2} \sum_{n_1, n_2 \ge 0} \left(D(n_2 + \xi_{w,i}) + w(\vec{k})|_i\right) q^{mQ(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\alpha}_w^{(i)})} \tag{B.2}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}$ 由（3.9）给出，且 $x = 0$。

- 情况 2：$w(\vec{k})|_2 < w(\vec{k})|_1$。
此情况可类比于情况1处理，并得到（B.2），其中 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}$ 由（3.9）给出，其中 $x = 1$。

韦伊群元素对 $w,\ w' \in W$

$$(w, w') = (1, aba), (a, ba), (b, ab)$$

满足 $w(\vec{k})|_i = -w'(\vec{k})|_j$ 对于 $i \neq j$。

由于条件 $w(\vec{k})|_2 \geq w(\vec{k})|_1$ 满足当且仅当 $w'(\vec{k})|_2 \geq w'(\vec{k})|_1$，我们有如下关系

$$\boldsymbol{\alpha}_{w'}^{(1)} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)} \equiv \bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(2)}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_{w'}^{(2)} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}_w^{(1)} \equiv \bar{\boldsymbol{\alpha}}_w^{(1)}.$$

此外，通过对求和项进行移位，我们得到

$$F_w^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{i=1,2} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^2 + \boldsymbol{\alpha}_w^{(i)}} \left(D n_2 + \frac{w(\vec{s})|_i D}{m} \right) q^{mQ(\boldsymbol{n})}.$$

对所有 w 求和，我们得到引理 3.1中的表达式。

B.2 引理 3.2 的证明

第一步，我们考虑 $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} + (\delta\alpha_1,\ 0)$。经过常规计算可得

$$F_{0,\boldsymbol{\alpha}'} - F_{0,\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{0 \leq k \leq \delta\alpha_1 - 1} q^{\frac{3}{4}(\alpha_1+k)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n + \tfrac{1}{2}) q^{\left(n + \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1+k)\right)^2},$$

$$F_{1,\boldsymbol{\alpha}'} - F_{1,\boldsymbol{\alpha}} = - \sum_{0 \leq k \leq \delta\alpha_1 - 1} q^{\frac{3}{4}(\alpha_1+k)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n + \tfrac{1}{2})(n + \alpha_2) q^{\left(n + \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1+k)\right)^2},$$

而

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n + \tfrac{1}{2}) q^{(n + \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1+k))^2} - \tilde{\theta}^1 \left[1, \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1 + k) \right] (\tau) \in \mathbb{Z}[q]$$

因为 $\operatorname{sgn}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \operatorname{sgn}\left(n + \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1 + k)\right)$ 的支集有限。同理，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}\left(n + \tfrac{1}{2}\right)(n + \alpha_2) q^{(n + \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1+k))^2} + \frac{3}{2}(\alpha_1 + k) \tilde{\theta}^1 \left[1, \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1 + k) \right] (\tau)$$
$$- \tilde{\theta} \left[1, \alpha_2 + \frac{3}{2}(\alpha_1 + k) \right] (\tau) \in \mathbb{Z}[q].$$

其次，我们考虑 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}' + (0,\ \delta\alpha_2) = \boldsymbol{\alpha} + (\delta\alpha_1,\ \delta\alpha_2)$。我们有

$$F_{0,\boldsymbol{\beta}} - F_{0,\boldsymbol{\alpha}'} = \sum_{0 \leq k \leq \delta\alpha_2 - 1} q^{\frac{1}{4}(\alpha_2+k)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) q^{3(n + \alpha_1' + \frac{1}{2}(\alpha_2+k))^2},$$

$$F_{1,\boldsymbol{\beta}} - F_{1,\boldsymbol{\alpha}'} = - \sum_{0 \leq k \leq \delta\alpha_2 - 1} q^{\frac{1}{4}(\alpha_2+k)^2} (k + \alpha_2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) q^{3(n + \alpha_1' + \frac{1}{2}(\alpha_2+k))^2}$$

and

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) q^{3(n + \alpha_1' + \frac{1}{2}(\alpha_2+k))^2} - \tilde{\theta}^1 \left[3, \alpha_1' + \frac{1}{2}(\alpha_2 + k) \right] \in \mathbb{Z}[q].$$

结合上述两个步骤即可证明该结论。

B.3 引理的证明3.3

首先注意

$$\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\alpha})\right) = \sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\right)$$

且关于 $\nu=1$ 的结论立即得出，因为对于所有 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}$，$\eta_1(\boldsymbol{\alpha})+\eta_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})=0$。类似地，由上述恒等式可得

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}}\eta_0(\boldsymbol{\alpha})\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\alpha})\right) = 2\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_0(\boldsymbol{\alpha})\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\alpha})\right) \tag{B.3}$$

因为 $\eta_0(\boldsymbol{\alpha})=\eta_0(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$ 对所有 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}$。

更一般地，只要 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'\in\mathbb{Z}^2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\in\mathbb{Z}^2$，将被加数中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 替换为任意 $\boldsymbol{\alpha}'$ 后，关于 $\boldsymbol{\ell}$ 的求和仍保持不变，因为我们可以同时平移 $\boldsymbol{\ell}$。这里我们取 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(i)\prime}=\frac{1}{m}\mathbf{a}_w^{(i)}$，其中

$$\mathbf{a}_w^{(1)}=(\Delta w(\vec{\sigma}),-w(\vec{\sigma})|_1)\,,\qquad \mathbf{a}_w^{(2)}=(-\Delta w(\vec{\sigma}),-w(\vec{\sigma})|_2)$$

满足 $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^2$ 并且

$$Q(\mathbf{a})=\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2+\sigma_2\sigma_1+\sigma_2^2\right)=\frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}|^2. \tag{B.4}$$

令 $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ 为由二次型 Q 诱导的内积的两倍

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_Q:=Q(\mathbf{v}+\mathbf{w})-Q(\mathbf{v})-Q(\mathbf{w})=3\left(2v_1+v_2\right)w_1+\left(3v_1+2v_2\right)w_2=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle_Q\,.$$

将 $\boldsymbol{\ell}$ 上的求和拆分为对 $\mathbf{N}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 的求和，令 $\boldsymbol{\ell}=\mathbf{N}+k\boldsymbol{\nu}$，得到

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\alpha})\right) &= \sum_{\boldsymbol{\ell}\in(\mathbb{Z}/k\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\boldsymbol{\ell}+\frac{\mathbf{a}}{m})\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{\nu}\in(\mathbb{Z}/\bar{m})^2}\sum_{\boldsymbol{N}\in(\mathbb{Z}/k)^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q\left(\mathbf{N}+k\boldsymbol{\nu}+\frac{\mathbf{a}}{m}\right)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(\frac{h}{km^2}Q(\mathbf{a})\right)\sum_{\boldsymbol{\nu}\in(\mathbb{Z}/\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{\bar{m}}\langle\boldsymbol{\nu},\mathbf{a}\rangle_Q\right)\\ &\quad\times\sum_{\boldsymbol{N}\in(\mathbb{Z}/k)^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\mathbf{N})\right)\mathrm{e}\left(\frac{h}{km}\langle\mathbf{N},\mathbf{a}\rangle_Q\right).\end{aligned}$$

考察因子 $\sum_{\boldsymbol{\nu}\in(\mathbb{Z}/\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{\bar{m}}\langle\boldsymbol{\nu},\mathbf{a}\rangle_Q\right)$，可知除非 $\bar{m}|3a_1,a_2$，否则该和为零；这等价于 $\vec{\sigma}\in\bar{m}\Lambda$，此时

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in(\mathbb{Z}/\bar{m})^2}\mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{\bar{m}}\langle\boldsymbol{\nu},\mathbf{a}\rangle_Q\right)=\bar{m}^2.$$

