arXiv:2304.03953v2 [math.LO] 9 Oct 2023

一个与大连续统相容的泛型绝对性原理

Mohammad Golshani

Abstract. 我们陈述一个新的泛型绝对性原理，并运用 Shelah 的记忆迭代技术证明，该原理与大连续统相容。

§ 0. Introduction

一般绝对性原理在集合论中得到了广泛研究。它们断言，集合论宇宙的某些性质不会因力迫而改变。例如，Shoenfield 在 [19], 证明，如果一个句子 ψ 是 Σ^1_2 或 Π^1_2, 那么若它在基模型中不成立，就不可能到达一个使 ψ 成立的力迫扩张。关于这一主题的更多内容，参见[2], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [20], [21], [22] 和 [23] 。

本文介绍另一种一般绝对性原理，并证明它与连续统取较大值相容。我们的主要结果如下：

定理 0.1. 假设广义连续统假设。令 $\kappa \geq \aleph_2$ 为一个正则基数。那么存在一个真偏序 $\mathbb{P}$, 它满足 $\aleph_2$-链条件，并且力迫以下命题成立。

(†) $2^{\aleph_0} = \kappa$,

(‡) 假设 $\varphi(x, y)$ 是集合论语言中的一个受限公式。假设对于每个 $a \in \mathscr{H}(\aleph_2)$ 以及每个形如 $M = \mathrm{V}[\mathrm{H}]$, 的内模型 M , 其中 H

2010 年数学主题分类。主要分类：03E50、03E35、03E65。

关键词与短语 . 大连续统 , 一般绝对性 , 记忆迭代 , $\aleph_2$-p.i.c

。作者的研究得到了 IPM（编号：1402030417）的一项资助。本文的研究结果源于与 David Asper´o 的讨论，作者对此深表感谢。特别是，定理 0.1 的当前表述就是由他提出的。他还感谢 David Asper´o 和 Rahman Mohammadpour 提供的宝贵意见。

在某个 $\mathbb{R} \lessdot \mathbb{P}$ 下是 $\mathbb{R}$-泛型的；如果 $x \in M$、 $\omega_1^M = \omega_1$，并且 $M \models$ 连续统假设（CH），那么存在一个 $\mathbb{R}$-名称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$，使得 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ 是 $(\mathbb{R}, \mathbb{P})$-适当的 [1]，具有 $\aleph_2$-p.i.c.，且力迫$\mathscr{H}(\aleph_2) \models (\exists y)\varphi(a, y)$。那么 $\mathscr{H}(\aleph_2) \models (\forall x)(\exists y)\varphi(x, y)$。

注记 0.2. 上述定理的一个推广最近已在 [3] 中宣布。然而，我们这里的证明完全不同，或许有一定的意义。特别是，我们发展了可数支撑记忆迭代的一般理论，并证明了关于它的一些一般性结果。

该证明使用了 Shelah 的可数支撑记忆迭代版本。关于这一方法的更多内容，见 [11],[12], [13], [17] 和 [18] 。本文结构如下：在第 1 节中，我们回顾本文将用到的一些定义和结果；随后在第 2 节中，我们发展可数支撑记忆迭代的一般情形，并证明关于它的一些结果。最后在第 3 节中，我们给出定理 0.1 的证明。

§ 1. Some preliminaries

本节介绍一些我们将在后续章节中用到的定义和结果。

§ 1.1. $(\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1)$-适当性。本小节定义以下适当性概念。它将帮助我们证明，适当强迫概念的某些记忆迭代仍然是适当的。

定义 1.1。假设 $\mathbb{P}_0 \lessdot \mathbb{P}_1$ 是强迫概念，且 $\mathbb{Q} \in \mathbf{V}$ 是一个~强迫概念的 $\mathbb{P}_0$-名称。若对于每个足够大的正则基数χ以及每个满足 $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \underset{\sim}{\mathbb{Q}} \in M$ 的可数 $M \prec \mathscr{H}(\chi)^{\mathbf{V}}$，只要 $(p, q) \in (\mathbb{P}_1 * \underset{\sim}{\mathbb{Q}}) \cap M$，就存在 q^* 使得：~，我们称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$是 $(\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1)$-适当的。

