利用费耶和与德拉瓦莱普桑和逼近周期函数

Mikhael Shahoud*

摘要：本文给出若干结果，证明了在勒贝格空间中利用费耶均值和德拉瓦莱普桑均值对周期函数进行逼近，并给出了以函数和二阶连续模为参数的估计。

关键词：空间中的杰克逊不等式；逼近；费耶均值、德拉瓦莱普桑均值、二阶光滑模。

1. 引言：希尔伯特空间由所有-周期的 2π 幂次勒贝格可积函数组成，其在 R 上的范数为

$$\|f\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)^2 dx| \right\}^{\frac{1}{2}}$$

考虑函数的三角傅里叶级数 $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \qquad (1)$$

并且 S_n 是第 n^{th} 个傅里叶级数部分和

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \rho_k \cos(kx + \varphi_k) \qquad (2)$$

并且，费耶和是函数傅里叶级数前 n^{th} 项部分和的一种算术平均。

$$\sigma_{n-1}(f) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

引理（1）：费耶和可以写成次数不超过 (n-1) 的三角多项式形式。（见 [2]）。

证明:

由方程（2）可得:

* 瓦迪国际大学数学助理教授

$$S_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$S_1 = \frac{a_0}{2} + \rho_1 \cos(x + \varphi_1)$$

$$S_2 = \frac{a_0}{2} + \rho_1 \cos(x + \varphi_1) + \rho_2 \cos(2x + \varphi_2)$$

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \rho_1 \cos(x + \varphi_1) + \rho_2 \cos(2x + \varphi_2) + \ldots + \rho_{n-1} \cos((n-1)x + \varphi_{n-1})$$

求和后再除以 n：

$$\sigma_{n-1}(f) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma_{n-1}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

注（1）：

对于每个，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2$ 将收敛（见[4]）

此外，该级数的各项均为非负实数，并从某一项开始单调不增

因此

$$\rho_p^2 \le \rho_q^2 \qquad \forall p \quad , \quad (p > q \ge n_0)$$

我们得到

$$\frac{\rho_p^2}{p} \le \frac{\rho_q^2}{q} \qquad \forall p \quad , \quad (p > q \ge n_0)$$

注（2）：

由函数 (1) 的傅里叶级数可得：

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \cos(kx + \varphi_k) + \beta_k \text{正弦余弦}$$

因此

$$f(x) - \sigma_{n-1}(f) \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \rho_k \cos(kx + \varphi_k) + \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

根据帕塞瓦尔等式

$$\left\| f(x)-\sigma_{n-1}(f)\right\|^2 \approx \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \rho_k^2+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 \qquad (3).$$

德拉瓦莱普桑和是傅里叶级数从第 mth 项到第 (n-1)th 项部分和的算术平均之一。

$$V_m^{n-1}(f)=\frac{S_m+S_{m+1}+\dots\dots\dots+S_{n-1}}{n-m}$$

引理（2）：德拉瓦莱普桑和可以写成次数不高于 (n-1) 的三角多项式形式。（见[3]）

证明:

由等式（2）可得:

$$\begin{aligned}
S_m &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\rho_k\cos(kx+\varphi_k)\\
S_{m+1} &= S_m+\rho_{m+1}\cos[(m+1)x+\varphi_{m+1}]\\
S_{m+2} &= S_m+\rho_{m+1}\cos[(m+1)x+\varphi_{m+1}]+\rho_{m+2}\cos[(m+2)x+\varphi_{m+2}]\\
&.\\
&.\\
S_{n-1} &= S_m+\rho_{m+1}\cos[(m+1)x+\varphi_{m+1}]+\rho_{m+2}\cos[(m+2)x+\varphi_{m+2}]+\dots\dots+\\
&\quad+\rho_{n-1}\cos[(n-1)x+\varphi_{n-1}]
\end{aligned}$$

将各项相加后除以 m-n:

$$V_m^{n-1}(f)=S_m+\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(1-\frac{k-m}{n-m}\right)\rho_k\cos(kx+\varphi_k)$$

注记（**3**）:

由函数的傅里叶级数可得: $\underset{k}{\ }\ \underset{k}{\ }\ \underset{\text{kxkx axf}}{\underline{\ \ }}\ (\ )\approx\ \underset{2}{\ }^{0}+\sum_{=1}^{\ }\alpha\qquad+\beta$正弦余弦$_k$

因此

$$f(x)-V_m^{n-1}(f)\approx\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k-m}{n-m}\right)\rho_k\cos(kx+\varphi_k)+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k\cos(kx+\varphi_k)$$