因此，接下来我们研究因子

$$\sum_{\boldsymbol{N}\in(\mathbb{Z}/k)^2}\mathrm{e}\left(\frac{h}{k}Q(\mathbf{N})\right)\mathrm{e}\left(\frac{h}{km}\langle\mathbf{N},\mathbf{a}\rangle_Q\right),$$

当 $\vec{\sigma} \in \bar{m}\Lambda$时。令 δ^* 为 δ 模 k的模逆元。由于 δ 是 h的因子，而 h与 k互质，因此该模逆元存在。将关于 $\boldsymbol{N}$的求和移至 $\boldsymbol{N} - \delta^* \mathbf{a}\bar{m}$，我们可以消去 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{a} \rangle_Q$项，从而得到结果

$$\sum_{\boldsymbol{\ell} \in (\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha})\right) = \bar{m}^2 \mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{k}\left(\delta^* + \frac{1}{\delta}\right) Q(\mathbf{a})\right),$$

其中 c 和 c' 是一个仅依赖于以下各项的 -独立常数 h、 k 和 m、 D。利用 $Q(\mathbf{a})$ 在 $\mathcal{S}$ 上为常数这一事实（见 (B.4)），由 (B.3) 得到

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}} \eta_0(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{\boldsymbol{\ell} \in (\mathbb{Z}/k\bar{m})^2} \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha})\right) = 2c\mathrm{e}\left(\frac{c'}{2}|\boldsymbol{\sigma}|^2\right) \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\mathcal{S}}} \eta_0(\boldsymbol{\alpha}),$$

由于 $\sum_{w \in W_+} w(\vec{v}) = 0$ 对任意 $\vec{v}$ 均成立，因此该项趋于零，从而 $\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\mathcal{S}}} \eta_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$。

B.4 引理3.4 的证明

证明。 首先，利用 a_i 重写：$= m\boldsymbol{\alpha}_i$ 并令 $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{N} + k\boldsymbol{\nu}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \le \ell_1, \ell_2 < k\bar{m}} B_n\left(\frac{\ell_1 + \alpha_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha})\right) \\
&\quad = \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q(\boldsymbol{\alpha})\right) \sum_{0 \le \mathbf{N} < k} \mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{k\bar{m}}(\bar{m}\delta Q(\mathbf{N}) + 3N_1(2a_1 + a_2) + N_2(3a_1 + 2a_2))\right) \\
&\qquad \times \sum_{0 \le \boldsymbol{\nu} < \bar{m}} B_n\left(\frac{N_1 + k\nu_1 + \alpha_1}{\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h/\delta}{\bar{m}}(3\nu_1(2a_1 + a_2) + \nu_2(3a_1 + 2a_2))\right).
\end{aligned}$$

对 ν_2 求和表明，当 $3a_1 + 2a_2$ 不能被 $\bar{m}$ 整除时，该量为零。对于 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}$或 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}$，该条件等价于条件 $\bar{m} | \sum_{i=1,\ 2} w(\vec{\sigma})|_i$。令$\sum_{i=1,\ 2} w(\vec{\sigma})|_i = \bar{m}y$，我们写作

$$\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)} = (\alpha_1, \alpha_2) \bmod (0,1), \qquad \boldsymbol{\alpha}_w^{(2)} = \left(1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2 - \frac{y}{\delta}\right) \bmod (0,1).$$

调用 t 伯努利多项式的反射性质（3.15），对于 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{(2}$ $_w^{)}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0 \le \ell_1 < k\bar{m} \\ \ell_2 \in \mathbb{Z}/k\bar{m}}} B_n\left(\frac{\ell_1 + 1 - \alpha_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q\left(\boldsymbol{\ell} + \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} - \frac{y}{\delta}(0,1)\right)\right) \\
&\quad = \sum_{\substack{0 \le \ell_1 < k\bar{m} \\ \ell_2 \in \mathbb{Z}/k\bar{m}}} B_n\left(1 - \frac{\ell_1 + \alpha_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q\left(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha} + \frac{y}{\delta}(0,1)\right)\right) \\
&\quad = -\sum_{\substack{0 \le \ell_1 < k\bar{m} \\ \ell_2 \in \mathbb{Z}/k\bar{m}}} B_n\left(\frac{\ell_1 + \alpha_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q\left(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha} + y\left(\frac{1}{\delta} - \delta^*\right)(0,1)\right)\right) \\
&\quad = -\sum_{\substack{0 \le \ell_1 < k\bar{m} \\ \ell_2 \in \mathbb{Z}/k\bar{m}}} B_n\left(\frac{\ell_1 + \alpha_1}{k\bar{m}}\right) \mathrm{e}\left(\frac{h}{k} Q\left(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\alpha}\right)\right).
\end{aligned}$$

从第一行到第二行，我们将 $\boldsymbol{\ell}$ 重新标记为（$k\bar{m} - 1$）$\mathbf{1} - \boldsymbol{\ell}$。转到第三行时，我们利用了伯努利多项式的反射性质（3.15），并在求和中将 ℓ_2平移了 $\delta^* y$，其中 $\delta^*\delta \equiv 1$（k）。在最后一步中，我们使用了 $\langle \boldsymbol{\alpha},\ (0,\ 1) \rangle_Q = -\frac{1}{\delta} y$。由此，我们立即看出，来自 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}$和 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}$的贡献相互抵消。■

B.5 引理证明3.9

对于 $\nu=0$ 和 $\varepsilon\in\{1,-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^{(\varrho)}(\tau)&=\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\in\{1,-1\}}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_0(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{Z}}q^{-Q(\boldsymbol{n})}M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2\varepsilon n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\in\{1,-1\}}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_0(\boldsymbol{\mu})\Bigg(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}q^{-Q(\boldsymbol{n})}M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2\varepsilon n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\\
&\quad+\sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}q^{-Q(-n_1,n_2)}M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2\varepsilon n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\Bigg)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_0(\boldsymbol{\mu})\Bigg(\sum_{\mathbf{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}q^{-Q(\boldsymbol{n})}\big(M_2^*\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\\
&\quad+\delta_{n_1,0}(1-\delta_{n_2,0})M\big(2\sqrt{v}n_2\big)+\delta_{n_2,0}(1-\delta_{n_1,0})M\big(2\sqrt{3v}n_1\big)-\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,0}\big)\\
&\quad+\sum_{\mathbf{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}q^{-Q(-n_1,n_2)}\big(M_2^*\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(-2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\\
&\quad-\delta_{n_1,0}(1-\delta_{n_2,0})M\big(2\sqrt{v}n_2\big)-\delta_{n_2,0}(1-\delta_{n_1,0})M\big(2\sqrt{3v}n_1\big)+\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,0}\big)\Bigg)\\
&=\mathbb{E}_0^{*(\varrho)}(\tau)+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta(\boldsymbol{\mu})\Bigg(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}+\sum_{\boldsymbol{n}\in(1,1)-\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}-\sum_{\boldsymbol{n}\in(\mu_1,1-\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}\Bigg)\\
&\quad\times\big(\delta_{n_1,0}(1-\delta_{n_2,0})M\big(2\sqrt{v}n_2\big)+\delta_{n_2,0}(1-\delta_{n_1,0})M\big(2\sqrt{3v}n_1\big)-\delta_{n_1,0}\delta_{n_2,0}\big)q^{-Q(\boldsymbol{n})}\\
&=\mathbb{E}_0^{*(\varrho)}(\tau)+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_0(\boldsymbol{\mu})X_0(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