[1]请参见第 1 节，了解（$\mathbb{R}$，$\mathbb{P}$）-适当性的定义。

(1) $\underset{\sim}{q}^*$ 是 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ 中某个元素的 $\mathbb{P}_0$-名称，

(2) 如果 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_1$-泛型，且 $V \cap M[G] = M$ 并且 $p \in G$，那么

$$V[G] \models \text{“}\underset{\sim}{q}^*_{(G\cap\mathbb{P}_0)}\text{[2] 是一个（}M[G],\ \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_G\text{）-泛型条件，延伸 }\underset{\sim}{q}_G\text{”。}$$

定义 1.2. 设 $\mathbb{Q} \in V$ 是一个力迫概念的 $\mathbb{P}_0$-名称。我们称 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{P}_0$-$\tilde{\cdot}$稳定适当的，如果对于每个适当强迫概念 $\mathbb{P}_1$，使得 $\mathbb{P}_0 \lessdot \mathbb{P}_1$ 且 $\mathbb{P}_1/G_{\mathbb{P}_0}$ 是适当的，$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ 都是（$\mathbb{P}_0$，$\mathbb{P}_1$）-适当的。

§ 1.2. $\aleph_2$-适当性同构条件。下面的概念归功于 Shelah [16,VIII，第 2] 节。

定义 1.3. 给定一个偏序 $\mathbb{Q}$，我们称 $\mathbb{Q}$ 具有 $\aleph_2$-适当性同构条件（$\aleph_2$-p.i.c.），当且仅当对于每个充分大的正则基数 θ 以及任意两个可数的 N_0、$N_1 \prec H(\theta)$，满足 ω_2、$\mathbb{Q} \in N_0 \cap N_1$，如果 $\pi : (N_0; \in) \to (N_1; \in)$ 是一个同构，$N_0 \cap N_1 \cap \omega_2$ 是 $N_0 \cap \omega_2$ 和 $N_1 \cap \omega_2$ 两者的适当初始片段，并且 $N_0 \cap \omega_2 \subseteq \min((N_1 \cap \omega_2) \setminus N_0)$，那么对于每个 $p \in \mathbb{Q} \cap N_0$，存在一个延伸 p 的条件 $q \in \mathbb{Q}$，并且满足

(1) $q \Vdash_{\mathbb{Q}}$ “$(\forall r \in N_0 \cap \mathbb{Q})(r \in \underset{\sim}{G}_{\mathbb{Q}}$ 当且仅当 $\pi(r) \in \underset{\sim}{G}_{\mathbb{Q}})$”，(2) $q \Vdash_{\mathbb{Q}} p \in \underset{\sim}{G}_{\mathbb{Q}}$，以及 (3) q 是（N_0, $\mathbb{Q}$）-泛型的。

一个标准事实是，如果连续统假设成立，那么每个具有 $\aleph_2$-p.i.c. 的偏序都具有 $\aleph_2$-c.c.。此外，以下结论也是标准且众所周知的，参见 [16, 第 VIII 章], 或 [1, 定理 2.10 和 2.12] 的证明】【。

引理 1.4. 假设 $\mathbb{P} = \langle\langle \mathbb{P}_\alpha : \alpha \le \delta\rangle, \langle \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta : \beta < \delta\rangle\rangle$ 是一个可数支撑迭代，并且对每个 $\beta < \delta$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}$ “$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 都是适当的，且具有 $\aleph_2$-p.i.c.”。那么：

[2]这里的 $G \cap \mathbb{P}_0$ 指的是由 G 得到的规范 $\mathbb{P}_0$-泛型滤子，使用假设$\mathbb{P}_0 \lessdot \mathbb{P}_1$。