由帕塞瓦尔等式

$$\left\| f(x)-V_m^{n-1}(f) \right\|^2 \approx \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{k-m}{n-m} \right)^2 \rho_k^2 + \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \qquad (4).$$

2. 主要结果

定理（1）：对于任意函数 $f(x)\in L_2 \quad (f(x)\neq const)$ 以及任意自然数可得不等式 n：

$$\left\| f(x)-\sigma_{n-1}(f) \right\| \le \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega_2{}^2(f,t)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall n \ge n_0$$

证明:

由傅里叶级数和帕塞瓦尔等式可得:

$$\left\| f(x-t)-2f(x)+f(x+t) \right\|^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k{}^2 (1-\cos kt)^2$$

另一方面，根据第二连续模的定义

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{|t|\le\delta} \left\| f(x-t)-2f(x)+f(x+t) \right\|$$

$$\omega_2{}^2(f,\delta) \ge \left\| f(x-\delta)-2f(x)+f(x+\delta) \right\|^2 \ge$$

$$\ge 4\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2$$

$$\ge 4\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2 \ \ge 4\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2 \ + 4\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2$$

$$\ge 4\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2 \ + 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k{}^2 (3-4\cos k\delta+\cos 2k\delta)$$

$$\frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,\delta) \ge \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k{}^2 (1-\cos k\delta)^2 \ + \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k{}^2 - \frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k{}^2 \cos k\delta \ + \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k{}^2 \cos 2k\delta$$

将 改为 ,δ我们t可以写成

$$\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2 \le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k{}^2(1-\cos kt)^2 \ +\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt$$

两边求和，得到：

$$\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho_k^2 \le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho_k^2-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k{}^2(1-\cos kt)^2 \ +\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt$$

由（3）可得

$$\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\|^2 \le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^2\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{2}{3}(1-\cos kt)^2\right]+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt$$

特别是（见[1]）

因此

$$\begin{aligned}\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\| &\le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^2\left[\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)-\frac{2}{3}(1-\cos kt)^2\right]+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt\\ &\le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^2\left[\frac{1}{2}(1-\cos kt)-\frac{2}{3}(1-\cos kt)^2\right]+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt\\ &\le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^2\left[(1-\cos kt)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}(1-\cos kt)\right)\right]+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt\\ &\le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^2\left[(1-\cos kt)\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cos kt\right)\right]+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt\\ &\le \frac{1}{6}\omega_2{}^2(f,t)+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos kt-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k{}^2\cos 2kt\end{aligned}$$

对 从 到 积分可得 t 0 $\frac{\pi}{n}$

$$\frac{\pi}{n}\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\|^2 \le \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2{}^2(f,t)\,dt+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_k{}^2}{k}\sin\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_k{}^2}{k}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

下面证明

我们将此级数的各项整理为以下形式

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_k{}^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{\rho^{2}{}_{(2l-1)n+j}}{(2l-1)n+j}\sin\left[(2l-1)n+j\right]\frac{\pi}{n}+\frac{\rho^{2}{}_{2nl+j}}{2nl+j}\sin\left[2nl+j\right]\frac{\pi}{n}\right\}$$

另一方面

$$\sin\left[(2l-1)n+j\right]\frac{\pi}{n}=\sin\left(2l\pi-\pi+\frac{j\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{j\pi}{n}-\pi\right)=-\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right),$$
$$\sin\left[2nl+j\right]\frac{\pi}{n}=\sin\left(2l\pi+\frac{j\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

我们得到

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{\rho^{2}{}_{2nl+j}}{2nl+j}-\frac{\rho^{2}{}_{(2l-1)n+j}}{(2l-1)n+j}\right]\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

我们有

$$\forall l\geq 1\Rightarrow\ 2nl+j>(2l-1)n+j$$

由注记（1）

$$\frac{\rho^2_{2nl+j}}{2nl+j}\leq\frac{\rho^2_{(2l-1)n+j}}{(2l-1)n+j}\qquad\forall l\geq 1\qquad,\ \forall\ j\geq 0$$

此外

$$\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\geq 0\qquad,\qquad 0\leq j\leq n-1$$

因此

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{\rho^{2}{}_{2nl+j}}{2nl+j}-\frac{\rho^{2}{}_{(2l-1)n+j}}{(2l-1)n+j}\right]\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\leq 0$$
$$\Rightarrow\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq 0$$