对于 $\nu=1$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1^{(\varrho)}(\tau)&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_1(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}n_2M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2)\big)q^{-Q(\boldsymbol{n})}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\bar{\eta}_1(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}n_2M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(-2n_1+n_2)\big)q^{-Q(-n_1,n_2)}\\
&\quad+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_1(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}\mathrm{e}^{-\pi(3n_1+2n_2)^2v}M\big(\sqrt{3v}n_1\big)q^{-Q(\boldsymbol{n})}\\
&\quad+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\bar{\eta}_1(\boldsymbol{\mu})\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}\mathrm{e}^{-\pi(-3n_1+2n_2)^2v}M\big(-\sqrt{3v}n_1\big)q^{-Q(-n_1,n_2)}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}}\eta_1(\boldsymbol{\mu})\Bigg[\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\mu}+\mathbb{N}_0^2}\big(n_2M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\mathrm{e}^{-\pi(3n_1+2n_2)^2v}\\
&\quad\times M\big(\sqrt{3v}n_1\big)\big)q^{-Q(\boldsymbol{n})}+\sum_{\boldsymbol{n}\in(1-\mu_1,\mu_2)+\mathbb{N}_0^2}\big(n_2M_2\big(\sqrt{3};\sqrt{3v}(-2n_1+n_2),\sqrt{v}n_2\big)\\
&\quad+\frac{1}{4\pi\sqrt{v}}\mathrm{e}^{-\pi(-3n_1+2n_2)^2v}M\big(-\sqrt{3v}n_1\big)\big)q^{-Q(-n_1,n_2)}\Bigg]\\
&=\mathbb{E}_1^{*(\varrho)}(\tau)+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_1(\boldsymbol{\mu})X_1(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

B.6 命题的证明 3.10

根据 [11], , 我们可以将 $\mathbb{E}_0^{(\varrho)}$ 和 $\mathbb{E}_1^{(\varrho)}$ 改写为

$$\mathbb{E}_0^{(\varrho)}(\tau) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_0(\boldsymbol{\alpha})\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\theta_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})+\theta_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})}{\sqrt{-\mathrm{i}(z_1+\tau)}\sqrt{-\mathrm{i}(z_2+\tau)}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1^{(\varrho)}(\tau) = {}& \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{2\theta_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})-\theta_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})}{\sqrt{-\mathrm{i}(z_1+\tau)}(-\mathrm{i}(z_2+\tau))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1\\ &+\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\theta_5(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})}{(-\mathrm{i}(z_1+\tau))^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\mathrm{i}(z_2+\tau)}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1.\end{aligned}$$

乐趣 函数 $\theta_\ell(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})$ 定义于方程（A.5）且可等价地写为 s

$$\begin{aligned}\theta_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z}) &= \frac{1}{m^2}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m(2\alpha_1+\alpha_2+\delta)}\left(\frac{3z_1}{m}\right)\theta^1_{m,m(\alpha_2+\delta)}\left(\frac{z_2}{m}\right),\\ \theta_2(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z}) &= \frac{1}{m^2}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m(3\alpha_1+2\alpha_2+\delta)}\left(\frac{z_1}{m}\right)\theta^1_{m,m(\alpha_1+\delta)}\left(\frac{3z_2}{m}\right),\\ \theta_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z}) &= \frac{1}{m}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m(2\alpha_1+\alpha_2+\delta)}\left(\frac{3z_1}{m}\right)\theta^0_{m,m(\alpha_2+\delta)}\left(\frac{z_2}{m}\right),\\ \theta_4(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z}) &= \frac{1}{m}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m(3\alpha_1+2\alpha_2+\delta)}\left(\frac{z_1}{m}\right)\theta^0_{m,m(\alpha_1+\delta)}\left(\frac{3z_2}{m}\right),\\ \theta_5(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z}) &= \frac{1}{m}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^0_{m,m(3\alpha_1+2\alpha_2+\delta)}\left(\frac{z_1}{m}\right)\theta^1_{m,m(\alpha_1+\delta)}\left(\frac{3z_2}{m}\right).\end{aligned}$$

不过，正如下述引理所证明的，这些项中的大多数之和为零。

引理 B.1。 利用上述定义，

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_0(\boldsymbol{\alpha})\theta_1(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})=0,\qquad\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\theta_3(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})=0,\qquad\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\tilde{\mathcal{S}}}\theta_5(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{z})=0.$$

证明。 由于 θ 级数以及对 δ 的求和具有对称性，我们只需关注方程（ $\boldsymbol{\alpha}$ 3.9）中定义的非整数部分。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\eta_0\big(\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}\big)\theta_1\big(\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)},\mathbf{z}\big)=-\eta_0\big(\boldsymbol{\alpha}_{baw}^{(1)}\big)\theta_1\big(\boldsymbol{\alpha}_{baw}^{(2)},\mathbf{z}\big),\\ &\theta_3\big(\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)},\mathbf{z}\big)=-\theta_3\big(\boldsymbol{\alpha}_{baw}^{(2)},\mathbf{z}\big),\qquad\theta_5\big(\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)},\mathbf{z}\big)=-\theta_5\big(\boldsymbol{\alpha}_w^{(2)},\mathbf{z}\big).\end{aligned}$$

结果由 ba 和 $\mathbf{1}$ 属于 W^+ 这一事实得出。 ■

由此可得

$$\mathbb{E}_\nu^{(\varrho)}(\tau) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi)^{-\nu}\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\tilde{\mathcal{S}}}\eta_\nu(\boldsymbol{\mu})\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\Theta_\nu(\boldsymbol{\mu};\mathbf{z})}{(-\mathrm{i}(z_1+\tau))^{1/2}(-\mathrm{i}(z_2+\tau))^{\nu+1/2}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1,$$

其中

$$\Theta_\nu(\boldsymbol{\mu},\mathbf{z}) = (m)^{-2+\nu}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\theta^1_{m,m(3\mu_1+2\mu_2+\delta)}\left(\frac{z_1}{m}\right)\theta^{1-\nu}_{m,m(\mu_1+\delta)}\left(\frac{3z_2}{m}\right).$$

将集合 $\tilde{\mathcal{S}}$ 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}$ 分别代入每个 $w \in W^+$，并利用 θ函数 $\theta_{m,r}^{\nu}$ 关于 $\nu = 0, 1$ 的平移和对称性质，可以将表达式 $\mathbb{E}_{\nu}^{(\varrho)}(\tau)$ 中关于 $\boldsymbol{\mu} \in \tilde{\mathcal{S}}$ 的求和化简为关于 $\boldsymbol{w} \in W^+$ 的求和，该表达式用 $\Theta_{\nu}^{(\varrho)}{}_{,w}(\mathbf{z})$ 表示。

B.7 引理证明4.2

证明。 当 $M_3 = \Sigma(p_1, p_2, p_3)$ 时，我们有唯一的 $\vec{b} = \vec{b}_0$，$\_D = \_1$，以及 $m = p_1p_2p_3$。利用方程（4.7）、命题 3.7 和引理 3.9，我们可以将 $\widehat{Z}$-不变量的伴随对象的秩二部分表示为由（$\mathbb{E}_{\nu}^{(\varrho)}(\tau)$ 中定义的函数 3.26 给出

$$\check{Z}_{\underline{\vec{b}}_0}^{\mathrm{SU}(3)}(\tau) = C\big(q^{-1}\big) \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \big(\mathbb{E}_0^{(\varrho_{\hat{w}})}(m\tau) + \mathbb{E}_1^{(\varrho_{\hat{w}})}(m\tau)\big),$$

差一个一维部分，其中我们有

$$\rho_{\hat{w}} = \big(\vec{\sigma}_{\hat{w}}, \vec{k}_{\hat{w}}, m, D\big) = (\vec{s}_{\hat{w}}, 0, p_1p_2p_3, 1).$$