(1) 若 $\delta < \omega_2$，则 $\mathbb{P}_\delta$ 具有 $\aleph_2$-p.i.c.；(2) 若 $\delta \leq \omega_2$ 且连续统假设成立，则 $\mathbb{P}_\delta$ 具有 $\aleph_2$-c.c.；(3) 若 $\delta < \omega_2$ 且连续统假设成立，则连续统假设在 $V^{\mathbb{P}_\delta}$.中成立

§ 2. Shelah's memory iteration

本节给出 Shelah 可数支撑记忆迭代的一般版本，并研究其若干性质。设 $\kappa \geq \aleph_2$ 是一个不可数正则基数。长度为 κ 的可数支撑记忆迭代定义为一个序列

$$\mathfrak{q} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta, \mathcal{U}_\beta : \alpha \leq \kappa, \beta < \alpha \rangle$$

其中:

(1) $\mathcal{U}_\beta \in [\beta]^{<\kappa}$；(2) 若 $\xi \in \mathcal{U}_\beta$，则 $\mathcal{U}_\xi \subseteq \mathcal{U}_\beta$；(3) $\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta} = \{p \in \mathbb{P} :$ dom(p) $\subseteq \mathcal{U}_\beta\} \lessdot \mathbb{P}_\beta$；(4) $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 是一个强迫概念的 $\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}$-名称；(5) 对每个 $\alpha \leq \kappa$，我们有 $p \in \mathbb{P}_\alpha$ 当且仅当 (a) p 是一个函数，且 dom(p) 是 α 的可数子集；(b) 对每个 $\beta \in$，dom(p) $p(\beta)$ 是一个 $\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}$-名称，并且 $p \restriction \mathcal{U}_\beta \Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}}$ "$p(\beta)$ $\in \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$"；

给定 $\mathbb{P}_\alpha$-条件 p_0, p_1，我们定义 $p_1 \leq_{\mathbb{P}_\alpha} p_0$ (p_1 扩展 p_0) 当且仅当

(1) dom$(p_0) \subseteq$ dom(p_1)，且 (2) 对每个 $\beta \in$ dom(p_0), $p_0 \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta}$ "$p_1(\beta) \leq_{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta} p_0(\beta)$"。

现在我们研究这类迭代的适当性条件。以下定理给出了上述记忆迭代适当的一般判据。

定理 2.1. 假设 $\mathfrak{q}$ 如上所述，并假设对每个 $\beta < \kappa$， $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 都是 $(\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}, \mathbb{P}_\beta)$-适当的。那么，对每个 $\alpha \leq \kappa$:

(a) $\mathbb{P}_\alpha$ 是适当的,

(b) $\mathbb{P}_\alpha/\dot{G}^{\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\alpha}}$ 是适当的。

证明。通过对 $\alpha \leq \kappa$ 进行归纳，我们证明：

$(*)_\alpha$ 若 $\beta < \alpha$，则 $M \prec \mathscr{H}(\chi)$ 是可数的，其中 $\chi > \kappa$ 足够大且为正则基数，并且$\mathfrak{q}$、α、$\beta \in M$；若 $p \in M \cap \mathbb{P}_\alpha$，且若 $p' \leq p \restriction \beta$ 是 $(\mathbb{P}_\beta, M)$-一般的，则存在 $p'' \in \mathbb{P}_\alpha$，使得 $p'' \leq p$，且 p'' 是 $(\mathbb{P}_\alpha, M)$-一般的。

后继情形 $\alpha = \beta + 1$ 由假设 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 是 $(\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}, \mathbb{P}_\beta)$-适当的这一点得出，而极限情形可按照适当性在极限情形下的通常证明来处理。 □