让我们证明 $\frac{02\sin\sum^{\rho}}{nk\,k}\pi\geq$

为证明这个不等式，我们区分两种情况

第一种情况：设为奇数，则使用符号表示一个数的正确除法。

$$\frac{n}{2}$$

我们将该级数中的各项整理成如下形式

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_k^{\,2}}{k}\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{l=1}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\rho^{\,2}{}_{ln+j}}{ln+j}\sin 2(ln+j)\frac{\pi}{n}+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\rho^{\,2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j}\sin 2[(l+1)n-j]\frac{\pi}{n}\}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\rho^{\,2}{}_{ln+j}}{ln+j}\sin\frac{2j\pi}{n}-\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\rho^{\,2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j}\sin\frac{2j\pi}{n}\ \}$$

当 我们j得到 因此 $\sin\frac{2\pi}{n}=0$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^{\,2}{}_{k}}{k}\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}(\frac{\rho^{\,2}{}_{ln+j}}{ln+j}-\frac{\rho^{\,2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j})\ \sin\frac{2j\pi}{n}$$

当 我们得到[ ] $\sin\frac{2\pi}{n}>0$

and $\forall l\geq 1$ $ln+j<(l+1)n-j$

由注释（1）

$$\frac{\rho^{\,2}{}_{ln+j}}{ln+j}\quad\geq\quad\frac{\rho^{\,2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j}$$

因此

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}(\frac{\rho^{\,2}{}_{ln+j}}{ln+j}-\frac{\rho^{\,2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j})\ \sin\frac{2j\pi}{n}\geq 0$$

$$\Rightarrow\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^{\,2}{}_{k}}{k}\ \sin\frac{2k\pi}{n}\quad\geq\quad 0$$

第二种情况：设为偶数

我们将该级数的各项整理为以下形式

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_k}{k}\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{l=1}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\rho^{2}{}_{ln+j}}{ln+j}\sin 2(ln+j)\frac{\pi}{n}+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\rho^{2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j}\sin 2[(l+1)-j]\frac{\pi}{n}\}=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\rho^{2}{}_{ln+j}}{ln+j}\sin\frac{2j\pi}{n}-\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\rho^{2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j}\sin\frac{2j\pi}{n}\}$$

当 我们j得到 $\sin\frac{2\pi}{n}=0$

当 我们得到 因此 $\sin\frac{2\pi}{n}=0$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho^{2}{}_{k}}{k}\sin\frac{2k\pi}{n}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}(\frac{\rho^{2}{}_{ln+j}}{ln+j}-\frac{\rho^{2}{}_{(l+1)n-j}}{(l+1)n-j})\sin\frac{2j\pi}{n}\geq 0$$

因此

$$\frac{\pi}{n}\left\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\right\|^{2}\leq\frac{1}{6}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\omega_{2}{}^{2}(f,t)\,dt$$

$$\Rightarrow\left\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\right\|\leq\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\omega_{2}{}^{2}(f,t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理（2）：对于任意函数 $f(x)\in L_2\quad(f(x)\neq const)$以及任意自然数将得到以下不等式:

$$\left\|f(x)-V_m^{n-1}(f)\right\|\leq\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\omega_{2}{}^{2}(f,t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad\forall n\geq n_0$$

证明:

要证明这个不等式，只需证明

$$\left\|f(x)-V_m^{n-1}(f)\right\|\leq\left\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\right\|$$

我们有

$$\frac{k-m}{n-m}\leq\frac{k}{n}$$

因此

$$\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k-m}{n-m}\right)^2\rho^2 \le \sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho^2$$

因此

$$\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k-m}{n-m}\right)^2\rho^2+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 \le \sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho^2+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2$$

$$\left\|f(x)-V_m^{n-1}(f)\right\|^2=\sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k-m}{n-m}\right)^2\rho^2+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 \le \sum_{k=m+1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\rho^2+\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2=\left\|f(x)-\sigma_{n-1}(f)\right\|^2$$

参考文献

1. C.H. Ching 和 Ch.K.Chui，三角逼近中的一些不等式，《Bull. Austral. Math. Soc.》8（1973），393-395。2. J. Bustamante，关于用 Fejer 均值进行逼近的直接与强逆不等式，《Demonster. Math.》，53，2020，80-85。3. X.Z. Krasniqi、W. Lenski 和 B. Szal，利用正阶广义 De La Vallee Poussin 均值逼近可积函数，《应用分析与计算杂志》，V12.Nu1.February 2022，106-124。4. N. K. Bari，《三角级数》。科学出版社，莫斯科，1961。俄文版