以及 $\mathbb{E}_{\nu}^{(\varrho)}{}_{,\ \tilde{w}} = -\mathbb{E}_{\nu\,\tilde{w}}^{(\varrho)}{}_{,\ (aba)}$ 采用B.1中的记号，这可由

$$aba\,\vec{\rho} = -\vec{\rho}, \qquad aba\,\Delta\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega},$$

我们可以扩展命题3.10 中的求和式，从而写成

$$\mathbb{E}_{\nu}^{(\varrho)}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(\hat{w})} \mathbb{E}_{\nu,w}^{(\varrho)}(\tau).$$

于是我们得到以下恒等式

$$\begin{aligned}
&C\big(q^{-1}\big) \sum_{\nu=0,1} \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \mathbb{E}_{\nu}^{(\varrho_{\hat{w}})}(m\tau) \\
&\quad = \frac{1}{2} C(q^{-1}) \sum_{\nu=0,1} \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(\hat{w})} (-1)^{\ell(w)} \mathbb{E}_{\nu,w}^{(\varrho_{\hat{w}})}(m\tau) \\
&\quad = \frac{1}{2} C\big(q^{-1}\big) \sum_{\nu=0,1} \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w\hat{w})} \mathbb{E}_{\nu,e}^{(\varrho_{w\hat{w}})}(m\tau) \\
&\quad = \frac{1}{2} |W| C(q^{-1}) \sum_{\nu=0,1} \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \mathbb{E}_{\nu,e}^{(\varrho_{\hat{w}})}(m\tau),
\end{aligned}$$

其中在第三行我们使用了 $\mathbb{E}^{(\varrho}{}_{\hat{\ }\,\substack{w \\ \tilde{w}}} = \mathbb{E}_{\nu\,e}^{(\varrho_{\tilde{w}})\,\nu,\hat{w})}$,，这显然可由（3.28）得到。将上述结果与（3.27）中关于 $\mathbb{E}^{(\varrho_{\hat{w}})}{}_{\nu,\tilde{w}}$ 的双重艾希勒积分表达式结合起来，即得到该引理的结论。■

B.8 命题的证明 4.4

我们以引理 4.3 为出发点，该引理指出

$$\begin{aligned}
\check{Z}_{\underline{\vec{b}}_0}^{\mathrm{SU}(3)}(M_3;\tau) = z_{1d} + \tfrac{|W|}{2m} C\big(q^{-1}\big) \sum_{\hat{w} \in W^{\otimes 3}} (-1)^{\ell(\hat{w})} \sum_{\nu=0,1} \frac{\sqrt{3}}{4\pi^{\nu}} \left(\frac{3\Delta\vec{s}_{\hat{w}}}{m}\right)^{1-\nu} \\
\times \sum_{\delta \in \mathbb{Z}/2} \big(\vartheta'_{w,\delta}, \vartheta_{w,\delta}^{1-\nu}\big)^*(\tau),
\end{aligned}$$

其中，θ 函数的非全纯双重艾希勒积分为

$$\vartheta'_{w,\delta}(\tau)=\theta^{1}_{m,m\delta+\langle\vec{\rho},\vec{\sigma}\rangle}(\tau),\qquad \vartheta^{1-\nu}_{w,\delta}(\tau)=\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\langle\Delta\vec{\omega},\vec{\sigma}\rangle}(3\tau),$$

for

$$\vec{\sigma}_{\hat{w}}=\vec{s}_{\hat{w}}=-\sum_{i=1}^{3}\bar{p}_i w_i(\vec{\rho}).$$

由 $(aba)\vec{\rho}=-\vec{\rho}$，我们有

$$\vec{\sigma}_{(w_1(aba)^{\varepsilon_1},w_2(aba)^{\varepsilon_2},w_3(aba)^{\varepsilon_3})}=-\sum_{i=1}^{3}(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i w_i(\vec{\rho})$$

对于 $\varepsilon_i\in\mathbb{Z}/2$。然后

$$\check{Z}^{\mathrm{SU}(3)}_{\vec{b}_0}(M_3;\tau)=z_{1d}+\tfrac{|W|}{2m}C\big(q^{-1}\big)\sum_{\hat{w}\in W_+^{\otimes 3}}\sum_{\nu=0,1}\frac{\sqrt{3}}{4\pi^{\nu}}\sum_{\delta\in\mathbb{Z}/2}\tilde{\mathbb{E}}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta}(\tau),$$

˜其中$\mathbb{E}_{\nu,\delta}$ 是积分

$$\tilde{\mathbb{E}}^{(\rho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta}(\tau):=-\int_{-\bar{\tau}}^{\mathrm{i}\infty}\int_{z_1}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta}(\mathbf{z})}{(-\mathrm{i}(z_1+\tau))^{1/2}(-\mathrm{i}(z_2+\tau))^{\nu+1/2}}\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1$$

of

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta}(\mathbf{z})=&\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\mathbb{Z}/2}(-1)^{\sum_i\varepsilon_i}\bigg(\sum_i\tfrac{1}{p_i}(-1)^{\varepsilon_i}\langle\Delta\vec{\omega},w_i(\vec{\rho})\rangle\bigg)^{1-\nu}\\&\times\theta^{1}_{m,m\delta+\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i\langle\vec{\rho},w_i(\vec{\rho})\rangle}(z_1)\theta^{1-\nu}_{m,m\delta-\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i\langle\Delta\vec{\omega},w_i(\vec{\rho})\rangle}(3z_2m)\\=&\,2\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(\mathbf{z}),\end{aligned}$$

其中我们用到了被加项在 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mapsto(1,1,1)+(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下不变这一性质，并记作

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(\mathbf{z}):=&\bigg((-1)^{\sum_i\varepsilon_i}\bigg(\sum_i\tfrac{1}{p_i}(-1)^{\varepsilon_i}\langle\Delta\vec{\omega},w_i(\vec{\rho})\rangle\bigg)^{1-\nu}\\&\times\theta^{1}_{m,m\delta+\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i\langle\vec{\rho},w_i(\vec{\rho})\rangle}(z_1)\theta^{1-\nu}_{m,m\delta-\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i\langle\Delta\vec{\omega},w_i(\vec{\rho})\rangle}(3z_2)\bigg)|_{\varepsilon_3=0}.\end{aligned}$$

为简化记号，在本附录中我们将经常省略函数的自变量，但应理解为 $\theta_r^{1-\nu}=\theta_r^{1-\nu}(3z_2)$ 和 $\theta_r^1=\theta_r^1(z_1)$。

使用

$$\langle ab\vec{\rho},\vec{\rho}\rangle=\langle ba\vec{\rho},\vec{\rho}\rangle=\langle ab\vec{\rho},\Delta\vec{\omega}\rangle=-\langle ba\vec{\rho},\Delta\vec{\omega}\rangle=-1$$

以及 $\langle\vec{\rho},\vec{\rho}\rangle=2$, $\langle\vec{\rho},\Delta\vec{\omega}\rangle=0$, 以及

$$\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+r}=(-1)^{\nu-1}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta-r}\quad\text{for all}\quad\delta\in\mathbb{Z}/2,\quad\nu\in\{0,1\},\quad r\in\mathbb{Z}/2m,$$

分别讨论各项贡献很简单。

情形 1：$\hat{}w=(e,\ e,\ e)$。由 $\langle\vec{\rho},\ \Delta\vec{\omega}\rangle=0$，我们可知 $\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}{}_{\nu,\ \delta}(\mathbf{z})=0$ 对于 $\nu=0$，并且

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{(e,e,e)})}_{\nu,\delta}(\mathbf{z})&=2\theta^{1-\nu}_{m,m\delta}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{Z}/2}(-1)^{\sum_i\varepsilon_i}\theta^1_{m,m\delta+2\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i+2\bar{p}_3}\\&=2\theta^{1-\nu}_{m,m\delta}\sum_{\epsilon,\epsilon'}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+2\epsilon\bar{p}_1+2\epsilon'\bar{p}_2+2\bar{p}_3}\end{aligned}$$