在下一个定理中，我们给出迭代具有良好链条件的一般条件。我们首先固定一些定义和记号。

定义 2.2。设 $\mathfrak{q}$ 如上。

(1) 我们称 $A \subseteq \kappa$ 是 $\mathfrak{q}$-闭的，如果

$$\beta \in A \Rightarrow \mathcal{U}_\beta \subseteq A.$$

(2) 如果 $\alpha \leq \kappa$ 和 $A \subseteq \alpha$ 是 $\mathfrak{q}$-闭的，那么

$$\mathbb{P}_A^\alpha = \{p \in \mathbb{P}_\alpha : \mathrm{dom}(p) \subseteq A\}.$$

我们还设 $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_A^\kappa$.

容易看出，如果 $A \subseteq \alpha$ 是 $\mathfrak{q}$-闭的，那么 $\mathbb{P}_A^\alpha \lessdot \mathbb{P}_\alpha$.

我们还有引理 1.4 的一个类似结果，其证明本质上相同。

引理 2.3。设 $\mathfrak{q}$ 如上所述，$A \subseteq \kappa$ 是大小为 $\leq \aleph_1$ 的 $\mathfrak{q}$-闭集，并且对每个 $\beta \in A$，$\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}}$“$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 满足 $\aleph_2$-P.I.C.”。那么：

(1) $\mathbb{P}_A$ 是 $\aleph_2$-链条件，

(2) 如果连续统假设成立，那么它在由 $\mathbb{P}_A$ 得到的泛型扩张中也成立。

定理 2.4. 假设 $\mathfrak{q}$ 如上所述，并且假设

(1) 对每个 $\beta<\kappa$, $\mathcal{U}_\beta\in[\beta]^{\leq\aleph_1}$,

(2) 对于每个 $\beta<\kappa$、$\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}}$, "$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 满足 $\aleph_2$-p.i.c."。

则 $\mathbb{P}_\kappa$ 是 $\aleph_2$-c.c.

证明。设 $\bar{p}=\langle p_\xi:\ \xi<\omega_2\rangle$ 是 $\mathbb{P}_\kappa$ 中的一个条件集。对每个 $\xi<\omega_2$，取一个大小为 $\aleph_1$ 的 $\mathfrak{q}$-闭集 A_ξ，使得

$$\mathrm{dom}(p_\xi)\subseteq A_\xi.$$

不妨设 $\langle A_\xi:\ \xi<\omega_2\rangle$ 是递增的。如有必要，通过缩短序列 $\bar{p}$，设 $\{\mathrm{dom}(p_\xi):\ \xi<\omega_2\}$ 构成一个以 d 为根的 Δ-系统。令 $i_*<\omega_2$ 为满足 $d\subseteq A_{i_*}$ 的对象。由于 $|A_{i_*}|\leq\aleph_1$，根据引理 2.3(1)，$\mathbb{P}_{A_{i_*}}$ 满足 $\aleph_2$-c.c.，因此对于某个 $\xi<\zeta<\omega_2$，$p_\xi\restriction A_{i_*}$ 与 $p_\zeta\restriction A_{i_*}$ 相容。但随后很容易看出，p_ξ 和 p_ζ 相容。□

第 3 节. Proof of Theorem 0.1

本节证明定理 0.1。因此，假设广义连续统假设成立，并令 $\kappa\geq\aleph_2$ 为一个正则基数。令 $\phi:\kappa\to\mathscr{H}(\kappa)$ 满足：对每个 $x\in\mathscr{H}(\kappa)$，集合 $\phi^{-1}(x)\subseteq\kappa$ 是无界的。令

$$\mathfrak{q}=\langle\mathbb{P}_\alpha,\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta,\mathcal{U}_\beta:\alpha\leq\kappa,\beta<\alpha\rangle$$

为第 2 节中的记忆迭代，并具有以下附加性质：

(6) 对每个 $\beta<\kappa$, $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 是 $(\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta},\mathbb{P}_\beta)$-适当的，且由 $\mathbb{P}_{\mathcal{U}_\beta}$ 强制为 $\aleph_2$-P.I.C.

(7) 假设 $\beta<\kappa$.

(a) 若 $\phi(\beta)=(A,\varphi(x,y)\ \underset{\sim}{x})$，其中 $A\in[\beta]^{\leq\aleph_1}$ 是 $(\mathfrak{q}\restriction\beta)$-闭的，$\varphi(x,y)$ 是集合论语言中的受限公式，而 $\underset{\sim}{x}\in\mathscr{H}(\kappa)$ 是 $\mathbb{P}_A^\beta$-名称，表示 $\mathscr{H}(\aleph_2)$ 的一个元素；并且若存在一个 $\mathbb{P}_A^\beta$-名称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$，表示一个 $(\mathbb{P}_A^\beta,\mathbb{P}_\beta)$-适当偏序集，其 $\aleph_2$-P.I.C. 力迫 $\mathscr{H}(\aleph_2)\models(\exists y)\varphi(\underset{\sim}{x},y)$，那么 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 就是一个表示此类偏序集的名称。我们还令 $\mathcal{U}_\beta=A$.

(b) 否则，我们令 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 为平凡的强迫概念，并令 $\mathcal{U}_\beta = \emptyset$.

我们来证明强迫概念 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\kappa$ 满足所需条件。我们可以轻易证明 $2^{\aleph_0} = \kappa$ 在 $V^{\mathbb{P}_\kappa}$ 中成立，因此定理 0.1 的条目 (†) 得以满足。我们来证明条目 (‡) 在 $V^{\mathbb{P}_\kappa}$ 中成立。

因此，设 $\varphi(x, y)$ 是集合论语言中的一个受限公式，并假设对每个 $a \in \mathscr{H}(\aleph_2)$ 以及每个形如 $M = \mathrm{V}[\mathrm{H}]$, 的内模型 M，其中 H 是在 V 上的 $\mathbb{R}$-泛型，且对某个 $\mathbb{R} \lessdot \mathbb{P}$，若 $x \in M, \omega_1^M = \omega_1$，并且 $M \models$ 连续统假设，则存在一个 $\mathbb{R}$-名称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$，使得 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ 关于 $\aleph_2$-P.I.C. 是 $(\mathbb{R}, \mathbb{P})$-适当的，且力迫 $\mathscr{H}(\aleph_2) \models (\exists y)\varphi(a, y)$。再设 $\underset{\sim}{x}$ 是 $\mathscr{H}(\aleph_2)$ 中某个元素的 $\mathbb{P}_\kappa$-名称。令 $\beta < \kappa$ 满足：

- $\phi(\beta) = (A, \varphi(x, y)\ \underset{\sim}{x})$,
- $A \in [\beta]^{\leq \aleph_1}$ 是 $\mathfrak{q}$-闭的,
- $\underset{\sim}{x}$ 是一个 $\mathbb{P}_A$-名称,
- 存在一个 $\mathbb{P}_A^\beta$-名称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$，使得 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$是带有 $\aleph_2$-p.i.c. 的 $(\mathbb{P}_A^\beta, \mathbb{P}_\beta)$-适当力迫，且力迫 $\mathscr{H}(\aleph_2) \models (\exists y)\varphi(a, y)$。

由引理 2.3 和 2.4 以及我们的假设可知，这样的 β 存在。因此可得，$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\beta$ 是这样一个强迫概念。由此，我们可以轻易得出结论。定理得证。