对于 $\nu=1$。

情形 2：$\hat{}w=\ (ab,\ e,\ e)$，$\hat{}w=(ba,\ e,\ e)$ 以及排列。对于 $\hat{}w=(ab,\ e,\ e)$，我们有 e

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,e,e)})}_{\nu,\delta}(\mathbf{z})=\left(\frac{1}{p_1}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\bar{p}_1}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+2\epsilon'\bar{p}_2+2\bar{p}_3}.$$

同样，$\hat{}w=(ba,e,e)$呈现相同的答案，并得到

$$\tilde{\Theta}^{(\varrho_{(ba,e,e)})}_{\nu,\delta}(\mathbf{z})=\left(\frac{1}{p_1}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\bar{p}_1}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+2\epsilon\bar{p}_2+2\bar{p}_3}.$$

其余六种$\hat{}w\in W_+^{\otimes3}$选择，其中三个元素中只有一个不同于 $e\in W$，可以完全以相同的方式处理，于是我们得到总和

$$\sum_{\substack{\hat{w}=(w_1,w_2,w_3)\\ \text{one of the } w_i\neq e}}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta}=2\mathbf{P}^+\left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\bar{p}_1}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+2\epsilon'\bar{p}_2+2\bar{p}_3}\right),$$

其中，我们将 $\mathbf{P}^+$ 记为 (p_1,p_2,p_3) 的偶排列群。

情况 3：$\hat{}w=(ab,ab,e)$，$\hat{}w=(ba,ba,e)$，$\hat{}w=(ab,ba,e)$，$\hat{}w=(ba,ab,e)$ 以及排列。我们注意到 $(-1)^{\varepsilon}\langle\Delta\vec{\omega},w(\vec{\rho})\rangle$ 在 $\varepsilon\leftrightarrow\varepsilon+1$, $ab\leftrightarrow ba$ 作用下保持不变。

由此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}/2}\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ba,ba,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ab,ba,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,1+\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ba,ab,e)})}_{\nu,\delta,(1+\varepsilon,\varepsilon)}\\&\quad=2\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\bar{p}_1+\bar{p}_2}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+\epsilon'\bar{p}_2+2\bar{p}_3}\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}&\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}/2}\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,1+\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ba,ba,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,1+\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ab,ba,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}+\Theta^{(\varrho_{(ba,ab,e)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}\\&\quad=2\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+\bar{p}_1-\bar{p}_2}\sum_{\epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+\epsilon'\bar{p}_2+2\bar{p}_3}.\end{aligned}$$

我们还有上述对象在偶置换下的像，对应于 $w_1=e$ 或 $w_2=e$ 的情形。

情形 4：$\hat{}w=(ab,ab,ab)$, $\hat{}w=(ba,ba,ba)$。与之前类似，我们有

$$\begin{aligned}\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}&=\Theta^{(\varrho_{(ba,ba,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)}\left(\frac{(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu}\\&\quad\times\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^1_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3},\end{aligned}$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} = \Theta^{(\varrho_{(ba,ab,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} = -\left(\frac{(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ba,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} = \Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} = -\left(\frac{(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(-\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} = \Theta^{(\varrho_{(ba,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} = -\left(\frac{(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} = \Theta^{(\varrho_{(ba,ba,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} = -\left(\frac{(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ba,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} = \Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} = -\left(\frac{(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} = \Theta^{(\varrho_{(ba,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} = \left(\frac{(-1)^{\varepsilon}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3}{m}\right)^{1-\nu} \times \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)+\bar{p}_3}\theta^{1}_{m,m\delta+(-1)^{\varepsilon+1}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)-\bar{p}_3}.$$

综上，我们得到

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} + \Theta^{(\varrho_{(ba,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} + \Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} + \Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon+1)} + (a \leftrightarrow b)$$
$$= 2\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+(-1)^{\varepsilon}\frac{1}{p_3}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(\bar{p}_1+\bar{p}_2)+(-1)^{\varepsilon}\bar{p}_3}\sum_{\epsilon,\epsilon'}\epsilon\epsilon'\theta^{1}_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+\epsilon'\bar{p}_2-\bar{p}_3},$$

$$\Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon)} + \Theta^{(\varrho_{(ba,ba,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon)} + \Theta^{(\varrho_{(ab,ab,ab)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon,\varepsilon+1)} + \Theta^{(\varrho_{(ab,ba,ba)})}_{\nu,\delta,(\varepsilon+1,\varepsilon+1)} + (a \leftrightarrow b)$$
$$= 2\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+(-1)^{\varepsilon}\frac{1}{p_3}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+(\bar{p}_1-\bar{p}_2)+(-1)^{\varepsilon}\bar{p}_3}\sum_{\epsilon,\epsilon'}\epsilon\epsilon'\theta^{1}_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1+\epsilon'\bar{p}_2-\bar{p}_3}.$$

最后，将上述四种情形的贡献相加，我们定义一个集合 $\mathcal{R}\subset\mathbb{Z}/2m$，其中

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3$$

and

$$\mathcal{R}_0 = \{0\}, \qquad \mathcal{R}_1 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1\}, \qquad \mathcal{R}_2 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1+\bar{p}_2, \bar{p}_1-\bar{p}_2\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \mathbf{P}^+\{\bar{p}_1+\bar{p}_2-\bar{p}_3, -\bar{p}_1-\bar{p}_2+\bar{p}_3\}.$$

对于每个 $r\in\mathcal{R}$，我们设 $a_i^{(r)} := 2-|r_i|$，若 $r=\sum_i r_i\bar{p}_i$。例如，我们有

$$\left(a_1^{(\bar{p}_1+\bar{p}_2)}, a_2^{(\bar{p}_1+\bar{p}_2)}, a_3^{(\bar{p}_1+\bar{p}_2)}\right) = \left(a_1^{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)}, a_2^{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)}, a_3^{(\bar{p}_1+\bar{p}_2)}\right) = (1,1,2).$$

利用上述定义，我们可以写出

$$\sum_{\hat{w}\in W_+^{\otimes 3}}\tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta} = 2\sum_{r\in\mathcal{R}}\left(\frac{r}{m}\right)^{1-\nu}\theta^{1-\nu}_{m,m\delta+r}\sum_{\epsilon,\epsilon}\epsilon\epsilon'\theta^{1}_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1a_1^{(r)}+\epsilon'\bar{p}_2a_2^{(r)}+\bar{p}_3a_3^{(r)}}$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{R}} \left(\frac{r}{m}\right)^{1-\nu} \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+r} \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\mathbb{Z}/2} (-1)^{\sum_i \varepsilon_i} \theta^1_{m,m\delta+\sum_i(-1)^{\varepsilon_i}\bar{p}_i a_i^{(r)}}.$$

由 $(p_i,p_j)=1$，我们可见 $\Omega_m(\bar{p}_i)$ 的每一行恰好有一个非零元素，因为

$$r+r'\equiv 0(2\bar{p}_i), \qquad r-r'\equiv 0(2p_i)$$

对于任意给定的 $r\in\mathbb{Z}/2m$，$\mathbb{Z}/2m$ 关于 r' 有唯一解。

特别地，可以证明。

$$\sum_{r'\in\mathbb{Z}/2m} (\Omega_m(\bar{p}_i))_{m\delta+\sum_j(-1)^{\varepsilon_j}\bar{p}_j a_j^{(r)},r'} X_{r'} = X_{m\delta+\sum_j(-1)^{\varepsilon_j+\delta_{i,j+1}}\bar{p}_j a_j^{(r)}}$$