References

[1] Abraham, Uri；适当强迫，集合论手册，第1、2、3卷，第333–394页，施普林格，Dordrecht，2010年。[2] Asper´o, David； Σ_1公式的一般绝对性与连续统问题。逻辑研讨会 '02，1–27，《逻辑讲义》27，符号逻辑协会，加利福尼亚州拉霍亚，2006年。[3] Asper´o, David；Golshani, Mohammad；关于 $\aleph_1$大小偏序集的 PFA、Prikty 型适当强迫以及连续统的基数，已提交。[4] Eisworth, Todd, Milovich, David；Moore, Justin；迭代强迫与连续统假设，载于《阿巴拉契亚集合论 2006–2012》，J. Cummings 和 E. Schimmerling 编，伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，纽约，2013年，第207–244页。

[5] Bagaria, Joan；一般绝对性与强迫公理。《模型、代数与证明》（波哥大，´a，1995年），1–12，纯粹与应用数学讲义，203，Dekker，纽约，1999年。[6] Bagaria, Joan；作为一般绝对性原理的有界强迫公理。《数学逻辑档案》39（2000年），第6期，393–401。[7] Bagaria, Joan；泛型绝对性公理。逻辑研讨会 '02，28–47，《逻辑讲义》27，符号逻辑协会，加利福尼亚州拉霍亚，2006年。[8]Bagaria, Joan；Bosch, Roger；射影强迫下的一般绝对性。《数学基础》194（2007年），第2期，95–120。[9] Bagaria, Joan；Friedman, Sy D.；一般绝对性。第十一届拉丁美洲数理逻辑研讨会论文集（M´erida，1998年）。《纯粹与应用逻辑年刊》108（2001年），第1–3期，3–13。[10] Friedman, Sy D. 一般 Σ^1_3绝对性。《符号逻辑杂志》69（2004年），第1期，73–80。[11] Golshani, Mohammad；Shelah, Saharon；测度原理与连续统假设，已提交。[12] Kumar, Ashutosh；Shelah, Saharon；关于零测理想可能的限制。《数理逻辑杂志》19（2019年），第2期，论文编号1950008，共14页。[13]Mildenberger, Heike；Shelah, Saharon；在不改变 ω序列或共尾数的情况下改变基数特征。《纯粹与应用逻辑年刊》106（2000年），第1–3期，207–261。[14] Mitchell, William J.； $I[\omega_2]$ 可以是 Cof(ω_1) 上的非平稳理想。《美国数学会汇刊》361（2009年），第2期，561–601。[15] Neeman, Itay；用两类模型序列进行强迫。《圣母大学形式逻辑杂志》55(2)，265–298（2014年）。[16] Shelah, Saharon；适当与不适当强迫，第二版，数理逻辑展望，施普林格出版社，柏林，1998年。xlviii+1020 页。ISBN：3-540-51700-6。[17] Shelah, Saharon；零测理想的覆盖可能具有可数共尾数，Saharon Shelah 周年纪念专辑，《数学基础》166（2000年），第1–2期，109–136。[18] Shelah, Saharon；限制在某个非零测集合上的零测理想可能是 $\aleph_1$饱和的。《数学基础》179（2003年），第2期，97–129。[19] Shoenfield, J. R.；可谓性问题。1961年数学基础论文集，第132–139页，马格尼斯出版社，希伯来大学，耶路撒冷。

一个泛型绝对性原理与大连续统相容 9[20] Todorcevic, Stevo；一般绝对性与连续统。数学研究快报 9（2002年），第 4 期，465–471 页。[21] Viale, Matteo；范畴强迫、 MM^{+++}以及强迫公理理论的一般绝对性。美国数学会杂志 29（2016年），第 3 期，675–728 页。[22] Wilson, Trevor M.；普遍贝尔集与一般绝对性。符号逻辑杂志 82（2017年），第 4 期，1229–1251 页。[23] W. H. Woodin。《超越 Σ^2_1 绝对性》。载于《国际数学家大会论文集》第一卷（北京，2002年），第 515-524 页。高等教育出版社，北京，2002年。School of Mathematics,
Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O.Box: 19395-5746,
Tehran-Iran.电子邮箱：golshani.m@gmail.com 网址：http://math.ipm.ac.ir/~golshani/