对于所有 $\delta, a_j^{(r)}\in\mathbb{Z}$。考虑与精确因子群的子群 $K=\{1,\bar{p}_1,\bar{p}_2,\bar{p}_3\}$ 相对应的亚纯群 $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的表示。当这三个 p_i 都是无平方因子时，该表示是不可约的。我们有

$$\begin{aligned}\left(P^{m+K}\theta_m\right)_{m\delta+\bar{p}_1a_1+\bar{p}_2a_2+\bar{p}_3a_3} = \frac{1}{4}(&\theta_{m,m\delta+\bar{p}_1a_1+\bar{p}_2a_2+\bar{p}_3a_3} + \theta_{m,m\delta+\bar{p}_1a_1-\bar{p}_2a_2-\bar{p}_3a_3}\\ &+ \theta_{m,m\delta-\bar{p}_1a_1+\bar{p}_2a_2-\bar{p}_3a_3} + \theta_{m,m\delta-\bar{p}_1a_1-\bar{p}_2a_2+\bar{p}_3a_3}).\end{aligned}$$

再次利用 $\theta^1_{m,r}=-\theta^1_{m,-r}$，我们看到

$$\theta^{1,m+K}_{m\delta+\sum_i\bar{p}_ia_i^{(r)}} := \left(P^{m+K}\theta^1_m\right)_{m\delta+\sum_i\bar{p}_ia_i^{(r)}} = \frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\epsilon}\epsilon\epsilon'\theta^1_{m,m\delta+\epsilon\bar{p}_1a_1^{(r)}+\epsilon'\bar{p}_2a_2^{(r)}+\bar{p}_3a_3^{(r)}}.$$

因此，我们得到以下表达式

$$\sum_{\hat{w}\in W_+^{\otimes 3}} \tilde{\Theta}^{(\varrho_{\hat{w}})}_{\nu,\delta} = 8\sum_{r\in\mathcal{R}} \left(\frac{r}{m}\right)^{1-\nu} \theta^{1-\nu}_{m,m\delta+r}\theta^{1,m+K}_{m,m\delta+\sum_i\bar{p}_ia_i^{(r)}}.$$

C 表

在本附录中，我们汇总了第 5 节所述示例的计算数据表。这些表格均按相同格式分块排列，其中每个˘块列出了函数 Z 中由一个广义 A_2 假 theta 函数贡献的部分。提醒读者，广义 A_2 假 theta 函数的定义可ˆ参见第 3 节；该函数是伴随函数 Z 的构件，且

˜ ˆ与一个集合 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\hat{w}}$相关，该集合则由相对于 Z 的一组三个韦伊群元素 ˆw确定。

符号上，每个分块按以下方式组织

(w_1,w_2,w_3)	$\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}$	$\boldsymbol{\alpha}_1^{(2)}$
(s_1,s_2)	$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{(1)}$	$\boldsymbol{\alpha}_{ab}^{(2)}$
(k_1,k_2)	$\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{(1)}$	$\boldsymbol{\alpha}_{ba}^{(2)}$

再次使用韦伊群元素的相同记号（B.1）。第一列包含→韦伊群元素三元组 ˆw 以及向量 $\vec{s}$ 和 k，第二列和第三列则包含 $\boldsymbol{\alpha}_w^{(1)}$、$\boldsymbol{\alpha}_w^{(2)}$，其中 w 限于旋转子群 $W_+\subset W$的元素。

$\left(\frac{6}{7}, -\frac{43}{140}\right)$
$\left(\frac{11}{20}, \frac{73}{70}\right)$
$\left(\frac{223}{140}, -\frac{103}{140}\right)$
$\left(1, -\frac{43}{140}\right)$
$\left(\frac{97}{140}, \frac{43}{70}\right)$
$\left(\frac{183}{140}, -\frac{43}{140}\right)$
$\left(\frac{37}{35}, -\frac{51}{140}\right)$
$\left(\frac{97}{140}, \frac{39}{70}\right)$
$\left(\frac{5}{4}, -\frac{27}{140}\right)$
$\left(\frac{33}{35}, -\frac{27}{140}\right)$
$\left(\frac{3}{4}, \frac{39}{70}\right)$
$\left(\frac{183}{140}, -\frac{51}{140}\right)$
$\left(1, -\frac{27}{140}\right)$
$\left(\frac{113}{140}, \frac{27}{70}\right)$
$\left(\frac{167}{140}, -\frac{27}{140}\right)$
$\left(\frac{31}{28}, -\frac{29}{70}\right)$
$\left(\frac{97}{140}, \frac{71}{140}\right)$
$\left(\frac{6}{5}, -\frac{13}{140}\right)$
$\left(\frac{127}{140}, -\frac{11}{70}\right)$
$\left(\frac{3}{4}, \frac{83}{140}\right)$
$\left(\frac{47}{35}, -\frac{61}{140}\right)$
$\left(\frac{21}{20}, -\frac{17}{70}\right)$
$\left(\frac{113}{140}, \frac{47}{140}\right)$
$\left(\frac{8}{7}, -\frac{13}{140}\right)$
$\left(\frac{25}{28}, -\frac{13}{140}\right)$
$\left(\frac{4}{5}, \frac{71}{140}\right)$
$\left(\frac{183}{140}, -\frac{29}{70}\right)$
$\left(\frac{113}{140}, -\frac{1}{140}\right)$
$\left(\frac{4}{5}, \frac{83}{140}\right)$
$\left(\frac{39}{28}, -\frac{41}{70}\right)$
$\left(\frac{19}{20}, -\frac{13}{140}\right)$
$\left(\frac{6}{7}, \frac{47}{140}\right)$
$\left(\frac{167}{140}, -\frac{17}{70}\right)$
$\left(1, -\frac{13}{140}\right)$
$\left(\frac{127}{140}, \frac{13}{70}\right)$
$\left(\frac{153}{140}, -\frac{13}{140}\right)$

$\left(\frac{9}{5}, -\frac{17}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{23}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, -\frac{7}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{9}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{11}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{11}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, -\frac{19}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{19}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{19}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{13}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{19}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{13}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{19}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{9}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, -\frac{9}{10}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{20}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{1}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{19}{20}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, -\frac{13}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{20}\right)$

$\left(\frac{31}{20}, -\frac{11}{10}\right)$	$\left(\frac{11}{20}, \frac{13}{20}\right)$	$\left(\frac{21}{20}, \frac{3}{20}\right)$	$\left(\frac{39}{20}, -\frac{17}{10}\right)$
$\left(\frac{9}{20}, \frac{11}{20}\right)$	$\left(\frac{6}{5}, \frac{1}{20}\right)$	$\left(\frac{6}{5}, -\frac{9}{20}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{20}\right)$
$\left(1, \frac{11}{20}\right)$	$\left(\frac{5}{4}, -\frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{10}\right)$	$\left(\frac{39}{20}, -\frac{17}{10}\right)$
			$\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{20}\right)$
			$\left(\frac{4}{5}, \frac{23}{20}\right)$
			$\left(\frac{19}{20}, \frac{1}{20}\right)$
			$\left(1, \frac{1}{20}\right)$
			$\left(\frac{21}{20}, -\frac{1}{10}\right)$
			$\left(\frac{29}{20}, -\frac{9}{20}\right)$
			$\left(1, -\frac{9}{20}\right)$
			$\left(\frac{11}{20}, \frac{9}{10}\right)$
			$\left(\frac{6}{5}, \frac{11}{20}\right)$
			$\left(\frac{7}{4}, -\frac{17}{10}\right)$
			$\left(\frac{1}{20}, \frac{23}{20}\right)$
			$\left(\frac{7}{4}, -\frac{13}{10}\right)$
			$\left(\frac{9}{20}, \frac{7}{20}\right)$
			$\left(\frac{4}{5}, \frac{19}{20}\right)$
			$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{20}\right)$
			$\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{20}\right)$
			$\left(\frac{21}{20}, -\frac{3}{10}\right)$
			$\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{20}\right)$
			$\left(\frac{6}{5}, -\frac{13}{20}\right)$
			$\left(\frac{11}{20}, \frac{7}{10}\right)$
			$\left(1, \frac{19}{20}\right)$
			$\left(\frac{39}{20}, -\frac{19}{10}\right)$
			$\left(\frac{1}{20}, \frac{19}{20}\right)$



致谢

我们感谢 Boudewijn Bosch、Francesca Ferrari 和 Sergei Gukov 富有成效的讨论。作者也感谢审稿人提出的建议。M.C. 的工作得到欧洲研究委员会启动基金 H2020 # 640159、荷兰科学研究组织 Vidi 资助（编号 016.Vidi.189.182）以及台湾科技部（110-2115-M-001-018-MY3）的支持。I.C. 的工作部分得到欧洲研究委员会启动基金 H2020 # 640159 和荷兰科学研究组织 Vidi 资助（编号 016.Vidi.189.182）的支持。D.P. 的工作得到荷兰科学研究组织 Vidi 资助（编号 016.Vidi.189.182）的支持。I.C. 和 D.P. 感谢中央研究院在项目最后阶段提供的款待。

参考文献

[1] AlexandrovS.，秩 N Vafa–Witten 不变量、模性与爆破， *Adv. Theor. Math. Phys.* **25** (2021年)，275–308，arXiv:2006.10074。[2] Alexandrov S.，来自模异常的Vafa–Witten 不变量，*Commun. Number Theory Phys.* **15** (2021年)，149–219，arXiv:2005.03680。[3] Alexandrov S.、BanerjeeS.、ManschotJ.、Pioline B.，多个D3瞬子与拟模形式I，*Comm. Math. Phys.* **353** (2017年)，379–411，arXiv:1605.05945。[4] Alexandrov S.、Banerjee S.、Manschot J.、PiolineB.，不定theta级数与广义误差函数，*Selecta Math. (N. S.)* **24** (2018年)，3927–3972，arXiv:1606.05495。[5] Alexandrov S.、BanerjeeS.、ManschotJ.、Pioline B.，多个 D3瞬子与拟模形式 II，*Comm. Math. Phys.* **359** (2018年)，297–346，arXiv:1702.05497。[6] AlexandrovS.、Manschot J.、Pioline B.，S对偶与精化 BPS 指标，*Comm. Math. Phys.* **380** (2020年)，755–810，arXiv:1910.03098。[7] Alexandrov S.、Pioline B.，黑洞与高深度拟模形式， *Comm. Math. Phys.* **374** (2020年)，549–625，arXiv:1808.08479。[8] Alim M.、Haghighat B.、HechtM.、Klemm A.、RauchM.、WotschkeT.，跨墙全纯异常与多个M5膜的拟模性， *Comm. Math. Phys.* **339** (2015年)，773–814，arXiv:1012.1608。[9] Benetti GenoliniP.、Cabo-BizetA.、MurthyS.，AdS $_4$/ $_3$ *J. High Energy Phys.* **2023** 2023 6, 125, 71 2301 00763

CFT 的超对称相，()，无页码，arXiv: 。[10] Bringmann K.、FolsomA.、OnoK.、RolenL.，调和 Maass形式与拟模形式：理论与应用， *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*，第64 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。[11] Bringmann K.、Kaszian J.、MilasA.，高深度量子模形式、多重 Eichler 积分与$\mathfrak{sl}_3$ 假 theta 函数，*Res. Math. Sci.* **6** (2019年)，20，41 页，arXiv:1704.06891。[12] BringmannK.、Kaszian J.、Milas A.，向量值高深度量子模形式与高阶 Mordell 积分， *J. Math. Anal. Appl.* **480** (2019年)，123397，22 页，arXiv:1803.06261。[13] Bringmann K.、Kaszian J.、Milas A.、Nazaroglu C.，秩二假 theta 函数的积分表示及其模性性质， *Res. Math. Sci.* **8** (2021年)，54，31 页，arXiv:2101.02902。[14] Bringmann K.、Kaszian J.、Milas A.、NazarogluC.，高深度假模形式，*Commun. Contemp. Math.* **25** 2023 2250043, 53 2109 00394 ()，

页码，arXiv: 。[15] BringmannK.、Kaszi´an J.、RolenL.，椭圆轨形的 Gromov–Witten 理论中出现的不定θ函数， *Camb. J. Math.* **6** (2018年)，25–57，arXiv:1608.08588。[16] Bringmann K.、MahlburgK.、MilasA.，高深度量子模形式与经管道化的三维流形，*Lett. Math. Phys.* **110**(2020年)，2675–2702，arXiv:1906.10722。[17] BringmannK.、Mahlburg K.、Milas A.，量子模形式与三维流形的管道图，*J. Combin. Theory Ser. A* **170** (2020年)，105145，32 页，arXiv:1810.05612。[18] Bringmann K.、Nazaroglu C.， 上U(3 $\mathbb{P}^2$ *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** 2019 6135 6159, 1803 09270)的Vafa–Witten 不变量的精确公式，()，– arXiv:。[19] BringmannK.、NazarogluC.，假 theta 函数模性质的框架，*Res. Math. Sci.* **6** 2019 30, 23 1904 05377 ()，

页码，arXiv: 。

[20] BringmannK.、Ono K.，《 $f(q)$假theta函数猜想与分拆秩》， *Invent. Math.* **165** (2006年)，243–266。[21] Bruinier J.H.、Funke J.，《关于两个几何 theta 提升》，*Duke Math. J.* **125** (2004年)，45–90，arXiv:math.NT/0212286。[22] CappelliA.、Itzykson C.、Zuber J.B.，《极小共形不变理论的A-D-E 分类》，*Comm. Math. Phys.* **113**(1987年)，1–26。[23] Chauhan S.、Ramadevi P.，SO(3) 和 OSp(1|2)群的 $\hat{}Z$-不变量，*Ann. Henri Poincaré* **24** (2023年)，3347–3371，arXiv:2209.00095。[24] Cheng M.C.N.、ChunS.、Feigin B.、Ferrari F.、GukovS.、Harrison S.M.、Passaro D.，三维流形与顶点算子代数特征，arXiv:2201.04640。[25] Cheng M.C.N.、Chun S.、FerrariF.、GukovS.、Harrison S.M.，三维模性， *J. High Energy Phys.* **2019** (2019年)，第10 期，010，93 页，arXiv:1809.10148。[26] Cheng M.C.N.、DuncanJ.F.R.，共形场论、自守形式及相关主题中的拉德马赫和与拉德马赫级数， *Contrib. Math. Comput. Sci.*，第8卷，2014，143 182，1210 3066 施普林格，海德堡，– arXiv: 。[27] ChengM.C.N.、FerrariF.、Sgroi G.，三维流形量子不变量与假 theta 函数，

Philos. ()，页，

Trans. Roy. Soc. A **378** 2020 20180439, 15 1912 07997
arXiv: 。[28] Choi D.、Lim S.、Rhoades R.C.，拟模形式与量子模形式，

Proc. Amer. Math. Soc. ( )，– 。

144 2016 2337 2349
[29] ChungH.-J.，塞弗特流形的 BPS不变量， *J. High Energy Phys.* **2020**(2020年)，第3 期，113，66 页，arXiv:1811.08863。[30] ChungH.-J.，有理层级下

3 K 2021 2, -流形

083, 22 1906 12344
的BPS不变量， *J. High Energy Phys.* **2021** ()，第期页，arXiv:。[31] Chung H.-J.，某些 35、106、39 20212008 02786 -流形不变量的复苏分析， *J. High Energy Phys.* **2021** ()，第期页，arXiv: 。[32] Chung H.-J.，塞弗特流形中纽结的 BPS 不变量， *J. High Energy Phys.* **2022**(202212、122、232201 08351)，第 期 页，arXiv: 。[33] DabholkarA.、Gomes J.、MurthyS.，非微扰黑洞熵与克洛斯特曼和，

J. High ( ),

Energy Phys. **2015** 2015 3, 074, 35 1404 0033
第 期 页，arXiv: 。[34] DabholkarA.、Putrov P.，假模性的三种化身， *Internat. J. Modern Phys. A* **36** (20212130020、37 2110 09790)，页，arXiv: 。[35] DabholkarA.、PutrovP.、Witten E.，对偶性与假模性，*SciPost Phys.* **9**(2020年)，072，45 页，arXiv:2004.14387。[36] de Boer J.、ChengM.C.N.、DijkgraafR.、Manschot J.、Verlinde E.，吸引子黑洞的法雷级数尾，*J. High Energy Phys.* **2006** (2006年)，第 11期，024，28 页，arXiv:hep-th/0608059。[37] Denef F.、MooreG.W.，分裂态、熵之谜、黑洞与晕，*J. High Energy Phys.* **2011** (2011年)，第 11期，129，152 页，arXiv:hep-th/0702146。[38] Dijkgraaf R.、MaldacenaJ.、Moore G.、VerlindeE.，黑洞法雷级数尾，arXiv:hep-th/0005003。[39] Eichler M.，《阿贝尔积分的一种推广》， *Math. Z.* **67** (1957年)，267–298。[40] Ekholm T.、GruenA.、GukovS.、Kucharski P.、Park S.、Sto˘si´cM.、Su-lkowski P.，纽结补空间的分支、箭图与理想， *J. Geom. Phys.* **177** (2022年)，104520，75 页，arXiv:2110.13768。[41] Ekholm T.、GruenA.、Gukov S.、Kucharski P.、Park S.、Su-lkowski P.，大 $N\hat{}Z$ ：从曲线计数到量子模性， *Comm. Math. Phys.* **396** (2022年)，143–186，arXiv:2005.13349。[42] Ellegaard AndersenJ.、Elbæk Misteg˚ard W.，塞弗特纤维化同调球量子不变量的复苏分析， *J. Lond. Math. Soc.* **105** (2022年)，709–764，arXiv:1811.05376。[43] FeiginB.L.、TipuninI.Yu.，与单李代数相联系的对数共形场论，arXiv:1002.5047。[44]FerrariF.、Putrov P.，超群、 q-级数与三维流形， *Ann. Henri Poincaré*，即将出版，arXiv:2009.14196。[45] Ferrari F.、Reys V.，混合拉德马赫和BPS 黑洞， *J. High Energy Phys.* **2017** (2017 7、094、361702 02755)，第 期 页，arXiv: 。[46] Gukov S.、Manolescu C.，纽结补空间的二元级数，*Quantum Topol.* **12** (2021年)，1–109，arXiv:1904.06057。

[47] GukovS.、Marino M.、Putrov P.，《复Chern–Simons 理论中的复苏》，arXiv:1605.07615。[48] GukovS.、Park S.、Putrov P.，《来自 BPS q级数的协边不变量》，*Ann. Henri Poincaré* **22** (2021年)，4173–4203，arXiv:2009.11874。[49] Gukov S.、PeiD.、Putrov P.、Vafa C.，《BPS谱与 3 *J. Knot Theory Ramifications* 流形 **29** 2020 2040003, 85 1701 06567 不变量》，( )，页码，arXiv: . 。[50] Gukov S.、PutrovP.、VafaC.，《五膜与三维流形同调》，*J. High Energy Phys.* **2017** (2017年)，第7期，071，80 页，arXiv:1602.05302。[51] GuptaR.K.、Murthy S.、Nazaroglu C.，《压扁环面流形与高深度拟模形式》，*J. High Energy Phys.* **2019** (2019年)，第2 期，064，44 页，arXiv:1808.00012。[52] HikamiK.，《作为量子不变量的拟（假）θ函数》，*Regul. Chaotic Dyn.* **10** (2005年)，509–530，arXiv:math-ph/0506073。[53] HikamiK.，《关于布里斯科恩同调球的量子不变量》，*Internat. J. Math.* **16** (2005年)，661–685，arXiv:math-ph/0405028。[54] Hikami K.，《量子不变量、模形式与格点》，*Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005年)，121–154，arXiv:math-ph/0409016。[55] LawrenceR.、Zagier D.，《三维流形的模形式与量子不变量》，*Asian J. Math.* **3** (1999年)，93–107。[56] MaldacenaJ.、Strominger A.，《AdS_3 黑洞与弦论排斥原理》，*J. High Energy Phys.* **1998** (1998年)，第 12期，005，24 页，arXiv:hep-th/9804085。[57] Males J.、Mono A.、Rolen L.，《高深度拟θ函数与 q *Forum Math.* 超几 **33** 2021 857 866, 2101 04991 何级数》，( )，– arXiv: . 。[58] Manschot J.，《Vafa–Witten 理论与模形式的迭代积分》，*Comm. Math. Phys.* **371** (2019年)，787–831，arXiv:1709.10098。[59] MatsusakaT.、Terashima Y.，《塞弗特纤维化同调三球的同调块的模变换》，arXiv:2112.06210。[60] Minahan J.A.、NemeschanskyD.、Vafa C.、Warner N.P.，《E弦与 $N = 4$ 拓扑杨–米尔斯理论》，*Nuclear Phys. B* **527**(1998年)，581–623，arXiv:hep-th/9802168。[61] Murakami Y.，《Gukov–Pei–Putrov–Vafa 猜想的证明》，arXiv:2302.13526。[62] Murthy S.、PiolineB.，《关于 $\mathcal{N} = 4$ 二缠体的法里故事》，*J. High Energy Phys.* **2009** (2009年)，第 9期，022，27页，arXiv:0904.4253。[63] Niebur D.，《自守形式与积分的构造》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **191** (1974年)，373–385。[64] Park S.，《高秩 $\hat{}Z$ 与 F_K，*SIGMA* **16** (2020年)，044，17 页，arXiv:1909.13002。[65] ParkS.，《反演态和、反演 Habiro级数与不定θ函数》，arXiv:2106.03942。[66] Shimura G.，《关于与自守形式相关的积′分》，*J. Math. Soc. Japan* **11** (1959年)，291–311。[67] Skoruppa N.-P.，《关于 ¨雅可比形式与半整数权模形式之间的联系》，*Bonn. Math. Schr.*，第 159卷，Universit¨ät 波恩，波恩，1985年。[68] Skoruppa N.-P.，《临界权雅可比形式与韦伊表示》，载于《Schiermon- nikoog 模形式》，剑桥大学出版社，剑桥，2008年，239–266，arXiv:0707.0718。[69] Zagier D.，《实二次域的ζ函′数在负整数n′处的值》，*Astérisque* **41–42** (1977年)，135–151。[70] Zagier D.，《拉马努金拟θ函数及其应用（继 Zwegers和 Ono–Bringmann之后）》，*Astérisque* (2009年)，第 986 号报告，143–164。[71] Zagier D.，《量子模形式》，载于《数学量子》，*Clay Math. Proc.*，第 11卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010年，659–675。[72] Zagier D.，《全纯量子模形式》，豪斯多夫数学中心报告，2020年，网址：https://www.youtube.com/watch?v=2Rj_xh3UKrU。[73] Zwegers S.，《拟θ函数》，arXiv:0807.4834。